Aplicaciones de estimaciones de C_0-semigrupos en ecuaciones en derivadas parciales vectoriales

Luciano Abadias Ullod

Máster en Iniciación a la Investigación en Matemáticas
Trabajo realizado bajo la supervisión del Dr. D. Pedro José Miana Sanz

Índice

Notación

$\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales (sin el cero): $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

$C(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ continua}\}$.

$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ continua y } \lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0\}$.

$C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ indefinidamente derivable}\}$.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ son las funciones reales de la clase de Schwartz.

$L^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ medible y } \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx < \infty\}$.

Dado un espacio de Banach X, $\mathcal{L}(X)$ representa el espacio de operadores lineales y continuos en X.

Tanto $\hat{}$ como $\mathcal{F}$ representan el operador Transformada de Fourier, para el que se especificará en cada caso con cual de sus definiciones se está trabajando.

Δ es el operador de Laplace, es decir, dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Delta f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f$.

Γ es la función gamma de Euler.

Introducción

El principal objetivo de este trabajo es la demostración de desigualdades de funciones reales las cuales son soluciones de ciertas ecuaciones en derivadas parciales. Estas ecuaciones diferenciales involucran potencias fraccionarias de operadores.

El punto de partida de este trabajo es el artículo [1], el cual resumimos en el primer capítulo de esta memoria. Brevemente, dada una función $\theta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ con buenas propiedades de suavidad y que verifica la ecuación

$$(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla)\theta = -k(-\Delta^{\frac{\alpha}{2}})\theta,$$

donde el vector u satisface que $\nabla \cdot u = 0$ y $0 \leq \alpha \leq 2$, entonces se cumple la desigualdad puntual

$$2\theta\Lambda^\alpha\theta(x) \geq \Lambda^\alpha\theta^2(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\Lambda = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$. La demostración involucra la representación integral de las potencias fraccionarias del Laplaciano $(-\Delta)$.

Una de las aplicaciones de esta desigualdad es la obtención de otras desigualdades en la norma $\| \quad \|_p$ de la función θ,

$$\|\theta(\cdot, t)\|_p^p \leq \frac{\|\theta_0\|_p^p}{(1 + \varepsilon Ct\|\theta_0\|_p^{p\varepsilon})^{\frac{1}{\varepsilon}}},$$

con $1 < p < \infty$, $t \geq 0$ y $\varepsilon = \frac{\alpha}{n(p-1)}$. Notemos que esta fórmula proporciona el L^p-decaimiento en el infinito de la función θ.

En esta memoria estudiamos si desigualdades del mismo tipo se cumplen para funciones que sean soluciones de ecuaciones similares en las que aparecen otros operadores (generadores de semigrupos).

Es bien conocido que el operador de Laplace $(-\Delta)$ es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de operadores (el semigrupo gaussiano) en el espacio de Banach $X = L^p(\mathbb{R}^n)$. En el capítulo tercero presentamos una breve introducción de la teoría de C_0-semigrupos y remitimos a las monografías [5, 6, 7] para un desarrollo más profundo.

La integración vectorial de Bochner, herramienta básica en el trabajo realizado, se trata brevemente en el capítulo segundo de esta memomia.

Por último, en el cuarto capítulo presentamos los resultados que hemos obtenido para semigrupos de convolución con valores reales. Estos resultados, en particular, extienden a los presentados en [1]. En un estudio posterior pretendemos probar resultados análogos para funciones con valores vectoriales.

1. Una estimación puntual para derivadas fraccionarias con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales

Este capítulo es un resumen de [1], el cual nos marca la linea de trabajo que debemos seguir para poder generalizar los resultados.

1.1. Estimacion puntual

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, denotamos por $\widehat{f}$ su Transformada de Fourier, es decir,

$$\widehat{f}(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i\eta\cdot x}\, dx.$$

Así usando propiedades de la Transformada de Fourier se tiene que:

$$\begin{aligned} \widehat{(-\Delta f)}(x) &= -\sum_{j=1}^{n} \widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}}(x) \\ &= -\sum_{j=1}^{n} (ix_j)^2 \widehat{f}(x) = |x|^2 \widehat{f}(x). \end{aligned}$$

Como la Transformada de Fourier es un isomorfismo en $L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos definir formalmente las potencias fraccionarias del Laplaciano, $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ con $\alpha \geq 0$, de la siguiente forma:

$$\widehat{(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}} f(x) := |x|^\alpha \widehat{f}(x).$$

Llamando $\Lambda = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$, se cumple

$$\widehat{(\Lambda)^\alpha f}(x) := |x|^\alpha \widehat{f}(x).$$

Siguiendo [4, pág.117], se llama integral fraccionaria o potencial de Riesz de orden $\alpha \geq 0$ al operador, I^α, que verifica

$$\widehat{I^\alpha f}(x) = |x|^{-\alpha} \widehat{f}(x).$$

Observar que

$$I^\alpha \widehat{(\Lambda^\alpha)} f = \widehat{f},$$

luego $\widehat{I^\alpha \Lambda^\alpha} = Id_{\mathbb{R}^n}$. Además

* $I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$

* $\Lambda^\alpha \Lambda^\beta = \Lambda^{\alpha+\beta}$

Para trabajar mejor nos interesaría obtener una representación de estos operadores, ya que hasta ahora solo tenemos una representación de sus Transformadas de Fourier. Pues bien, usando la propiedad bien conocida de que $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$, y que $(\widehat{|x|^{\alpha-n}}) = k_{\alpha,n}|x|^{-\alpha}$ con $k_{\alpha,n}$ constante positiva y $0 < \alpha < n$, lo cual aparece en [3] y [4], se tiene que

$$I^\alpha f(x) = c_{\alpha,n}(|x|^{\alpha-n} * f)(x) = c_{\alpha,n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy,$$

con $c_{\alpha,n}$ constante positiva y $0 < \alpha < n$. Usando esto se obtiene:

Proposición 1.1. *Sea* $0 < \alpha < 2$, $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *entonces*

$$\Lambda^\alpha \theta(x) = c_\alpha \, P.V \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta(x) - \theta(y)}{|x-y|^{n+\alpha}}\, dy,$$

con c_α *constante positiva.*

Demostración. Aparece en [2] □

Teorema 1.1. *Sea* $0 \leq \alpha \leq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$ *con* $n \geq 1$ *y* $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Entonces se verifica que*

$$2\theta\Lambda^\alpha\theta(x) \geq \Lambda^\alpha\theta^2(x).$$

Demostración. Para $\alpha = 0$, tenemos

$$2\theta\Lambda^0\theta(x) = 2\theta^2(x) \geq \theta^2(x).$$

Para $\alpha = 2$, tenemos

$$2\theta\Lambda^2\theta(x) = 2\theta(-\Delta\theta)(x),$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} -\Delta\theta^2(x) &= -\sum \frac{\partial^2\theta^2(x)}{\partial x_j^2} \\ &= -2\sum\left(\frac{\partial\theta(x)}{\partial x_j}\right)^2 - 2\theta(x)\sum\frac{\partial^2\theta(x)}{\partial x_j^2} \\ &\leq -2\theta(\Delta\theta)(x)). \end{aligned}$$

Falta ver el caso $0 < \alpha < 2$. Para $n \geq 2$ usando la fórmula de la proposición anterior se tiene

$$\begin{aligned} \theta\Lambda^\alpha\theta(x) &= c_\alpha \, P.V \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta^2(x) - \theta(y)\theta(x)}{|x-y|^{n+\alpha}}\, dy \\ &= \frac{1}{2}c_\alpha \, P.V \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\theta(x)-\theta(y))^2}{|x-y|^{n+\alpha}}\, dy + \frac{1}{2}c_\alpha \, P.V \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta^2(x) - \theta^2(y)}{|x-y|^{n+\alpha}}\, dy \\ &\geq \frac{1}{2}\Lambda^\alpha\theta^2(x). \end{aligned}$$

Para el caso $n = 1$, dada una función $\psi(x_1)$ de la clase de Schwartz, defino la función $\phi_\delta(x_1, x_2) = \psi(x_1)e^{-\pi\delta x_2^2}$ que pertenece a la clase de Schwartz en $\mathbb{R}^2$ para todo $\delta > 0$. Así

$$\begin{aligned} 2\psi(x_1)\Lambda^\alpha\psi(x_1) &= \lim_{\delta\to 0} 2\phi_\delta(x_1, x_2)\Lambda^\alpha\phi_\delta(x_1, x_2) \\ &\geq \lim_{\delta\to 0} \Lambda^\alpha\phi_\delta^2(x_1, x_2) \\ &= \Lambda^\alpha\psi^2(x_1). \end{aligned}$$

□

1.2. L^p-Decaimiento

El objetivo es conseguir cotas de decaimiento para las normas de funciones solución de ciertas ecuaciones en derivadas parciales. En este apartado vamos a considerar $\theta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ verificando

$$(\partial_t + u \cdot \nabla)\theta = -k\Lambda^\alpha\theta,$$

donde el vector u satisface que $\nabla \cdot u = 0$ ó $u_i = G_i(\theta)$, junto con las propiedades necesarias de suavidad y decaimiento en el infinito que necesitemos usar en la integración por partes de las siguientes demostraciones.

Lema 1.1. *Sea $0 \leq \alpha \leq 2$ y $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces se sigue que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{p-2}\theta\Lambda^\alpha\theta\, dx \geq \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta^{\frac{p}{2}}|^2\, dx,$$

donde $p = 2^j$ con j entero positivo.

Demostración. Aplicando la desigualdad puntual del teorema anterior tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{p-2}\theta\Lambda^\alpha\theta\, dx &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{p-2}\Lambda^\alpha\theta^2\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{p-4}\theta^2\Lambda^\alpha\theta^2\, dx \\ &\geq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{p-4}\Lambda^\alpha\theta^4\, dx \\ &\geq \frac{1}{2^k}\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{p-2^k}\Lambda^\alpha\theta^{2^k}\, dx \end{aligned}$$

Tomando $k = j - 1$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{p-2}\theta\Lambda^\alpha\theta\, dx \geq \frac{1}{2^{j-1}}\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{\frac{p}{2}}\Lambda^\alpha\theta^{\frac{p}{2}}\, dx.$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta^{\frac{p}{2}}|^2\,dx &= \|\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta^{\frac{p}{2}}\|_2^2 = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\|\widehat{\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta^{\frac{p}{2}}}\|_2^2 \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\frac{\alpha}{2}}\widehat{\theta^{\frac{p}{2}}}|x|^{\frac{\alpha}{2}}\widehat{\theta^{\frac{p}{2}}}\,dx \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\theta^{\frac{p}{2}}}|x|^{\alpha}\widehat{\theta^{\frac{p}{2}}}\,dx \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\theta^{\frac{p}{2}}}\widehat{\Lambda^{\alpha}\theta^{\frac{p}{2}}}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \theta^{\frac{p}{2}}\Lambda^{\alpha}\theta^{\frac{p}{2}}\,dx
\end{aligned}
$$

Luego se tiene que

$$
\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{p-2}\theta\Lambda^{\alpha}\theta\,dx \geq \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta^{\frac{p}{2}}|^2\,dx.
$$

□

Observar que en las condiciones del lema anterior, es decir, con $p = 2^j$, $j \geq 1$ y θ cumpliendo la ecuación en derivadas parciales se verifica que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\theta\|_p^p &= \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^p\,dx\right) = p\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{p-1}\frac{\partial|\theta|}{\partial t}\,dx \\
&= p\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{p-2}\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}\,dx = p\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{p-2}\theta(-u\cdot\nabla\theta - k\Lambda^{\alpha}\theta)\,dx
\end{aligned}
$$

Como u verifica que $\nabla \cdot u = 0$ ó $u_i = G_i(\theta)$, vamos a distinguir estos casos:

* Si $\nabla \cdot u = 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{p-2}\theta\, u\cdot\nabla\theta\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{n} |\theta|^{p-2}\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_j}u_j\,dx \\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} |\theta|^{p-1}\frac{\partial|\theta|}{\partial x_j}u_j\,dx_j\right)d\widehat{x} \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|\theta|^p}{p}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\,dx_j\right)d\widehat{x} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\theta|^p}{p}\nabla\cdot u\,dx = 0,
\end{aligned}
$$

sin más que hacer integración por partes, usando en ella que las funciones θ y u_j decaen en el infinito hacia cero y que son suficientemente diferenciables. Observar que $d\widehat{x}$ significa que estamos integrando en todas las variable excepto en la x_j correspondiente al índice de sumación.

* Si $u_i = G_i(\theta)$ para todo $i = 1, \dots, n$ se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{p-2}\theta\, u\cdot\nabla\theta\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{n} |\theta|^{p-2}\theta\, G_j(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\, dx\\ &= \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left[\frac{(|\theta|^{p-2}\theta G_j(\theta))^2}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} d\widehat{x}\\ &= 0,\end{aligned}$$

teniendo en cuenta el decaimiento de las funciones θ y u_j hacia cero en el infinito.

Proposición 1.2. *Sea $0 \leq \alpha \leq 2$, $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en la condiciones de esta sección y $p = 2^j$ con j entero positivo, entonces*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\theta\|_p^p &= -kp\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{p-2}\theta\Lambda^\alpha\theta\, dx\\ &\leq -k\int_{\mathbb{R}^n} |\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta^{\frac{p}{2}}|^2\, dx.\end{aligned}$$

En el Capítulo V de [4], aparece un Lema de Hardy-Littlewood-Sobolev, el cuál nos dice que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la clase de Schwartz, $0 < \beta < n$, y $1 < l < q < \infty$ con $q = \frac{ln}{n-\beta l}$, entonces

$$C\|f\|_q \leq \|\Lambda^\beta f\|_l.$$

Si tomamos $l = 2$, $\beta = \frac{\alpha}{2}$, y por consiguiente $q = \frac{2n}{n-\alpha}$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}\theta^{\frac{p}{2}}|^2\, dx \geq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta^{\frac{p}{2}}|^q\, dx\right)^{\frac{2}{q}} = C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{\frac{pn}{n-\alpha}}\, dx\right)^{\frac{n-\alpha}{n}}.$$

Ahora usando la Desigualdad de Hölder vamos a acotar esta última integral por debajo. Esta Desigualdad nos dice que

$$\int_{\mathbb{R}^n} F\, G\, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |G|^{q'}\, dx\right)^{\frac{1}{q'}},$$

con q y q' exponentes conjugados. Bien, pues tomando $F = |\theta|^{p-\frac{1}{q'}}$, $G = |\theta|^{\frac{1}{q'}}$, e imponiendo que $q = \frac{q'}{q'-1}$ y $\frac{pn}{n-\alpha} = q(p - \frac{1}{q'})$, obtenemos que

$$q = \frac{n(p-1)+\alpha}{(p-1)(n-\alpha)} \text{ y } q' = \frac{n(p-1)+\alpha}{\alpha p},$$

ambos mayores que 1. Así se cumple que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^p\, dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{(p-\frac{1}{q'})q}\, dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|\, dx\right)^{\frac{1}{q'}}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{\frac{np}{n-\alpha}}\, dx\right)^{\frac{(p-1)(n-\alpha)}{n(p-1)+\alpha}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|\, dx\right)^{\frac{\alpha p}{n(p-1)+\alpha}}\end{aligned}$$

y por consiguiente

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^p \, dx\right)^{\frac{p-1+\frac{\alpha}{n}}{p-1}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{\frac{np}{n-\alpha}} \, dx\right)^{\frac{n-\alpha}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta| \, dx\right)^{\frac{\alpha p}{n(p-1)}}.$$

Usando esto y el Principio del Máximo de [2], el cuál dice que $\|\theta(\cdot,t)\|_1 \leq \|\theta_0\|_1$, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\theta\|_p^p &\leq -k\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^{\frac{np}{n-\alpha}} \, dx\right)^{\frac{n-\alpha}{n}} \\ &\leq -C(\|\theta\|_p^p)^{\frac{p-1+\frac{\alpha}{n}}{p-1}}, \end{aligned}$$

con $C = C(k, \alpha, p, \|\theta_0\|_1)$ y $p = 2^j$ con j entero positivo.

Proposición 1.3. *Sea θ en la condiciones de esta sección, entonces*

$$\|\theta(\cdot,t)\|_p^p \leq \frac{\|\theta_0\|_p^p}{(1+\varepsilon Ct\|\theta_0\|_p^{p\varepsilon})^{\frac{1}{\varepsilon}}},$$

para todo $t \geq 0$ con $p = 2^j$ y j entero positivo, C la constante obtenida anteriormente y $\varepsilon = \frac{\alpha}{n(p-1)}$.

Demostración. Definimos $f(t) = \|\theta(\cdot,t)\|_p^p \geq 0$ y $k = \frac{p-1+\frac{\alpha}{n}}{p-1} > 1$. Por la proposición anterior tenemos la desigualdad diferencial

$$f'(t) \geq -C(f(t))^k,$$

para todo $t \geq 0$. Integrando obtenemos que

$$\frac{f(t)^{1-k} - f(0)^{1-k}}{1-k} \leq -Ct.$$

Como $k - 1 = \frac{\alpha}{n(p-1)} = \varepsilon$, entonces

$$f(t)^{-\varepsilon} - f(0)^{-\varepsilon} \geq Ct\varepsilon,$$

lo que implica despejando $f(t)$, que

$$f(t) \leq \frac{f(0)}{(1+\varepsilon Ctf(0)^{\varepsilon})^{\frac{1}{\varepsilon}}}.$$

□

Observación: Acabamos de obtener L^p-Decaimiento para las funciones θ, con $p = 2^j$ y j entero positivo. Para otro L^p con $1 < p < \infty$ se obtiene por interpolación.

2. Integral de Bochner

En esta sección aparece una pequeña introducción sobre teoría de integración sobre espacios de Banach. Para ello se ha seguido [7, p.132]. Esto nos permitirá generalizar muchos conceptos del caso escalar al vectorial, y poder en un futuro obtener resultados sobre ecuaciones en derivadas parciales vectoriales así como poder asimilar la teoría de semigrupos que aparece en el próxim capítulo. Para ello vamos a considerar la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y X un espacio de Banach durante toda la sección.

Definición 2.1. *Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to X$ se dice débilmente medible si para todo elemento del espacio dual, $F \in X'$, la función $F(f(s))$ es medible Lebesgue.*

Definición 2.2. *Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to X$ se dice simple si toma valores constantes x_i distintos de cero en cada uno de un número finito de intervalos disjuntos J_i de medida Lebesgue finita, y $f(s) = 0$ en $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} J_i$. Observar que tal función será de la forma*

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{J_i}.$$

Es fácil notar que la representación de una función simple es única.

Definición 2.3. *Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to X$ se dice medible si existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}$ que convergen a f en casi todo punto, es decir, $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = f(s)$ para casi todo $s \in \mathbb{R}$.*

Notar que toda función simple es medible.

Definición 2.4. *Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to X$ se dice separadamente valuada si su rango $\{f(s) : s \in \mathbb{R}\}$ es separable, y se dirá casi separadamente valuada si existe una familia $\mathcal{J}$ de subconjuntos medibles Lebesgue de medida nula tal que $\{f(s) : s \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{J}\}$ es separable.*

Teorema 2.1. *(Teorema de Pettis) Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to X$ es medible si y solo si es débilmente medible y casi separadamente valuada.*

Demostración. Esta demostración aparece con todo detalle en el capítulo V, sección 4 de [7]. □

Definición 2.5. *Se llama integral-Bochner de una función simple $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{J_i}$ a*

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)\, ds := \sum_{i=1}^{n} x_i m(J_i),$$

siendo m la medida Lebesgue en $\mathbb{R}$. Igualmente para todo subconjunto B de $\mathbb{R}$ medible Lebesgue,

$$\int_B f(s)\,ds := \sum_{i=1}^{n} x_i m(J_i \cap B).$$

Lo que nos interesa es extender esta definición de manera consistente para funciones medibles.

Definición 2.6. *Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to X$ se dice integrable-Bochner si existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}$ tales que :*

i) $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = f(s)$ *en casi todo punto, es decir, f es medible.*

ii) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \|f(s) - f_n(s)\|\,ds = 0$

En tal caso ,

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)\,ds = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(s)\,ds.$$

Igualmente para cualquier subconjunto medible Lebesgue B.

Para ver la consistencia de esta definición, tenemos que ver que el límite anterior existe, y no depende de la sucesión de funciones simples que aproxima a la función. Como la función f es medible, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f - f_n$ es medible ya que se aproxima por $\{f_m - f_n\}_{m\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones simples, luego la demostración del Teorema de Pettis que aparece en [7] nos dice que $\|f(s) - f_n(s)\|$ es medible, luego la integral de ii) tiene sentido. Para ver que $\int_{\mathbb{R}} f(s)\,ds$ existe, tenemos que probar que $\{\int_{\mathbb{R}} f_n(s)\,ds\}$ converge en X. Usando que X es completo, veamos que es sucesión de Cauchy:

$$\begin{aligned} \|\int_{\mathbb{R}} f_n(s)\,ds - \int_{\mathbb{R}} f_k(s)\,ds\| &= \|\int_{\mathbb{R}} (f_n(s) - f_k(s))\,ds\| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|f_n(s) - f_k(s)\|\,ds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|f_n(s) - f(s)\|\,ds + \int_{\mathbb{R}} \|f(s) - f_k(s)\|\,ds \end{aligned}$$

sin más que usar que la suma de funciones simples es también una función simple y la desigualdad triangular de la norma. Tomando límites se obtiene lo que queríamos. Además el límite no depende de la sucesión tomada, ya que sean dos sucesiones de funciones simples que aproximan a f, $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$, y cumpliendo ii),

$$\begin{aligned} \|\int_{\mathbb{R}} f_n(s)\,ds - \int_{\mathbb{R}} g_n(s)\,ds\| &= \|\int_{\mathbb{R}} (f_n(s) - g_n(s))\,ds\| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|f_n(s) - g_n(s)\|\,ds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|f_n(s) - f(s)\|\,ds + \int_{\mathbb{R}} \|f(s) - g_n(s)\|\,ds \end{aligned}$$

nos muestra que $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(s) - g_n(s)\, ds = 0$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(s)\, ds = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(s)\, ds$$

y se tiene lo queríamos.

Teorema 2.2. *Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to X$ medible es integrable-Bochner si y solo si $\|f(s)\|$ es integrable Lebesgue.*

Demostración. Supongamos que f es integrable-Bochner, luego existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}$ que aproximan a f y

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \|f(s) - f_n(s)\|\, ds = 0.$$

Sabemos por la demostración del Teorema de Pettis que $\|f(s)\|$ es medible Lebesgue por ser f medible. Como $\|f(s)\| \leq \|f_n(s)\| + \|f(s) - f_n(s)\|$ y $\|f_n(s)\|$ son integrables se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \|f(s)\|\, ds \leq \int_{\mathbb{R}} \|f_n(s)\|\, ds + \int_{\mathbb{R}} \|f(s) - f_n(s)\|\, ds,$$

luego tomando límite como el segundo sumando tiende a 0, basta ver $\{\int_{\mathbb{R}} \|f_n(s)\|\, ds\}$ es convergente. Como

$$\begin{aligned}
|\int_{\mathbb{R}} \|f_n(s)\|\, ds - \int_{\mathbb{R}} \|f_k(s)\|\, ds| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\|f_n(s)\| - \|f_k(s)\||\, ds \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \|f_n(s) - f_k(s)\|\, ds \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \|f_n(s) - f(s)\|\, ds + \int_{\mathbb{R}} \|f(s) - f_k(s)\|\, ds
\end{aligned}$$

tomando límites obtenemos que es sucesión de Cauchy, luego convergente. Inversamente, supongamos que $\|f(s)\|$ es integrable Lebesgue, y que f es medible. Luego sean $\{f_n\}$ sucesión de funciones simples que aproximan a f. Definimos una nueva sucesión de funciones como sigue:

$$\begin{aligned}
g_n(s) &= f_n(s) \quad \text{si } \|f_n(s)\| \leq \|f(s)\|(1 + 2^{-1}) \\
g_n(s) &= 0 \quad\quad\;\; \text{si } \|f_n(s)\| > \|f(s)\|(1 + 2^{-1})
\end{aligned}$$

Entonces $\{g_n\}$ son funciones simples cumpliendo que $\|g_n(s)\| \leq \|f(s)\|(1 + 2^{-1})$. Veamos primero que estas funciones aproximan a la función f. Como

$$|\|f_n(s)\| - \|f(s)\|| \leq \|f(s) - f_n(s)\| \to 0$$

cuando $n \to \infty$, se tiene que $\|f_n(s)\| \to \|f(s)\|$. Luego para n suficientemente grande $\|f_n(s)\| \leq \|f(s)\|(1 + 2^{-1})$, es decir, $g_n(s) = f_n(s)$. Así

$$\lim_{n\to\infty} \|f(s) - g_n(s)\| = \lim_{n\to\infty} \|f(s) - f_n(s)\| = 0.$$

Además como para n suficientemente grande

$$\begin{aligned}\|f(s)-g_n(s)\| &\leq \|f(s)\|+\|g_n(s)\| \\ &= \|f(s)\|+\|f_n(s)\| \\ &\leq (2+2^{-1})\|f(s)\|\end{aligned}$$

y $\|f(s)\|$ es integrable Lebesgue, aplicando el Lema de Fatou obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\|f(s)-g_n(s)\|\,ds=0,$$

luego $f(s)$ es integrable-Bochner.

□

Corolario 2.1. *Toda función vectorial $f:\mathbb{R}\to X$ integrable-Bochner cumple que*

$$\int_{\mathbb{R}}\|f(s)\|\,ds \geq \|\int_{\mathbb{R}} f(s)\,ds\|$$

Demostración. Haciendo uso del teorema anterior sabemos que existe $\{g_n\}$ funciones simples que aproximan a f, tales que $\|g_n(s)\|\leq(1+2^{-1})\|f(s)\|$ que es integrable Lebesgue, y

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\|f(s)-g_n(s)\|\,ds=0.$$

Luego

$$\|\int_{\mathbb{R}} f(s)\,ds\| = \|\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(s)\,ds\| \leq \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\|g_n(s)\|\,ds$$

ya que g_n son funciones simples, y usando que están acotadas por una función integrable, podemos intercambiar límite e integral y se tiene el resultado. □

Corolario 2.2. *Sea $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ con X,Y espacios de Banach y $f:\mathbb{R}\to X$ integrable-Bochner, entonces $Tf:\mathbb{R}\to Y$ es integrable-Bochner y*

$$\int_{\mathbb{R}} Tf(s)\,ds = T\int_{\mathbb{R}} f(s)\,ds$$

Demostración. Como f es integrable-Bochner existe $\{f_n\}$ funciones simples que aproximan a f y tales que $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\|f(s)-f_n(s)\|\,ds=0$. Como sabemos que $\|f_n(s)\|\to\|f(s)\|$, para todo $n\in\mathbb{N}$ existe $m_n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\|f_q(s)\|<(1+n^{-1})\|f(s)\|$, para todo $q\geq m_n$. Así defino $g_n(s)=f_{m_n}$, sucesión de funciones simples con $\|g_n(s)\|<(1+n^{-1})\|f(s)\|$, y $\lim_{n\to\infty} g_n(s)=f(s)$ en casi todo punto, por ser una subsucesión de $\{f_n\}$. Además

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\|f(s)-g_n(s)\|\,ds &\leq \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}}\|f(s)-f_n(s)\|\,ds+\int_{\mathbb{R}}\|f_n(s)-g_n(s)\|\,ds\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}\|f_n(s)-g_n(s)\|\,ds=0\end{aligned}$$

ya que $\|f_n(s) - g_n(s)\| \leq \|f_n(s)\| + \|g_n(s)\| \leq 2\|f(s)\|$ que es integrable, luego se intercambia límite e integral. Es fácil de observar que como T es lineal y $\{g_n\}$ son funciones simples,

$$\int_{\mathbb{R}} T g_n(s)\, ds = T \int_{\mathbb{R}} g_n(s)\, ds.$$

Como T es continua

$$\lim_{n\to\infty} T g_n(s) = T f(s)$$

en casi todo punto, luego es medible. Además

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \|T g_n(s) - T f(s)\|\, ds \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \|T\| \|g_n(s) - f(s)\|\, ds = 0,$$

luego $Tf(s)$ es integrable-Bochner y

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} T f(s)\, ds &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} T g_n(s)\, ds \\
&= \lim_{n\to\infty} T \int_{\mathbb{R}} g_n(s)\, ds \\
&= T\Big(\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(s)\, ds \Big) \\
&= T \int_{\mathbb{R}} f(s)\, ds
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.3. (Teorema Fundamental del Cálculo Integral) *Sea $f : \mathbb{R} \to X$ una función integrable-Bochner, y sea $F(t) := \int_0^t f(s)\, ds$. Entonces F es diferenciable en casi todo punto con $F' = f$.*

Demostración. Como f es integrable-Bochner existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(s) = f(s)$ en casi todo punto y

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \|f(s) - g(s)\|\, ds = 0.$$

Sea pues $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)\, ds - f(t)\| &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(s) - f(t)\|\, ds \\
&\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(s) - f_n(s)\|\, ds \\
&+ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f_n(s) - f_n(t)\|\, ds + \|f_n(t) - f(t)\|
\end{aligned}$$

Veamos como se comportan cada uno de los tres sumandos cuando $h \to 0$. El primero, como $\|f(s) - f_n(s)\|$ es integrable Lebesgue, aplicando el Teorema

Fundamental del Cálculo Integral tenemos que éste tiende a $\|f(t) - f_n(t)\|$. El segundo, como $\|f_n(s) - f_n(t)\|$ es integrable Lebesgue en un entorno de t por ser $\{f_n\}$ funciones simples, aplicando también el Teorema Fundamental del Cálculo Integral éste segundo sumando tiende a cero. Así $\lim_{h\to 0} \|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\,ds - f(t)\| \leq 2\|f(t) - f_n(t)\|$ lo cuál tiende a cero cuando $n \to \infty$ en casi todo punto, y se tiene lo que queríamos. $\square$

3. Semigrupos de operadores

Esta Teoría nace por la idea de la resolución del problema de Cauchy abstracto, es decir, dado un espacio de Banach X y un operador cerrado A definido en este espacio, encontrar la solución del problema:

$$\begin{cases} u'(t) & = & Au(t) \quad (t \geq 0), \\ u(0) & = & x \end{cases}$$

donde $x \in X$. La solución de este problema de evolución depende del vector inicial x, luego podríamos considerar que la solución viene dada por

$$u(t) = T(t)x,$$

donde $T(t)$ es un operador en X. Observar que para que esto sea consistente debería cumplirse que $T(0) = I$. Además las soluciones de los problemas de evolución verifican que si a un elemento lo dejamos evolucionar un tiempo t y a este nuevo elemento lo dejamos evolucionar un tiempo s, este último elemento es el mismo que si al elemento inicial lo dejamos evolucionar un tiempo $t + s$. Matemáticamente, esta propiedad se escribe como $T(t + s) = T(t)T(s)$. Estas dos propiedades se llaman Ley del Semigrupo. Para el estudio y desarrollo de las cuatro primeras secciones de este capítulo he seguido los resultados de [6] y [5], completando y adaptando las demostraciones cuando fuese necesario.

3.1. Definición y primeras propiedades

Definición 3.1. *Sea X un espacio de Banach, $(T(t))_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$. Se dice que esta familia es un semigrupo de operadores si verifican:*

$$\begin{cases} T(t+s) & = & T(t)T(s) \quad \text{para todo } t, s \geq 0, \\ T(0) & = & I \end{cases}$$

donde I representa el operador identidad.

Definición 3.2. *Para cada $x \in X$, se define la órbita de este vector como la aplicación*

$$\eta_x : \mathbb{R}^+ \to X$$

con $\eta_x(t) := T(t)x$.

Definición 3.3. *Sea X un espacio de Banach, la familia $(T(t))_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$ se dice que es un C_0-semigrupo si verifica que es un semigrupo fuertemente continuo en el origen, es decir, que verifica la Ley del Semigrupo y*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x,$$

para todo $x \in X$.

Es conocido y sencillo de ver que la continuidad fuerte en el origen es equivalente a la continuidad fuerte en todo $t \in \mathbb{R}^+$, sin mas que hacer uso de la Ley del Semigrupo.

Proposición 3.1. *Cada $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0-semigrupo en un espacio de Banach X está exponencialmente acotado, es decir, existe $w \in \mathbb{R}$ y $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$.*

Demostración. Basta elegir $M \geq 1$ verificando que $\|T(s)\| \leq M$ para todo $0 \leq s \leq 1$. Así para todo $t \geq 0$, $t = n + s$ con $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq s < 1$. Así

$$\|T(t)\| = \|T(1)^n T(s)\| \leq M^{n+1} = Me^{n \log M} \leq Me^{wt},$$

para todo $t \geq 0$, donde $w = \log M \geq 0$. □

Definición 3.4. *Se llama cota de crecimiento de un C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ a*

$$w_0 := \text{ínf}\{w \in \mathbb{R} \ : \ \exists M_w \geq 1 \ \textit{tal que} \ \|T(t)\| \leq M_w e^{wt}, \ \forall t \geq 0\}$$

Proposición 3.2. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo en un espacio de Banach X, son equivalentes:*

a) $(T(t))_{t\geq 0}$ *es un C_0-semigrupo*

b) *Existe $\delta > 0$, $M \geq 1$ y $D \subset X$ denso tal que*

   i) $\|T(t)\| \leq M$, *para todo $0 \leq t \leq \delta$*

   ii) $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x$, *para todo $x \in D$*

Demostración. Supongamos primero que $(T(t))_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo. Entonces es claro que se cumple i). Para ver ii), usaremos el método de reducción al absurdo. Para ello suponemos que existe $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ con $\delta_n \to 0$ tal que $\|T(\delta_n)\| \to \infty$. Esto nos lleva a que existe $x \in X$ tal que la sucesión $(\|T(\delta_n)x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada, lo que contradice la continuidad fuerte en el origen. Recíprocamente, sea $K = \{t_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ para una secuencia arbitraria de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty)$ convergiendo a $t = 0$. Como $K \subset \mathbb{R}^+$ compacto, luego $T(\cdot)_{|K}$ esta uniformemente acotada y por hipótesis $T(\cdot)_{|K}x$ es continua para todo $x \in D$, luego por Lema 5.2 , capítulo I, de [6], $T(\cdot)_{|K}x$ es continua para todo $x \in X$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} T(t_n)x = x$. Como $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es arbitraria, se cumple que $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x$, para todo $x \in X$. □

3.2. Generadores y Resolventes

En esta sección vamos ver propiedades diferenciales de las órbitas, y teoría espectral asociada a C_0-semigrupos.

Lema 3.1. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en un espacio de Banach X, y $x \in X$. Entonces son equivalentes:*

a) η_x es diferenciable en $\mathbb{R}^+$

b) η_x es diferenciable a derecha en $t = 0$

Demostración. Solo hay que demostrar que b) implica a). Sea pues $h > 0$, entonces

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(T(t+h)x - T(t)x) = T(t) \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(T(h)x - x) = T(t)\eta_x'(0),$$

y por lo tanto η_x es diferenciable a derecha en $\mathbb{R}^+$. Por otro lado, sea $-t \leq h < 0$, así escribimos

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(T(t+h)x - T(t)x) - T(t)\eta_x'(0) &= T(t+h)\left(\frac{1}{h}(x - T(-h)x) - \eta_x'(0)\right) \\ &\quad + T(t+h)\eta_x'(0) - T(t)\eta_x'(0).\end{aligned}$$

Tomando $h \to 0^-$, por ser η_x diferenciable a derecha en el origen y $\|T(t+h)\|$ acotada se cumple que

$$\lim_{h\to 0^-} T(t+h)(\frac{1}{h}(x - T(-h)x) - \eta_x'(0)) = 0.$$

Además como $T(t)$ es fuertemente continua en todo punto,

$$\lim_{h\to 0^-} T(t+h)\eta_x'(0) - T(t)\eta_x'(0) = 0.$$

Luego η_x es diferenciable a izquierda, con derivada

$$\eta_x'(t) = T(t)\eta_x'(0),$$

para cada $t \geq 0$. □

A partir de aquí escribiremos

$$T'(t)x = T(t)T'(0)x,$$

donde esto tenga sentido.

Definición 3.5. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en un espacio de Banach X, se define el Generador de este semigrupo como el operador $A : D(A) \subseteq X \to X$ que actúa*

$$Ax := \eta_x'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(T(h)x - x),$$

para los vectores $x \in X$ donde exista el límite, es decir, $x \in D(A)$ con

$$\begin{aligned} D(A) &= \{x \in X \,:\, \eta_x \text{ es diferenciable}\} \\ &= \{x \in X \,:\, \eta_x \text{ es diferenciable a derecha en el origen}\}\end{aligned}$$

Lema 3.2. *Sea $(A, D(A))$ el generador de $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en un espacio de Banach X. Entonces se verifican la siguientes propiedades:*

i) $A : D(A) \subseteq X \to X$ *es lineal*

ii) *Si* $x \in D(A)$, *entonces* $T(t)x \in D(A)$ *y* $T'(t)x = T(t)Ax = AT(t)x$

iii) *Para cada* $t \geq 0$ *y* $x \in X$,

$$\int_0^t T(s)x\, ds \in D(A)$$

iv) *Para cada* $t \geq 0$,

$$\begin{array}{rcll} T(t)x - x & = & A\int_0^t T(s)x\, ds & ,\ x \in X \\ & = & \int_0^t T(s)Ax\, ds & ,\ x \in D(A) \end{array}$$

Demostración. i) Sean $x, y \in D(A)$, entonces

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(T(h)(x+y)-(x+y)) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(T(h)x+T(h)y-x-y) = Ax+Ay,$$

luego $A(x + y) = Ax + Ay$, e igualmente $A(\lambda x) = \lambda Ax$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

ii) Sea $x \in D(A)$, entonces

$$T(t)Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(T(t+h)x - T(t)x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(T(h)T(t)x - T(t)x),$$

luego $T(t)x \in D(A)$ y usando la igualdad anterior

$$T(t)Ax = AT(t)x.$$

iii)-iv) Sea $x \in X$, y $t \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\left(T(h)\int_0^t T(s)x\, ds - \int_0^t T(s)x\, ds\right) &= \frac{1}{h}\int_0^t T(h)T(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\, ds \\ &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\, ds \\ &= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\, ds \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\, ds \end{aligned}$$

Tomando $h \to 0^+$ y usando el Teorema Fundamental del Cálculo Integral para la Integral de Bochner se tiene que

$$A\int_0^t T(s)x\, ds = T(t)x - T(0)x = T(t)x - x.$$

Si tomamos $x \in D(A)$, las funciones $s \mapsto T(s)\frac{T(h)x-x}{h}$ convergen uniformemente en $[0,t]$ a la función $s \mapsto T(s)Ax$ cuando $h \to 0^+$, ya que

$$\|T(s)\frac{T(h)x-x}{h} - T(s)Ax\| \leq \|T(s)\|\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\|$$

con $\|T(s)\|$ acotada en $[0,t]$.Luego

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(T(h)-I)\int_0^t T(s)x\,ds &= \lim_{h\to 0^+} \int_0^t T(s)\frac{1}{h}(T(h)-I)x\,ds \\ &= \int_0^t T(s)Ax\,ds \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1. *El generador de un C_0-semigrupo es un operador lineal cerrado y densamente definido, que determina unívocamente el semigrupo.*

Demostración. Veamos que A es cerrado. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ con $\lim_n x_n = x$ y $\lim_n Ax_n = y$. Entonces por el lema anterior

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\,ds,$$

para todo $t \geq 0$. Observar que $T(s)Ax_n$ converge uniformemente a $T(s)y$ en $[0,t]$ cuando $n \to \infty$ ya que

$$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \leq \sup_{s\in[0,t]} \|T(s)\|\|Ax_n - y\|,$$

luego

$$T(t)x - x = \lim_n \int_0^t T(s)Ax_n\,ds = \int_0^t T(s)y\,ds.$$

Así

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x-x}{t} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds \\ &= T(0)y = y, \end{aligned}$$

luego $x \in D(A)$ con $Ax = y$, es decir, A es cerrado. Veamos ahora que A es densamente definido. Como por el lema anterior $\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$, para todo $x \in X$, se cumple que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds = T(0)x = x,$$

entonces $D(A)$ es denso en X. Para finalizar, veamos que el generador determina unívocamente el semigrupo. Sea pues $(S(t))_{t\geq 0}$ otro semigrupo con generador $(A, D(A))$. Sea $x \in D(A),\ t > 0$, y consideramos la aplicación

$$s \longmapsto \xi_x = T(t-s)S(s)x,$$

con $s \in [0,t] = K$ compacto en $\mathbb{R}^+$. Observar que ξ_x es continua en K para todo $x \in D(A)$, y además es una aplicación uniformemente acotada en K. Luego si defino

$$C = \left\{ \frac{S(s+h)x - S(s)x}{h}\ :\ h \in (0,1] \right\} \cup \left\{ AS(s)x \right\},$$

que es compacto en X, por ser la imagen continua de un compacto, y aplicando el Lema 5.2, capítulo I, de [6], se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(\xi_x(s+h) - \xi_x(s)) &= T(t-s-h)\frac{1}{h}(S(s+h)x - S(s)x) \\ &\quad + \frac{1}{h}(T(t-s-h) - T(t-s))S(s)x, \end{aligned}$$

converge cuando $h \to 0^+$ a

$$\frac{d}{ds}\xi_x(s) = T(t-s)AS(s)x - AT(t-s)S(s)x.$$

Usando por el lema anterior que $T(\cdot)$ y A conmutan ya que $S(s)x \in D(A)$ (por ser $x \in D(A)$), entonces

$$\frac{d}{ds}\xi_x(s) = 0.$$

Así ξ_x es constante, luego

$$T(t)x = \xi_x(0) = \xi_x(t) = S(t)x,$$

para todo $x \in D(A)$ denso en X. Luego $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$. $\square$

Corolario 3.1. ([6, p.52]) *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en un espacio de Banach X con generador $(A, D(A))$. Son equivalentes:*

a) El generador A es acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que

$$\|Ax\| \leq M\|x\|,$$

para todo $x \in D(A)$

b) $D(A)$ es X

c) $D(A)$ es cerrado en X

d) El semigrupo es uniformemente continuo.

En cada caso, el semigrupo está dado por

$$T(t) = e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

Lema 3.3. *Sea $(A, D(A))$ el generador de $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en un espacio de Banach X. Entonces para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y $t > 0$, se cumple*

$$\begin{array}{rcll} e^{\lambda t}T(t)x - x & = & (A-\lambda)\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)x\,ds & , \textit{si } x \in X \\ & = & \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)(A-\lambda)x\,ds & , \textit{si } x \in D(A) \end{array}$$

Demostración. Tomo la familia de operadores $(S(t))_{t\geq 0}$, con $S(t) = e^{-\lambda t}T(t)$. Observar que cumple la Ley de Semigrupo por cumplirla tanto $T(t)$ como la exponencial, y además son operadores lineales y continuos por serlo $T(t)$. Además es un C_0-semigrupo

$$\lim_{t\to 0^+} e^{-\lambda t}T(t)x = x,$$

para todo $x \in X$. Como para todo $x \in D(A)$ se tiene

$$\begin{array}{rcl} Ax - \lambda x & = & \displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{h}(T(h)x - x) - \lambda x \\ & = & \displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{h}(T(h)x - (I+\lambda h)x) \\ & = & \displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{h}(e^{-\lambda h}T(h)x - e^{-\lambda h}(I+\lambda h)x) \\ & = & \displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{h}(e^{-\lambda h}T(h)x - x) \end{array}$$

Así el generador de $S(t)$ es $B = A - \lambda$ con $D(B) = D(A)$. Luego aplicando el lema 3.2 a este semigrupo se tiene

$$\begin{array}{rcll} e^{\lambda t}T(t)x - x & = & (A-\lambda)\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)x\,ds & , \text{si } x \in X \\ & = & \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)(A-\lambda)x\,ds & , \text{si } x \in D(A) \end{array}$$

□

En lo que sigue se va a obtener una representación de la resolvente del generador del semigrupo a través de integrales del propio semigrupo. Para ello vamos a ver unas propiedades de la teoría espectral de operadores cerrados. Sea pues $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operador lineal y cerrado en un espacio de Banach X. Recordar que se define el conjunto resolvente como

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - A : D(A) \to X \text{ es biyectivo}\},$$

y su complementario $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ el espectro de A. Además para cada $\lambda \in \rho(A)$, se define el operador resolvente

$$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1},$$

que es un operador continuo en X, ya que por el Teorema de Grafo Cerrado como

$$(\lambda - A)^{-1} : X \to D(A)$$

es lineal y el conjunto $Gr(\lambda - A)^{-1} = \{(x, (\lambda - A)^{-1}x), \, x \in X\}$ es cerrado por ser A operador cerrado, luego

$$(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Observación: Notar que si $\lambda \in \rho(A)$, entonces

$$(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1} = I,$$

luego se sigue que

$$AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - I.$$

Si tomamos ahora también $\mu \in \rho(A)$, entonces

$$\Big(\lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A)\Big) R(\mu, A) = R(\mu, A)$$

y

$$\Big(\mu R(\mu, A) - AR(\mu, A)\Big) R(\lambda, A) = R(\lambda, A).$$

Restando ambas ecuaciones y usando el hecho de que los operadores $R(\mu, A)$ y $R(\lambda, A)$ conmutan (es obvio ya que $(\mu - A)$ y $(\lambda - A)$ conmutan) se tiene que

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A).$$

Proposición 3.3. (Teorema Espectral para Operadores Cerrados) *Sea* $(A, D(A))$ *un operador lineal y cerrado, se verifica:*

i) El conjunto resolvente es abierto en $\mathbb{C}$, *y para cada* $\mu \in \rho(A)$ *se tiene que*

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1},$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ *cumpliendo* $|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(\mu, A)\|}$

ii) La aplicación resolvente $\lambda \longmapsto R(\lambda, A)$ *es analítica con*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

iii) Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \rho(A)$ con $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$. Entonces $\lambda_0 \in \sigma(A)$ si y solo si $\lim\limits_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, A)\| = \infty$

Demostración.

i) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, y $\mu \in \rho(A)$, entonces el operador

$$\lambda - A = \mu - A + \lambda - \mu = [I - (\mu - \lambda)R(\mu, A)](\mu - A)$$

es biyectivo si $I - (\mu - \lambda)R(\mu, A)$ es biyectivo, por ser $\mu - A$ biyectivo, lo cuál ocurre cuando

$$|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(\mu, A)\|},$$

que es trivial usando la desigualdad triangular inversa. Luego para cada $\mu \in \rho(A)$ hemos encontrado un entorno abierto suyo que sigue estando contenido en la resolvente. Entonces la resolvente es abierto en $\mathbb{C}$, y además

$$R(\lambda, A) = R(\mu, A)[I - (\mu - \lambda)R(\mu, A)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}$$

ii) Por el desarrollo en serie de potencias anterior que hemos obtenido del operador resolvente en un entorno de cada punto del conjunto resolvente, se tiene que $R(\lambda, A)$ es analítica, con

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

iii) Lo primero observar que por el apartado i), tenemos que para todo $\mu \in \rho(A)$ se cumple que

$$\|R(\mu, A)\| \geq \frac{1}{dist(\mu, \sigma(A))}.$$

Veamos la demostración por doble implicación. Primero supongamos que $\lambda_0 \in \sigma(A)$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, A)\| \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{dist(\lambda_n, \sigma(A))} = \frac{1}{dist(\lambda_0, \sigma(A))} = \infty.$$

Recíprocamente, por reducción al absurdo, supongamos que $\lambda_0 \in \rho(A)$. Como la aplicación resolvente es continua, está acotada en el conjunto compacto $\{\lambda_n \,|\, n \geq 0\}$, lo que contradice que $\lim\limits_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, A)\| = \infty$. Luego $\lambda_0 \in \sigma(A)$.

$\square$

Como se ha dicho, vamos a usar estas propiedades para obtener una representación de la resolvente del generador de un semigrupo.

Teorema 3.2. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en un espacio de Banach X, y tomamos constantes $w \in \mathbb{R}$ y $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$. Para el generador $(A, D(A))$ se cumple lo siguiente:*

i) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $R(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, ds$ existe para todo $x \in X$, entonces $\lambda \in \rho(A)$ con $R(\lambda, A) = R(\lambda)$

ii) Si $\mathfrak{Re}\lambda > w$, entonces $\lambda \in \rho(A)$ y la resolvente viene dada por la integral de i)

iii) $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\mathfrak{Re}\lambda - w}$, para todo $\mathfrak{Re}\lambda > w$

La fórmula de i) se llama representación integral de la resolvente. Por supuesto, esta integral se entiende como una integral impropia de Riemann, es decir,

$$R(\lambda, A)x = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x \, ds,$$

para todo $x \in X$.

Notación: Escribiremos $R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) \, ds$.

Demostración.

i) Vamos a verlo primero para $\lambda = 0$. Sea $x \in X$ arbitrario y $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} R(0)x &= \frac{T(h) - I}{h} \int_0^\infty T(s)x \, ds \\
&= \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s + h)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s)x \, ds \\
&= \frac{1}{h} \int_h^\infty T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s)x \, ds \\
&= -\frac{1}{h} \int_0^h T(s)x \, ds
\end{aligned}$$

Tomando $t \to 0^+$ tenemos que $R(0)x \in D(A)$, para todo $x \in X$, es decir, $rang(R(0)) \subseteq D(A)$ y además $AR(0) = -I$. Por otro lado para $x \in D(A)$, tenemos

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t T(s)x \, ds = R(0)x$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} A \int_0^t T(s)x \, ds &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t T(s)Ax \, ds \\
&= R(0)Ax
\end{aligned}$$

Si defino $V(t) = \int_0^t T(s)x\,ds$, como el operador A es cerrado y tenemos

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = R(0)x$$

y

$$\lim_{t\to\infty} AV(t) = R(0)Ax,$$

entonces se tiene que

$$-Ix = AR(0)x = R(0)Ax.$$

Así $R(0) = (-A)^{-1} = R(0, A)$. Observar que para un $\lambda \in \mathbb{C}$ cualquiera que verifique las hipótesis se realiza el mismo proceso tomando el semigrupo $S(t) = e^{-\lambda t}T(t)$ con generador $B = A - \lambda$, $D(B) = D(A)$ y en tal caso $R(\lambda) = (-B)^{-1} = (\lambda - A)^{-1} = R(\lambda, A)$.

ii) Si $\mathfrak{Re}\lambda > w$, veamos que existe

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds$$

para todo $x \in X$. Notar que

$$\begin{aligned} \|\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds\| &\leq \int_0^\infty |e^{-\lambda s}|\|T(s)x\|\,ds \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\mathfrak{Re}\lambda s}Me^{ws}\|x\|\,ds \\ &= M\|x\|\int_0^\infty e^{s(w-\mathfrak{Re}\lambda)}\,ds \leq \infty \end{aligned}$$

ya que $w - \mathfrak{Re}\lambda < 0$, y se tiene lo que queríamos probar aplicando i).

iii) Si $\mathfrak{Re}\lambda > w$, entonces $\lambda \in \rho(A)$ y así

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds.$$

Luego

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A)x\| &\leq M\|x\|\int_0^\infty e^{s(w-\mathfrak{Re}\lambda)}\,ds \\ &= \frac{M\|x\|}{\mathfrak{Re}\lambda - w} \end{aligned}$$

□

Corolario 3.2. *Sea* $(A, D(A))$ *el generador de* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semigrupo en un espacio de Banach* X*, y tomamos constantes* $w \in \mathbb{R}$ *y* $M \geq 1$ *tal que* $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$*, para todo* $t \geq 0$*. Entonces para* $\mathfrak{Re}\lambda > w$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple*

$$\begin{aligned} R(\lambda, A)^n x &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A)x \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty s^{n-1} e^{-\lambda s} T(s)x \, ds \end{aligned}$$

para todo $x \in X$*. En particular la estimación*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\mathfrak{Re}\lambda - w)^n},$$

se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$ *y* $\mathfrak{Re}\lambda > w$*.*

Demostración. Por el Teorema Espectral para Operadores Cerrados, sabemos que

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A)x.$$

Usando el teorema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)x &= \frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, ds \\ &= -\int_0^\infty s e^{-\lambda s} T(s)x \, ds \end{aligned}$$

siempre que $\mathfrak{Re}\lambda > w$ y $x \in X$. Observar que se puede intercambiar derivada e integral ya que la aplicación es derivable con respecto de λ y además su derivada está acotada en un entorno de cada $\mathfrak{Re}\lambda_0 > w$ para casi todo $s \in \mathbb{R}^+$ por una aplicación integrable que no depende de λ. Para ver esto último basta tomar $\delta > 0$ tal que $w < \mathfrak{Re}\lambda_0 - \delta \leq \mathfrak{Re}\lambda \leq \mathfrak{Re}\lambda_0 + \delta$, y en este entorno

$$\begin{aligned} \|se^{-\lambda s} T(s)x\| &\leq sMe^{s(w - \mathfrak{Re}\lambda)} \|x\| \\ &\leq sMe^{s(w - (\mathfrak{Re}\lambda_0 - \delta))} \|x\| \end{aligned}$$

que es integrable por ser $(w - (\mathfrak{Re}\lambda_0 - \delta) < 0$. Así por inducción obtenemos que

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty s^{n-1} e^{-\lambda s} T(s)x \, ds.$$

Además

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda, A)^n x\| &= \frac{1}{(n-1)!}\|\int_0^\infty s^{n-1}e^{-\lambda s}T(s)x\,ds\| \\
&\leq \frac{M\|x\|}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1}e^{s(w-\mathfrak{Re}\lambda)}\,ds \\
&= \frac{M\|x\|}{(n-1)!}\frac{(n-1)!}{(\mathfrak{Re}\lambda - w)^n} = \frac{M\|x\|}{(\mathfrak{Re}\lambda - w)^n}
\end{aligned}$$

□

3.3. Ejemplo: El Semigrupo Gaussiano

El siguiente ejemplo de C_0-semigrupo, fue una de las principales fuentes de desarrollo de la teoría de semigrupos. Este describe el flujo del calor o proceso de difusión, y recibe el nombre de Semigrupo Gaussiano. Sea $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, se define para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$T(t)f(s) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|s-r|^2}{4t}} f(r)\,dr$$

con $t > 0$ y $s \in \mathbb{R}^n$. Si se escribe

$$\mu_t(s) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|s|^2}{4t}},$$

observar que

$$T(t)f(s) = \mu_t * f(s).$$

Veamos que la familia $(T(t))_{t\geq 0}$ con $T(0) = I$ forma un C_0-semigrupo en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$, y su generador infinitesimal coincide con la clausura del operador de Laplace

$$\Delta f(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} f(s_1, \ldots, s_n),$$

definido para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Como $\mu_t(s) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, aplicando Desigualdad de Young

$$\|T(t)f\|_p = \|\mu_t * f\|_p \leq \|\mu_t\|_1 \|f\|_p,$$

se ve que $T(t)$ es continuo. Observar que

$$\|\mu_t\|_1 = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s_1^2}{4t}}\right)^n = 1,$$

luego $\|T(t)f\|_p \leq \|f\|_p$. Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, y es invariante bajo $T(t)$, entonces basta estudiar $T(t)_{|\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ y extender por densidad. Para ello se va a usar que la Transformada de Fourier es una isomorfismo en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{F}(f)(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\eta}\, dx,$$

y

$$\mathcal{F}(\mu_t * f) = \mathcal{F}(\mu_t)\mathcal{F}(f).$$

Notar que

$$\mathcal{F}(\mu_t)(\eta) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2}{4t}} e^{-2\pi i\eta_1 x_1}\, dx_1\Big)\cdots\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2}{4t}} e^{-2\pi i\eta_1 x_1}\, dx_1\Big).$$

Llamando $\hat{}$ a la Transformada de Fourier en $\mathbb{R}$, sea $g(x) = e^{-\frac{x^2}{4t}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, entonces $g'(x) = \frac{1}{4\pi i t}(-2\pi i x g(x))$ y tomando Transformada de Fourier, se tiene que para todo $y \in \mathbb{R}$

$$2\pi i y\widehat{g}(y) = \widehat{g'}(y) = \frac{1}{4\pi i t}(-\widehat{2\pi i x g}(x))(y) = \frac{1}{4\pi i t}(\widehat{g})'(y).$$

Así $(\widehat{g})'(y) = -8\pi^2 t y\widehat{g}(y)$, cuya solución es

$$\widehat{g}(y) = 2\sqrt{\pi t}e^{-4\pi^2 t y^2}.$$

Luego para todo $\eta \in \mathbb{R}^n$, se tiene $\mathcal{F}(\mu_t)(\eta) = e^{-4\pi^2 t|\eta|^2}$, y por lo tanto la Transformada de Fourier de $(T(t))_{t\geq 0}$ es un semigrupo de multiplicación en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con continuidad fuerte en el origen. Además como para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-4\pi^2 t|x|^2}f(x) - f(x)}{t} = -4\pi^2|x|^2 f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

entonces el generador $Bf(x) = -4\pi^2|x|^2 f(x)$ está determinado en todo el espacio. Ahora tomando la Transformada inversa de Fourier, recuperamos $(T(t))_{t\geq 0}$, y como $\mathcal{F}^{-1}(Bf)(x) = \Delta\mathcal{F}^{-1}(f)(x)$, entonces su generador A coincide con el operador de Laplace en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

3.4. Teoremas de Hille-Yosida

El problema que se plantea ahora es caracterizar los operadores lineales que son generadores de algunos C_0-semigrupos. Por lo visto en las secciones anteriores sabemos que para que un operador sea generador de un C_0-semigrupo, son condiciones necesarias que sea cerrado, con dominio denso y que su espectro esté contenido en un semiplano a derecha de $\mathbb{C}$.

Lema 3.4. *Sea $(A, D(A))$ un operador cerrado y densamente definido. Suponemos que existe $w \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tal que $[w, \infty) \subset \rho(A)$ y $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq M$ para todo $\lambda \geq w$. Entonces se cumplen:*

i) $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x$*, para todo* $x \in X$

ii) $\lambda AR(\lambda, A)x = \lambda R(\lambda, A)Ax \to Ax$ *cuando* $\lambda \to +\infty$*, para todo* $x \in D(A)$

Demostración.

i) Sabemos que para todo $y \in D(A)$ se cumple que

$$\lambda R(\lambda, A)y = R(\lambda, A)Ay + y.$$

Así
$$\|\lambda R(\lambda, A)y - y\| = \|R(\lambda, A)Ay\| \leq \frac{M}{\lambda}\|Ay\|,$$
para todo $\lambda \geq w$. Luego haciendo $\lambda \to +\infty$ se tiene que $\lambda R(\lambda, A)y$ converge a y para todo $y \in D(A)$. Como además los operadores $\lambda R(\lambda, A)$ están uniformemente acotados para $\lambda \geq w$ y convergen en $D(A)$ que es denso en X, entonces la convergencia se da en todo el espacio, es decir,
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x$$
para todo $x \in X$.

ii) Como para todo $y \in X$ se cumple que

$$\lambda R(\lambda, A)y = AR(\lambda, A)y + y$$

y además para todo $y \in D(A)$,

$$\lambda R(\lambda, A)y = R(\lambda, A)Ay + y,$$

entonces
$$\lambda AR(\lambda, A)y = \lambda R(\lambda, A)Ay,$$
para todo $y \in D(A)$. Así tomando $x = Ay$ y aplicando la parte i) se tiene el resultado.

□

Usando este lema se consigue la caracterización de los generadores. Primero lo vamos a ver para el caso de un C_0-semigrupo contractivo y de éste deduciremos el caso general.

Teorema 3.3. (Teorema de Hille-Yosida, caso contractivo) *Sea* $(A, D(A))$ *un operador en un espacio de Banach* X*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $(A, D(A))$ *es el generador se un* C_0*-semigrupo contractivo* *b)* $(A, D(A))$ *es cerrado, densamente definido, y para todo* $\lambda > 0$ *se tiene que*

$$\lambda \in \rho(A) \text{ con } \|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$$

c) $(A, D(A))$ *es cerrado, densamente definido, y para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$ *con* $\mathfrak{Re}\lambda > 0$ *se tiene que*

$$\lambda \in \rho(A) \text{ con } \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\mathfrak{Re}\lambda}$$

Demostración.

a)⇒c) Como $(A, D(A)$ genera un C_0-semigrupo $(T(t))$ contractivo, entonces $\|T(t)\| \leq 1$ y por consiguiente las constante $M = 1$ y $w = 0$. Luego aplicando el Teorema 3.2 se sigue el resultado.

c)⇒b) Obvio.

b)⇒a) Como para todo natural positivo n, se tiene que $n \in \rho(A)$, definimos los siguientes operadores definidos en X

$$A_n = nAR(n, A) = n^2 R(n, A) - nI,$$

llamados aproximantes de Yosida, los cuales están acotados

$$\|A_n\| \leq n^2\|R(n, A)\| + n \leq 2n.$$

Además A_n y A_m conmutan ya que las resolventes conmutan, y por el lema anterior A_n converge a A puntualmente en $D(A)$. Consideramos para cada $n \in \mathbb{N}$ el semigrupo uniformemente continuo $T_n(t) = e^{tA_n}$, con $t \geq 0$. Definimos $T(t)x := \lim_{n\to\infty} T_n(t)x$, para todo $x \in X$. Veamos que esta bien definido, es decir, que ese límite existe. Lo primero observar que $(T_n(t))_{t\geq 0}$ es un semigrupo contractivo, ya que

$$\|T_n(t)\| \leq e^{-nt} e^{\|n^2 R(n,A)\| t} \leq 1$$

para todo $t \geq 0$. Así para cada $t \geq 0$ tenemos una familia de operadores uniformemente acotados, luego basta ver la convergencia en un subespacio denso, $D(A)$. Si para cada $t \geq 0$, definimos las funciones $s \longmapsto T_m(t-s)T_n(s)x$, con $0 \leq s \leq t$, $x \in D(A)$ y $m, n \in \mathbb{N}$, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo Integral version vectorial y la conmutatividad de los operadores $T_n(t)$, se tiene que

$$\begin{aligned} T_n(t)x - T_m(t)x &= \int_0^t \frac{d}{ds}(T_m(t-s)T_n(s)x)\, ds \\ &= \int_0^t T_m(t-s)T_n(s)(A_n x - A_m x)\, ds \end{aligned}$$

Así

$$\|T_n(t)x - T_m(t)x\| \leq t\|A_n x - A_m x\|.$$

Luego como por el lema anterior, $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión convergente para todo $x \in D(A)$, se tiene que $(T_n(t)x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en cada intervalo $[0, t_0]$. Además $(T(t))_{t\geq 0}$ es un semigrupo contractivo, ya que

$$T(0)x = \lim_{n\to\infty} T_n(0)x = Ix = x,$$

$$T(t)T(s)x = \lim_{n\to\infty} T_n(t)T_n(s)x = \lim_{n\to\infty} T_n(t+s)x = T(t+s)x$$

y

$$\|T(t)\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T_n(t)\| \leq \|x\|.$$

Más aún, es fuertemente continuo, ya que si $x \in D(A)$ la órbita $\eta : t \to T(t)x$, con $0 \leq t \leq t_0$, hemos visto que es límite uniforme de funciones continuas, luego es continua, es decir, $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$ para todo $x \in D(A)$ y como $\|T(t)\| \leq 1$, la convergencia es en todo el espacio X. Así sea pues $(B, D(B))$ el generador de este C_0-semigrupo, y sea $x \in D(A)$. Como $A_n = nR(n, A)A$, $A_n x$ está bien definido y $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$, las órbitas son diferenciables, es decir, $\eta_n' : t \to T_n(t)A_n x$, y por la convergencia uniforme de $T_n(t)x$ a $T(t)x$ en $[0, t_0]$, se tiene que η_n' converge uniformemente a $\xi : t \to T(t)Ax$ en $[0, t_0]$. Luego como η_n converge uniformemente a η y η_n' a ξ, $\eta'(0) = \xi(0)$, es decir, $D(A) \subset D(B)$ con $Bx = Ax$ para todo $x \in D(A)$. Sea $\lambda > 0$, por hipótesis $\lambda - A$ es una biyección de $D(A)$ en X, y como B es el generador de un C_0-semigrupo contractivo, $\lambda \in \rho(B)$ y $\lambda - B$ es una biyección de $D(B)$ en X. Veamos que $D(A) = D(B)$, para ello solo hace falta ver que si $x \in D(B)$ entonces $x \in D(A)$. Como $\lambda - B$ es inyectiva, existe un único $y \in X$ tal que $(\lambda I - B)x = y$. Como $\lambda - A$ es suprayectivo entonces existe $z \in D(A)$ tal que $(\lambda I - A)z = y$. Además estos operadores coinciden en $D(A)$, y como son inyectivos $z = x \in D(A)$. Luego $D(B) = D(A)$, se tiene que $A = B$, y se cumple lo que queríamos probar.

$\square$

Corolario 3.3. *Sea $(A, D(A))$ un operador en un espacio de Banach X, y $w \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *$(A, D(A))$ es el generador se un C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ casi contractivo, es decir, cumpliendo que*

$$\|T(t)\| \leq e^{wt} \text{ para } t \geq 0$$

b) $(A, D(A))$ *es cerrado, densamente definido, y para todo* $\lambda > w$ *se tiene que*

$$\lambda \in \rho(A) \text{ con } \|(\lambda - w)R(\lambda, A)\| \leq 1$$

c) $(A, D(A))$ *es cerrado, densamente definido, y para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$ *con* $\mathfrak{Re}\lambda > w$ *se tiene que*

$$\lambda \in \rho(A) \text{ con } \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\mathfrak{Re}\lambda - w}$$

Demostración. Igual que en el teorema anterior basta probar que b)⇒a). Como A es cerrado y densamente definido, $B = A - wI$ también lo es. Observar que tomando $\mu = \lambda - w$, para cada $\mu \geq 0$ se tiene que $(\mu + w) \in \rho(A)$, luego existe

$$R(\lambda, A) = (A - (\mu + w)I)^{-1} = (B - \mu I)^{-1},$$

es decir, $\mu \in \rho(B)$ y además $\|\mu R(\mu, B)\| = \|(\lambda - w)R(\lambda, A)\| \leq 1$. Así aplicando el teorema anterior $(B, D(B))$ genera un C_0-semigrupo contractivo $(S(t))_{t\geq 0}$. Recordar que rescalando el semigrupo, $T(t) := e^{wt}S(t)$ para todo $t \geq 0$ obtenemos un C_0-semigrupo con generador $A = B + wI$ cumpliendo $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, $t \geq 0$. □

Teorema 3.4. (Teorema de Hille-Yosida, caso general) *Sea* $(A, D(A))$ *un operador en un espacio de Banach* X*, y sean* $w \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ *constantes. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $(A, D(A))$ *es el generador se un* C_0*-semigrupo* $(T(t))_{t\geq 0}$ *cumpliendo que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt} \text{ para } t \geq 0$$

b) $(A, D(A))$ *es cerrado, densamente definido, y para todo* $\lambda > w$ *se tiene que*

$$\lambda \in \rho(A) \text{ con } \|[(\lambda - w)R(\lambda, A)]^n\| \leq M \text{ , para todo } n \in \mathbb{N}$$

c) $(A, D(A))$ *es cerrado, densamente definido, y para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$ *con* $\mathfrak{Re}\lambda > w$ *se tiene que*

$$\lambda \in \rho(A) \text{ con } \|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\mathfrak{Re}\lambda - w)^n} \text{ , para todo } n \in \mathbb{N}$$

Demostración. La implicación a)⇒c) se sigue del corolario 3.2, y c)⇒b) es obvio. Veamos pues b)⇒a). Igualmente que en corolario anterior, rescalando el semigrupo, se puede asumir sin pérdida de generalidad que $w = 0$, es decir,

$$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n\| \leq M \text{ , para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para cada $\mu > 0$, definimos una nueva norma en X,

$$\|x\|_\mu := \sup_{n\geq 0}\|\mu^n R(\mu, A)^n x\|.$$

Observar que es una norma por serlo $\|\cdot\|$. Esta norma cumple que:

i) Es equivalente a $\|\cdot\|$, ya que

$$\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|.$$

ii) Para todo $\mu > 0$, $\|\mu R(\mu, A)\|_\mu \leq 1$ ya que

$$\|\mu R(\mu, A)x\|_\mu \leq \sup_{n\geq 0}\|\mu^n R(\mu, A)^n x\| = \|x\|_\mu.$$

iii) Para $0 < \lambda \leq \mu$, $\|\lambda R(\lambda, A)\|_\mu \leq 1$ ya que por la ecuación de la resolvente tenemos que para $x \in X$,

$$\begin{aligned} y := R(\lambda, A)x &= R(\mu, A)x + (\mu - \lambda)R(\mu, A)R(\lambda, A)x \\ &= R(\mu, A)(x + (\mu - \lambda)y) \end{aligned}$$

Así usando el apartado ii), $\|y\|_\mu \leq \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + \frac{\mu-\lambda}{\mu}\|y\|_\mu$, luego $\lambda\|y\|_\mu \leq \|x\|_\mu$, lo que implica $\|\lambda R(\lambda, A)\|_\mu \leq 1$ para $0 < \lambda \leq \mu$.

iv) Para todo $0 < \lambda \leq \mu$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n\| \leq \|\lambda^n R(\lambda, A)^n\|_\mu \leq \|x\|_\mu.$$

v) Para todo $0 < \lambda \leq \mu$, $\|x\|_\lambda = \sup_{n\geq 0}\|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\| \leq \|x\|_\mu$.

Ahora definiendo otra nueva norma $\|x\|' := \sup_{n\geq 0}\|x\|_\mu$, satisface:

vi) $\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|$, usando i).

vii) Para todo $\lambda > 0$, $\|\lambda R(\lambda, A)\|' \leq 1$ por iii).

Así el operador $(A, D(A))$ cumple la condición b) del Teorema de Hille-Yosida para el caso contractivo y la norma equivalente $\|\cdot\|'$, luego $(A, D(A))$ genera un semigrupo contractivo $(T(t))_{t\geq 0}$ con la norma $\|\cdot\|'$. Ahora usando vi) se obtiene que $\|T(t)\| \leq M$. $\square$

3.5. Potencias fraccionarias de operadores cerrados

En esta sección vamos a dar la definición de potencia fraccionaria de un operador , y una representación integral de ésta, la cuál nos ha servido para encontrar los resultados que buscábamos y que aparecen en el último capítulo. La teoría de potencias fraccionarias o cálculo fraccionario nace con la idea de las derivadas de orden $\frac{1}{2}$. En 1695 L'Hôpital le propuso a Leibnitz este problema, a lo cual respondió lo siguiente: "De esta paradoja se extraerán, algún día, consecuencias muy útiles". Desde entonces muchos han sido los matemáticos que se han interesado por esta teoría como Euler, Fourier, Abel, Lioville, Riemann, Lagrange, Laplace, Riesz o Weyl entre otros, y muchas las aplicaciones en distintos campos científicos. Además esta idea se generalizó a otros tipos de operadores que es nuestro interés.

Los resultados que aparecen a continuación están sacados de [7, p.259]. Sea pues un espacio de Banach X y $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ un C_0-semigrupo uniformemente acotado, es decir, $\|T(t)\| \leq M$ para todo $t \geq 0$. Introducimos

$$\begin{array}{rcll} f_{t,\alpha}(\lambda) & = & \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{z\lambda - tz^\alpha}\, dz & \text{si } \sigma > 0, t > 0, \lambda \geq 0, 0 < \alpha < 1 \\ & = & 0 & \text{si } \lambda < 0 \end{array}$$

donde para definir $z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$, tomamos el argumento principal de z, $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$. Luego es función continua en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Notar que $\mathfrak{Re} z^\alpha > 0$ cuando $\mathfrak{Re} z > 0$ ya que

$$\mathfrak{Re} z^\alpha = \mathfrak{Re}(e^{\alpha \log(|z|) + i\alpha \arg z}) = e^{\alpha \log(|z|)} \cos(\alpha \arg z) = |z|^\alpha \cos(\alpha \arg z),$$

y como $0 < \alpha < 1$ y $\mathfrak{Re} z > 0$, entonces $\alpha \arg z \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, luego $\mathfrak{Re} z^\alpha > 0$. La convergencia de la integral anterior está subordinada a la convergencia del factor e^{-tz^α}, ya que

$$|e^{z\lambda}| = e^{\sigma\lambda}.$$

Como $\mathfrak{Re} z > 0$, y $0 < \alpha < 1$ entonces $\cos(\alpha \arg z) > \cos(\alpha\frac{\pi}{2})$. Así

$$\begin{array}{rcl} |\int_{\sigma-is}^{\sigma+is} e^{-tz^\alpha}\, dz| & \leq & \int_{-s}^{s} e^{-t(\sqrt{\sigma^2+a^2})^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2})}\, da \\ & \leq & \int_{-s}^{s} e^{-t\cos(\alpha\frac{\pi}{2})|a|^\alpha}\, da \to M(t,\alpha) < +\infty \end{array}$$

cuando $s \to +\infty$.

Proposición 3.4. *Para todo $t > 0$ y $a > 0$ se cumple que*

$$e^{-ta^\alpha} = \int_0^\infty e^{-\lambda a} f_{t,\alpha}(\lambda)\, d\lambda.$$

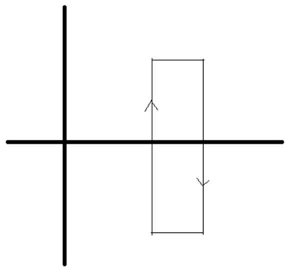

Figura 1: Camino

Demostración. Por la convergencia del factor e^{-tz^α}, la función $f_{t,\alpha}$ es de crecimiento exponencial en la variable λ, es decir,

$$f_{t,\alpha}(\lambda) \leq \frac{1}{2\pi} e^{\lambda\sigma} M(\alpha, t).$$

Usando el Teorema Integral de Cauchy para funciones holomorfas sobre el camino Figura 1, como las integrales sobre los caminos horizontales se van hacia cero conforme se alargan los caminos verticales, se tiene que la integral que define a $f_{t,\alpha}$ es independiente de $\sigma > 0$. Sea ahora $a > \sigma = \mathfrak{Re} z > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda a} f_{t,\alpha}(\lambda)\, d\lambda &= \int_0^\infty e^{-\lambda a} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda z} e^{-tz^\alpha}\, dz \right) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{-tz^\alpha} \left(\int_0^\infty e^{\lambda(z-a)}\, d\lambda \right) dt \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{-tz^\alpha}}{z - a}\, dt \\
&= e^{-ta^\alpha},
\end{aligned}$$

usando en la última igualdad el Teorema de los Residuos. □

Proposición 3.5. ([7, p.261]) *Para todo $\lambda > 0$ se tiene que*

$$f_{t,\alpha}(\lambda) \geq 0.$$

Proposición 3.6. *Para todo $t, s > 0$ se tiene que*

$$\int_0^\infty f_{t,\alpha}(\lambda)\, d\lambda = 1$$

y
$$f_{t+s,\alpha}(\lambda) = \int_0^\infty f_{t,\alpha}(\lambda - \mu) f_{s,\alpha}(\mu)\, d\mu.$$

Demostración. Como $f_{t,\alpha}$ es no negativa, por la proposición anterior y el Lema de Fatou
$$\int_0^\infty \liminf_{a\to 0^+} (e^{-\lambda a} f_{t,\alpha}(\lambda))\, d\lambda \leq \liminf_{a\to 0^+} e^{-ta^\alpha} = 1.$$
Luego $f_{t,\alpha}$ es integrable en $(0,\infty)$, y aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que
$$\int_0^\infty f_{t,\alpha}(\lambda)\, d\lambda = 1.$$
Además para todo $a > 0$
$$\begin{array}{ll}
\int_0^\infty e^{-\lambda a}\left(\int_0^\infty f_{t,\alpha}(\lambda-\mu) f_{s,\alpha}(\mu)\, d\mu\right) d\lambda & = \\
\int_0^\infty e^{-\mu a} f_{s,\alpha}(\mu)\left(\int_0^\infty e^{-(\lambda-\mu)a} f_{t,\alpha}(\lambda-\mu)\, d\lambda\right) d\mu & = \\
\left(\int_0^\infty e^{-\mu a} f_{t,\alpha}(\mu)\, d\mu\right)\left(\int_0^\infty e^{-ka} f_{t,\alpha}(k)\, dk\right) & = \\
e^{-(t+s)a^\alpha} & = \\
\int_0^\infty e^{-\lambda a} f_{t+s,\alpha}(\lambda)\, d\lambda. &
\end{array}$$
Entonces como $e^{-(t+s)a^\alpha}$ es indefinidamente derivable, con ella y sus derivadas acotadas, aplicando el Teorema de Inversión de la Transformada de Laplace, esta función tiene inversa y
$$f_{t+s,\alpha}(\lambda) = \int_0^\infty f_{t,\alpha}(\lambda - \mu) f_{s,\alpha}(\mu)\, d\mu.$$
□

Proposición 3.7. ([7, p.263]) *Para todo $t > 0$ se tiene que*
$$\int_0^\infty \frac{\partial f_{t,\alpha}(\lambda)}{\partial t}\, d\lambda = 0.$$

Teorema 3.5. ([7, p.263]) *Dado X un espacio de Banach y $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ un C_0-semigrupo uniformemente acotado, entonces $(\widetilde{T_\alpha}(t))_{t\geq 0}$ es un semigrupo holomorfo, donde*
$$\begin{array}{rcll}
\widetilde{T_\alpha}(t)x & = & \int_0^\infty f_{t,\alpha}(s) T(s)x\, ds & si\ t > 0 \\
 & = & x & si\ t = 0.
\end{array}$$

Este nuevo semigrupo $(\widetilde{T_\alpha}(t))_{t\geq 0}$ se define con la idea de obtener una expresión para las potencias fraccionarias de A, el generador de $(T(t))_{t\geq 0}$. Si llamamos $\widetilde{A_\alpha}$ al generador de $(\widetilde{T_\alpha}(t))_{t\geq 0}$, entonces se cumple el siguiente teorema:

Teorema 3.6. ([7, p.264]) *Para todo $x \in D(A)$ y $0 < \alpha < 1$ se tiene que $\widetilde{A_\alpha} x = -(-A)^\alpha x$, donde*

$$\begin{array}{rcl} (-A)^\alpha x & = & \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}(\lambda I - A)^{-1}(-Ax)\, d\lambda \\ & = & \Gamma(-\alpha)^{-1} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha-1}(T(\lambda) - I)x\, d\lambda. \end{array}$$

Blakrishnan fue el que introdujo en 1960 la potencia fraccionaria $(-A)^\alpha$ de un operador lineal cerrado A, cumpliendo que para todo $\lambda > 0$ existe $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ y

$$\sup_{\mathfrak{Re}\lambda > 0} |\mathfrak{Re}\lambda| \|R(\lambda, A)\| < \infty.$$

Él probo lo siguiente:

Teorema 3.7. ([7, 266]) *Sea X un espacio de Banach, $0 < \alpha < 1$, y A un operador lineal y cerrado en X cumpliendo las condiciones anteriores. Entonces*

$$(-A)^\alpha x = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}(\lambda I - A)^{-1}(-Ax)\, d\lambda \text{ con } x \in D(A),$$

es un operador lineal cumpliendo que:

i) para $x \in D(A^2)$ y $0 < \alpha, \beta < 1$ con $\alpha + \beta < 1$,

$$(-A)^\alpha (-A)^\beta x = (-A)^{\alpha+\beta} x.$$

ii) para $x \in D(A)$,

$$\lim_{\alpha \to 1^-} (-A)^\alpha x = -Ax.$$

iii) para $x \in D(A)$ y $\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda R(\lambda, A)x = 0$,

$$\lim_{\alpha \to 0^+} (-A)^\alpha x = x.$$

Observar que por el Teorema de Hille-Yosida, para un C_0-semigrupo uniformemente acotado, el generador cumple las condiciones de Blakrishnan para poder definir su potencia fraccionaria, y está coincide con $-\widetilde{A_\alpha}$.

4. Desigualdades puntuales y potencias fraccionarias

Este último capítulo recoge los resultados que hemos obtenido al intentar generalizar el artículo [1] para potencias fraccionarias de generadores de C_0-semigrupos.

Recordemos la definición de núcleo de sumabilidad en $\mathbb{R}^n$ y alguna propiedad. Una familia de funciones $(k_t)_{t>0} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, se llama núcleo de sumabilidad en $\mathbb{R}^n$ si verifica:

i) para todo $t > 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} k_t(x)\, dx = 1$.

ii) para todo $t > 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} |k_t(x)|\, dx < C$ con C una constante universal.

iii) para todo $\delta > 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} \displaystyle\int_{|x|>\delta} |k_t(x)|\, dx = 0$.

Si $(k_t)_{t>0}$ es un núcleo de sumabilidad en $\mathbb{R}^n$, y sea $1 \le p < \infty$, entonces para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ es bien conocido que

$$\lim_{t\to 0^+} \|f - f * k_t\|_p = 0.$$

Sea $(k_t)_{t>0}$ un núcleo de sumabilidad en $\mathbb{R}^n$ verificando que $k_t * k_s = k_{t+s}$ para todo $t, s > 0$, y sea $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \le p < \infty$. Se llama C_0-semigrupo de convolución en X con núcleo $(k_t)_{t>0}$ a $(K(t))_{t\ge 0}$, siendo

$$\begin{array}{rcll} K(t)f(x) & = & k_t * f(x) & \text{si } t > 0 \\ & = & f(x) & \text{si } t = 0 \end{array}$$

para todo $f \in X$.

Definición 4.1. *Diremos que un C_0-semigrupo de convolución en X, $(K(t))_{t\ge 0}$, es de núcleo positivo cuando las funciones que forman el núcleo, $(k_t)_{t>0}$, son positivas.*

Sea $\mathcal{K} = (K(t))_{t\ge 0}$ un C_0-semigrupo de convolución de núcleo positivo en X, con núcleo $(k_t)_{t>0}$. Como $k_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\|k_t\|_1 = 1$, entonces se tiene que $\widehat{k_t} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ ya que la Transformada de Fourier es un operador continuo de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $C_0(\mathbb{R}^n)$, con $\|\widehat{k_t}\|_\infty \le \|k_t\|_1 = 1$. Luego $\widehat{k_t} I \in \mathcal{L}(C_0(\mathbb{R}^n))$, y se tiene la familia de operadores $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = (T(t))_{t\ge 0}$ con

$$\begin{array}{lllll} T(t): & C_0(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & C_0(\mathbb{R}^n) & \\ & g & \longmapsto & \widehat{k_t} g & , t > 0 \\ & g & \longmapsto & g & , t = 0 \end{array}$$

que es uniformemente acotada. Veamos que es un C_0-semigrupo. La Ley de semigrupo se cumple ya que $\widehat{k_{t+s}} = \widehat{k_t * k_s} = \widehat{k_t}\widehat{k_s}$. La continuidad fuerte en el origen se sigue ya que como $\overline{\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n))}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0(\mathbb{R}^n)$, se toma $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\|\widehat{f} - g\|_\infty < \varepsilon$, y así

$$\begin{aligned}
\|\widehat{k_t} g - g\|_\infty &= \|\widehat{k_t} g - \widehat{k_t}\widehat{f} + \widehat{k_t}\widehat{f} - \widehat{f} + \widehat{f} - g\|_\infty \\
&\leq \|\widehat{k_t}\|_\infty \|\widehat{f} - g\|_\infty + \|\widehat{f} - g\|_\infty + \|\widehat{k_t}\widehat{f} - \widehat{f}\|_\infty \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \|k_t * f - f\|_1 < 3\varepsilon
\end{aligned}$$

con t suficientemente cerca de 0^+. Luego $\lim\limits_{t\to 0^+} \|\widehat{k_t} g - g\|_\infty = 0$ para todo $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 4.1. ([6, p.28]) *Sea $t \geq 0$, $m_t : \Omega \to \mathbb{C}$ una familia de funciones continuas y acotadas tal que*

i) la familia $(T(t))_{t\geq 0}$, con $T(t)f := m_t f$ forma un semigrupo de operadores en $C_0(\Omega)$.

ii) las aplicaciones $t \longmapsto T(t)f \in C_0(\Omega)$ son continuas para todo $f \in C_0(\Omega)$.

Entonces existe $q : \Omega \to \mathbb{C}$ continua con $\sup\limits_{s\in\Omega} \mathfrak{Re}(q(s)) < +\infty$ y tal que $m_t(s) = e^{tq(s)}$ para cada $s \in \Omega, t \geq 0$.

Lema 4.1. *Sea $\mathcal{K} = (K(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo de convolución de núcleo positivo en $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, con núcleo $(k_t)_{t>0}$. Entonces existe $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua con $q(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y tal que $B = qI$ es el generador infinitesimal de $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$, con $D(B) = \{f \in C_0(\mathbb{R}^n) \,|\, qf \in C_0(\mathbb{R}^n)\}$.*

Demostración. Como $T(t)f = \widehat{k_t} f$ para $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ y $t > 0$, siendo $\widehat{k_t}$ continuas y acotadas, entonces aplicando la proposición anterior se tiene que existe $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua con $q(x) < +\infty$ y $\widehat{k_t}(x) = e^{tq(x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Notar que como $\|\widehat{k_t}\|_\infty \leq 1$, entonces $q(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Además para todo $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tal que $qf \in C_0(\mathbb{R}^n)$, y $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{tq(x)} f(x) - f(x)}{t} = q(x) f(x).$$

□

Teorema 4.1. *Sea $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$, y $\mathcal{K} = (K(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo de convolución de núcleo positivo en X, con núcleo $(k_t)_{t>0}$. Entonces el generador infinitesimal A verifica que para todo $f \in D(A)$ con $f^2 \in D(A)$, y $0 \leq \alpha \leq 1$,*

$$f(x)(-A)^\alpha f(x) \geq \frac{1}{2}(-A)^\alpha f^2(x) \ a.e.$$

Demostración. Como el núcleo es positivo, $\|k_t\|_1 = 1$, luego el semigrupo $(K(t))_{t\geq 0}$ es contractivo. Además podemos usar la representación integral de las potencias fraccionarias del generador de un C_0-semigrupo uniformemente acotado; para todo $0 < \alpha < 1$ se sabe

$$(-A)^\alpha f = \Gamma(-\alpha)^{-1} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha-1}(K(\lambda) - I)f \, d\lambda \text{ a.e.}$$

Luego para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} f(x)(-A)^\alpha f(x) &= f(x)\Gamma(-\alpha)^{-1} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha-1}(k_\lambda * f(x) - f(x)) \, d\lambda \\ &= \Gamma(-\alpha)^{-1} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} k_\lambda(x-r)f(r)f(x) \, dr - f^2(x)\Big) \, d\lambda. \end{aligned}$$

Ya que para todo $\lambda > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} k_\lambda(x-r) \, dr,$$

así se tiene que

$$f(x)(-A)^\alpha f(x) = \Gamma(-\alpha)^{-1} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} k_\lambda(x-r)(f(r)f(x) - f^2(x)) \, dr\Big) \, d\lambda.$$

Ahora usando que

$$\begin{aligned} -(f^2(x) - f(r)f(x)) &= -\Big(\frac{1}{2}(f(x) - f(r))^2 + \frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(r))\Big) \\ &\leq -\frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(r)), \end{aligned}$$

como el núcleo es positivo, $\lambda > 0$ y $\Gamma(-\alpha) < 0$ si $0 < \alpha < 1$, se obtiene la desigualdad

$$\begin{aligned} f(x)(-A)^\alpha f(x) &\geq \frac{\Gamma(-\alpha)^{-1}}{2} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} k_\lambda(x-r)(f^2(r) - f^2(x)) \, dr\Big) \, d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(-\alpha)^{-1}}{2} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} k_\lambda(x-r)f^2(r) \, dr - f^2(x)\Big) \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2}(-A)^\alpha f^2(x) \text{ a.e.} \end{aligned}$$

Para $\alpha = 0$, se tiene

$$f^2(x) \geq \frac{1}{2} f^2(x).$$

Para $\alpha = 1$, basta usar que $\lim\limits_{\alpha \to 1^-} (-A)^\alpha f = -Af$ y el caso ya demostrado de $0 < \alpha < 1$. □

Observaciones:

1) Para $\alpha = 0$ se tiene la desigualdad

$$f^2(x) \geq \frac{1}{2} f^2(x),$$

que es válida para toda función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

2) Para $\alpha = 1$ se tiene la desigualdad

$$2f(x)(-A)f(x) \geq (-A)f^2(x).$$

Tomando el semigrupo de traslaciones en $L^p(\mathbb{R})$, $T(t)f(x) := f(x-t)$, su generador es $A = -\frac{d}{dx}$, ya que para toda función derivable en casi todo punto

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{(T(h) - I)f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -f'(x).$$

Además se verifica que

$$2f(x)f'(x) = \frac{d}{dx}(f^2)(x).$$

Este semigrupo no es un semigrupo de convolución, pero

$$T(t)f(x) = f(x-t) = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)\delta_t(u)\, du,$$

donde δ_t es la distribución Delta de Dirac. Esto nos plantea una línea de trabajo futura; intentar extender estos resultados para semigrupos que vengan dados por expresiones integrales similares a la convolución en las que aparezcan distribuciones.

Veamos algunos ejemplos bastante conocidos de semigrupos de convolución de núcleo positivo:

1) El núcleo de Gauss, $\mu_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$, que es el núcleo del semigrupo de convolución gaussiano, cuyo generador infinitesimal es el operador de Laplace , es decir,

$$\frac{d}{dt}(\mu_t * f)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{dx_i^2}(\mu_t * f)(x).$$

2) El núcleo de Poisson, $P_t(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$, que es el núcleo del semigrupo de convolución de Poisson, cuyo generador infinitesimal es la potencia $\frac{1}{2}$ del operador de Laplace, es decir,

$$\frac{d}{dt}(P_t * f)(x) = \Delta^{\frac{1}{2}}(P_t * f)(x).$$

Ambos ejemplos se pueden consultar en [8] y en [11].

3) En [12], se generan semigrupos de convolución de núcleos positivos en $L^1(\mathbb{R})$ a partir de los dos anteriores. La idea es definir nuevos núcleos mediante el homomorfismo entre álgebras $\Theta_a : L^1(\mathbb{R}^+) \to L^1(\mathbb{R})$, con

$$\Theta_a(f) = \int_0^\infty f(t) a_t \, dt$$

para $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Para ello se toma el semigrupo fraccionario en $L^1(\mathbb{R}^+)$,

$$I_s(x) := \frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} e^{-x},$$

con $x > 0, s > 0$, y a_t cualquier de los semigrupos anteriores en $L^1(\mathbb{R})$, y se obtienen nuevos semigrupos (núcleos) de la forma

$$\Theta_a(I_s)(x) = \int_0^\infty I_s(t) a_t(x) \, dt = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)} e^{-t} a_t(x) \, dt.$$

Teorema 4.2. *Sea $\mathcal{K} = (K(t))_{t \geq 0}$ un C_0-semigrupo de convolución positivo en $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, con núcleo $(k_t)_{t>0}$, y generador A. Si $0 \leq \alpha \leq 1$, $p = 2^j$ con j entero positivo, y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $q\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, siendo la función q el generador del semigrupo $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-2} f(x) (-A)^\alpha f(x) \, dx \geq \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |(-A)^{\frac{\alpha}{2}} f^{\frac{p}{2}}(x)|^2 \, dx.$$

Demostración. Se tiene que $f(x)(-A)^\alpha f(x) \geq \frac{1}{2}(-A)^\alpha f^2(x)$, luego

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-2} f(x)(-A)^\alpha f(x)\, dx &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-2} (-A)^\alpha f^2(x)\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-4} f^2(x) (-A)^\alpha f^2(x)\, dx \\
&\geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-4} (-A)^\alpha f^4(x)\, dx \\
&\geq \frac{1}{2^k} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-2^k} (-A)^\alpha f^{2^k}(x)\, dx.
\end{aligned}$$

reiterando el proceso. Tomando $k = j - 1$, para $0 \leq \alpha \leq 1$ se cumple

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-2} f(x)(-A)^\alpha f(x)\, dx &\geq \frac{1}{2^{j-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{2^j - 2^{j-1}} (-A)^\alpha f^{2^{j-1}}(x)\, dx \\
&= \frac{2}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{p}{2}} (-A)^\alpha f^{\frac{p}{2}}(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Por otro lado, para $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned}
\widehat{(-A)^\alpha} f(\eta) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\eta\cdot x}(-A)^\alpha f(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\eta\cdot x}\Gamma(-\alpha)^{-1}\Big(\int_0^\infty \lambda^{-\alpha-1}(k_\lambda * f(x) - f(x))\,d\lambda\Big)\,dx \\
&= \Gamma(-\alpha)^{-1}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\eta\cdot x}(k_\lambda * f(x) - f(x))\,dx\Big)\,d\lambda \\
&= \Gamma(-\alpha)^{-1}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha-1}\Big(\widehat{k_\lambda * f}(\eta) - \widehat{f}(\eta)\Big)\,d\lambda \\
&= \Gamma(-\alpha)^{-1}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha-1}\Big(\widehat{k_\lambda} - I\Big)\widehat{f}(\eta)\,d\lambda.
\end{aligned}$$

Usando las propiedades del semigrupo $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$, se tiene que

$$\widehat{(-A)^\alpha} f(\eta) = (-B)^\alpha \widehat{f}(\eta) = (-q(\eta))^\alpha \widehat{f}(\eta) \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n),$$

lo cuál tiene perfecto sentido ya que $q(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Observar que para $\alpha = 0$ la identidad anterior es trivial, y para $\alpha = 1$ se obtiene usando $\lim\limits_{\alpha\to 1^-}(-A)^\alpha f = -Af$ y que la transformada de Fourier es un operador continuo. Finalmente usando los teoremas de Plancherel y Parseval para la Transformada de Fourier,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |(-A)^{\frac{\alpha}{2}} f^{\frac{p}{2}}(x)|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{(-A)^{\frac{\alpha}{2}} f^{\frac{p}{2}}}(x)|^2\,dx \\
&= \langle \widehat{(-A)^{\frac{\alpha}{2}} f^{\frac{p}{2}}}, \widehat{(-A)^{\frac{\alpha}{2}} f^{\frac{p}{2}}} \rangle \\
&= \langle (-q)^{\frac{\alpha}{2}} \widehat{f^{\frac{p}{2}}}, (-q)^{\frac{\alpha}{2}} \widehat{f^{\frac{p}{2}}} \rangle \\
&= \langle (-q)^{\alpha} \widehat{f^{\frac{p}{2}}}, \widehat{f^{\frac{p}{2}}} \rangle \\
&= \langle \widehat{(-A)^{\alpha} f^{\frac{p}{2}}}, \widehat{f^{\frac{p}{2}}} \rangle \\
&= \langle (-A)^{\alpha} f^{\frac{p}{2}}, f^{\frac{p}{2}} \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{p}{2}}(x)(-A)^\alpha f^{\frac{p}{2}}(x)\,dx
\end{aligned}$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-2} f(x)(-A)^\alpha f(x)\,dx &\geq \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{p}{2}}(-A)^\alpha f^{\frac{p}{2}}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |(-A)^{\frac{\alpha}{2}} f^{\frac{p}{2}}(x)|^2\,dx.
\end{aligned}$$

□

Observación: Notar que tanto para el Semigrupo de Gauss como para el de Poisson se cumplen las hipótesis del teorema anterior, ya que tomando

Transformadas de Fourier de los generadores, se tiene que $q(x) = -4\pi^2|x|^2$ para el gaussiano y $q(x) = -2\pi|x|$ para el de Poisson. Luego para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $qf \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Corolario 4.1. *En las condiciones del teorema anterior se cumple*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-A)^\alpha f(x)\, dx \geq \frac{1}{2}\|(-A)^{\frac{\alpha}{2}} f\|_2^2.$$

Demostración. Basta tomar $p = 2$. □

Corolario 4.2. *En las condiciones del teorema anterior se cumple*

$$\|(-A)^{\frac{\alpha}{2}} f^{\frac{p}{2}}\|_2^2 \leq p\, \|f^{p-1}\|_2\ \|(-A)^\alpha f\|_2.$$

Demostración. La desigualdad de Cauchy-Schwarz nos dice que

$$\int_{\mathbb{R}^n} F\, G\, dx \leq \|F\|_2 \|G\|_2.$$

Bien, pues tomando $F = |f|^{p-2} f$ y $G = (-A)^\alpha f$, se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-2} f(x)(-A)^\alpha f(x)\, dx \leq \|f^{p-1}\|_2 \|(-A)^\alpha f\|_2.$$

Basta aplicar ahora el teorema anterior y se obtiene el resultado. □

Supongamos que estamos en las condiciones de la proposición anterior, y que además f verifica la siguiente ecuación:

$$(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla) f = -k(-A)^\alpha f,$$

donde el vector u satisface que $\nabla \cdot u = 0$ ó $u_i = G_i(f)$, $0 < \alpha < 1$, y k positiva. Siguiendo el mismo proceso que en la primera sección, es decir, que en artículo [1], se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|f\|_p^p &= -kp \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p-2} f(-A)^\alpha f\, dx \\ &\leq -k \int_{\mathbb{R}^n} |(-A)^{\frac{\alpha}{2}} f^{\frac{p}{2}}|^2\, dx. \end{aligned}$$

El trabajo de investigación futura sobre este tema se centrará en usar esta última desigualdad para obtener otra del tipo

$$\|\theta(\cdot, t)\|_p^p \leq \frac{\|\theta_0\|_p^p}{(1 + \varepsilon C t \|\theta_0\|_p^{p\varepsilon})^{\frac{1}{\varepsilon}}},$$

o similar, lo que nos da un buen conocimiento de el decaimiento de la norma p de funciones que cumplen ciertas ecuaciones diferenciales.

Referencias

[1] A. Córdoba, D. Córdoba: *A pointwise estimate for fractionary derivatives with applications to partial differential equations,* PNAS. **100,** (2003), no. 26, 15316-15317.

[2] A. Córdoba, D. Córdoba: *A Maxium Principle Applied to Quasi-Geostrophic Equations,* Communications in Mathematical Physics. **249,** (2004), 511-528.

[3] Javier Duoandikoetxea Zuazo: *Análisis de Fourier,* Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid (1995).

[4] Elias M. Stein: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton Mathematical Series, Princeton University Press (1970).

[5] W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander: *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems,* Second edition, Monographs in Mathematics. **96**, Birkhäuser (2011).

[6] K. J. Engel, R. Nagel: *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations,* Graduate texts in Mathematics. **194,** Springer.

[7] Kôsaku Yosida: *Functional Analysis,* Fifth edition, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. **123,** Springer (1978).

[8] P. J. Miana: *Cáculo funcional fraccionario asociado al problema de Cauchy,* Memoria de Tesis Doctoral, Zaragoza (2001).

[9] Walter Rudin: *Functional Analysis,* McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGraw-Hill (1973).

[10] C. Martínez Carracedo, M. Sanz Alix: *The Theory of Fractional Powers of Operators,* Mathematics Studies. **187,** North -Holland (2001).

[11] Allan M. Sinclair: *Continuos Semigroups in Banach Algebras,* London Mathematical Society Lecture Note Series. **63,** Cambridge University Press.

[12] José S. Campos-Orozco, José E. Galé: *Special functions as subordinated semigroups on the real line,* Semigroup Forum. **84,** (2012), 284-300.