

Trabajo Fin de Grado

Análisis dinámico del equilibrio de Cournot con
delegación estratégica.

Autor/es

Alba Capó Soliveres.

Director/es

Gloria Jarne Jarne.
Joaquín Andaluz Funcia.

Facultad de Economía y Empresa.
2019

Análisis dinámico del equilibrio de Cournot con delegación estratégica.

Alba Capó Soliveres.

Resumen.

Habitualmente, en un duopolio de Cournot, se ha considerado que la propiedad y la gerencia de la empresa eran un mismo agente y el equilibrio se hallaba maximizando la función objetivo de la empresa que correspondía a sus propios beneficios. La separación de la gerencia y la propiedad desemboca en el análisis de cómo los accionistas compensan a los managers y cómo el parámetro de ponderación afecta al equilibrio de Nash, por lo que la función objetivo de la empresa pasa a ser la utilidad de los managers. Bajo estos supuestos se introduce la óptica temporal con la consideración de distintos esquemas de expectativas (naïve, adaptativas y regla del gradiente) y tiempo discreto, y se analiza la estabilidad dinámica del equilibrio de Nash en base a estos tipos de expectativas. El resultado obtenido es que, bajo el esquema de expectativas basadas en la regla del gradiente, el equilibrio de Nash es asintóticamente estable siempre que la velocidad de ajuste de las empresas no sobrepase el umbral de estabilidad; mientras que bajo expectativas naïve y expectativas adaptativas el equilibrio es siempre asintóticamente estable. Para mostrar la evolución temporal de las variables son utilizadas simulaciones elaboradas con software matemático.

Abstract.

Usually, in a Cournot duopoly, it was considered that the ownership and management of the company were the same agent and the balance was maximizing the objective function of the company that corresponded to its own benefits. The separation of management and ownership results in the analysis of how shareholders compensate managers and how the weighting parameter affects Nash's balance, so that the company's objective function becomes the managers' utility. Under these assumptions, the temporal optics are introduced with the consideration of different schemes of expectations (naive, adaptive and gradient rule) and discrete time, and the dynamic stability of the Nash equilibrium is analyzed based on these types of expectations. The result is that, under the scheme of expectations based on the gradient rule, the Nash equilibrium is asymptotically stable as long as the speed of adjustment of the

companies does not exceed the stability threshold; while under naïve expectations and adaptive expectations the balance is always asymptotically stable. To show the temporal evolution of the variables, simulations elaborated with mathematical software are used.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	5
2. UN MODELO À LA COURNOT.	8
2.1 SUPUESTOS DEL MODELO.....	9
2.2. ANÁLISIS ESTÁTICO DEL MODELO.....	9
3. ANÁLISIS DINÁMICO DEL MODELO.	13
3.1. EXPECTATIVAS	13
3.1.1. Expectativas Naïve o ingenuas.....	15
3.1.2. Expectativas adaptativas.....	15
3.1.3. Regla del gradiente.....	15
3.2. SOLUCIÓN DEL MODELO DINÁMICO	16
3.2.1. Modelo dinámico con expectativas Naïve o ingenuas.....	16
3.2.2. Modelo dinámico con expectativas adaptativas.	18
3.2.3. Modelo dinámico con la regla del gradiente.	23
4. CONCLUSIONES.	33
Bibliografía.....	35

1. INTRODUCCIÓN.

En los modelos de duopolio estudiados a lo largo de los cursos de microeconomía, en los que no se introduce la perspectiva temporal, cada empresa que participa en el mercado realiza unas expectativas sobre las acciones de su rival. En cualquiera de esos modelos (Cournot, Bertrand, Stackelberg, Hotteling, etc), una vez formuladas las expectativas se halla el equilibrio correspondiente, y este equilibrio resulta ser un punto en el que ninguna empresa, cuya función objetivo son sus propios beneficios, desea cambiar su acción o estrategia dada la estrategia de su competidora.

De este modo, en el duopolio de Cournot cada empresa formula su estrategia tal que supone que su competidora se comportará de tal forma que mantendrá fija la cantidad que produce.

Por otro lado, siempre se ha supuesto que en el modelo de Cournot las funciones objetivo de las empresas corresponden a los beneficios que se obtendrían, ya que se entendía a los propietarios y a los gerentes como un mismo sujeto. Sin embargo, en las grandes corporaciones la propiedad y la gerencia no van unidas¹. Este hecho pone en el centro del análisis la forma en que los propietarios compensan la gestión de los *mánagers*, para así motivarlos con el objetivo de obtener ventaja competitiva y mayor liderazgo en el mercado, dando lugar a distintos sistemas de ponderación de incentivos.

En artículos donde se introduce la delegación estratégica² destaca un sistema de ponderación de incentivos en el que cada propietario compensa a su administrador con una ponderación de beneficios y ventas, buscando un comportamiento agresivo. Los estudios de Baker (1988), Jensen y Murphy (1990), y Lambert (1991) apuntan a una relación positiva entre este sistema y mayores beneficios e ingresos, además de ser aplicados en la industria eléctrica y del gas en Estados Unidos.

Además, un artículo de Steven D. Sklivas demuestra que con la adopción de esta estrategia de incentivos, considerando competencia en cantidades, cuanto menos peso se

¹ Fama y Jencen, 1983.

² Vickers (1985), Fershtman (1985), Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987).

da al beneficio y más a los ingresos se proporciona un resultado más próximo al equilibrio competitivo que al equilibrio de Cournot.

En este documento se introduce el sistema de compensación y se analiza la competencia entre dos empresas bajo un modelo a la Cournot cuyas funciones objetivo son los beneficios propios por parte de una de las empresas y una ponderación entre beneficios y ventas por parte de la otra empresa. Este planteamiento tiene como objetivo averiguar cómo afecta el parámetro de ponderación de incentivos al equilibrio de Nash, concretamente a la estabilidad dinámica del mismo.

Introduciendo en el modelo la perspectiva temporal tomando el tiempo como una variable discreta, es decir, las variables cambian de un periodo a otro, se lleva a cabo el análisis dinámico del equilibrio. Cuando se da un shock externo, las variables dejan de tomar los valores de equilibrio; es entonces cuando se producen unos movimientos en las cantidades que pueden terminar convergiendo hacia el valor de equilibrio – lo que se conoce como estabilidad asintótica-, o pueden alejarse de él– lo que se conoce como equilibrio inestable. El comportamiento dinámico de las trayectorias depende de los distintos tipos de expectativas por tanto, el objetivo es analizar la estabilidad asintótica del equilibrio de Nash en base a los distintos esquemas de expectativas.

Las simulaciones realizadas mediante el software Wolphram Mathematica proporcionará la representación de las trayectorias solución del modelo, lo que permitirá observar si se alcanza el equilibrio a largo plazo o no.

A lo largo del trabajo se utilizan y desarrollan los conceptos y herramientas aprendidas en las asignaturas de Microeconomía II, Microeconomía IV y Matemáticas II. El modelo de Cournot se introduce en Microeconomía II y se profundiza en Microeconomía IV; también se desarrollan en Microeconomía IV conceptos como función de mejor respuesta y equilibrio de Nash. En la asignatura Matemáticas II se estudian las ecuaciones diferenciales, que son herramientas de análisis para cuando se trabaja con variables cuyas variaciones tienen lugar en tiempo continuo. Al considerarse el tiempo una variable discreta, se ha precisado ampliar los conocimientos adquiridos en la asignatura para poder trabajar con tiempo discreto, concretamente con ecuaciones en diferencias.

El trabajo se organiza de la siguiente forma. En el apartado dos se presenta el modelo de Cournot, sus supuestos y se halla el equilibrio del modelo. En el tercer apartado se introducen los distintos esquemas de expectativas y se analiza el equilibrio del modelo en un contexto dinámico así como su estabilidad asintótica. El cuarto y último apartado detalla las conclusiones que se han alcanzado a raíz de los resultados.

2. UN MODELO À LA COURNOT.

En 1838 el economista francés Augustin Cournot propuso un modelo de duopolio en el que las empresas producen un bien homogéneo y conocen toda la demanda de mercado.

Cada empresa decide la cantidad que va a lanzar al mercado y ambas toman la decisión de producción de forma simultánea. En el momento en que se decide la cantidad de output cada jugador tiene en cuenta a su oponente, de forma que es consciente que éste decide su nivel de producción, y viceversa. El precio de mercado depende de la producción total de las empresas.

La clave del modelo de Cournot reside en que cada empresa considera fijo el nivel de producción de su competidora y decide a partir de este hecho la cantidad que va a producir. A medida que la empresa piense que su competidora aumentará su nivel de output, disminuirá el de la propia empresa. En consecuencia, el nivel de producción que maximiza los beneficios de cada empresa es una función decreciente de la cantidad que supone que producirá su oponente. A esta función decreciente se le conoce como *función de reacción* o *función de mejor respuesta* y se representan como $R_i(q_j)$ y $R_j(q_i) \forall i \neq j$.

Estas funciones de reacción dependen de la demanda de mercado y de los costes marginales de la propia empresa. Si las curvas de costes marginales de las empresas coincidiesen, las funciones de mejor respuesta serían simétricas.

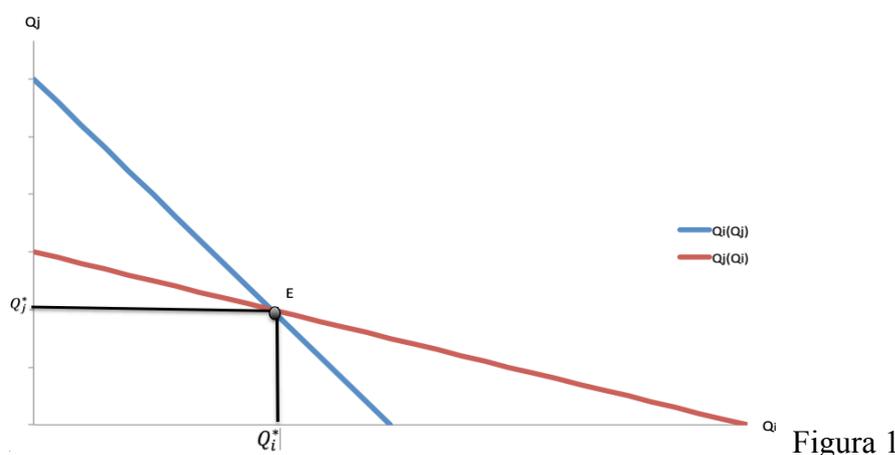


Figura 1

La representación de cada función de reacción de las empresas informa de cuánto producirá cada empresa dado el nivel de producción de su oponente. En condiciones de equilibrio, cada empresa determina su nivel de producción en función de su propia función de mejor respuesta, por lo que los niveles de producción de equilibrio corresponden al punto donde se cruzan las funciones de reacción de las dos empresas. En consecuencia, se define el *equilibrio de Cournot* como la intersección de las funciones de mejor respuesta de las empresas que participan en el mercado. En este punto de intersección (E), cada empresa supone correctamente la producción de su rival y maximiza consecuentemente sus beneficios.

El equilibrio de Cournot constituye un caso particular de *equilibrio de Nash*. En teoría de juegos, se conoce como equilibrio de Nash la situación en la que cada jugador obtiene el mejor resultado posible, dada la estrategia de su contrario, por lo que ningún jugador tiene incentivos a desviarse de su conducta. En el equilibrio de Cournot, cada productor lanza una cantidad que maximiza sus beneficios dada la cantidad producida por su competidor, de manera que ninguno de ellos está dispuesto a alterar su nivel de producción.

2.1 SUPUESTOS DEL MODELO.

- I. El producto que las empresas lanzan al mercado es homogéneo.
- II. Las empresas conocen la demanda de mercado, por lo que tienen poder de mercado. Cada una de ellas iguala su ingreso marginal a su coste marginal.
- III. Las empresas se enfrentan a una función de demanda lineal.
- IV. Ambas empresas determinan el nivel de output simultáneamente.
- V. Los propietarios y los gerentes son agentes distintos.
- VI. La función objetivo de las empresas es la utilidad de los managers.
- VII. Los costes marginales de las empresas son iguales.
- VIII. La función de costes de ambas firmas es lineal.

2.2. ANÁLISIS ESTÁTICO DEL MODELO.

En el modelo se analiza un duopolio de Cournot donde se supone que propietarios y gerentes son agentes distintos. Las empresas (1 y 2) operan en un mercado en el que

cada una produce una determinada cantidad (q_1 y q_2) de un bien homogéneo y tienen una función de costes lineal $c_i(q_i) = c_i q_i, \forall i = 1, 2$, con $c_i > 0$.

Los propietarios de una empresa compensan a sus gerentes mientras que en la otra empresa no hay un sistema de compensación. De esta forma, la función objetivo de cada empresa corresponde a la utilidad de los managers.

En este escenario las empresas se enfrentan a la siguiente curva inversa de demanda lineal.

$$p = 1 - q_1 - q_2$$

- La función objetivo de la empresa 1 es la utilidad de sus managers que, en este caso corresponde a los beneficios de explotación.

$$W_1 = \pi_1 = (1 - q_1 - q_2 - c_1)q_1 \quad (1)$$

- La función objetivo de la empresa 2 es también la utilidad de sus managers. Esta utilidad depende de una combinación de beneficios y ventas, de tal forma que se introduce en la función λ , que corresponde al parámetro de ponderación de incentivos que los propietarios otorgan a sus gerentes.

$$W_2 = \lambda \pi_2 + (1 - \lambda)pq_2 = (1 - q_1 - q_2)q_2 - \lambda c_2 q_2 \quad (2)$$

Se impone en el modelo que $0 \leq \lambda \leq 1$. Un valor de λ cercano a 0 indica que el propietario de la empresa le da más peso a las ventas que a los beneficios, dando lugar a una competencia más agresiva. Por el contrario, cuanto más se aproxime λ a 1 reflejará que el propietario de la empresa quiere incentivar los beneficios de explotación más que las ventas, de modo que la competencia entre ambas empresas se asemeja a la que originalmente propuso Cournot.

El equilibrio de Cournot se halla resolviendo el siguiente problema de optimización. Sea las funciones de utilidad de las dos empresas, definidas en (1) y (2), las condiciones necesarias para la maximización de dicha utilidad son, para la empresa 1 y la empresa 2 respectivamente, las siguientes:

$$\frac{\partial W_1}{\partial q_1} = 1 - 2q_1 - q_2 - c_1 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial q_2} = 1 - q_1 - 2q_2 - \lambda c_2 = 0 \quad (4)$$

Estas dos expresiones indican que para que se maximice la utilidad es necesario que la utilidad marginal de cada empresa sea nula. En otras palabras, una variación infinitesimal de la cantidad producida por cada empresa no produce ninguna variación en la utilidad de los managers de la empresa.

Despejando de (3) y (4) la cantidad producida por cada empresa en función de su oponente, se hallan las funciones de mejor respuesta de la empresa 1 y la empresa 2.

$$R_1(q_2) = q_1 = \frac{1 - q_2 - c_1}{2} \quad (5)$$

$$R_2(q_1) = q_2 = \frac{1 - q_1 - \lambda c_2}{2} \quad (6)$$

Tal como se ha especificado en los supuestos del modelo, los costes marginales de ambas empresas coinciden, es decir, $c_1 = c_2 = c$.

Resolviendo el sistema se obtienen las cantidades de equilibrio.

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{1 + (\lambda - 2)c}{3} \\ q_2^* = \frac{1 + (1 - 2\lambda)c}{3} \end{cases}$$

En este subjuego, el equilibrio de Nash queda determinado por las decisiones de producción que maximizan la utilidad de los managers.

$$EN(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{1 + (\lambda - 2)c}{3}, \frac{1 + (1 - 2\lambda)c}{3} \right) \quad (7)$$

Las cantidades de equilibrio (q_1^*, q_2^*) tienen que ser positivas. La relación entre λ y c que cumplen esa condición es $\forall \lambda \in [0,1]$, el coste marginal debe ser tal que

$$c \in \left(0, \frac{1}{2 - \lambda} \right)$$

La condición $\frac{\partial^2 W_i}{\partial q_i^2} = -2 < 0, \forall i = 1, 2$ es suficiente para garantizar que el punto de equilibrio que se acaba de obtener es un máximo.

El valor del parámetro de ponderación de incentivos λ determinará las características del mercado. Cuanto menor sea λ menor peso dará el propietario de la empresa 2 a los beneficios y mayor se lo dará a las ventas, consiguiendo así mayor cuota de mercado y, por tanto, la competencia es más agresiva, ya que $\frac{\partial q_2^*}{\partial \lambda} = -\frac{2c}{3} < 0$.

3. ANÁLISIS DINÁMICO DEL MODELO.

El análisis dinámico se realiza considerando las cantidades de output variables discretas, es decir, las decisiones de producción de los agentes no varían en un mismo periodo. Al tratarse de variaciones finitas la herramienta adecuada para el análisis son las ecuaciones en diferencias.

En este apartado se pretende analizar cómo evolucionan las decisiones de producción de las empresas cuando tiene lugar un shock exógeno que desplaza a las cantidades fuera del punto de equilibrio, para ello es necesario esclarecer varios conceptos.

El *equilibrio* o *estado estacionario* describe la situación en la que, en ausencia de perturbaciones externas, los valores que toman las variables permanecen constantes.

Se define como *equilibrio estable* aquel en el que, cuando se da una perturbación externa, las desviaciones que se producen son tales que las variables estratégicas se mantienen lo más cerca posible del punto de equilibrio.

La estabilidad de equilibrio puede ser global o local según sea independiente o no de la distancia desde el punto inicial hasta el punto de equilibrio.

Un *equilibrio asintóticamente estable* es un equilibrio estable para el que las perturbaciones generadas por un shock exógeno desaparecen en el largo plazo, recuperándose los valores de equilibrio.

De este modo, cuando se produce una perturbación externa que desplaza las cantidades fuera del equilibrio tiene lugar un proceso, en presencia de racionalidad limitada, en el cual las decisiones de producción de los agentes, periodo tras periodo, pueden converger hacia el punto de equilibrio o alejarse de él. Estas trayectorias dependen de los distintos esquemas de expectativas, de modo que se modelizará el comportamiento de los agentes en base a dichos esquemas.

Según el esquema de expectativa que se utiliza, el sistema dinámico puede ser un sistema dinámico lineal o un sistema dinámico no lineal.

El análisis de la estabilidad del equilibrio para el primer caso se realiza en base a los valores propios de la matriz jacobiana del mismo sistema. También puede analizarse la estabilidad con las condiciones de Shur.

Para el sistema dinámico no lineal el análisis se realiza linealizando el sistema en un entorno del equilibrio mediante una aproximación de Taylor. De esta forma se realiza el análisis de la estabilidad siguiendo el mismo procedimiento que en el caso lineal, sobre la matriz jacobiana del sistema no lineal evaluada en el punto de equilibrio. Sin embargo, esta linealización no serviría si hubiese un valor propio de la jacobiana con valor absoluto igual a uno.

3.1. ESQUEMAS DE EXPECTATIVAS.

Se considera un contexto dinámico en el que los jugadores deciden el nivel de output en un periodo de tiempo discreto $t = 0, 1, 2 \dots$. En cada momento t , cada jugador por su cuenta elabora una expectativa del output que el rival lanza en el periodo siguiente para calcular las cantidades correspondientes a la maximización de su propia utilidad para el instante $t + 1$.

Sea $q_i(t)$ la cantidad producida por la empresa i en el momento t , $i = 1, 2$, el nivel de producción para cada empresa para el periodo $t + 1$ se decide resolviendo los problemas de optimización que siguen.

$$\begin{cases} q_1(t + 1) = \operatorname{argmax}_{q_1} W_1(q_1(t), q_2^e(t + 1)) \\ q_2(t + 1) = \operatorname{argmax}_{q_2} W_2(q_1^e(t + 1), q_2(t)) \end{cases}$$

Donde $q_j^e(t + 1)$ representa las expectativas que la empresa i realiza sobre la cantidad que produce la empresa j en el periodo siguiente $t + 1$.

En el caso de que el problema tuviese una única solución, puede expresarse como las funciones de mejor respuesta de cada empresa.

$$\begin{cases} q_1(t+1) = R_1(q_2^e(t+1)) \\ q_2(t+1) = R_2(q_1^e(t+1)) \end{cases}$$

3.1.1. Expectativas Naïve o ingenuas.

Constituye el caso más simple y describe la estrategia de los jugadores cuando suponen que en el periodo $t+1$ su rival mantiene el nivel de output del periodo t , es decir, $q_j^e(t+1) = q_j(t) \forall i = 1, 2$, dando lugar al sistema dinámico que sigue.

$$\begin{cases} q_1(t+1) = R_1(q_2(t)) \\ q_2(t+1) = R_2(q_1(t)) \end{cases} \quad (8)$$

3.1.2. Expectativas adaptativas.

Bajo este tipo de esquema los jugadores calculan su nivel de producción con una ponderación entre las cantidades del último periodo y su función de mejor respuesta, tomando las ecuaciones dinámicas la siguiente expresión.

$$\begin{cases} q_1(t+1) = \xi_1 q_1(t) + (1 - \xi_1) R_1(q_2(t)) \\ q_2(t+1) = \xi_2 q_2(t) + (1 - \xi_2) R_2(q_1(t)) \end{cases} \quad (9)$$

Se define ξ_1 y ξ_2 como parámetros de ponderación por lo que su valor va de 0 hasta 1.

3.1.3. Regla del gradiente.

En este esquema de expectativas, al no tener información completa del mercado, las empresas toman sus decisiones de producción basándose en un conocimiento local de su utilidad marginal: $\frac{\partial W_i}{\partial q_i}$; y no en la función de mejor respuesta, tal como están basados los esquemas de expectativas anteriores. De este modo, si dicha utilidad marginal es positiva las empresas aumentarían su producción y si es negativa la reducirían. Las ecuaciones dinámicas de las empresas tienen el aspecto que sigue.

$$\begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) + \phi_1 q_1(t) \frac{\partial W_1(t)}{\partial q_1} \\ q_2(t+1) = q_2(t) + \phi_2 q_2(t) \frac{\partial W_2(t)}{\partial q_2} \end{cases} \quad (10)$$

En este supuesto ϕ_1 y ϕ_2 son parámetros positivos y representan la velocidad de ajuste del jugador 1 y 2 respectivamente.

3.2. SOLUCIÓN DEL MODELO DINÁMICO .

3.2.1. Modelo dinámico con expectativas Naïve o ingenuas.

En el esquema de expectativas ingenuas el nivel de output de cada empresa en cada momento del tiempo queda determinado por su función de mejor respuesta, suponiendo que la empresa rival mantiene el nivel de producción del periodo anterior. Sustituyendo (5) y (6) en (8) queda el siguiente sistema dinámico.

$$T_N: \begin{cases} q_1(t+1) = \frac{1 - q_2(t) - c}{2} \\ q_2(t+1) = \frac{1 - q_1(t) - \lambda c}{2} \end{cases}$$

El equilibrio o punto estacionario es aquel en el que la cantidad producida se mantiene constante a lo largo del tiempo, lo que significa que debe cumplirse que $q_i(t+1) = q_i(t) = q_i^*$, $\forall i = 1, 2$. Resolviendo el sistema por sustitución se obtiene el equilibrio.

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{1 + (\lambda - 2)c}{3} \\ q_2^* = \frac{1 + (1 - 2\lambda)c}{3} \end{cases}$$

Este par de cantidades constituye un equilibrio de Nash puesto que cada empresa lanza la cantidad de output que maximiza su utilidad dada la función de mejor respuesta de su competidora en el periodo anterior, y corresponde al equilibrio del modelo estático.

$$EN(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{1 + (\lambda - 2)c}{3}, \frac{1 + (1 - 2\lambda)c}{3} \right)$$

Análisis de la estabilidad del equilibrio.

Para que el equilibrio obtenido sea asintóticamente estable debe cumplirse que el módulo de los valores propios de la matriz jacobiana de T_N en el punto de equilibrio sean menores que 1³.

La jacobiana de T_N en el punto de equilibrio es:

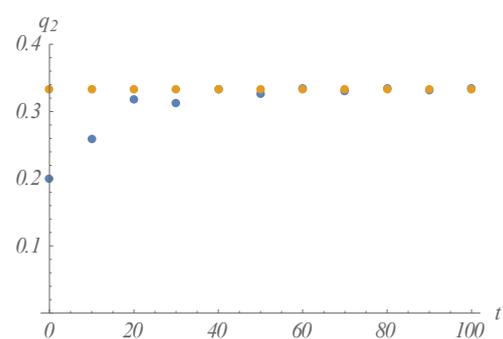
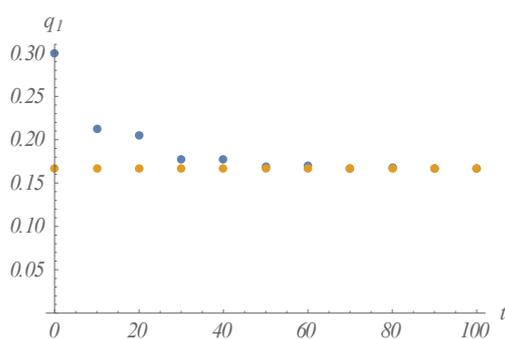
$$J T_N (EN(q_1^*, q_2^*)) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando el determinante de la matriz $(J T_N (EN(q_1^*, q_2^*)) - \mu Id)$ a cero, donde Id es la matriz identidad, se obtiene la siguiente ecuación característica:

$$(-\mu)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

Despejando μ se obtienen los valores propios $\mu_1 = -\frac{1}{2}$ y $\mu_2 = \frac{1}{2}$ cuyo valor absoluto es menor que 1.

Con esto queda demostrado que bajo el esquema de expectativas Naïve o ingenuas, el equilibrio de Nash es asintóticamente estable.



³ Para un análisis más exhaustivo ver Gandolfo (1976) y Fernández, Vázquez y Vegas (2003).

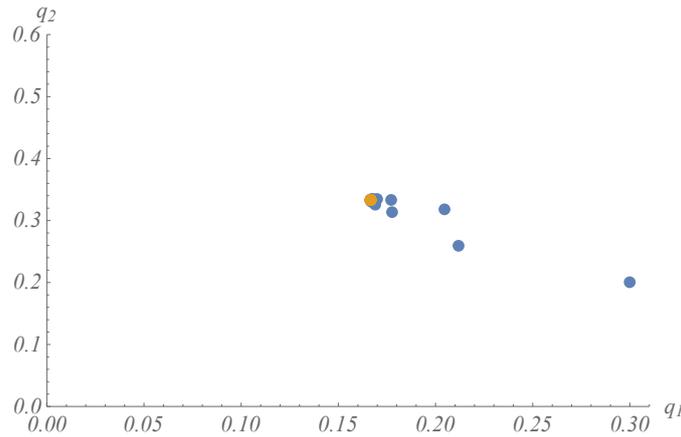


Figura 2. $\lambda = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{3}$ $q_1(0) = 0.3, q_2(0) = 0.2$

En la figura se muestra, en el gráfico superior, cómo las cantidades q_1 y q_2 se ajustan gradualmente a las cantidades de equilibrio cuando se parte de una situación inicial en la que no se está en equilibrio. Se observa que las trayectorias de q_1 y q_2 convergen al punto de equilibrio.

El gráfico de la parte inferior se conoce como plano de fases o plano de estados, y en él se detalla los pasos de q_1 y q_2 desde el instante $t = 0$ hasta que llegan al equilibrio de Nash (punto amarillo), que es un atractor, ya que es un conjunto que atrae las trayectorias – de un entorno próximo - de las cantidades hacia él.

3.2.2. Modelo dinámico con expectativas adaptativas.

El esquema de expectativas adaptativas constituía la decisión de producción de las empresas en el instante $t + 1$ mediante una ponderación entre cantidad producida en t y función de reacción. Sustituyendo (5) y (6) en (9) se obtiene:

$$T_A: \begin{cases} q_1(t + 1) = \xi_1 q_1(t) + (1 - \xi_1) \left[\frac{1 - q_2(t) - c}{2} \right] \\ q_2(t + 1) = \xi_2 q_2(t) + (1 - \xi_2) \left[\frac{1 - q_1(t) - \lambda c}{2} \right] \end{cases}$$

Para facilitar los cálculos se supondrá que el parámetro de ponderación es el mismo para ambas empresas $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ y por tanto $(1 - \xi_1) = (1 - \xi_2) = (1 - \xi) \forall \xi \in [0, 1)$. El esquema queda de la siguiente forma.

$$T_A: \begin{cases} q_1(t+1) = \xi q_1(t) + (1 - \xi) \left[\frac{1 - q_2(t) - c}{2} \right] \\ q_2(t+1) = \xi q_2(t) + (1 - \xi) \left[\frac{1 - q_1(t) - \lambda c}{2} \right] \end{cases} \quad (11)$$

Así, se determinan las estrategias de los jugadores mediante un sistema bidimensional lineal.

Para hallar el punto de equilibrio, debe cumplirse que a lo largo de t se lance la misma cantidad de output. En otras palabras debe cumplirse que $q_i(t+1) = q_i(t) = q_i^*$, $\forall i = 1, 2$, de forma que el equilibrio será aquel que cumpla lo siguiente:

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{1 - q_2^* - c}{2} \\ q_2^* = \frac{1 - q_1^* - \lambda c}{2} \end{cases}$$

La solución a dicho sistema corresponde a la misma que se obtuvo en el modelo estático. Por consiguiente, el equilibrio de Nash para expectativas adaptativas quedará de la siguiente forma:

$$EN(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{1 + (\lambda - 2)c}{3}, \frac{1 + (1 - 2\lambda)c}{3} \right)$$

Análisis de la estabilidad del equilibrio.

Para que el equilibrio obtenido sea asintóticamente estable debe cumplirse que los valores propios de la matriz jacobiana del sistema (11) en el punto (q_1^*, q_2^*) sean menores que uno en valor absoluto.

La matriz jacobiana de (11) es

$$J T_A(EN(q_1^*, q_2^*)) = \begin{pmatrix} \xi & -\frac{(1 - \xi)}{2} \\ -\frac{(1 - \xi)}{2} & \xi \end{pmatrix}$$

que es constante puesto que no depende de las cantidades producidas sino que depende del parámetro de ponderación.

Repitiendo el mismo proceso que en las expectativas Naïve, se iguala el determinante de la matriz $(J T_A (EN(q_1^*, q_2^*)) - \mu Id)$ a cero y se obtiene la ecuación característica

$$(\xi - \mu)^2 - \frac{(1 - \xi)^2}{4} = 0$$

de donde se obtiene que los valores propios son

$$\mu_1 = \frac{3\xi - 1}{2}$$

$$\mu_2 = \frac{\xi + 1}{2}$$

y tal como está acotado el parámetro ξ cumplen que $-1 < \mu_1 < \mu_2 < 1$.

Con este resultado, queda probado que los valores propios de $J T_A (EN(q_1^*, q_2^*))$ son menores que uno en valor absoluto y por tanto queda demostrado que el equilibrio de Nash es asintóticamente estable.

Otra forma de analizar la estabilidad asintótica es mediante unas condiciones que garantizan que los valores propios de $J T_A (EN(q_1^*, q_2^*))$ tienen un módulo menor que la unidad. Estas condiciones son las tres condiciones de Shur, y pueden analizarse más detalladamente en los manuales de Fernández, Vázquez y Vegas (2003) y Gandolfo (1976).

$$i) 1 - \text{Traza } J T_A (EN(q_1^*, q_2^*)) + \text{Det } J T_A (EN(q_1^*, q_2^*)) > 0$$

$$ii) 1 + \text{Traza } J T_A (EN(q_1^*, q_2^*)) + \text{Det } J T_A (EN(q_1^*, q_2^*)) > 0$$

$$iii) 1 - \text{Det } J T_A (EN(q_1^*, q_2^*)) > 0$$

Se halla la traza y el determinante de la matriz jacobiana en el punto.

- $Traza J T_A(EN(q_1^*, q_2^*)) = 2\xi$.
- $Det J T_A(EN(q_1^*, q_2^*)) = \xi^2 - \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^2$

Se sustituyen los resultados en la condición *i)* de forma que queda:

$$i) 1 - 2\xi + \xi^2 - \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^2 > 0$$

que es equivalente a

$$(1 - \xi)^2 - \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^2 > 0$$

sacando factor común a $(1 - \xi)^2$ queda

$$\frac{3}{4}(1 - \xi)^2 > 0$$

donde se ve claramente que la expresión es positiva para cualquier valor de ξ distinto de 1. Como ξ está definido entre 0 y 1 (este último no se incluye) se puede afirmar que la primera condición de Shur se cumple para valores de ξ tales que

$$\xi \in [0, 1)$$

Se sustituye en segundo lugar la traza y el determinante en la condición *ii)* y queda de la siguiente manera:

$$ii) 1 + 2\xi + \xi^2 - \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^2 > 0$$

desarrollando el paréntesis y operando la expresión anterior se simplifica en

$$\frac{3 + 10\xi + 3\xi^2}{4} > 0$$

donde claramente se ve, tal como está definido ξ , que la desigualdad se cumple para cualquier valor de este.

Así que la segunda condición de Shur se cumple siempre ya que el parámetro ξ es siempre positivo.

Finalmente se comprueba la condición *iii)* sustituyendo el determinante en la expresión correspondiente.

$$iii) 1 - \left(\xi^2 - \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^2\right) > 0$$

que con la aplicación de identidades notables y sacando factor común se puede dejar como

$$\frac{(1 - \xi)(5 + 3\xi)}{4} > 0$$

donde se ve claramente que los valores de ξ para los cuales no se cumple la desigualdad son aquellos que igualen o superen la unidad. Tal como está definido ξ esto no va a ocurrir luego la tercera condición se cumple siempre.

Demostradas las tres condiciones de estabilidad que aseguran que los valores propios de la matriz jacobiana en el punto de equilibrio son menores que el valor absoluto de 1, se concluye que bajo el esquema de expectativas adaptativas el equilibrio de Nash es, para valores de $\xi \in [0, 1)$, asintóticamente estable. Independiente de los costes y sobre todo de la ponderación entre beneficios y ventas (representada por λ), la evolución de la decisión de producción tomada por los managers se dirige hacia las cantidades de equilibrio.

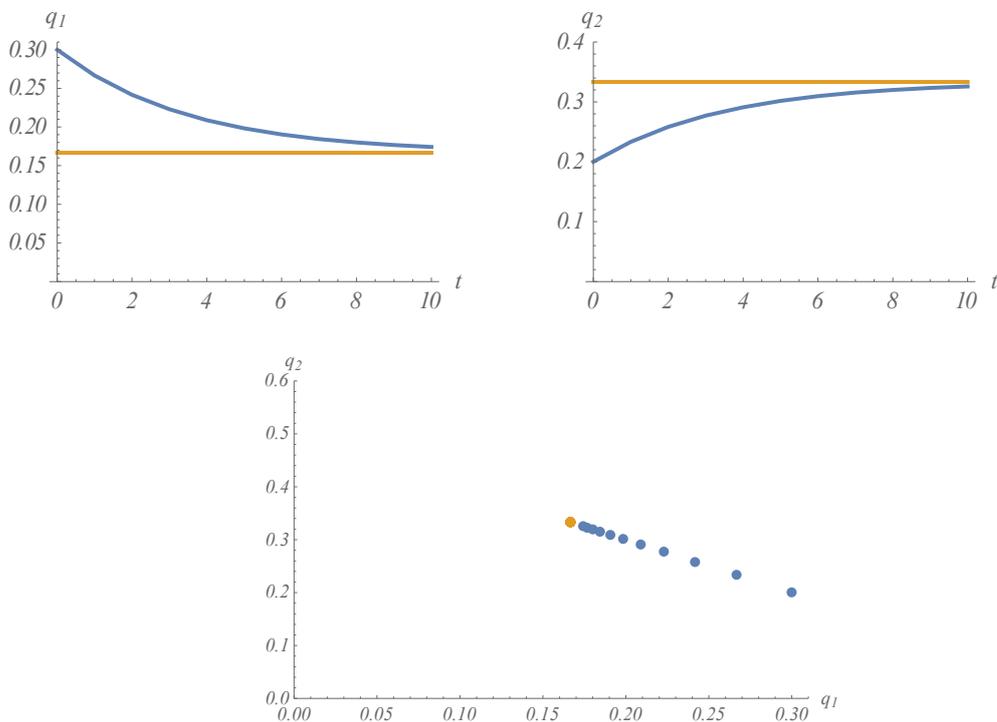


Figura 3. $\xi = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{3}, q_1(0) = 0.3, q_2(0) = 0.2$

En los gráficos de la parte superior de la Figura 3, a diferencia de cómo se ha representado en la Figura 2, se han unido los puntos de cada periodo t para dibujar una trayectoria más clara hacia el equilibrio.

Al igual que en el caso de las expectativas Naïve, los gráficos muestran cómo, por separado, y partiendo de una situación inicial en la que las cantidades son distintas a las del equilibrio, se lleva a cabo un proceso de ajuste en el que conforme avanzan los periodos, las cantidades q_1 y q_2 se aproximan a las de equilibrio hasta alcanzarlo.

En el gráfico inferior se observa el plano de fases. En él se puede ver como los pares de cantidades q_1 y q_2 se dirigen al equilibrio de Nash (punto amarillo) hasta alcanzarlo, lo que indica que, nuevamente, el equilibrio de Nash es un atractor.

3.2.3. Modelo dinámico con la regla del gradiente.

En el esquema de la regla del gradiente, las empresas tomaban sus decisiones de producción en $t+1$ basándose en una estimación local de su utilidad marginal en el instante t . Sustituyendo $\frac{\partial W_i}{\partial q_i} \forall i = 1, 2$ de (3) y (4) en (10) queda el sistema no lineal

$$T_G: \begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) + \phi_1 q_1(t)[1 - 2q_1(t) - q_2(t) - c] \\ q_2(t+1) = q_2(t) + \phi_2 q_2(t)[1 - q_1(t) - 2q_2(t) - \lambda c] \end{cases}$$

Para simplificar los cálculos, también se supondrá en este caso que ambos jugadores tienen la misma velocidad de ajuste de tal forma que $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, y como se dijo anteriormente $\phi > 0$. El sistema anterior queda de la siguiente forma:

$$T_G: \begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) + \phi q_1(t)[1 - 2q_1(t) - q_2(t) - c] \\ q_2(t+1) = q_2(t) + \phi q_2(t)[1 - q_1(t) - 2q_2(t) - \lambda c] \end{cases} \quad (12)$$

Esta forma funcional, que determina las estrategias de cada jugador es un sistema bidimensional no lineal y describe la evolución de la cantidad de output lanzada por cada empresa a lo largo del tiempo.

Para que se alcance el punto de equilibrio tiene que cumplirse que $q_i(t+1) = q_i(t) = q_i^*$, $\forall i = 1, 2$, de modo que los equilibrios E serían aquellos que cumplan el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \phi q_1^*[1 - 2q_1^* - q_2^* - c] = 0 \\ \phi q_2^*[1 - q_1^* - 2q_2^* - \lambda c] = 0 \end{cases}$$

La única solución interior⁴ del sistema y que corresponde al equilibrio de Nash es:

$$EN(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{1 + (\lambda - 2)c}{3}, \frac{1 + (1 - 2\lambda)c}{3} \right)$$

que corresponde de nuevo al equilibrio del modelo estático.

Análisis de la estabilidad del equilibrio.

Para analizar la estabilidad del equilibrio de Nash se considera la matriz jacobiana del sistema (12) en el punto $EN(q_1^*, q_2^*)$ y se aplican las condiciones de Schur.

La matriz jacobiana de (12) en el punto de equilibrio queda:

$$J T_G(EN(q_1^*, q_2^*)) = \begin{pmatrix} 1 - 2\phi \left[\frac{1 + (\lambda - 2)c}{3} \right] & -\phi \left[\frac{1 + (\lambda - 2)c}{3} \right] \\ -\phi \left[\frac{1 + (1 - 2\lambda)c}{3} \right] & 1 - 2\phi \left[\frac{1 + (1 - 2\lambda)c}{3} \right] \end{pmatrix}$$

Para que el equilibrio estacionario sea asintóticamente estable deben cumplirse las condiciones de Schur, que garantizan que los valores propios de la matriz jacobiana en el punto de equilibrio tengan módulo menor que 1.

- i) $1 - \text{Traza } J T_G(EN(q_1^*, q_2^*)) + \text{Det } J T_G(EN(q_1^*, q_2^*)) > 0$
- ii) $1 + \text{Traza } J T_G(EN(q_1^*, q_2^*)) + \text{Det } J T_G(EN(q_1^*, q_2^*)) > 0$
- iii) $1 - \text{Det } J T_G(EN(q_1^*, q_2^*)) > 0$

Se calcula el determinante y la traza.

- $\text{Traza } J T_G(EN(q_1^*, q_2^*)) = 2 - 2\phi \left[\frac{2 - (1 + \lambda)c}{3} \right]$
- $\text{Det } J T_G(EN(q_1^*, q_2^*)) = 1 - 2\phi \left[\frac{2 - (1 + \lambda)c}{3} \right] + \phi^2 \left[\frac{(1 + (\lambda - 2)c)(1 + (1 - 2\lambda)c)}{3} \right]$

⁴ El resto de soluciones son soluciones esquina $E_1 = \left(0, \frac{1 - \lambda c}{2}\right)$; $E_2 = \left(\frac{1 - c}{2}, 0\right)$; $E_3 = (0, 0)$; que no constituyen equilibrio de Nash y son equilibrios inestables.

En primer lugar se comprueba la condición *iii*). Sustituyendo el $Det J T_G(EN(q_1^*, q_2^*))$, la tercera condición toma la siguiente expresión

$$iii) 1 - \left(1 - 2\phi \left[\frac{2 - (1 + \lambda)c}{3} \right] + \phi^2 \left[\frac{(1 + (\lambda - 2)c)(1 + (1 - 2\lambda)c)}{3} \right] \right) > 0$$

que puede simplificarse y quedar de la siguiente forma

$$2 \left[\frac{2 - (1 + \lambda)c}{3} \right] - \phi \left[\frac{(1 + (\lambda - 2)c)(1 + (1 - 2\lambda)c)}{3} \right] > 0$$

despejando el parámetro ϕ se obtiene que la desigualdad anterior se cumple para valores de ϕ tales que

$$\phi < \phi_3 = 2 \frac{2 - (1 + \lambda)c}{(1 + (\lambda - 2)c)(1 + (1 - 2\lambda)c)}$$

siendo $\phi_3 > 0, \forall c < \frac{1}{2-\lambda} < \frac{2}{1+\lambda}$ y $\forall \lambda$ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$.

Se comprueba en segundo lugar la condición *ii*). Esta vez se sustituye la traza y el determinante y se simplifica, de manera que la expresión de la segunda condición queda como sigue.

$$ii) 4 - 4\phi \left[\frac{2 - (1 + \lambda)c}{3} \right] + \phi^2 \left[\frac{(1 + (\lambda - 2)c)(1 + (1 - 2\lambda)c)}{3} \right] > 0$$

Considerando la expresión $y = 4 - 4\phi \left[\frac{2 - (1 + \lambda)c}{3} \right] + \phi^2 \left[\frac{(1 + (\lambda - 2)c)(1 + (1 - 2\lambda)c)}{3} \right]$, la representación gráfica de esta curva en el plano (ϕ, y) corresponde a una parábola convexa que corta al eje de abscisas ya que la imagen del vértice es menor que cero, y además el valor de la abscisa del vértice coincide con el valor de ϕ_3 . Los valores de ϕ para los que la desigualdad anterior se cumple se hallan a partir de los puntos de corte de la parábola al eje horizontal ϕ_1 y ϕ_2 , que vienen dados por:

$$\phi < \phi_1 = 2 \frac{2 - (1 + \lambda)c - \sqrt{(2 - (1 + \lambda)c)^2 - 3(1 + (\lambda - 2)c)(1 + (1 - 2\lambda)c)}}{(1 + (\lambda - 2)c)(1 + (1 - 2\lambda)c)}$$

$$\phi > \phi_2 = 2 \frac{2 - (1 + \lambda)c + \sqrt{(2 - (1 + \lambda)c)^2 - 3(1 + (\lambda - 2)c)(1 + (1 - 2\lambda)c)}}{(1 + (\lambda - 2)c)(1 + (1 - 2\lambda)c)}$$

y cumplen que, tal como están definidos λ y c , el discriminante de la raíz es mayor que cero.

Entonces se verifica que la desigualdad *ii*) se cumple para todo ϕ que verifique $0 < \phi < \phi_1$ o $\phi > \phi_2$

Finalmente, sustituyendo de nuevo la traza y el determinante se comprueba la condición *i*).

$$i) 1 - \left(2 - 2\phi \left[\frac{2 - (1 + \lambda)c}{3} \right] \right) + 1 - 2\phi \left[\frac{2 - (1 + \lambda)c}{3} \right] + \phi^2 \left[\frac{(1 + (\lambda - 2)c)(1 + (1 - 2\lambda)c)}{3} \right] > 0$$

Dicha expresión se puede simplificar y queda como

$$\phi^2 \left[\frac{(1 + (\lambda - 2)c)(1 + (1 - 2\lambda)c)}{3} \right] > 0$$

Tal como está definido los parámetro λ y c , la desigualdad anterior se cumple para cualquier valor de ϕ . Esto significa que la primera condición de Shur se cumple siempre.

Las condiciones de Shur deben cumplirse simultáneamente, por lo que se comparan los tres ϕ_i obtenidos con el fin de averiguar para cuál de ellos se cumplen a la vez las tres condiciones de estabilidad. Las tres velocidades de ajuste obtenidas cumplen la siguiente relación:

$$\phi_1 < \phi_3 < \phi_2$$

Ante este resultado, se puede afirmar que los valores de ϕ para los que se verifican las tres condiciones de Shur son aquellos que cumplen $\phi < \phi_1$. Por tanto, el equilibrio de Nash, bajo expectativas de racionalidad limitada dadas por la regla del gradiente, es localmente y asintóticamente estable para todos los valores de $\phi \in [0, \phi_1)$. Por tanto, el umbral de estabilidad es tal que:

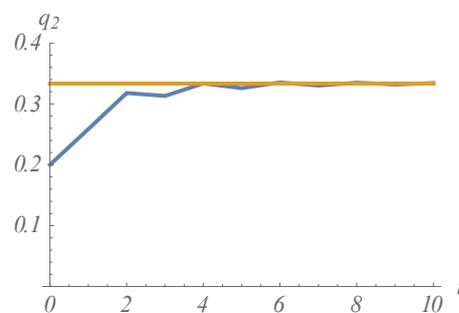
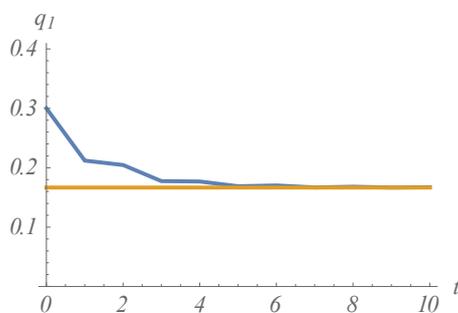
$$\hat{\phi}(\lambda, c) = 2 \frac{2 - (1 + \lambda)c - \sqrt{(2 - (1 + \lambda)c)^2 - 3(1 + (\lambda - 2)c)(1 + (1 - 2\lambda)c)}}{(1 + (\lambda - 2)c)(1 + (1 - 2\lambda)c)} \quad (13)$$

Para valores de la velocidad de ajuste iguales o mayores a este umbral, el equilibrio de Nash no es asintóticamente estable. Esto significa que cuando se produzca un shock exógeno, y la velocidad de ajuste iguale o supere el umbral de estabilidad, las trayectorias que se originan en las cantidades después de que dejen de tomar los valores de equilibrio se alejan de dichos valores.

El valor de $\hat{\phi}$ no es un valor constante, viene determinado por el parámetro λ y el coste marginal c , por tanto los valores de λ y c influyen en la estabilidad del equilibrio de Cournot. Las derivadas de (13) son poco esclarecedoras al respecto, es decir, al no saber su signo no se obtienen conclusiones sobre cómo afecta el parámetro de ponderación de incentivos y el coste marginal al umbral de estabilidad. Este análisis podría ser una extensión del presente trabajo, utilizando técnicas analíticas así como simulaciones.

Con las simulaciones del software Wolfram Mathematica se van a representar, para unos valores dados de λ y c , las diferentes situaciones que se dan conforme aumenta la velocidad de ajuste sobrepasando el valor del umbral que aparece para esos valores de los parámetros.

Para los valores que se han dado a los parámetros λ y c en las simulaciones presentadas anteriormente ($\lambda = \frac{1}{2}$ y $c = \frac{1}{3}$), el umbral de estabilidad en la simulación para la regla del gradiente es $\hat{\phi}(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = 2,5359$. A partir de este resultado, se procede a realizar simulaciones para valores de la velocidad de ajuste por debajo y por encima de dicho umbral.



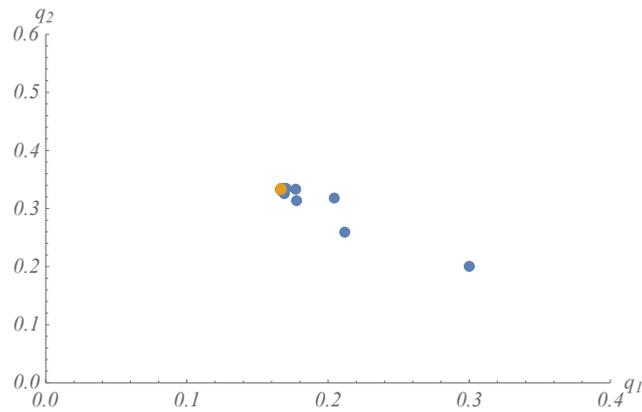


Figura 4. $\phi = 2.2$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $q_1(0) = 0.3$, $q_2(0) = 0.2$

En la figura 4 se muestra, en la parte superior y por separado, el proceso de ajuste de ambas cantidades q_1 y q_2 al equilibrio de Nash cuando se parte nuevamente de una situación fuera de él. Las trayectorias de q_1 y q_2 tienden al equilibrio ya que, como se ha demostrado antes, para valores de ϕ situados por debajo del umbral $\hat{\phi}$ el equilibrio de Nash es asintóticamente estable.

El gráfico de la parte inferior muestra el plano de estados. En él se observa cómo el par de cantidades q_1 y q_2 se acercan, periodo a periodo, al equilibrio de Nash hasta alcanzarlo. Una vez más el equilibrio de Nash es un atractor, ya que es un conjunto que atrae las trayectorias hacia él.

Las empresas ajustan gradualmente la producción, de más a menos variación en la cantidad, hasta que llega un instante a partir del cual mantienen el nivel de producción en los sucesivos periodos.

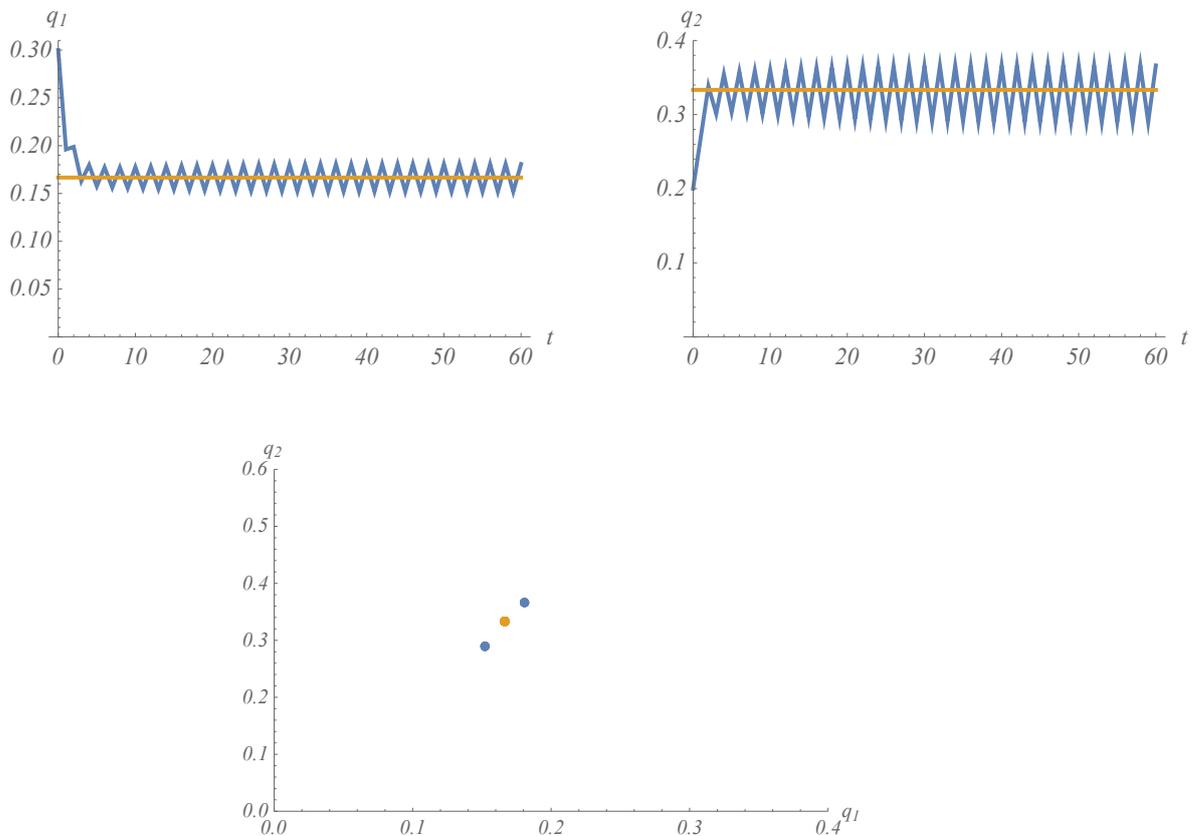


Figura 5. $\phi = 2.6$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $q_1(0) = 0.3$, $q_2(0) = 0.2$

En la figura 5 se muestra la evolución dinámica de q_1 y q_2 para un ϕ por encima del umbral de estabilidad, y con un horizonte temporal más amplio pues resulta de interés.

En los gráficos situados en la parte superior de la figura se observa, por separado, cómo las cantidades oscilan alrededor del equilibrio de Nash sin converger hacia este, puesto que no es asintóticamente estable. Se ve cómo en el largo plazo las cantidades toman sucesivamente dos valores que están por encima y por debajo del valor de equilibrio, lo que se conoce como un dos-ciclo.

El plano de estados muestra que el equilibrio de Nash no es atractor, sino que el atractor es un dos-ciclo. Sin embargo, a pesar de que el equilibrio no sea atractor, puede predecirse el nivel de producción puesto que se conoce el orden del ciclo. A medida de que se suceden los periodos, los jugadores observan y tienen en cuenta el comportamiento de las cantidades, concretamente de cómo estas toman valores por

encima y por debajo del de equilibrio; esto les permite predecir, en el largo plazo, el nivel de output.

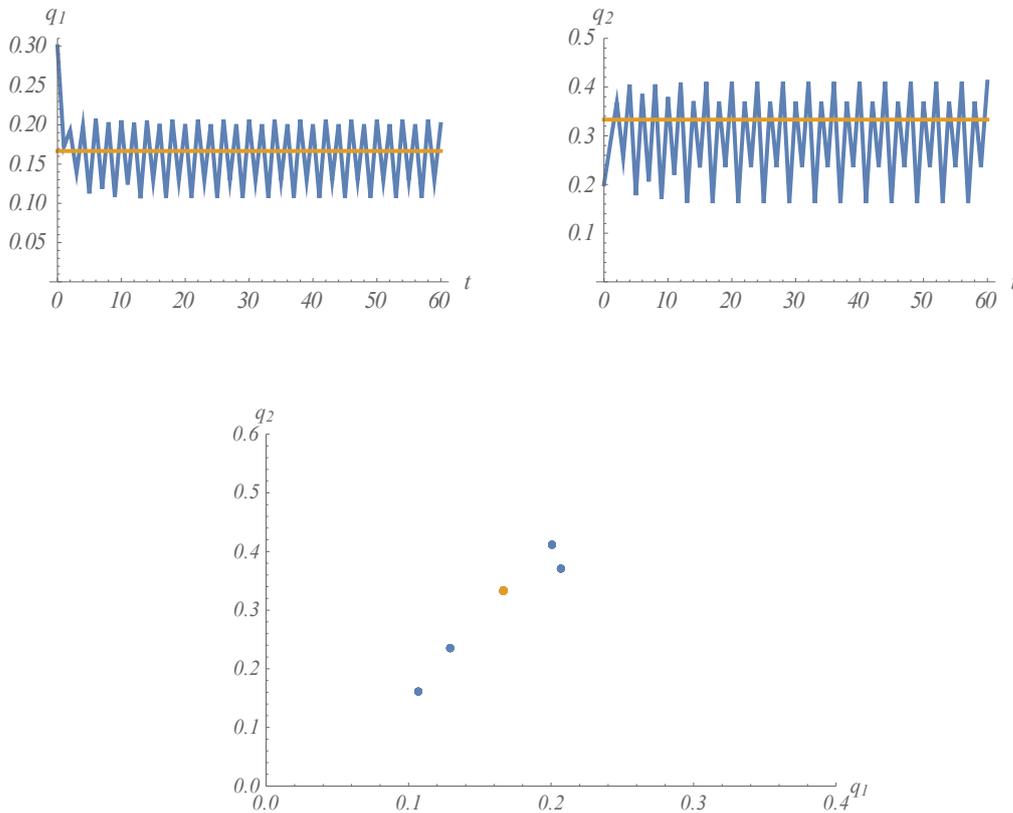


Figura 6. $\phi = 3.2, \lambda = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{3}, q_1(0) = 0.3, q_2(0) = 0.2$

En la figura 6 se muestra, al igual que en la figura 5, una simulación en la que el valor de la velocidad de ajuste ha superado el umbral de estabilidad, lo que supone que el equilibrio de Nash es inestable, es decir, a largo plazo no es alcanzado por las trayectorias solución.

En la parte superior de la figura se observa, a diferencia de lo que ocurre en la Figura 5, que las cantidades q_1 y q_2 toman de forma sucesiva cuatro valores diferentes alrededor del valor de equilibrio sin converger hacia este, lo que se denomina un 4-ciclo.

Este atractor 4-ciclo queda representado en el plano de estados. El equilibrio de Nash no es atractor, pero al conocerse el orden del ciclo puede predecirse el nivel de producción. Del mismo modo que en el caso anterior, las empresas tienen en cuenta el

comportamiento de las cantidades y aprenden de este para poder predecir, en el largo plazo, el nivel de producción.

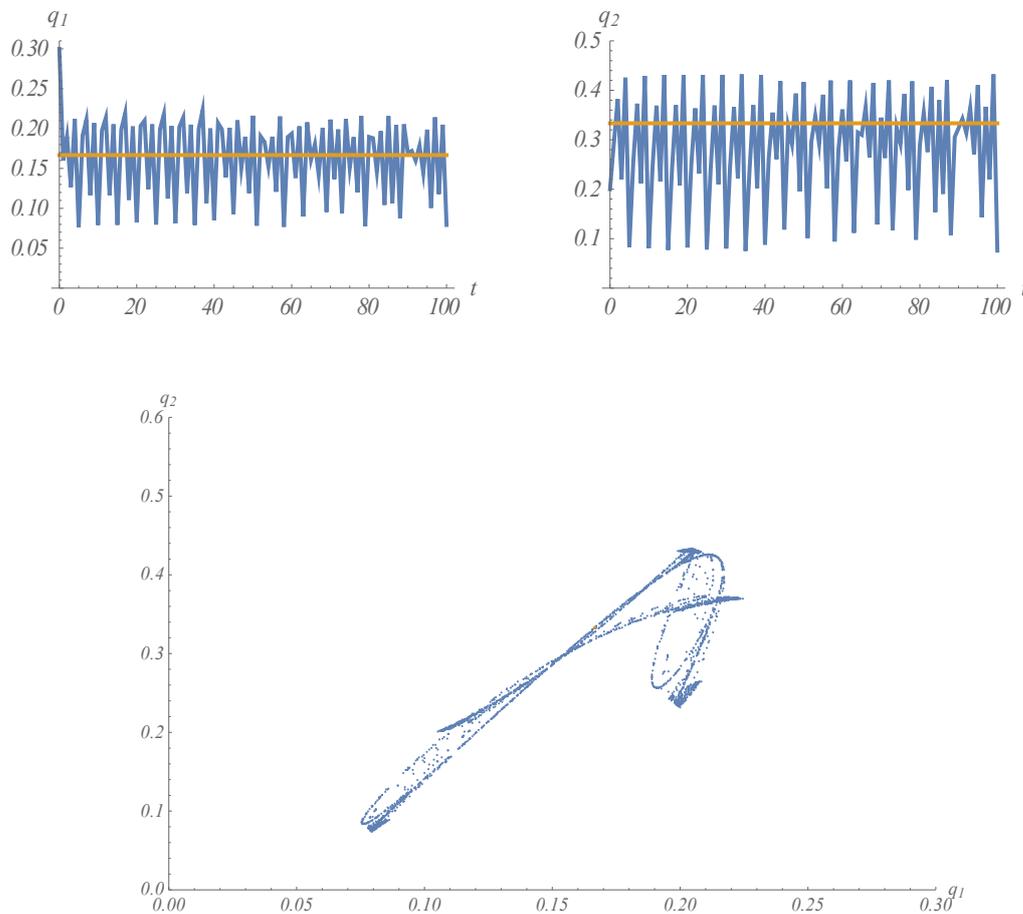


Figura 7. $\phi = 3.5$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $q_1(0) = 0.3$, $q_2(0) = 0.2$

En la figura 7 se ha incrementado más la velocidad de ajuste, lo que desemboca en que la evolución dinámica de las cantidades sea cada vez más compleja. En este caso, las trayectorias solución a largo plazo no toman una sucesión finita de valores, al contrario, fluctúan próximas al valor de equilibrio de una forma irregular.

El plano de fases muestra una vez más que el equilibrio de Nash no es atractor, y representa el conjunto de puntos al que convergen las cantidades, que no es un ciclo, sino un conjunto irregular conocido como atractor extraño.

Las figuras representadas en los tres esquemas de expectativas muestran solo una parte de las conclusiones que se pueden alcanzar con las herramientas de simulación. Las

trayectorias que han sido representadas son sensibles a las condiciones iniciales, de tal forma que, cambios en los valores iniciales de los parámetros λ y c afectan a la trayectoria de las cantidades, así como a los planos de fases.

4. CONCLUSIONES.

A lo largo del trabajo se ha analizado el comportamiento dinámico del equilibrio de Cournot-Nash en un duopolio con delegación estratégica en base a distintos esquemas de expectativas. Con los resultados obtenidos se pueden realizar algunos comentarios.

En primer lugar, tomando expectativas ingenuas o Naïve el equilibrio es asintóticamente estable. El hecho de que cada empresa suponga que su competidora va a mantener la misma cantidad de producción que el periodo anterior implica que la estabilidad asintótica del punto de equilibrio no se ve afectada ni por los costes de ambas empresas, ni por el modo en que los propietarios compensan a sus gerentes.

En el esquema de expectativas adaptativas, el equilibrio de Nash es también asintóticamente estable. Tal como se define el parámetro que pondera la cantidad producida en el periodo anterior y la función de mejor respuesta de cada empresa, ni los costes de las empresas, ni la forma en que los propietarios incentivan a sus managers influyen en la estabilidad del equilibrio.

En el caso de la regla del gradiente, la estabilidad asintótica del equilibrio de Nash se ve afectada por los costes y por el parámetro de ponderación de incentivos, ya que ambos parámetros afectan al umbral de la velocidad de ajuste que garantiza la estabilidad del equilibrio. Superado dicho umbral, cuanto mayor sea la velocidad de ajuste, las trayectorias del equilibrio son cada vez más irregulares y complejas.

El análisis de la influencia del parámetro de ponderación entre beneficios y ventas sobre la estabilidad del equilibrio, bajo las expectativas basadas en la regla del gradiente, supondría una ampliación de este trabajo con el consiguiente uso de técnicas analíticas, así como de simulaciones que permitiesen visualizar la posible influencia del propio parámetro sobre la estabilidad del equilibrio, manteniendo fijo el coste marginal y la velocidad de ajuste.

Finalmente, para cualquier esquema de expectativas utilizado, los equilibrios asintóticamente estables son atractores, ya que el punto de equilibrio atrae las trayectorias de las cantidades. Pasado el umbral de estabilidad, en el caso de la regla del gradiente, los equilibrios de Nash no son atractores aunque si se conoce el orden del ciclo se puede predecir el nivel de output. Sin embargo a partir de un determinado valor de la velocidad de ajuste, el conjunto de puntos al que tiende la trayectoria solución es un conjunto irregular llamado atractor extraño y el nivel de producción no es predecible ya que no se conoce el orden de ciclo debido a la compleja trayectoria del equilibrio observada en el plano de fases.

Bibliografía

AGUILÓ, I.; ARBONA, J.M.; CAPÓ, A.; VALERO, O. (2006): *Mètodes matemàtics en dinàmica econòmica*. Ed. Col·lecció Materials Didàctics, Palma.

CRESPO ESTAGE, D. (2014): *Dinàmica del modelo de Hotelling con costes cuadráticos*. <http://zaguan.unizar.es/record/17136/files/TAZ-TFG-2014-2317.pdf>, Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

FERNÁNDEZ PÉREZ, C.; VÁZQUEZ HERNÁNDEZ, F. J.; VEGAS MONTANER, J. M. (2003): *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos*. Ediciones Thomson, Madrid.

GANDOLFO, G. (1976): *Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica*. Edit. Tecnos, Madrid.

KREPS, M. D. (1995): *Curso de Teoría Microeconómica*. Ed. McGraw-Hill, Madrid.

MANASAKIS, C.; MITROKOSTAS, E.; PETRAKIS, E. (2010) “Endogenous Managerial Incentive Contracts in a Differentiated Duopoly, With and Without Commitment”. *Managerial and decisión economics*. Nº 31. Pag. 531-543

MENDES, A. D.; MENDES, M. V.; GOMES, O. (2008): “Complex Dynamics in Simple Cournot Duopoly Games”. *ISCTE, UNIDE, Economics Research Centre, Working Papers*.

PÉREZ-GRASA, I.; MINGUILLÓN, E.; JARNE, G. (2001): *Matemáticas para la Economía. Programación Matemática y Sistemas Dinámicos*. Ed. McGraw-Hill, Madrid.

PINDYCK, S. R.; RUBINFELD, L. D. (2009): *Microeconomía*. Ed. Pearson, Madrid.

SKLIVAS, D. S. (1987): “The Strategic Choice of Managerial Incentives”. *The RAND Journal of Economics*. Vol. 18, Nº 3. Pag. 452-458.

VARIAN, R. H (1993): *Análisis microeconómico*. Ed. Antoni Bosch, (Madrid).