Trabajo Fin de Grado

ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LOS CONTRASTES DE NORMALIDAD JARQUE BERA Y LILLIEFORS A TRAVÉS DE EXPERIMENTOS DE MONTE CARLO.

Autor:

Borja Agut Romero

Director/es:

María Isabel Ayuda Bosque

Inmaculada Villanúa Martín

Facultad de Economía y Empresa/ Universidad de Zaragoza

Año: 2018/2019.

RESUMEN

El Trabajo de Final de Grado consiste en un estudio comparativo acerca del comportamiento de los contrastes de normalidad Jarque Bera y Lilliefors, a través de los experimentos de Monte Carlo en modelos univariantes de series temporales. Nuestro objetivo es analizar los dos contrastes de normalidad escogidos e identificar aquel que detecta mejor la existencia o no de normalidad, en función de una serie de factores como son: el tamaño muestral o la distribución seguida por la perturbación aleatoria (U_t). En las simulaciones realizadas se ha tenido en cuenta modelos cuya perturbación aleatoria seguía una distribución normal (mejor contraste aquel que detecta la normalidad en mayor proporción), como aquellos modelos cuya perturbación aleatoria seguía distribuciones diferentes a la normal, de tal forma que se pueda observar si los contrastes se comportan de manera adecuada, es decir, detectando la ausencia de normalidad. La potencia y el tamaño de error tipo I de los contrastes han sido utilizados tanto para poder realizar una comparativa entre ambos contrastes de normalidad como para analizar la adecuación de los contrastes.

ABSTARCT

The Final Project consists of a comparative study about the behavior of the normality contrasts Jarque Bera and Lilliefors, through Monte Carlo experiments in univariate models of time series. Our objective is to analyze the two chosen normality contrasts and identify the one that best detects the existence or not of normality, depending on a series of factors such as: the sample size or the distribution followed by the aleatory disturbance (Ut). In the simulations carried out, we have taken into account models whose aleatory perturbation followed a normal distribution (a better contrast is one that detects normality in greater proportion), as well as those models whose aleatory perturbation followed distributions different from the normal one, in such a way that we can observe if the contrasts behave in an adequate way, that is, detecting the absence of normality. The power and type I error size of the contrasts have been used both to make a comparison between the two normality contrasts and to analyze the appropriateness of the contrasts.

CONTENIDO

1- PRESENTACIÓN DEL TRABAJO

El objetivo principal del análisis univariante de series temporales es predecir el valor de variables en el futuro. Uno de los procedimientos más comunes y usados hoy en día para su predicción sería la metodología Box-Jenkins.

La metodología de Box-Jenkins consta de cuatro etapas:

1. Estimación del proceso estocástico que ha podido generar la serie temporal
2. Estimación de los parámetros del modelo
3. Chequear el modelo
4. Predecir solo en el caso de que se haya superado la etapa de chequeo.

En nuestro trabajo el principal objetivo será comparar el comportamiento de los contrastes de normalidad que se utiliza en la etapa de chequeo del modelo a través de los experimentos de Monte Carlo.
En particular compararemos el contraste de Jarque Bera (contraste más utilizado en econometría) con el de Lilliefors (uno de los usados en el ámbito de la estadística).
Su elección se justifica como he dicho por su recurrente uso en ambas áreas y por la existencia de estos mismos contrastes en el programa de Gretl.

Tras hacer una explicación general del trabajo, vamos a detallar más la estructura que tendrá el mismo. En el apartado dos se recordará el concepto de econometría, las etapas que lo componen y los procesos estacionarios que utilizaremos como modelos en los experimentos de Monte Carlo. En el tercer apartado se realizará una explicación detallada de la metodología Box-Jenkins. La cuarta parte se centra en los contrastes de normalidad junto con los respectivos contrastes a analizar, incluyendo otros que no usaremos en los experimentos de Monte Carlo pero que también tienen una alta relevancia tanto en el marco de la econometría como en el de la estadística. En el apartado 5 cinco se explicará el método de Monte Carlo donde se analizará también el tamaño de error tipo I y las potencias de los contrastes de Jarque Bera y Lilliefors. Con el objetivo de conocer cual detecta mejor existencia o no de normalidad según en que situación nos encontremos. En el penúltimo apartado mostraremos los resultados de los experimentos seguidos de comentarios explicando que conclusiones se pueden extraer de los resultados que se encuentran en las tablas. Y en el último apartado se realizará una conclusión global acerca de que contraste se comporta mejor según la distribución seguida por la perturbación aleatoria, tamaño muestral utilizado, signo y valor de los parámetros.

2. INTRODUCCIÓN A LA ECONOMETRÍA

2.1 CONCEPTO DE LA ECONOMETRÍA, ETAPAS Y MODELOS ECONOMÉTRICOS

El concepto de econometría deriva de dos palabras: oikonomía (economía) y metrón (medida) (Trívez, 2004). La definición que engloba todos los aspectos de la econometría fue establecida por Judge Hill (1988), el cual dijo que “La econometría, utilizando Teoría Económica, Economía Matemática e Inferencia estadística como fundamentos analíticos y los datos como fuente de información, proporciona a la Ciencia Económica una base para:

1) Modificar, refinar o posiblemente refutar las conclusiones contenidas en el cuerpo de conocimientos, conocido como Teoría Económica.

2) Conseguir signos, magnitudes y proposiciones fiables acerca de los coeficientes de las variables en las relaciones económicas, de modo que esta información pueda servir de base para la toma de decisiones y la elección». (Portillo, 2006).

Su objetivo principal, por lo tanto, sería explicar y cuantificar los fenómenos económicos a través del uso de herramientas matemáticas y estadísticas.

Las etapas de la metodología en Econometría son:

1. Especificación: Se basa en la expresión probabilística de un modelo a partir de una serie de datos. En esta parte debemos identificar las variables del modelo. Por una parte, tenemos la parte sistemática, donde encontramos a las variables exógenas del modelo (aquellas que explican el comportamiento de la variable endógena) y por otro lado estaría la parte aleatoria, formada por la perturbación aleatoria que contiene factores que están relacionados con la variable objeto de estudio, pero irrelevantes individualmente.

2. Estimación: Cuantificación aproximada de los parámetros del modelo.

Los métodos más utilizados serían: Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) y Máxima Verosimilitud (MV).

3. Validación: Esta etapa nos posibilita evaluar el modelo a través de una serie de contrastes, para comprobar que se cumplen las hipótesis básicas generales del modelo, basados tanto en la parte aleatoria como en la sistemática. También nos permite determinar los factores significativos en la explicación de nuestra variable de interés.

4. Explotación: El modelo en esta etapa, será utilizado para la predicción o simulación.

Los datos utilizados pueden ser de tres tipos:

1. ***Corte Transversal:*** Cuando las observaciones de las variables pertenecen a un determinado momento del tiempo, como por ejemplo el número de nacidos en cada comunidad autónoma en el año 2017.
2. ***Series Temporales:*** En este caso las observaciones provienen de una única variable a lo largo del tiempo cada cierto periodo de tiempo. En este trabajo nos centraremos en este tipo de datos.
3. ***Datos panel:*** Este tipo de datos es una combinación de corte transversal y serie temporal.

A partir de las series temporales podemos plantear dos tipos de modelos:

1. Modelos univariantes: Representan el comportamiento de la variable a partir del pasado de la misma.
2. Modelos multivariantes: Representan el comportamiento de una variable a través de la influencia que tengan sobre ella dos o más variables. (Trívez, 2004)

En nuestro trabajo trataremos los modelos univariantes de series temporales que serán explicados en más detalle en el siguiente apartado.

3.CONCEPTOS RELACIONADOS CON PROCESOS ESTOCÁSTICOS, SERIES TEMPORALES Y PROCESOS ESTACIONARIOS

Siguiendo el libro de Aznar y Trívez (1993) un proceso estocástico es un conjunto de variables aleatorias que tienen dependencia con un parámetro.

Los procesos estocásticos se pueden caracterizar por tener una distribución conjunta específica. De forma más sencilla pueden caracterizarse a partir de los momentos de primer y segundo orden:

1. Función de medias → $E[Y_t]= \mu_t \ \forall t$
2. Función de varianzas Varianza → $Var[Y_t]= E(Y_t-E(Y_t))^2 = \sigma_t^2 \ \forall t$
3. Función de autocovarianzas → $Cov [Y_t-Y_{t-1}]= E(Y_t-E(Y_t)) (Y_{t-1}-E(Y_{t-1}) = \gamma tt_{-} \ \forall t$

Para caracterizar a un proceso estacionarios debemos establecer una serie de supuestos, dentro de los cuales se encuentra la estacionariedad. Hablaremos de estacionariedad en sentido débil cuando las esperanzas matemáticas, las varianzas no dependen del tiempo y las covarianzas entre dos periodos tan solo dependen del transcurso del tiempo entre ellos. Estas características son formuladas de la siguiente manera:

$E[Y_t]= \mu_t \forall t$

$Var [Y_t]= \sigma^2 \ \forall t$

$Cov [Y_{t,} Y_{t-s}] = \gamma(\delta) \ \forall t$

El otro tipo de estacionariedad es la de en sentido estricto donde la función de distribución conjunta se mantiene invariable frente a cambios en el tiempo.

Se ve expresado de la siguiente manera:

$F[Y_t, Yt_{-1}. Yt_{-k}] = F[Y_{t-m}, Y_{t-m-1} \ldots Y_{t-m-k}] \ \forall \ t, m, k$

Es importante advertir que no siempre un proceso estacionario en sentido débil implica un proceso estacionario en sentido estricto, pero si a la inversa. Es decir, un proceso estacionario en sentido estricto si que implica estacionariedad en sentido débil.

Si un proceso es estacionario (en los experimentos se da por hecho), los parámetros que lo caracterizan se pueden estimar a partir de una realización del mismo, que es a lo que llamaremos serie temporal. (Aznar & Trívez, 1993)

Seguidamente serán explicados en los siguientes subapartados los casos particulares de procesos estocásticos lineales y discretos, que son:

1. AR(p).
2. MA(q).
3. ARMA(p,q).

3.1 PROCESO AUTOREGRESIVO AR(p)

Un modelo Autoregresivo describe un proceso estacionario cuyas observaciones en un momento concreto son predecibles a partir de periodos anteriores de ella misma añadiendo el término error. Estos modelos son caracterizados por poseer coeficientes de autocorrelación distintos de cero, los cuales decrecen con el retardo. Este tipo de proceso no podrá representar series de memoria cortas, donde el valor de la serie en t solo esta correlacionado con unos pocos valores anteriores a él. Además, serán estacionarios si las raíces del polinomio igualado a cero caen fuera del círculo de unidad. Por el contrario, siempre serán invertibles, tendrán memoria infinita y sus correlogramas (FAC) serán siempre amortiguados hacia cero, a diferencia del correlograma parcial (FAP) que dependiendo del orden de p variará el número de coeficientes que no entren dentro de las bandas de fluctuación.

La representación matemática de un modelo AR (p), sería la siguiente:

$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + u_t + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_p Y_{t-p}$.

El operador de retardos es caracterizado por la letra L, el modelo AR(p) tiene la siguiente expresión general:

$(1-\phi_1 L - \phi_2 L^2 \text{-----} \phi_p L^p)\ Yt = \delta + \mu_t \rightarrow$

$\Phi(L)Y_t = \delta + \mu_t.$

Para representar de forma matemática la condición de estacionariedad usaremos como ejemplo un modelo AR(1), debido a su mayor comodidad a la hora de representar la condición de estacionariedad.

CONDICIÓN *DE ESTACIONARIEDAD E INVERTIBILIDAD EN EL CASO DE UN AR (1)*

Como ya hemos indicado anteriormente los procesos autorregresivos son siempre invertibles, pero deberá cumplir la condición que las raíces de $\Phi(L)=0$ caigan fuera del círculo de unidad para que el proceso sea estacionario.

- Si las raíces son números reales todos deben ser en valor absoluto mayor que 1

  $\Phi(L)=1-\phi_1 L=0$; donde $|L| = |\frac{1}{\phi_1}| > 1 \rightarrow |\phi_1| < 1$
- Si son complejas, entonces su módulo $\sqrt{a^2 + b^2} > 1$. (Trívez, 2004)

3.2 PROCESO DE MEDIA MOVIL MA(q)

Un proceso de media móvil puede describir una serie temporal estacionaria. Se diferencia de los procesos autoregresivos en que son función de número finito y pequeño de las perturbaciones pasadas. Los modelos MA(q) son siempre estacionarios, pero no siempre son invertibles. Lo serán en el caso de que las raíces del polinomio de retardos caigan fuera del círculo de unidad. El correlograma (FAC) tiene q “picos”, sin embargo, el correlograma parcial (FAP) es amortiguado hacia cero o sinusoidal (en caso de tener raíces complejas). Este tipo de modelos tiene memoria finita, es decir olvida lo ocurrido más allá de q periodos.

La representación matemática de un MA(q) es:

$Y_t \sim MA\ (q) \rightarrow Yt = \delta + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \ldots - \theta_q u_{t-q}.$

Utilizando el operador de retardos, el modelo vendría representado de la siguiente forma:

$Y_t = \delta + (1 - \theta_1 L - \theta_2 L \ldots\ldots\ldots - \theta_q L^q) u_t$

$Y_t = \delta + \Theta(L) u_t$; Siendo $\Theta(L)$ el polinomio de retardos.

Por las misma razón por la que justificamos el uso de un modelo AR(1) para representar de manera matemática la condición de estacionariedad, utilizaremos un modelo MA (1) para representar matemáticamente la condición de invertibilidad.

<u>CONDICIÓN *DE INVERTIBILIDAD EN UN MA(1)*</u>

Para analizar esta condición tomaremos como ejemplo un MA(1) como ejemplo de proceso más común y a la vez más fácil de ejemplarizar.

La condición de este proceso implica que si se cumple $|\theta_1| < 1$**,** entonces definimos que el proceso es invertible.

Si las raíces de $\Theta(L)=0$ caen fuera del polinomio, entonces el proceso será invertible, es decir se debe cumplir que $|L| = |\frac{1}{\theta 1}| > 1 \rightarrow |\theta_1| < 1$. (Trívez, 2004)

3.3 PROCESOS ESTACIONARIOS ARMA(p,q)

Es un modelo que incluye la parte autorregresiva estacionaria y la media móvil invertible. Este tipo de modelo es estacionario cuando se cumpla la condición de que su parte AR lo sea, cayendo las raíces del polinomio de retardos de la parte autorregresiva fuera del círculo de unidad. De manera idéntica ocurriría con la parte MA, ésta será siempre invertible si sus raíces cayeran fuera del círculo de unidad. Además, presentará memoria finita, puesto que la parte autorregresiva del proceso la contiene.

A continuación mostraremos la forma general en la que se representa un proceso ARMA(p,q):

$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + u_t - \theta_1 u_{t-1} + \ldots + \theta_q u_{t-q} + u_t$; donde $u_t \sim N(0, \sigma^2)$.

Es importante el recordar que muy pocas series son estacionarias. La manera de conseguir una serie estacionaria sería a través de un proceso de diferenciación en la serie una o más veces. Este tipo de procesos que no son estacionarios pero que al diferenciarlos pueden serlo se les denomina procesos integrados. Un caso sería un proceso ARIMA (p, d, q), donde la d termina el número de veces que se ha tenido que diferenciar a la serie para conseguir convertirse en un proceso estacionario ARMA(p,q). (Trívez, 2004).

4. METODOLOGÍA BOX-JENKINS

La metodología Box-Jenkins (1970) es una de las más utilizadas en el análisis de series temporales desde que a principios de los años 70 George E.P Box y Gwilym Jenkins profesores de Estadística de la universidad de Wisconsin e Ingeniería de Sistemas en la Universidad Lancaster la desarrollaran.

En definitiva, lo que el método pretende es identificar un modelo ARIMA que se ajuste lo mejor posible a la realidad, para obtener predicciones a partir de la serie temporal objeto de estudio.

Para una correcta predicción en las series temporales debemos de tener unas características pertenecientes a las series que sean perennes en el tiempo, Esto conlleva el cumplimiento de la condición de estacionariedad (al menos en sentido débil).

4.1. EL PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El método de análisis de series temporales Box-Jenkins está compuesto por las siguientes cuatro etapas: identificación, estimación, chequeo del modelo, y una vez completados estos pasos se lleva a cabo la predicción.

1) **IDENTIFICACIÓN**

En esta primera fase se identifica al modelo ARIMA. El primer paso a realizar sería determinar que transformaciones son necesarias para que la series consiga ser estacionaria.

La segunda parte consistiría en identificar el tipo de proceso que subyace a la serie y el orden de la parte AR(p), MA(q) o ARMA(p,q) a través del análisis del correlograma y correlograma parcial.

2) ESTIMACIÓN

En este paso se estiman los parámetros de la parte autorregresiva y media móvil por máxima verosimilitud, obteniendo de este modo los residuos (errores).

3) CHEQUEO

Chequear el modelo se refiere a validar que el modelo elegido es el adecuado.

Para conseguir esta verificación se realizan distintos contrastes. En primer lugar se realiza un análisis de los residuos para comprobar que éstos se comportan como un ruido blanco. En este análisis se contrasta:

1. Si los residuos tienen media nula y que de este modo cumplan con la hipótesis básica de media cero de la perturbación.
2. Se analiza la presencia de heteroscedasticidad, que en el caso de presentarse quiere decir que la varianza no se mantiene constante a lo largo de todas las observaciones desplegadas a lo largo del periodo de tiempo. Los orígenes de este problema pueden ser varios como la presencia de datos atípicos, errores de especificación del modelo. El contraste ARCH es uno de los más utilizados para detectar la presencia de heteroscedasticidad
3. Se comprueba la no autocorrelación entre perturbaciones aleatorias. Una mala especificación del modelo podría provocar la aparición de autocorrelación, observando consecuencias tales como la existencia de estimadores no óptimos e ineficientes. La autocorrelación puede ser contrastada de forma individual (contraste de Anderson) o de manera conjunta (contraste de Ljung-Box y Box-Pierce).
4. Por último, se analizaría el contraste de normalidad, foco central de nuestro trabajo. Son varias las causas que provocan la no normalidad en la perturbación aleatoria como mala especificación del modelo, datos atípicos (datos que son muy diferentes en comparación al de las observaciones). Las consecuencias serían una inferencia estadística no válida y no eficiencia de los estimadores debido al problema de inferencia estadística.

   A través de los distintos contrastes de normalidad que existen se detecta la existencia o no de normalidad. En nuestro trabajo utilizaremos y compararemos los resultados obtenidos del contraste Jarque Bera y Lilliefors.

En segundo lugar, se realizan una serie de contrastes y análisis de los parámetros que son:

1. Contraste de significatividad individual de los parámetros.
2. Cumplir con la condición de estacionariedad e invertibilidad en la parte autorregresiva y media movil respectivamente.
3. Análisis de estabilidad estructural donde se comprueba si los coeficientes han cambiado de forma significativa en el tiempo.

4) PREDICCIÓN

Esta etapa consiste en la obtención de los valores futuros de la variable de interés, a través de la observación de los valores pasados de la propia variable. (Aznar & Trívez, 1993)

5.CONTRASTE DE NORMALIDAD

En este trabajo vamos a centrarnos dentro de la etapa de chequeo en el contraste de normalidad, donde dentro de este apartado se explicarán los contrastes de normalidad como medidas para detectar la existencia o no de normalidad en la perturbación aleatoria.

Más concretamente explicaremos con más detalle el contraste de Jarque-Bera y el de Lilliefors respectivamente, que serán usados en los experimentos de Monte Carlo.

A su vez y pese a no ser los contrastes usados en nuestro trabajo también se hará una breve introducción a otros contrastes muy utilizados, tales como: Doornik-Hansen (1965) y Shapiro Wilk (1965).

A. CONTRASTE DE JARQUE BERA

El contraste de Jarque Bera es el más utilizado en el área de la econometría, cuyo estadístico asintóticamente sigue siempre una distribución Chicuadrado con dos grados de libertad: $\chi(2)$. La distribución normal se caracteriza a través de los momentos hasta el cuarto orden, donde el primer y segundo momento son media E(x) y varianza $E(X-E(x))^2$ y el tercer y cuarto momento son los coeficientes de asimetría y Curtosis. Es un contraste recomendado para ser utilizado en tamaños muestrales grandes. Este contraste combina los coeficientes de asimetría y Curtosis de los residuos. (Gujarati, 2010)

La hipótesis nula y alternativa del contraste son:

H_0: u_t ~ Sigue una distribución normal.

$H_{A:}$ u_t ~No sigue una distribución normal.

El estadístico de Jarque Bera se formularía como:

JB=T $[\frac{g_1^2}{6} + \frac{g_2^2}{24}]$ ~ $\chi(2)$; siendo g1=coeficiente de asimetría, g2= coeficiente de Curtosis y T el tamaño muestral.

Si el estadístico JB es menor o igual al valor de tablas $\chi_\varepsilon(2)$, entonces no se rechaza la hipótesis nula de normalidad en los residuos.

Y si por el contrario el estadístico JB es superior a $\chi_\varepsilon(2)$ entonces se rechaza la no existencia de normalidad en los residuos. (Cao, 2008)

B. CONTRASTE DE DOORNIK-HANSEN

Este tipo de contraste podría considerarse como una modificación del Jarque Bera porque realmente parten de las mismas bases como son el coeficiente de asimetría y Curtosis. Cabe decir que este tipo de contraste es más conveniente utilizarlo en tamaños muestrales pequeños.

Se calcula de la siguiente forma:

DH=$Z_1^2 + Z_2^2$

Donde, Z_1= coeficiente de asimetría y Z_2= coeficiente de Curtosis. Se distribuye asintóticamente como una $\chi^2(2)$. (Cao, 2008)

C. CONTRASTE LILLIEFORS

El contraste de Lilliefors es una variación del contraste de Kolmorov-Smirnov donde se establece que se debe estimar la media poblacional mediante la media muestral y la varianza poblacional a través de la varianza muestral.

D. CONTRASTE DE SHAPIRO – WILK

El contraste se construye en base a un estadístico que toma la distancia entre

la mayor y menor observación muestral, entre la segunda y la penúltima, y así de manera sucesiva. Además, se debe de tener presente que es un estadístico mucho menos intuitivo donde bajo la hipótesis de normalidad se rechazará para valores pequeños del estadístico. (Cao, 2008).

6.COMPARACIÓN DE LOS CONTRASTES JARQUE BERA Y LILLIEFORS EN UN ESTUDIO DE MONTE CARLO.

El método de Monte Carlo en la simulación de datos para realizar estimaciones, contrastes y analizar las propiedades de los estimadores. Donde de manera frecuente, el objetivo de este método es el análisis de las propiedades de los estimadores y estadísticos de contraste con diferentes tamaños muestrales.

La metodología del experimento de Monte Carlo presente las siguientes etapas:

1. Determinar el Proceso Generador de Datos (PGD). Para ello se deberá fijar la distribución de la perturbación aleatoria y dar valor a los parámetros del modelo.
2. Estimar el modelo y contrastar la existencia o no de normalidad utilizando los contrastes objeto de análisis.
3. Replicar R veces la etapa anterior con distintas muestras de una determinada distribución para la perturbación aleatoria, pero manteniendo los parámetros constantes.
4. Tras todas las réplicas realizadas se estudia la frecuencia con la que el estadístico rechaza o no rechaza la hipótesis nula.

Todo esto proceso se realizará para cada distribución seguida por la perturbación aleatoria. Por lo que se realizarán tantos experimentos como distribuciones consideremos y donde en cada experimento se tomarán se diferentes tamaños muestrales.

Dado que nuestro objetivo es analizar el comportamiento de los contrastes, es necesario explicar y aclarar una serie de conceptos sobre inferencia estadística.

1. El error de tipo I o nivel de significación se comete al rechazar la H_0 cuando ésta es verdadera. El tamaño de error tipo I será la probabilidad de cometer el error de tipo I.
2. El error de tipo II se produce cuando se acepta la hipótesis nula siendo falsa. El tamaño de error tipo II es la probabilidad de cometer el error de tipo II.

3. La potencia es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo realmente falsa.

En resumen, un contraste será mejor cuando el valor de la potencia sea cercano a 1 o el valor del tamaño de error de tipo I se acerque lo máximo al nivel de significación (ε) fijado. (Aznar & Trívez, 1993)

6.1 MÉTODO DE MONTE CARLO

En nuestro trabajo nos centraremos en el estudio del análisis del comportamiento de los contrastes de normalidad que en nuestro caso serán los de Jarque Bera y Lilliefors a través del uso de modelos univariantes que, bajo diferentes distribuciones seguidas por la perturbación aleatoria, valores de los parámetros de ϕ y θ y tamaños muestrales, afectarán a los resultados obtenidos y en consecuencia a la aceptación o no de la hipótesis de normalidad.

En nuestros experimentos el número de réplicas será de 1000 tomando diferentes tamaños muestrales TM=50, TM=200 y TM=2000) y concretamente siempre para un nivel de significación del 5%.

6.2 RESULTADOS GENERADOS EN LOS EXPERIMENTOS DE MONTE CARLO

En este apartado, se van a mostrar los resultados obtenidos de nuestros experimentos de

Monte Carlo realizados. En las tablas que van a verse a continuación se observará en el título la expresión del proceso utilizado en cada caso (en nuestro caso serán los siguientes: AR(1), MA(1) y ARMA(1,1)) y la distribución seguida por la perturbación (Normal , t de Student, Chi Cuadrado y F de Snedecor). En nuestro experimento empezaremos tomando modelos cuya perturbación siga una distribución Normal para calcular el tamaño del error tipo I de los contrastes.

Las dos primeras filas indican el tamaño muestral y el contraste respectivamente, cuyos resultados se muestran en la tabla justo debajo de los contrastes.

La primera columna nos indica el valor del parámetro ϕ, θ o de ambos en el caso de un ARMA que han sido escogidos junto con sus correspondientes signos.

A) Tamaño de los contrastes

En primer lugar analizaremos el comportamiento de los dos contrastes cuando el PGD es un AR(1) para distintos valores de ϕ_1=0'8, 0'4, 0'2, -0'2, -0'4 y -0'8 y para distintos tamaños muestrales (TM=50, TM=200 y TM=2000) con objeto de analizar el comportamiento de los contrastes a medida que aumenta el tamaño muestral.

Tabla 1 AR(1) $Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + U_t \quad U_t \sim N(0,2)$

ϕ_1	TM=50		TM=200		TM=2000	
	JB	**L**	**JB**	**L**	**JB**	**L**
0.8	0.037	**0.046**	0.037	**0.053**	0.059	**0.06**
0.4	0.037	**0.046**	0.036	**0.046**	0.061	**0.07**
0.2	0.035	**0.048**	0.037	**0.048**	0.06	**0.064**
-0.2	0.035	**0.039**	0.038	**0.057**	0.059	**0.058**
-0.4	0.033	**0.04**	0.039	**0.059**	0.059	**0.057**
-0.8	0.033	**0.042**	0.036	**0.065**	**0.06**	**0.056**

Si observamos los resultados de la Tabla 1 obtenidos según el tamaño muestral y el coeficiente del parámetro ϕ_1 vemos que el nivel de significación empírico que se aproximan más al nivel de significación normal del 5% son los obtenidos a través del contraste Lilliefors. Aunque es llamativo como a medida que aumenta el tamaño muestral las diferencias se hacen prácticamente nulas a la hora de captar la normalidad. Por lo que podemos determinar que en tamaños muestrales más bajos el contraste Lilliefors capta mejor la normalidad que el de Jarque Bera, pero a medida que se aumenta el tamaño las diferencias se hacen prácticamente insignificativas incluso hay un cambio de tendencia y sería ahora el contraste de Jarque Bera el que captaría un poco mejor la normalidad.

También como parte del análisis de los experimentos de Monte Carlo, observamos como la diferencia en usar un coeficiente alto, bajo, positivo o negativo casi no modifica los resultados obtenidos al usar un proceso autorregresivo de orden 1.

En segundo lugar analizamos el comportamiento de estos contrastes cuando el PGD es un MA(1), en la Tabla 2 se presentan los resultados obtenidos de estos dos contrastes.

Tabla 2 MA(1) $Y_t = \delta-\theta_1 U_{t-1} + U_t$ $U_t \sim N(0,2)$

θ_1	TM=50		TM=200		TM=2000	
	JB	**L**	**JB**	**L**	**JB**	**L**
0.8	0.049	**0.043**	0.045	**0.057**	0.058	**0.06**
0.4	0.041	**0.044**	0.039	**0.052**	0.06	**0.068**
0.2	0.038	**0.051**	0.036	**0.049**	0.06	**0.061**
-0.2	0.036	**0.043**	0.039	**0.051**	0.058	**0.06**
-0.4	0.035	**0.045**	0.041	**0.051**	0.058	**0.057**
-0.8	0.04	**0.046**	0.05	**0.06**	**0.058**	**0.054**

Si observamos los resultados obtenidos a través de un proceso MA (1) en base a su tamaño muestral y valor del coeficiente del parámetro ϕ, vemos como los resultados no son tan claros como en el caso del proceso autorregresivo. Es evidente que cuando el valor del coeficiente es alto ya sea con signo negativo o positivo el contraste que mejor detecta la normalidad es el de Jarque Bera, y a medida que el tamaño muestral se hace más grande se acaban equilibrando ambos contrastes. Sin embargo, cuando el valor del parámetro θ es más bajo ya sea con signo negativo o positivo indistintamente y bajo tamaños muestrales pequeños, el contraste que mejor detecta la normalidad es el de Lilliefors. Aunque como ocurría anteriormente, un aumento del tamaño muestral acaba igualando los resultados de dichos contrastes.

Tabla 3 ARMA (1,1) **$Y_t = \delta + U_t + \phi_1 Y_{t-1} - \theta_1 U_{t-1}$ $U_t \sim N(0,2)$**

ϕ_1	θ_1	TM=50		TM=200		TM=2000	
		JB	**L**	**JB**	**L**	**JB**	**L**
0.6	0.2	0.036	**0.047**	0.037	**0.047**	0.062	**0.058**
0.2	0.7	0.042	**0.055**	0.042	**0.058**	0.057	**0.063**
-0.7	-0.2	0.033	**0.042**	0.04	**0.056**	**0.061**	**0.058**
-0.2	-0.7	0.046	**0.043**	0.049	**0.059**	0.059	**0.058**

Por último, analizaremos como se comportan estos dos contrastes tomando un proceso ARMA(1,1) con valores altos y bajos y signo positivo y negativo respectivamente en sus parámetros y presentamos los resultados en la Tabla 3.

Cuando el coeficiente de la parte autorregresiva es alto, se detecta mejor la normalidad a través del contraste de Lilliefors (se aproxima más al nivel de significación ε=5%) tanto en tamaños muestrales altos como bajos.

No obstante, cuando el parámetro de la parte regresiva es bajo, en tamaños muestrales pequeños detecta mejor la normalidad el contraste de Lilliefors. Sin embargo, conforme se aumenta el tamaño muestral, la situación se acaba invirtiendo y pasa a ser el contraste de Jarque Bera el que mejor la detecta.

El caso es idéntico al cambiar el signo de los coeficientes, si el parámetro ϕ es el que tiene el valor más negativo ocurre lo mismo que cuando el parámetro tiene el valor más alto positivo, el contraste Lilliefors detecta mejor la normalidad. Sin embargo, la situación es totalmente contraria en el caso de que el valor más negativo se encuentre en el parámetro θ. En este caso el contraste que mejor detecta la normalidad es el de Jarque Bera.

B) Potencia de los contrastes

A continuación, serán calculadas las potencias de los contrastes cuando la distribución de la perturbación es distinta a la normal, en concreto se usarán tres distribuciones alternativas:

- ***t de Student:*** Esta distribución destaca porque aquellas con grados de libertad superiores a 30 se aproximarán a una N (0,1). Otras de las características más relevantes que es sigue una distribución simétrica cuya esperanza es igual a 0 y donde el rango de la variable se distribuye de (-∞, + ∞).
- ***F de Snedecor:*** Esta distribución se caracteriza porque pese a ser muy diferente a la normal se forma a partir de ella. Otra de sus características más relevantes es la que la distribución no es simétrica y se distribuye de (0, + ∞).
- ***Chi cuadrado***: Es una distribución que se forma a partir de la Normal, pero es muy diferente a ella. Otra de sus características más relevantes es que no es simétrica y el rango de la variable se distribuye de (0, + ∞)
- ***Gamma***: Es una distribución muy diferente a la Normal. El rango de la variable se distribuye de (0, + ∞).

B.1) Potencia cuando la perturbación se distribuye según una t de Student.

A continuación, presentamos los resultados de potencia de los dos contrastes para los PGD: AR(1), MA(1) y ARMA(1,1) los cuales se encuentran en las tablas 4, 5 y 6 respectivamente. Las tablas están divididas en 2 partes, según los grados de libertad de la distribución t de Student del modelo, t_{10} y t_{40}.

Tabla 4 AR(1) $Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + U_t$ $U_t \sim t_{10}$ y t_{40}

	t_{10}						t_{40}					
ϕ_1	TM=50		TM=200		TM=2000		TM=50		TM=200		TM=2000	
	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L
0,8	0.188	**0.092**	0.438	**0.147**	1	**0.838**	0.07	**0.058**	0.0131	0.06	0.279	**0.091**
0.5	0.194	**0.102**	0.446	**0.144**	1	**0.838**	0.082	**0.07**	0.129	0.053	0.277	**0.093**
0,2	0.197	**0.124**	0.446	**0.152**	1	**0.844**	0.081	**0.067**	0.129	0.057	0.28	**0.097**
-0.2	0.204	**0.118**	0.44	**0.158**	1	**0.837**	0.077	**0.063**	0.127	0.067	0.281	**0.093**
-0.5	0.203	**0.12**	0.436	**0.162**	1	**0.84**	0.075	**0.07**	0.13	0.065	0.282	**0.097**
-0.8	0.198	**0.099**	0.433	**0.166**	**1**	**0.837**	0.073	**0.06**	0.132	0.063	**0.284**	**0.092**

Tabla 5 MA(1) $Y_t = \delta - \theta_1 U_{t-1} + U_t$ $U_t \sim t_{10}$ y t_{40}

θ_1	t_{10}						t_{40}					
	TM=50		TM=200		TM=2000		TM=50		TM=200		TM=2000	
	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L
0,8	0.19	**0.109**	0.443	**0.148**	1	**0.839**	0.081	**0.061**	0.129	**0.054**	0.281	**0.091**
0.5	0.186	**0.096**	0.446	**0.151**	1	**0.839**	0.078	**0.064**	0.125	**0.055**	0.277	**0.0977**
0,2	0.194	**0.114**	0.444	**0.15**	1	**0.843**	0.083	**0.063**	0.125	**0.064**	0.28	**0.094**
-0.2	0.197	**0.117**	0.441	**0.159**	1	**0.841**	0.077	**0.068**	0.128	**0.07**	0.281	**0.092**
-0.5	0.197	**0.102**	0.443	**0.152**	1	**0.842**	0.073	**0.062**	0.131	**0.061**	0.283	**0.099**
-0.8	0.194	**0.109**	0.439	**0.157**	**1**	**0.843**	0.074	**0.062**	0.138	**0.055**	**0.281**	**0.094**

Tabla 6 ARMA (1,1) **$Y_t = \delta + U_t + \phi_1 Y_{t-1} - \theta_1 U_{t-1}$ $U_t \sim t_{10}$ *y* t_{40}**

ϕ_1	θ_1	t_{10}						t_{40}					
		TM=50		TM=200		TM=2000		TM=50		TM=200		TM=2000	
		JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L
0.8	0.1	0.186	**0.095**	0.438	**0.144**	1	**0.831**	0.077	**0.061**	0.129	0.053	0.278	**0.095**
0.1	0.8	0.182	**0.106**	0.434	**0.141**	1	**0.825**	0.084	**0.058**	0.124	0.059	0.28	**0.089**
-0.8	-0.1	0.19	**0.106**	0.436	**0.147**	**1**	**0.83**	0.077	**0.072**	0.131	0.059	**0.282**	**0.098**
-0.1	-0.8	0.2	**0.115**	0.439	**0.161**	1	**0.832**	0.078	**0.054**	0.13	0.067	0.282	**0.092**

Como bien hemos nombrado al principio, se ha demostrado que a medida que los grados de libertad crecen en una distribución t de Student la potencia se va haciendo gradualmente más pequeña hasta llegar a un punto en el no rechaza la normalidad debido a la similitud con la distribución N(0,1) cuando el número de observaciones es mayor de 30.

Analizando los resultados se observa claramente que el contraste con mayor potencia sería el de Jarque Bera, independientemente del proceso utilizado y de los grados de libertad de la distribución.

Sin embargo, a medida que se aumenta el tamaño muestral en una t_{10}, la diferencia en la potencia entre ambos contrastes va minorando, al contrario de lo que ocurre en la t_{40}, donde la diferencia de potencias entre ambos contrastes se hace cada vez mayor en beneficio del contraste de Jarque-Bera.

C) Potencia de los contrastes cuando la perturbación se distribuye según una F de Snedecor.

En las tablas 7, 8 y 9 se encuentran las potencias de los contrastes obtenidas cuando la perturbación aleatoria sigue una distribución F de Snedecor con diferentes grados de libertad y con diferentes tamaños muestrales.

Las tablas también se encuentran divididas en dos partes con objeto de analizar el comportamiento de los contrastes ante distintos grados de libertad de la distribución F de Snedecor de la perturbación.

Tabla 7 AR(1) $Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + U_t$ $U_t \sim F_{2,12}$ y $F_{2,12}$

	$F_{2,5}$						$F_{2,12}$					
ϕ_1	TM=50		TM=200		TM=2000		TM=50		TM=200		TM=2000	
	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L
0,8	0.971	**0.994**	1	**1**	1	**1**	0.965	**0.965**	1	1	1	**1**
0.5	0.989	**0.994**	1	**1**	1	**1**	0.963	**0.95**	1	1	1	**1**
0,2	0.996	**0.993**	1	**1**	1	**1**	0.974	**0.973**	1	1	1	**1**
-0.2	0.997	**0.996**	1	**1**	1	**1**	0.975	**0.97**	1	1	1	**1**
-0.5	0.998	**0.998**	1	**1**	1	**1**	0.967	**0.952**	1	1	1	**1**
-0.8	0.998	**0.998**	1	**1**	**1**	**1**	0.945	**0.949**	1	1	**1**	**1**

Tabla 8 MA(1) $Y_t = \delta - \theta_1 U_{t-1} + U_t$ $U_t \sim F_{2,12}$ y $F_{2,12}$

	$F_{2,5}$						$F_{2,12}$					
θ_1	TM=50		TM=200		TM=2000		TM=50		TM=200		TM=2000	
	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L
0,8	0,988	**0,989**	1	**1**	1	**1**	0.928	**0.969**	1	1	1	**1**
0.5	0.986	**0.982**	1	**1**	1	**1**	0.948	**0.958**	1	1	1	**1**
0,2	0.993	**0.993**	1	**1**	1	**1**	0.977	**0.964**	1	1	1	**1**
-0.2	0.995	**0.993**	1	**1**	1	**1**	0.981	**0.982**	1	1	1	**1**
-0.5	0.994	**0.991**	1	**1**	1	**1**	0.983	**0.98**	1	1	1	**1**
-0.8	0.986	**0.991**	1	**1**	**1**	**1**	0.985	**0.982**	1	1	**1**	**1**

Tabla 9 ARMA (1,1) $\mathbf{Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1}\ \theta_1 U_{t-1} + U_t\quad U_t \sim F_{2,12}}$ **y** $\mathbf{F_{2,12}}$

		$F_{2,12}$						$F_{2,12}$					
ϕ_1	θ_1	TM=50		TM=200		TM=2000		TM=50		TM=200		TM=2000	
		JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L
0.7	0.2	0.975	**0.972**	1	**1**	1	**1**	0.913	**0.943**	1	1	1	**1**
0.2	0.7	0.986	**0.985**	1	**1**	1	**1**	0.96	**0.947**	1	1	1	**1**
-0.7	-0.2	0.989	**0.989**	1	**1**	**1**	**1**	0.973	**0.96**	1	1	**1**	**1**
-0.2	-0.7	0.992	**0.989**	1	**1**	1	**1**	0.96	**0.946**	1	1	1	**1**

Los resultados de las potencias de los contrastes cuando la perturbación aleatoria sigue una distribución aleatoria destacan por sus elevados valores aun con tamaños muestrales pequeños, lo que significa que captan la no normalidad de manera muy eficiente. Como podemos observar, indistintamente de los signos, valores que le demos al parámetro ϕ_1 y θ_1 y grados de libertad que tome la distribución, no se influye en la detección de la no normalidad por parte de los dos contrastes utilizados. Así que en este tipo de distribución el contraste elegido sería prácticamente indiferente ya que ambas detectarían la no normalidad en altísimas proporciones.

D) Potencia de los contrastes cuando la perturbación se distribuye como una Chi cuadrado.

En las tablas 10, 11 y 12 se encuentran las potencias de los contrastes obtenidas cuando la perturbación aleatoria sigue una distribución Chi cuadrado con diferentes grados de libertad y tamaños muestrales.

Las tablas también se encuentran divididas en dos partes con objeto de analizar el comportamiento de los contrastes ante distintos grados de libertad de la distribución Chi cuadrado de la perturbación.

Tabla 10 AR(1) $Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + U_t$ $U_t \sim X_5^2$ y X_{15}^2

	X_5^2						X_{15}^2					
ϕ_1	TM=50		TM=200		TM=2000		TM=50		TM=200		TM=2000	
	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L
0,8	0.635	**0.521**	1	**1**	1	**1**	0.283	**0.182**	0.922	**0.709**	1	**1**
0.5	0.656	**0.526**	1	**0.995**	1	**1**	0.302	**0.192**	0.926	**0.686**	1	**1**
0,2	0.658	**0.522**	1	**0.995**	1	**1**	0.307	**0.198**	0.928	**0.699**	1	**1**
-0.2	0.659	**0.541**	1	**0.995**	1	**1**	0.3	**0.201**	0.927	**0.699**	1	**1**
-0.5	0.66	**0.519**	1	**0.994**	1	**1**	0.297	**0.208**	0.925	**0.703**	1	**1**
-0.8	0.661	**0.52**	1	**0.994**	**1**	**1**	0.295	**0.204**	0.924	**0.699**	**1**	**1**

Tabla 11 MA(1) $Y_t = \delta - \theta_1 U_{t-1} + U_t$ $U_t \sim X_5^2$ y X_{15}^2

	X_5^2						X_{15}^2					
θ_1	TM=50		TM=200		TM=2000		TM=50		TM=200		TM=2000	
	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L
0,8	0.611	**0.47**	1	**0.992**	1	**1**	0.287	**0.186**	0.916	**0.689**	1	**1**
0.5	0.63	**0.48**	1	**0.995**	1	**1**	0.283	**0.176**	0.922	**0.683**	1	**1**
0,2	0.65	**0.499**	1	**0.995**	1	**1**	0.296	**0.192**	0.926	**0.699**	1	**1**
-0.2	0.651	**0.514**	1	**0.994**	1	**1**	0.297	**0.189**	0.928	**0.7**	1	**1**
-0.5	0.658	**0.493**	1	**0.992**	1	**1**	0.291	**0.212**	0.919	**0.695**	1	**1**
-0.8	0.642	**0.474**	1	**0.994**	**1**	**1**	0.277	**0.192**	0.915	**0.676**	**1**	**1**

Tabla 12 ARMA (1,1) **$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} - \theta_1 U_{t-1} + U_t +\ \ U_t \sim X_5^2$ y X_{15}^2**

		X_5^2						X_{15}^2					
ϕ_1	θ_1	TM=50		TM=200		TM=2000		TM=50		TM=200		TM=2000	
		JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L	JB	L
0.8	0.1	0.622	**0.483**	1	**0.994**	1	**1**	0.27	**0.159**	0.922	**0.682**	1	**1**
0.1	0.8	0.594	**0.456**	1	**0.993**	1	**1**	0.28	**0.178**	0.91	**0.683**	1	**1**
-0.8	-0.1	0.614	**0.491**	1	**0.997**	**1**	**1**	0.288	**0.183**	0.921	**0.698**	**1**	**1**
-0.1	-0.8	0.624	**0.476**	1	**0.995**	1	**1**	0.269	**0.172**	0.91	**0.684**	1	**1**

Cuando la perturbación aleatoria sigue una distribución Chi-Cuadrado con cinco grados de libertad (X_5^2) observamos como tanto en tamaños muestrales pequeños, medianos o grandes sea cual sea el proceso elegido el contraste que mejor detecta la no normalidad es el de Jarque Bera. No obstante, es importante observar como a medida que el tamaño muestral aumenta, la potencia de los dos contrastes acaba por igualarse.

Como parte reseñable de los resultados, se debe de comentar la caída en la detección de la falta de normalidad cuando los grados de libertad de la distribución Chi cuadrado es de 15. No obstante, a medida que el tamaño muestral aumenta, los resultados son similares a los obtenidos en la en una distribución Chi cuadrado con 5 grados de libertad, a excepción del contraste de Lilliefors cuando se tiene un tamaño muestral de 200. En este caso concreto, el contraste estadístico de Lilliefors tiene una potencia mucho menor que cuando los grados de libertad son 5.

E) Potencia de los contrastes cuando la perturbación se distribuye como una Gamma.

En las tablas 13-18 se encuentran las potencias de los contrastes obtenidas cuando la perturbación aleatoria sigue una distribución Gamma con diferentes grados de libertad y con diferentes tamaños muestrales.

Las tablas también se encuentran divididas en dos partes con objeto de analizar el comportamiento de los contrastes ante distintos grados de libertad de la distribución Gamma de la perturbación.

Tabla 13 AR(1) $Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + U_t$ $U_t \sim$ Gamma (G,1,1)

ϕ_1	TM=50		TM=200		TM=2000	
	JB	**L**	**JB**	**L**	**JB**	**L**
0.7	0.794	**0.915**	1	**1**	1	**1**
0.5	0.842	**0.869**	1	**1**	1	**1**
0.2	0.932	**0.901**	1	**1**	1	**1**
-0.2	0.948	**0.931**	1	**1**	1	**1**
-0.5	0.953	**0.942**	1	**1**	1	**1**
-0.7	0.953	**0.944**	1	**1**	**1**	**1**

Tabla 14 MA(1) $Y_t = \delta - \theta_1 U_{t-1} + U_t$ $U_t \sim$ Gamma (G,1,1)

θ_1	TM=50		TM=200		TM=2000	
	JB	**L**	**JB**	**L**	**JB**	**L**
0.8	0.899	**0.884**	1	**1**	1	**1**
0.2	0.937	**0.915**	1	**1**	1	**1**
0.5	0.917	**0.899**	1	**1**	1	**1**
-0.5	0.892	**0.881**	1	**1**	1	**1**
-0.8	0.832	**0.847**	1	**1**	1	**1**
-0.2	0.929	**0.895**	1	**1**	1	**1**

Tabla 15 ARMA (1,1) **$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} - \theta_1 U_{t-1} + U_t$ $U_t \sim$ Gamma (G,1,1)**

ϕ_1	θ_1	TM=50		TM=200		TM=2000	
		JB	**L**	**JB**	**L**	**JB**	**L**
0.8	0.1	0.901	**0.837**	1	**1**	1	**1**
0.1	0.8	0.895	**0.871**	1	**1**	1	**1**
-0.8	-0.1	0.925	**0.914**	1	**1**	**1**	**1**
-0.1	-0.8	0.833	**0.841**	1	**1**	1	**1**

Cuando la distribución seguida es una Gamma(G,1,1) se observan potencias altas en los dos contrastes muestra ya sea en tamaños muestrales pequeños como grandes e independientemente del signo y valor de los coeficientes. En tamaños muestrales de 200 o superiores ambos contrastes tanto el de Jarque Bera como el de Lilliefors detectan la no normalidad con una probabilidad del 100% por lo que es indistinto el uso de uno u otro contraste.

Tabla 16 AR(1) $Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + U_t$ $U_t \sim$ Gamma (G,4,1)

θ_1	TM=50		TM=200		TM=2000	
	JB	**L**	**JB**	**L**	**JB**	**L**
0.8	0.463	**0.374**	0.994	**0.937**	1	**1**
0.5	0.457	**0.352**	0.997	**0.938**	1	**1**
0.2	0.428	**0.317**	0.997	**0.927**	1	**1**
-0.2	0.316	**0.245**	0.988	**0.918**	1	**1**
-0.5	0.3	**0.224**	0.956	**0.899**	1	**1**
-0.8	0.439	**0.211**	0.944	**0.889**	**1**	**1**

Tabla 17 MA(1) $Y_t = \delta - \theta_1 U_{t-1} + U_t$ $U_t \sim$ Gamma (G,4,1)

ϕ_1	TM=50		TM=200		TM=2000	
	JB	**L**	**JB**	**L**	**JB**	**L**
0.8	1	**0.854**	1	**1**	1	**1**
0.5	0.756	**0.243**	0.971	**0.877**	1	**1**
0.2	0.323	**0.238**	0.988	**0.911**	1	**1**
-0.2	0.429	**0.307**	0.997	**0.929**	1	**1**
-0.5	0.461	**0.347**	0.998	**0.93**	1	**1**
-0.8	0.484	**0.382**	0.998	**0.935**	**1**	**1**

Tabla 18 ARMA (1,1) **$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} - \theta_1 U_{t-1} + U_t$ $U_t \sim$ Gamma (G,4,1)**

ϕ_1	θ_1	TM=50		TM=200		TM=2000	
		JB	**L**	**JB**	**L**	**JB**	**L**
0.8	0.1	1	**0.745**	1	**0.994**	1	**1**
0.1	0.8	0.445	**0.361**	0.994	**0.942**	1	**1**
-0.8	-0.1	0.458	**0.336**	0.997	**0.93**	**1**	**1**
-0.1	-0.8	0.323	**0.196**	0.941	**0.874**	1	**1**

Sin embargo, cuando la perturbación aleatoria sigue una distribución también Gamma, pero aumentando los grados de libertad, vemos como las potencias de los contrastes caen mucho en comparación con la situación anterior.

Cuando la perturbación aleatoria sigue esta distribución con estos parámetros, es llamativo como al contrario de lo que ocurre con una Gamma(1,1) dependiendo del proceso estocástico que usemos los resultados varían ostensiblemente en tamaños muestrales pequeños. Asintóticamente no.

Empezaremos con el proceso AR(1), en este caso vemos claramente como a medida que el valor del coeficiente ϕ disminuye la potencia también. Asimismo, cuando el valor del coeficiente de la parte AR tiene signo negativo, la diferencia en la potencia obtenida entre el contraste de Jarque Bera y Lilliefors es mucho menor en comparación con el mismo valor, pero con signo positivo. Además, a medida que los tamaños muestrales aumentan, las potencias de los contrastes se acaban por igualar. Como conclusión afirmamos que el contraste de Jarque Bera es el que mejor detecta la no normalidad cuando el estamos ante un proceso AR(1) sobre todo cuando el coeficiente de la parte autorregresiva es alto.

En un proceso MA(1) vemos como las diferencias entre las potencias de los contrastes son muy pequeñas independientemente del tamaño muestral, valor y signo de los coeficientes. Pero al igual que ocurre en un proceso AR, el contraste de Jarque Bera es el que mejor detecta la no normalidad.

Por último en el caso de un ARMA(1,1) y como era de esperar teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente, cuando el coeficiente de la parte autorregresiva tiene valores muy altos y con signo positivo la potencia del contraste de Jarque Bera es máxima. Sin embargo, a medida que el valor del parámetro ϕ decrece, el signo se vuelve negativo y el tamaño muestral crece, las potencias de ambos contrastes tienden a equilibrarse. Concluyendo, el contraste que mejor detecta la no normalidad en un proceso ARMA(1,1) es el de Jarque Bera.

7. CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo ha consistido en comparar y analizar a través de los experimentos de Monte Carlo si dos contrastes de normalidad (Jarque Bera o Lilliefors) captan o no la normalidad en función de las distribuciones seguidas por la perturbación aleatoria.

En primer lugar, se explicó el origen de la econometría donde tras esto se pasó a los modelos de series temporales. Dentro de los modelos de series temporales se explicó en detalle la metodología de Box-Jenkins, pero haciendo mayor hincapié en la etapa de chequeo, más concretamente en los contrastes de normalidad.

Para poder comparar el comportamiento de ambos contrastes se han realizado una serie de experimentos de Monte Carlo donde hemos obtenido y analizado el tamaño de error tipo I y la potencia de estos contrastes en diferentes procesos estocásticos.

Tanto las potencias como el tamaño de error tipo I se han visto influenciados por:

1. Tamaño muestral
2. Valor y signo de los parámetros del proceso estocástico considerado.
3. Distribución seguida por la perturbación aleatoria y grados de libertad.

En nuestro primer análisis, teniendo una perturbación que se distribuía como una Normal(0,2) se observó como el contraste que ofrecía un tamaño de error de tipo I más próximo al nivel de significación era el de Lilliefors. Al contrario de que ocurre con la distribución t_{40} la cual se comporta como una normal pero el contraste que mejor detecta la no normalidad es el de Jarque Bera.

Por otro lado, los resultados son diferentes en el caso de que las distribuciones utilizadas sean muy distintas a la normal, donde el contraste que ofrece mejores resultados es el de Jarque Bera. Aunque cabe mencionar que conforme se aumenta el tamaño muestral, las potencias de ambos contrastes tienden a igualarse mostrando valores muy altos.

Las conclusiones que podemos extraer del análisis de los experimentos de Monte Carlo son:

1. El contraste más potente es el de Jarque Bera en todas las distribuciones utilizadas. En el caso de la distribución Normal como lo que se analiza es el tamaño del error tipo I los valores más bajos se han observado en el contraste de Lilliefors.
2. Se ha validado que los resultados más fiables se encuentran en tamaños muestrales más grandes, donde la potencia alcanza los valores más altos.

Bibliografía

Alvarez Vazquez, N. (2001). *Econometría II: Análisis de modelos econométricos de series temporales. Ed. UNED, Madrid*

Aznar ,A, y Trívez, F.J. (1993). *Métodos de predicción en economía Vol 2, Análsis de series temporales.* Ed.Ariel,Barcelona.

Cao, R. A. (2008). *Introducción a la estadística y sus aplicaciones.* Ed:Pirámide, Madrid.

Gujarati, D. (2010). *Econometría.* Ed.McGraw Hill, Nueva York.

Hill, J. (1988). *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics* . Nueva York.

Peña, D. (2010). *Análisis de series temporales* . Ed. Alianza,Madrid.

Portillo. (2006). *Introducción a la Econometría.*

Trívez. (2004). *Introducción a la Econometría*: ED.Pirámide,Madrid