Teorema de Perron-Frobenius
Aplicación en el JCR
(Eigenfactor TM Score en el JCR)

Laura Miralles Millas

Trabajo de fin de grado en Matemáticas

Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo:

Paz Jiménez Seral y Manuel Vázquez Lapuente

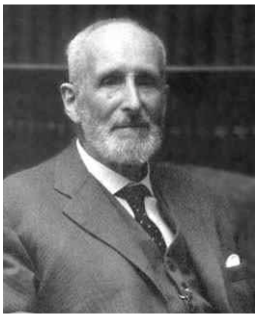
13 de septiembre de 2019

Prefacio

El que lee mucho y anda mucho,
ve mucho y sabe mucho.

Miguel de Cervantes

En el siglo XX destacaron una multitud de resultados relevantes dentro de las matemáticas y que siguen considerándose fundamentales para la matemática moderna. Uno de ellos es el famoso *Teorema de Perron-Forbenius*, al cual le rendiremos nuestra atención en este trabajo.
Este teorema se debe a dos grandes matemáticos alemanes del siglo XIX, Oskar Perron y Ferdinand Georg Frobenius.



(a) Oskar Perron

(b) Ferdinand Georg Frobenius

Oskar Perron (Frankenthal, 7 de mayo de 1880 - Munich, 22 de febrero de 1975) empezó sus estudios de Matemáticas y Física en la Universidad de Munich en 1898. También estudió en la Universidad de Berlín, de Tübingen y en la Universidad de Göttingen, donde trabajó con David Hilbert. Además, fue profesor en la Universidad de Heidelberg (1914 - 1922) y en la Universidad de Munich (1922 - 1951).

Perron hizo numerosas contribuciones en ecuaciones diferenciales y ecuaciones parciales diferenciales, incluido el método de Perron para resolver el problema de Dirichlet considerando ecuaciones diferenciales parciales elípticas. Escribió un libro sobre fracciones continuas *Die Lehre von den Kettenbrüchen* (La teoría de las fracciones continuas), y entre sus trabajos destaca la conocida *Paradoja de Perron* con la cual ilustra el peligro de suponer que existe la solución de un problema de optimización: *Sea N el mayor entero. Si $N > 1$, entonces $N^2 > N$, contradiciendo la definición de N. Por lo tanto, $N = 1$.*

Por otro lado, Ferdinand Georg Frobenius (Charlottenburg, 26 de octubre 1849 - Berlín, 3 de agosto 1917) entró en la escuela Joachimsthal Gymnasium con tan solo once años de edad, graduándose en 1867. Continuó sus estudios superiores en la Universidad Humboldt de Berlín, donde posteriormente alcanzó su doctorado con una tesis dirigida por Weierstrass, en 1870.

La teoría de grupos constituyó uno de los principales intereses de F. G. Frobenius. Uno de sus primeros aportes fue la demostración de los *teoremas de Sylow* mediante grupos abstractos (las demostraciones precedentes eran por grupos de permutaciones). Más importante fue la creación de la teoría de los caracteres de grupos y de las representaciones de grupos, fundamental para el estudio de la estructura de los grupos. Trabajó en el *teorema de Cayley-Hamilton*, y en el planteado por Eugène Rouché llamado desde entonces *Teorema de Rouché-Frobenius*.

En 1907, Oskar Perron demostró un resultado sobre matrices positivas (matrices cuadradas reales con todas sus entradas positivas) que garantiza la existencia de un valor propio (o eigenvalor) de la matriz, el cual acota en módulo al resto de valores propios de la matriz, y se denomina *Raíz de Perron*. Este valor propio tiene asociado un vector propio (o eigenvector) positivo (con sus componentes son estrictamente positivas), conocido como *Vector propio de Perron*. Unos años después, en 1912, F. G. Frobenius generalizó el postulado de Perron a matrices irreducibles. Así mismo, existe una declaración similar para matrices no negativas (matrices con todas sus entradas nulas o positivas).

La demostración de este teorema tiene distintos enfoques matemáticos. Es más, en la literatura aparecen diversas pruebas alternativas a las que inicialmente presentaron Perron y Frobenius, entre ellas: [1]

- En 1950, Helmut Wielandt propuso una prueba geométrica en la que utiliza el *Teorema del Punto Fijo* de Brouwer.[1] Se popularizó unos años a posteriori gracias a un trabajo de Israel Nathan Herstein (matemático) y Dérard Debreu (economista), de ahí probablemente que ésta sea la más conocida por los economistas.

- Sin necesidad del *teorema del punto fijo* encontramos las pruebas de Samuel Karlin (matemático americano) en 1959 y de Nikaido en 1969. Tampoco utiliza este teorema la demostración que aparece en el libro de Huppert [3].

- Existen también demostraciones construidas a partir de la Teoría de Juegos. [2]

En este trabajo se ha optado por abordar el teorema en cuestión desde un punto de vista algebraico, utilizando principalmente el libro *Angewandte Lineare Algebra* [3], donde algunas demostraciones se deben al matemático Wielandt. La razón de esta elección se debe en parte a que ya se llevó a cabo un trabajo de fin de grado en 2015[5] donde se estudia el *teorema de Perron-Frobenius*, de modo que el objetivo es demostrar el mismo resultado pero apoyándonos en otros postulados previos y consiguiendo así una base teórica que no se centre en un teorema tan geométrico como es el *teorema del punto fijo*.

Este teorema, que a priori se presenta como un resultado algebraico bastante abstracto y sin aparente aplicación práctica, cuenta con importantes aplicaciones en diferentes ámbitos como: la teoría de sistemas dinámicos (sub-turnos de tipo finito), la teoría de probabilidad (ergodicidad de las cadenas de Markov), la demografía (modelo de distribución de edad de la población de Leslie), la economía (teorema de Okishio, condición de Hawkins-Simon,...), las redes sociales (proceso de aprendizaje DeGroot), los motores de búsqueda de Internet (como el buscador de Google) e incluso al ranking de los equipos de fútbol o de otras entidades. [1]

Una de las aplicaciones más conocidas es el *Pagerank*, un algoritmo de búsqueda y ordenación que fue diseñado en 1998 por Sergey Brin y Lawrence Page. Todo ello sigue un proceso basado en los enlaces ($link$ de bibliografía relacionada) que encontramos en cada una de las *webs*, en la importancia de dichas páginas y en la probabilidad de que el lector decida navegar accediendo a uno de esos enlaces o por el contrario, elija otra *web* al azar. Evaluando todos estos aspectos, se consigue una ordenación de las distintas páginas *webs* en función de la consulta que hacemos, de modo que nos aparecen en primer lugar aquellas más relacionadas con nuestra búsqueda y las más relevantes.

Un proceso similar es el que describe el *Eigenfactor Score*, un indicador bibliométrico, vigente desde 2007, que permite medir la influencia de las publicaciones de forma mucho más aquilatada que el tradicional *Factor de Impacto* (FI). Las características del Eigenfactor son: [7]

[1] *Teorema del punto fijo de Brouwer* : Sea $D^n := \{ x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1 \}$ el disco unidad cerrado de $\mathbb{R}^n$ y $f : D^n \longrightarrow D^n$ una aplicación continua. Entonces f tiene un punto fijo; es decir, existe $x \in D^n$ tal que $f(x) = x$.

[2] La teoría de juegos es una rama de las matemáticas y de la economía que estudia la elección de la conducta óptima de un individuo cuando los costes y los beneficios de cada opción no están fijados de antemano, sino que dependen de las elecciones de otros individuos.

- Toma como referencia un periodo más amplio de citas admisibles (cinco años en lugar de dos).
- No tiene en cuenta las citas que una revista se ha hecho así misma (el FI sí tiene en cuenta las autocitas).
- Pondera la importancia de las citas recibidas por una revista por la importancia de las revistas que la citan.
- Toma en cuenta los patrones de citas de los distintos campos ponderando por las citas medias de cada revista.
- Genera una clasificación temática endógena y unívoca en 87 categorías, de modo que cada revista está en una y sólo una de las categorías.
- Usa la misma base de datos del índice de impacto (más de 7.000 revistas del Journal Citation Reports).
- Es accesible a través de la *web*.

Este índice valora cada revista en función no solo del número de citas que reciben sus artículos por parte de otras revistas, sino también de la importancia de las revistas que citan y la probabilidad de que el lector que está leyendo un artículo (de una revista en concreto) pase a leer otro artículo de una revista que está citada o elija otro al azar. Las posibles ordenaciones de un conjunto de revistas son muy significantes sobre todo en procesos de evaluación o en acreditación de la ANECA[3], lo cual interesa a la mayoría de investigadores.

Una de las fuentes más completas de mediciones bibliométricas para publicaciones científicas donde podemos encontrar rankings usando tanto el Factor de Impacto como el Eigenfactor es el Journal Citation Reports (JCR en lo sucesivo). El JCR es una publicación actualmente del Thomson Reuter [4], en el Institute for Scientific Information (ISI) de Filadelfia, que cada año proporciona los datos bibliométricos básicos de las principales revistas científicas en todos los campos del saber. Gracias a estos datos, que están públicos en la *web*, se obtiene al final del trabajo una ordenación de un conjunto de revistas mediante el índice del Eigenfactor.

Por todo ello, la memoria consta de dos capítulos, en el primero de ellos se presenta la teoría algebraica necesaria para demostrar el teorema en el que se centra este trabajo. Así es, el capítulo comienza con algunas nociones básicas como son la definición de matriz positiva y no negativa, matriz permutación, matriz irreducible,... y algunos lemas para la mejor comprensión de la sección. Como ya se ha nombrado anteriormente, F. G. Frobenius extendió el postulado para matrices irreducibles y bajo esta hipótesis (matriz A irreducible) se prueba el teorema principal, que se lleva a cabo en dos partes. En primer lugar se desarrolla el teorema de Perron (1.4), que equivale a la primera parte del teorema de Perron-Frobenius, y posteriormente el teorema de Frobenius (1.6). La demostración por partes se debe simplemente a que para esta última es necesario introducir la definición de radio espectral y una proposición que describe la forma de una matriz $B \leq A$ cuyo radio espectral cumple $r(B) \leq r(A)$. El capítulo concluye con una sección dedicada a las matrices primitivas, propiedad que cumplirá la matriz P descrita en el ejemplo práctico 2.5 y que nos asegura unicidad de la raíz de Perron de la matriz P.

El último capítulo tiene como objetivo presentar el índice bibliométrico Eigenfactor Score y el algoritmo que se sigue para calcularlo. Para ello presentaremos previamente otro de los indicadores más conocidos, el Factor de Impacto, y veremos algunos de los rasgos que los diferencian, dando la imagen en buena medida de que el Factor de Impacto queda obsoleto frente al Eigenfactor.

Para finalizar, aplicaremos el algoritmo descrito en esta sección para calcular el Eigenfactor Score de quince revistas elegidas entre las 310 citadas por el JCR en 2017 y ordenarlas según esta puntuación

---

[3] La Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación (ANECA) es un Organismo Autónomo, adscrito al Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, que tiene como objetivo contribuir a la mejora de la calidad del sistema de educación superior mediante la evaluación, certificación y acreditación de enseñanzas, profesorado e instituciones.

para conseguir el ranking deseado (2.5). El cálculo se obtiene a través del *Servidor de Sage*, aplicando el código que se muestra en el anexo *B* (B.2).

Agradecimientos

Después de la tormenta... llega la calma. Hace cuatro años que comencé este camino. En él he vivido momentos de tensión y nervios, pero también de satisfacción y de alegría. Tras este trabajo pongo punto y final a esta etapa, aunque sé que todavía me queda camino por recorrer. Como decía Machado en sus “Proverbios y cantares”,

Al andar se hace camino,
y al volver la vista atrás,
se ve la senda que nunca,
se ha de volver a pisar.

Al volver la vista atrás uno se da cuenta de todo lo que aporta esta etapa y lo valiosa que es, porque no solo se viven nuevas experiencias como el irte a otra ciudad a estudiar, sino que también conoces a gente que te marca, que se convierte en un apoyo fundamental y que ayuda a llevar ese camino; creces como persona y te conoces mejor. Uno aprende a superarse, a esforzarse y saborear el sentido de tan conocido refrán *Todo esfuerzo tiene su recompensa*. Y por todo ello me siento muy orgullosa de todo lo que he conseguido y en lo que me he convertido, aunque sin duda, esto no podría haberlo conseguido sin algunas personas.

Cuando se empieza a andar siempre te encuentras a gente que te apoya en el comienzo, otros te ofrecen agua cuando más calienta el Sol, otros te invitan a su casa a pasar la tormenta, algunos te regalan su tiempo, incluso te ofrecen su hombro, y otros tantos te acompañan indirectamente, pero sabes que están ahí.

Afortunada soy de contar con personas así en mi camino, y por eso me gustaría agradecer este trabajo a todos ellos.

A mis amigas, Sofía, Pilar, Natalia, María,... porque a pesar de no entender casi nada cuando os hablo de matemáticas, estáis ahí, por ser la alegría de estar en el pueblo y por todos esos momentos inolvidables. En especial a Sofía, por todo lo que nos une, y por esas conversaciones que dan la vida.

A mis fieles compañeras de estos cuatro años, Claudia, Miriam y Andrea , por todas las horas que hemos pasado en la biblioteca, que incluso cuando veíamos el cielo gris una de nosotras acababa viendo un rayo de luz con el que intentaba dar esperanzas para el examen. Porque nos une algo más que las matemáticas, somos cuatro patas para un banco y se nos conoce por ir en pack a las tutorías. No hubiese sido lo mismo sin vosotras.

A compañeros de universidad que se han convertido en compañeros de vida, Bárbara, Alejandra, María, Edu,... por conocerme como tal, en mis buenos y malos momentos, con y sin presión, con y sin fiesta. Gracias por ser como sois y por ser capaces de animarme aunque sea con un piropo matemático.

A Paz y a Manolo por vuestra dedicación en este trabajo. Gracias por haber confiado en mí y haberme dado la oportunidad de trabajar con vosotros, por haberme enseñado y mejorado en cada tutoría y sobretodo, por vuestra paciencia.

A mi hermana, por ser mi mano derecha en la vida.

Por último, y especialmente dedicado a ellos, a mis padres, Jesús y Monse. Siempre me habéis apoyado, y animado a hacer todo lo que me gustaba y que era bueno para mí, sobretodo si se trataba de mejorar en el ámbito académico. Siempre os habéis esforzado mucho para que tanto mi hermana como yo pudiésemos estudiar y ser las mejores “yo” posibles. Me habéis inculcado grandes valores, gracias a los cuales soy como soy hoy en día, y de los que siempre estaré agradecida.

Y no puedo olvidarme de mis abuelos, que con tan solo siete años de escuela siempre lo tuvieron claro y me repetían "Tú estudia y llegarás a ser lo que quieras" . Así que pronto podré deciros que soy matemática, allá donde estéis.

Y a partir de ahora seguiré recorriendo mi camino, rumbo a una nueva etapa que no dudo que será igual o mejor que la anterior. Por que como decía Machado,

Caminante son tus huellas,
el camino y nada más.
Caminante, no hay camino
se hace camino al andar.

Laura Miralles

Abstract

The goal of this project is to prove Perron-Frobenius theorem and to describe one of its many applications: the Eigenfactor Score in the Journal Citation Reports (JCR).

Perron-Frobenius theorem was first stated for positive matrices (those whose entries are all strictly positive), although Frobenius later extended it to irreducible (non-reducible) matrices. In this way, given a real,irreducible, non-negative square matrix A, this result claims the existence of a real eigenvalue of A, it's known as *Perron root*, which bounds in module the rest of the eigenvalues of A. This eigenvalue has a unique eigenvector associated to it with the property that all its coordinates are real positive and that the sum of them is equal to 1. It is called *Perron eigenvector*. However, it can happen that there exist complex eigenvalues of A with maximal modulus. For this, we can assert that, if there are k eigenvalues with maximal modulus, then there are exactly the k distinct roots of the polynomial $f = \lambda^k - r^k$. This result is due to Frobenius.

This theorem in Mathematics from the 20^{th}, which is apparently very abstract and theoretical has surprising applications in diverse fields such as: Probability, Economics, Demographics, Dynamical Systems, Social Networks (where the known algorithm Pagerank stands out), rankings,... We will be focusing in this last application. In the second part of this project, we describe a method for establishing a ranking by using the bibliometric index known as *Eigenfactor Score*, which measures the importance and the influence of the magazine publications more accurately than the traditional *Impact Factor*.

The Impact Factor of a journal, calculated every year, is based on the number of times articles published in the journal in the previous two years have been cited in the JCR. Here, it changes noticeably every year. This fact is one of the limitations against the Eigenfactor because in this case, it computes the number of citations in the past five years. On the other hand, both indices use the same database (more than $7,000$ journal listed in the JCR), but Eigenfactor calculation is characteristic because (a) the importance from all the citations of a journal is weighting by the own importance of a journal, (b) it is not influenced by journal self-citation, (c) it is classified in 87 categories and each of the journal belongs to one category, (d) easy access through the web. After describing all the characteristics of the new bibliometric indicator, the image remains that the Impact Factor would be obsolete.

The idea of this assigment is to present firstly the mathematical basis for the Eigenfactor application which is based on the Perron-Frobenius theorem. In the second part, the complete process for obtaining a ranking by using the Eigenfactor score calculation is explained, and we expose some real examples. For this reason, our working plan is going to be the following one:

- Throughout chapter one, we will focus on clearly proving the main theorem. Nevertheless to do this, we will need some previous concepts (reducible matrix, permutation matrix, spectral ratio,...) in order to conclude different results. We are going to prove a few useful propositions that we will need later. One of the principal notions is the irreducible matrices, that's why we define it and we show a characterization of them.

- Then, we will begin a section about primitive matrices (irreducible matrices with only one dominant eigenvalue of maximum module). This is an important characteristic in order to obtain the Eigenfactor score on account of our goal: to find the Perron's eigenvector. The ideal situation is to find an unique dominant eigenvalue. So, we can get this unicity due to the primitive property.

- All the results are proved for irreducible matrices, but some similar conclusions for reducible

matrices could be derived therefrom. We therefore devote to this interesting part in an appendix A.

- In the second chapter we will consider the general idea of the ranking of a set of elements. This ordering is based on the fact that one element gives importance to another one. For example, a football team gives points to another one, a web site (on Google) cites another one by using a link, or a journal cites another one. These proposal —points given from one element to another one— allows for collecting the data in a matrix, $A = (a_{ij})$ with $a_{ij} = \{\text{Importance of element } j \text{ to element } i\}$. Based on the matrix A we can distinguish between simple importance and nuanced importance and we apply them to the previous examples.

  The *simple importance* of an element i is defined as the addition of the importances given to the element i, excepting a proportionality constant

  $$A_i = \lambda \sum_j a_{ij}$$

  where $A_i = \{\text{Simple importance of } i\}$.

  Whereas, the *nuanced importance* takes into account the own importance of elements. That is, the addition is weighted by the relevance of the elements that give the importance

  $$\widehat{A_i} = \lambda \sum_j a_{ij} \widehat{A}_j$$

  with $\widehat{A_i} = \{\text{Nuanced importance of } i\}$.

- Impact Factor is based on the simple importance. Basically it uses a criteria reflecting the number of citations to articles published in science and social science journals. The nuanced importance is clearly a more accurate measure of factors that affect the ordering of people or entities in a ranking. However, it is not always possible to get a nuanced measure. This is the case of the Impact Factor.

- The Eigenfactor Score is based on the nuanced importance. It uses slightly different criteria (from that of the Impact Factor) in order to solve the previous obstacle: considering the probability of a lector to choose another journal. Then, the matrix A, now called $P = (p_{ij})$ —because it is a probability matrix— with p_{ij} =$\{$Probability that someone reading a magazine j chooses an article of the magazine $i\}$. A priori the matrix used by the Eigenfactor looks different to the matrix used by the Impact Factor, but after describing the matrix P, we show that probabilities p_{ij} depend on the total number of citations the journal i receives form the journal j (over a five-year period).

- Finally we will apply the Eigenfactor score calculation in order to sort fifteen journal listed in JCR during 2017, and we are going to compare the final result with their Impact factor JCR.

  Regarding all the characteristics about both indicators and the conclusions, although the Impact Factor is the most used up to now, it presents some limitations which becomes obsolete.

Keywords

- Perron-Frobenius theorem
- Eigenfactor Score
- Irreducible matrices
- Reducible matrices
- Impact Factor
- Journal Citation Reports (JCR)

Índice general

Capítulo 1

Teorema de Perron-Frobenius

A lo largo de este capítulo daremos algunas definiciones relevantes para poder comprender el trabajo expuesto, y se probarán algunos lemas previos que se usaran en las demostraciones principales, la del teorema de Perron y la del teorema de Frobenius, que juntas dan lugar al conocido teorema de Perron-Frobenius. El capítulo concluye con una sección de dedicada a las matrices primitivas.

1.1. Conceptos previos

Notación. Sea $\mathbf{x} = (x_j)$ un vector fila o un vector columna de $\mathbb{R}^n$. Escribimos

$\mathbf{x} > \mathbf{0}$ si todos $x_j > 0$ para $j = 1, \ldots, n$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ si todos $x_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$

Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ decimos que $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ (respectivamente $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$) si se tiene que $\mathbf{x} - \mathbf{y} > \mathbf{0}$ (resp. $\mathbf{x} - \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$).

Definición. Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices reales de tamaño $n \times n$. Denotamos

$A > \mathbf{0}$ si se cumple que $a_{ij} > 0$ para cualquier $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y decimos que A es *positiva*.
$A \geq \mathbf{0}$ si se cumple que $a_{ij} \geq 0$ para cualquier $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y decimos que A es *no negativa*.
Escribiremos $A > B$ (respectivamente $A \geq B$), cuando se verifica que $A - B > \mathbf{0}$ (resp. $A - B \geq \mathbf{0}$).

Definición. Sea $A = (a_{jk})$ una matriz real de tamaño $n \times n$, con $A \geq \mathbf{0}$.
Para $j \in \{1, \ldots, n\}$, denotamos $M_0 = \{j\}$ y definimos $M_t = \{k \mid a_{jk_1} a_{k_1 k_2} \cdots a_{k_{t-1} k} > 0$ para algunos $k_j\}$
Denotamos $M(j)$ a la unión de todos los M_t y decimos que se pasa a k desde j si $k \in M(j)$, se tiene así una relación transitiva y reflexiva pero no simétrica. [1] .

Definición. Se dice que P es una *matriz permutación* de orden n si se obtiene de permutar las filas (ó columnas) de la matriz identidad de tamaño n.
Más concretamente si π es una permutación del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ se define la matriz permutación correspondiente $P = (p_{jk})$ como

$$p_{jk} = \begin{cases} 1 & si \quad \pi(k) = j \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

Se tiene entonces que $P^{-1} = P^T$. Si A es una matriz $n \times n$, la matriz $PAP^{-1} = (\widehat{a}_{ij})$ es la que resulta de aplicar la permutación π a las filas de A y la misma permutación a las columnas de A, verificando $\widehat{a}_{\pi(i),\pi(j)} = a_{ij}$.

[1] Simétrica: Si se va de j hasta k se tiene que $k \in M(j)$, pero no tiene por qué ocurrir que $j \in M(k)$. Es fácil visualizarlo con un ejemplo: sea la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ con a_{11}, a_{22}, $a_{21} > 0$, se cumple que $1 \in M(2)$ (ya que $a_{21} > 0$), pero $2 \notin M(1)$.

Definición. Sea A una matriz $n \times n$. Se dice que A es *reducible* si se cumple uno de los dos casos:
i) $A = (a_{11})$ es nula.
ii) Si $n \geq 2$, existe una matriz permutación P tal que

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

siendo A_{11} y A_{22} cuadradas. [2]

Una matriz cuadrada A se dice *irreducible* si no es reducible.

Observación.

- Las matrices positivas son irreducibles.
- Las matrices con una fila de ceros son reducibles. Basta considerar una permutación adecuada que modo que la fila j de ceros pasase a primera posición, y así se llegaría a que PAP^{-1} cumple la estructura de una matriz reducible.

Proposición 1.1. *Sea A una matriz $n \times n$ ($n > 1$) no negativa , $A \geq \mathbf{0}$. Son equivalentes:*
a) A es irreducible.
b) Para todo $j \in \{1,\ldots,n\}$, se tiene que $M(j) = \{1,\ldots,n\}$.

Demostración. Observamos previamente que dado un $l \in \{1,\ldots,n\}$, si $j \in M(l)$ y $t \notin M(l)$ se verifica $a_{jt} = 0$, ya que en caso contrario, existiría una secuencia $a_{l,j_1} \cdots a_{j_{t-1},j} \cdot a_{j,t} > 0$ y se cumpliría $t \in M(j)$.

a) $\Longrightarrow$ *b*): Sea A irreducible. Suponer que $M(l) \subset \{1,\ldots,n\}$ para un cierto l. Por la transitividad, para cada $m \in M(l)$ se cumple que $M(m) \subseteq M(l)$.

Sea π una permutación del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ tal que $\pi(M(l)) = \{1,\ldots,k\}$.
Llamando $\widehat{A} = PAP^{-1}$, veamos si para todo $t' \in \{k+1,\ldots,n\}$ y $j' \in \{1,\ldots,k\}$, $\widehat{a}_{j',t'} = 0$.
Como π se aplica a las filas y columnas de A, existen t, j tales que

$$\pi(t) = t' \leftrightarrow \pi^{-1}(t') = t \in \pi^{-1}(\{k+1,\ldots,n\}) \leftrightarrow t \notin M(l)$$

&

$$\pi(j) = j' \leftrightarrow \pi^{-1}(j') = j \in \pi^{-1}(\{1,\ldots,k\}) \leftrightarrow j \in M(l)$$

Por la observación del principio $a_{jt} = 0$ luego tenemos $\widehat{a}_{j',t'} = a_{\pi^{-1}(j'),\pi^{-1}(t')} = a_{jt} = 0$, de donde deducimos que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

donde A_{11} es una matriz cuadrada de tamaño k ($1 \leq k < n$), y A_{22} es $n-k \times n-k$. Esto implica que A es reducible, lo cual contradice la hipótesis inicial. Luego, se tiene que $M(j) = \{1,\ldots,n\}$.

b) $\Longrightarrow$ *a*): Suponer cierto *b*). Sea $M(j) = \{1,\ldots,n\}$. Suponer que A es reducible. Por definición existe una matriz permutación P tal que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

donde A_{11} es $k \times k$ ($1 \leq k < n$). Entonces, considerando π la permutación asociada a la matriz P se cumple que el elemento (i,j) de la matriz PAP^{-1} es $a_{\pi(i),\pi(j)}$.

Notar que si $\pi(i) \leq k$ y $\pi(j) > k$, $a_{\pi(i),\pi(j)} = 0$. De ello se deduce que $\pi(k+1) \notin M(\pi(1))$. Así que $M(\pi(1)) \subset \{1,\ldots,n\}$ y se da una contradicción con la hipótesis. Por tanto, A es irreducible. $\square$

[2]La definición es equivalente a que los ceros estén abajo a la izquierda. Para comprobarlo basta con aplicar en la matriz anterior la permutación $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$; de este modo nos queda: $P\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$ donde B_{11} tiene el mismo tamaño que A_{22} .

Proposición 1.2. *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ no negativa, $A \geq \mathbf{0}$, e irreducible. Entonces se tiene,*

$$(I_n + A)^{n-1} > \mathbf{0}$$

Demostración. Establecemos $I_n + A = (b_{ij})$ tal que $b_{ii} = 1 + a_{ii} > 1$ y $(I_n + A)^{n-1} = (b_{ij}^{(n-1)})$.

Como A es irreducible, para $i \neq j$ existe una secuencia $j_1, \ldots, j_{t-1}$ cumpliendo

$$a_{i,j_1} \cdot a_{j_1,j_2} \cdots a_{j_{t-1},j} > 0$$

Escogiendo la secuencia más corta posible, logramos que los subíndices (de las filas) $i, j_1, \ldots, j_{t-1}$ sean distintos.
Luego $t \leq n$ y se tiene

$$b_{ij}^{(n-1)} = \sum_{(S_k)} b_{i,s_1} b_{s_1,s_2} \cdots b_{s_{n-1},j} \geq a_{i,j_1} a_{j_1,j_2} \cdots a_{j_{t-1},j} b_{jj} \cdots b_{jj} > 0$$

□

1.2. Teorema de Perron

Proposición 1.3. *Sea A una matriz real no negativa, $A \geq \mathbf{0}$, e irreducible.*
Para cada $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \geq 0$ definimos

$$g(\mathbf{x}) = \min_{x_j \neq 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k}{x_j}$$

Notar que $g(\mathbf{x})$ representa el escalar más grande tal que $A\mathbf{x} \geq g(\mathbf{x})\,\mathbf{x}$ y además, $A\mathbf{x} - g(\mathbf{x})\mathbf{x}$ tiene una componente nula.
Entonces existe máximo del conjunto $\{g(\mathbf{x}) |\, \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, al que denotamos r.

$$r = \max\{g(\mathbf{x}) | \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Demostración. Consideramos los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^n$

$$M = \{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \;\; y \;\; N = \{\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} x_j = 1\}$$

Y sea $P = \{(I_n + A)^{n-1}\mathbf{y} |\, \mathbf{y} \in N\}$.
Para todo $0 < c \in \mathbb{R}$, se tiene que $g(\mathbf{x}) = g(c\mathbf{x})$, luego

$$\{g(\mathbf{x}) |\, \mathbf{x} \in P\} \subseteq \{g(\mathbf{x}) |\, \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \{g(\mathbf{x}) |\, \mathbf{x} \in N\}$$

.

Notar que N es compacto, sin embargo, la función g no es continua en N. Pero por otro lado, debido a que $P = (I_n + A)^{n-1} N$, es decir, P es la imagen continua de N a través de la aplicación $(I_n + A)^{n-1}$, se tiene que P también lo es. [3]

[3] Resultado topológico: Sea X compacto, $f : X \longrightarrow Y$ continua, entonces Y es compacto.Para demostrarlo basta tomar un recubrimiento abierto $\mathscr{U} = (U_i)$ de $f(X)$ de modo que la antiimagen será un recubrimiento abierto de X, y por ser este compacto, se llega a que $f(X) \subseteq \cup(U_i)$, así que $f(X)$ compacto.

Además, $\forall\, \mathbf{x} \in P$, se cumple que $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ ya que $\mathbf{x}$ es una suma de términos positivos (por 1.2). Esto implica que g es el mínimo de unas funciones continuas $g_j = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_j}{x_j}$ en P, por lo cual, g es continua en el compacto P, y por el *Teorema de Weierstrass* [4] existe máximo en P.

Ahora tomamos $\mathbf{y} \in N$. Sea $\mathbf{x} = (I_n + A)^{n-1}\mathbf{y} \in P$, veamos que $g(\mathbf{y}) \leq g(\mathbf{x})$.

Siguiendo la definición de $g(\mathbf{y})$ se cumple $A\mathbf{y} \geq g(\mathbf{y})\,\mathbf{y}$. Además, dada una matriz B no negativa, y dos vectores tales que $\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ se verifica $B\mathbf{x} \geq B\mathbf{y}$.

Esto muestra que

$$g(\mathbf{y})\mathbf{x} = g(\mathbf{y})(I_n + A)^{n-1}\mathbf{y} = (I_n + A)^{n-1}(g(\mathbf{y})\,\mathbf{y}) \leq (I_n + A)^{n-1}A\mathbf{y} = A(I_n + A)^{n-1}\mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

Así mismo, si usamos la definición de $g(\mathbf{x})$ deducimos que $g(\mathbf{y}) \leq g(\mathbf{x})$.

De todo ello concluimos que como existe el máximo, entonces

$$\forall\, \mathbf{y} \in M, \quad g(\mathbf{y}) \leq \max_{\mathbf{x} \in P} g(\mathbf{x})$$

Luego, efectivamente existe $r = \max\{g(\mathbf{x}) | \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

□

Proposición 1.4 (Teorema de Perron-Frobenius)**.** *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ real no negativa, $A \geq \mathbf{0}$, e irreducible. Se verifica,*

1. *La matriz A tiene un valor propio r real y positivo -denominado* Raíz de Perron- *para el que existe un vector propio $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$ de A cuyas coordenadas son todas positivas y $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.*
2. *La dimensión del subespacio fundamental, $S(r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{y} = r\mathbf{y}\}$, es 1. (Por tanto, existe un único vector $\mathbf{x}$ con las condiciones de 1 conocido como* Vector propio de Perron*).*
3. *Si $\mu \in \mathbb{C}$ es otro valor propio de A entonces $|\mu| \leq r$.*
4. *La multiplicidad de r como raíz del polinomio característico de A es 1.*
5. *Si $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{0} \neq \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{w} = b\mathbf{w}$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces $b = r$.*
6. *Si existen k valores propios de módulo máximo, entonces son solución de $x^k - r^k = 0$.*

Demostración. La demostración siguiente es del matemático Helmut Wielandt.

1. Por la demostración anterior (1.3) sabemos que existe $r = \max_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \geq \mathbf{0}} g(\mathbf{x})$. Así mismo, como g es una función real se tiene que efectivamente, $r \in \mathbb{R}$. Veamos que $r > 0$.

Consideramos el vector $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Se tiene que $g(\mathbf{e}) = \min_{x_j \neq 0} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}$, es decir, la mínima suma de los elementos de una fila de A.

Si suponemos que $r = 0$, como $0 = r \geq g(\mathbf{e})$ tendríamos en A una fila de ceros (pues sus elementos son ≥ 0) y la matriz A no sería irreducible (ver *observación* antes de 1.1).

Por tanto $r > 0$.

Veamos ahora que r es un valor propio de A, es decir, que existe un vector $\mathbf{y}$ tal que $A\mathbf{y} = r\mathbf{y}$.

Sabemos por definición de r, que existe un vector $\mathbf{0} \leq \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ no nulo tal que $g(\mathbf{y}) = r$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathbf{y} \in N$ (bastaría multiplicarlo por un escalar si fuera necesario). [5]

[4] *Teorema de Weierstrass*: Sea (X, τ) un espacio topológico, $K \subseteq X$ compacto. Si $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ es un función continua entonces existen $x_1, x_2 \in K$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\ \forall\, x \in K$.

[5] Dicha suposición no afecta a nuestra prueba, ya que en 1.3 hemos justificado que $\{g(\mathbf{x}) | \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \{g(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in N\}$

Sea $\mathbf{z} = (I_n + A)^{n-1}\mathbf{y} \in P$, luego $\mathbf{z} > \mathbf{0}$. Aplicando la definición de g se tiene que

$$A\mathbf{y} - r\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Supongamos que $A\mathbf{y} - r\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, se tendría que

$$A\mathbf{z} - r\mathbf{z} = (I_n + A)^{n-1}(A\mathbf{y} - r\mathbf{y}) > \mathbf{0}$$

Por definición de $g(\mathbf{z})$, como es el escalar más grande tal que $A\mathbf{z} \geq g(\mathbf{z})\mathbf{z}$ entonces $g(\mathbf{z}) \geq r$, pero además sabemos que $A\mathbf{z} - g(\mathbf{z})\mathbf{z}$ tiene una componente nula, luego se tiene que $g(\mathbf{z}) > r$. Lo cual lleva a contradicción por ser r el máximo.

Necesariamente $A\mathbf{y} - r\mathbf{y} = \mathbf{0}$, es decir, $A\mathbf{y} = r\mathbf{y}$, luego r es valor propio.

Además, $\mathbf{0} < \mathbf{z} = (I_n + A)^{n-1}\mathbf{y} = (1 + r)^{n-1}\mathbf{y}$ [6]. Luego forzosamente $\mathbf{y} > \mathbf{0}$.

Queda demostrada así la existencia de un vector propio asociado a r cuyas componentes son estrictamente positivas y suman uno.

2. Sea $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ verificando $A\mathbf{y} = r\mathbf{y}$. Veamos que

$$Ker(A - rI_n) = \mathbb{R}\langle \mathbf{y} \rangle$$

Considerar un vector $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\mathbf{x} = r\mathbf{x}$. Elegimos $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{w} = \mathbf{y} - c\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ con una componente de $\mathbf{w}$ nula $\big($el escalar c existe y será $c = \{\min\limits_j (\frac{y_j}{x_j}) \mid x_j > 0\}$ en caso de existir algún $x_j > 0$ y en otro caso será $c = \{\max\limits_j (\frac{y_j}{x_j}) \mid x_j < 0\}\ \big)$.

Suponemos que $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, se tiene

$$\mathbf{0} < (I_n + A)^{n-1}\mathbf{w} = (1 + r)^{n-1}\mathbf{w}$$

Eso implica $\mathbf{w} > \mathbf{0}$, en contra de la elección de $\mathbf{w}$. Así $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, luego $\mathbf{x} = c\mathbf{y}$. Esto muestra efectivamente que $\dim S(r) = 1$.

3. Sea $\mu \in \mathbb{C}$ otro valor propio de A. Existe $\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ tal que $A\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$.

Para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que

$$\mu \cdot y_j = \sum_k a_{jk} \cdot y_k$$

Aplicando la desigualdad triangular

$$|\mu||y_j| \leq \sum_k a_{jk}\,|y_k|$$

Si llamamos $\mathbf{0} \neq \mathbf{y}^* = (|y_j|) \in \mathbb{R}^n$, por lo que acabamos de ver se verifica que $A\mathbf{y}^* \geq |\mu|\mathbf{y}^*$, luego $r \geq g(\mathbf{y}^*) \geq |\mu|$.

4. Si $\dim S(r) = 1$ y $(x-r)^2$ divide al polinomio característico entonces existe $a \in Ker(x-r)^2 - S(r)$. En otras palabras, si la multiplicidad de r como raíz del polinomio característico de A fuese mayor que 1 existiría un vector que se anula por $(A - rI_n)^2$ y no se anula por $A - rI_n$.

Veamos que $Ker(A - rI_n)^2 \subseteq Ker(A - rI_n)$:

Sea $\mathbf{w} \in Ker(A - rI_n)^2$, entonces $(A - rI_n)\mathbf{w} \in Ker(A - rI_n)$. Luego $(A - rI_n)\mathbf{w} = \alpha\mathbf{y}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

[6] Para llegar a esta igualdad basta proceder por inducción.
Para n=2: $(I_2 + A)^1\mathbf{y} = \mathbf{y} + r\mathbf{y} = (1 + r)\mathbf{y}$
Suponer cierto para n-1. Entonces para n: $(I_n + A)^{n-1} = (I_n + A)(I_n + A)^{n-2}\mathbf{y} = (1 + r)^{n-1}\mathbf{y}$

Recordar que los valores propios de A y de A^t coinciden[7], en particular, el valor dominante r es el mismo. Además, la matriz traspuesta de A, A^t, es también irreducible[8] luego verifica los apartados anteriores.

Consideramos así el vector $\mathbf{z} > \mathbf{0}$ que existe y cumple que $A^t\mathbf{z} = r\mathbf{z}$.

Se tiene que

$$\alpha \mathbf{y}^t \mathbf{z} = \mathbf{w}^t (A^t - rI_n)\mathbf{z} = \mathbf{w}^t \mathbf{0} = 0$$

Luego necesariamente $\alpha = 0$, ya que los vectores $\mathbf{y}, \mathbf{z} > \mathbf{0}$. Por tanto, $\mathbf{w} \in Ker(A - rI_n)$.
En efecto, $Ker(A - rI_n)^2 \subseteq Ker(A - rI_n)$.

Más concretamente, $Ker(A - rI_n)^2 = Ker(A - rI_n)$.

Concluimos entonces que r es raíz simple del polinomio característico de A.

5. Veamos que $b = r$:

Sabemos que r es el valor propio dominante de A y de A^t, luego existe $\mathbf{z} > \mathbf{0}$ tal que $A^t\mathbf{z} = r\,\mathbf{z}$. Por ser todas las componentes de $\mathbf{z}$ positivas y las de $\mathbf{w}$ no negativas, el producto escalar $\mathbf{w}^t\mathbf{z} > 0$.

Así

$$r\mathbf{w}^t\mathbf{z} = \mathbf{w}^t r\mathbf{z} = \mathbf{w}^t A^t \mathbf{z} = (A\mathbf{w})^t \mathbf{z} = b\mathbf{w}^t\mathbf{z}$$

y dividiendo por $\mathbf{w}^t\mathbf{z} > 0$, se tiene que $r = b$.

6. Para la demostración de este apartado necesitaremos algunos resultado más que introducimos en la siguiente sección (ver demostración 1.6).

□

1.3. Teorema de Frobenius

Definición. Sea A una matriz $n \times n$ real o compleja. Sean $a_1, \ldots, a_n$ los valores propios de A (reales o complejos). El *radio espectral* de A, denotado por $r(A)$, se define como

$$r(A) := \max_j(|a_j|)$$

A partir de ahora, denotamos $\sigma(A)$ al conjunto de los valores propios de A que cumplan $|a_j| = r(A)$, es decir, todos aquellos que tengan módulo máximo.

Proposición 1.5 (Wielandt)**.** *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ real no negativa, $A \geq \mathbf{0}$, e irreducible. Sea $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times n$ compleja con $|bij| \leq a_{ij}$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces se tiene que $r(B) \leq r(A)$.*

Si se cumple $r(B) = r(A) = r$ y además $b = re^{i\varphi}$ es valor propio de B, con $\varphi \in \mathbb{R}$ entonces

$$B = e^{i\varphi} DAD^{-1}$$

con $D = diag\,[d_{11} \cdots d_{nn}]$ y $|d_{ii}| = 1$, es decir

$$b_{ij} = e^{i\varphi} d_{ii}\, a_{ij}\, d_{jj}$$

En particular $|b_{ij}| = a_{ij}$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

[7] A y A^t tienen el mismo polinomio característico, ya que: $P_A(\lambda) = |A - \lambda I_n| = |(A - \lambda I_n)^t| = |A^t - \lambda I_n| = P_{A^t}(\lambda)$

[8] Para ver que A^t es irreducible, demostrar que si A reducible, A^t también. Si A es reducible, existe una matriz de permutación P tal que $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. Tomando la traspuesta, $PA^tP^{-1} = (PAP^{-1})^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, luego A^t reducible.

Demostración. Sea $B\mathbf{x} = b\mathbf{x}$ con $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$. Para toda componente j se da la siguiente desigualdad,

$$|b||x_j| = |\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}||x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| \tag{1.1}$$

Si tomamos $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$, claramente $\mathbf{0} \neq \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$ y se verifica

$$A\mathbf{x}^* - |b|\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$$

Luego, por definición de g y de $r(A)$ se tiene $|b| \leq g(\mathbf{x}^*) \leq r(A)$. Así $r(B) \leq r(A)$.

Sea ahora $r(B) = r(A) = r$. Para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $B\mathbf{x} = b\mathbf{x}$ tal que $|b| = r$.

Por la última desigualdad se tiene $|b| = g(\mathbf{x}^*) = r$ y por 1.4 (*aparatado* 1) se da la siguiente igualdad

$$A\mathbf{x}^* = r\,\mathbf{x}^* \qquad \mathbf{x}^* > \mathbf{0}$$

Tomar ahora $B^* = (|b_{ij}|)$ entonces

$$r\mathbf{x}^* \leq B^*\mathbf{x}^* \leq A\mathbf{x}^* = r\,\mathbf{x}^*$$

y por tanto

$$B^*\mathbf{x}^* = A\mathbf{x}^* = r\,\mathbf{x}^*$$

Además por (1.1)

$$\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j|$$

luego como $|x_j| > 0$ y $|bij| \leq a_{ij}$ se tiene forzosamente $|bij| = a_{ij}$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, sean $d_{ii} \in \mathbb{C}$ de módulo 1 tales que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}|x_1| \\ \vdots \\ d_{nn}|x_n| \end{pmatrix}$$

Si tomamos $D = diag\,[d_{11} \cdots d_{nn}]$, $\mathbf{x} = D\mathbf{x}^*$ y si $b = re^{i\varphi}$, se tiene

$$BD\mathbf{x}^* = B\,\mathbf{x} = b\,\mathbf{x} = r\,e^{i\varphi}D\mathbf{x}^*$$

Para terminar llamamos $C = e^{-i\varphi}D^{-1}BD$, y veamos que $A = C$.

Como $c_{ij} = e^{-i\varphi}d_{ii}^{-1}\, b_{ij}\, d_{jj}$, se tiene que $|c_{ij}| = |b_{ij}| = a_{ij}$, y además, $C\mathbf{x}^* = r\mathbf{x}^* = A\mathbf{x}^*$

Se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}|x_j| = \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}|x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j|$$

Y por ser $\mathbf{x}^* > \mathbf{0}$, se tiene que $c_{ij} = \mathrm{Re}(c_{ij}) = |c_{ij}| = a_{ij}$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Queda demostrado así que $A = e^{-i\varphi}D^{-1}BD$.

□

Esta demostración será de gran interés en la demostración del *Teorema de Frobenius* que mencionaremos a continuación.

Proposición 1.6 (Teorema de Frobenius). *Sea $A=(a_{ij})$ una matriz $n\times n$ real no negativa, $A\geq \mathbf{0}$, e irreducible.*

a) Supongamos que A tiene k valores propios $a_1,\ldots,a_k$ tales que $|a_i|=r(A)$. Con una numeraciòn adecuada se tiene que

$$a_j = e^{\frac{2\pi ij}{k}} r(A) \qquad j=0,\ldots,k-1$$

Así $e^{\frac{2\pi ij}{k}}\sigma(A)=\sigma(A)$. Es decir, en $\sigma(A)$ se admiten rotaciones de ángulo $\dfrac{2\pi j}{k}$ para $j=0,\ldots,k-1$.

Además, todos los a_j son valores propios simples y son exactamente las k raíces del polinomio de $f=x^k-r^k$.

b) Si $k>1$ entonces existe una matriz permutación P tal que

$$P\,A\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donde $A_{j,j+1}$ es una matriz de tamaño (n_j,n_{j+1}) para $j<k$ y $A_{k,1}$ es de tamaño (n_k,n_1). A la forma de la matriz PAP^{-1} se le conoce como Forma de Frobenius.

c) Si $a_{jj}>0$ para algún j, se tiene que $k=1$.

d) Si hay $i\neq j$ con $a_{ij}\,a_{ji}>0$, entonces $k\leq 2$.

Demostración. La demostración siguiente es del matemático Helmut Wielandt.
a) Sea $a_j=e^{i\varphi_j}r$ con $r=r(A)$ y φ_j real. Aplicando 1.5 y tomando $B=A$ y $b=a_j$ se tiene que existe una matriz diagonal D_j tal que

$$A = e^{i\varphi_j} D_j\,A\,D_j^{-1} \tag{1.2}$$

Por semejanza de matrices se tiene que $\sigma(A)=\sigma(D_j\,A\,D_j^{-1})=\sigma(e^{-i\varphi_j}A)$. [9] Debido a que r es un valor propio simple de A (por 1.4), también lo será de $D_j\,A\,D_j^{-1}$; luego $a_j=e^{i\varphi_j}r$ es un valor propio simple de $e^{i\varphi_j}D_j\,A\,D_j^{-1}=A$.

Ahora volviendo a aplicar (1.2) con otro valor propio del espectro, se tiene

$$A = e^{i\varphi_j}D_j\,A\,D_j^{-1} = e^{i\varphi_j}\,D_j\,(e^{i\varphi_l}D_l\,A\,D_l^{-1})D_j^{-1} = e^{i(\varphi_j+\varphi_l)}D_j\,D_l\,A\,(D_j\,D_l)^{-1}$$

Esto muestra que A y $e^{i(\varphi_j+\varphi_l)}A$ son semejantes, por lo cual $e^{i(\varphi_j+\varphi_l)}r\in\sigma(A)$. Pero por hipótesis A solo tiene k valores propios, luego ha de cumplirse la siguiente igualdad

$$e^{i(\varphi_j+\varphi_l)}r = e^{i\varphi_m}r \qquad para \quad m\in\{1,\ldots,k\} \tag{1.3}$$

Observar que los $e^{i\varphi_j}$ forman un subconjunto, G, no vacío y finito del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$. Recordar además que para ver que es grupo basta ver que dados dos elementos de G, el producto también está en G. [10]

Se deduce así que $G=\{e^{\frac{2\pi j}{k}}\,|\,j=0,\ldots,k-1\}$ es un grupo abeliano de $\mathbb{C}^*$ de orden k [11]. Más precisamente, G es un subgrupo cíclico cuyos elementos son las k-raíces primitivas (distintas) de la unidad, es decir, son las k raíces del polinomio $f=x^k-1$.
Por tanto, si multiplicamos por r el subgrupo G nos queda: $\{re^{\frac{2\pi j}{k}}\,|\,j=0,\ldots,k-1\}$ que es el conjunto

[9] Sean $A,B\in\mathbb{R}^n$, decimos que A y B son matrices semejantes $\Longleftrightarrow \exists P\in\mathbb{R}^n$ invertible tal que $B=P^{-1}AP$. Cumplen que tienen el mismo polinomio característico: $det(B-\lambda I_n)=det(P^{-1}AP-\lambda I_n)=det(P^{-1}(A-\lambda I_n)P)=det(A-\lambda I_n)$ y las dimensiones de los subespacios fundamentales coindicen.

[10] Sea G un grupo, si H es un subconjunto no vacío finito de G, H es grupo si $xy\in H$ para cualquier $x,y\in H$

[11] Para cada número natural n, hay un único subgrupo de ese orden, que es $<e^{\frac{2\pi i}{n}}>$. Los grupos abelianos (los que tienen operación conmutativa) tales que para cada divisor d del orden del grupo existe un único subgrupo de orden d son cíclicos.

de las k raíces del polinomio $x^k - r^k = 0$, ya que elevando a k obtenemos: $(re^{\frac{2\pi j}{k}})^k = r^k$.

b) Por a) podemos tomar $\frac{2\pi}{k} = \varphi_j$ y tenemos una matriz diagonal D tal que

$$A = e^{\frac{2\pi i}{k}} DAD^{-1}$$

Observamos que esta igualdad se conserva si sometemos las filas y columnas de A y D a la misma permutación.

Sea P dicha matriz permutación se tiene que

$$PAP^{-1} = e^{\frac{2\pi i}{k}} PDP^{-1}PAP^{-1}(PDP^{-1})^{-1}$$

Cambiando el orden de filas y columnas tomamos

$$D = \begin{pmatrix} e^{i\delta_1}E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\delta_m}E_m \end{pmatrix}$$

siendo $0 \leq \delta_j < 2\pi$ distintos y E_j la matriz identidad del correspondiente tamaño n_j.

Ahora tomamos A la resultante de hacerle a la matriz A inicial las mismas permutaciones (a filas y columnas) que a la matriz D y se tiene

$$A = e^{\frac{2\pi i}{k}} DAD^{-1} \tag{1.4}$$

Nos queda entonces

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix}$$

tomando A_{ij} de tamaño $n_i \times n_j$. Y de la igualdad anterior (1.4) se obtiene

$$A_{ij} = e^{\frac{2\pi i}{k}} e^{i\delta_i} e^{-i\delta_j} A_{ij} \tag{1.5}$$

De aquí deducimos que si $e^{i(\frac{2\pi}{k}+\delta_i-\delta_j)} \neq 1$ se tiene que A_{ij} es nula.

Así para cada i hay como máximo una única j tal que $A_{ij} \neq 0$, y ese j verifica que $e^{i(\frac{2\pi}{k}+\delta_i)} = e^{i\delta_j}$.

Si observamos la definición inicial de la matriz D que procede de la existencia de un vector propio, multiplicando ese vector propio por un cierto escalar podemos tomar $e^{i\delta_1} = 1$, es decir $\delta_1 = 0$.

Y volviendo a la igualdad (1.5) salvo una cierta reordenación de la matriz D, se tiene que si hay una no nula

$$A_{12} \neq \mathbf{0}, \quad \delta_2 = \frac{2\pi}{k}$$

$$A_{23} \neq \mathbf{0}, \quad \delta_3 = 2\frac{2\pi}{k}$$

$$\vdots$$

$$A_{k-1,k} \neq \mathbf{0}, \quad \delta_k = (k-1)\frac{2\pi}{k}$$

Además en la fila k, el subíndice l que hace que la matriz $A_{kl} \neq \mathbf{0}$ también ha de cumplir $1 = e^{i(\frac{2\pi}{k}+\delta_k)} = e^{i\delta_l}$, luego $l = 1$.

La matriz resultante es

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Notar que no puede darse otra situación, pues al ser A irreducible las $A_{j,j+1}$ no pueden ser nulas.

c) Si $k > 1$, se deduce de $b)$ que $a_{jj} = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

d) Sea $a_{ij}a_{ji} > 0$ con a_{ij} en el bloque $A_{l,l+1}$. Así que, $a_{ji} > 0$ está en el bloque $A_{l+1,l+2}$, entonces $l+2 \equiv l \ (mod\ k)$, con lo que se deduce que $k \leq 2$.

□

Visto este teorema ya tenemos completada la demostración del teorema de Perron-Frobenius (1.4). Además el apartado $b)$ nos asegura que podemos transformar la matriz A a una matriz con la *forma de Frobenius*, con lo cual será más fácil identificar una matriz irreducible.

1.4. Matrices primitivas

Hasta ahora hemos demostrado que dada una matriz irreducible A existe un valor propio dominante r (raíz de Perron) y un vector propio asociado a él (vector propio de Perron) cuyas componentes son estrictamente positivas y suman uno.

Surge ahora la siguiente cuestión: cómo podemos calcular dicho vector. Sin duda cuanto mayor sea la dimensión de la matriz A, más difícil es obtenerlo. Para ello vamos a exigir una propiedad más a nuestra matriz, que sea primitiva. De este modo, se puede obtener el vector propio que buscamos a través del comportamiento asintotico de la potencia k-ésima. Está claro que calcular dicho vector con este método es relativamente más sencillo en comparación con tener que obtenerlo usando la definición (es decir, calculando los valores propios y resolviendo el sistema $AX - rX = 0$ donde X sería el vector propio deseado). Por lo cual, en esta sección explicamos qué es una matriz primitiva y una caracterización de las mismas.

Usaremos algún resultado técnico que aparece en el *anexo* A.

Definición. Decimos que una matriz cuadrada real no negativa es *primitiva* si es irreducible y el espectro tiene un único valor propio, que será real. (Equivale a tomar el valor $k = 1$ en los resultados anteriores (1.6) de matrices irreducibles).

Hay muchas matrices primitivas, por ejemplo: las matrices positivas o las no negativas con ceros solo en la diagonal son las más sencillas de ver.

Presentamos una caracterización para estas matrices que asegura el comportamiento asintótico de la potencia k-ésima de la matriz A, A^k.

Proposición 1.7. *Sea A una matriz cuadrada real no negativa y primitiva con $r = r(A)$, $\mathbf{0} < \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\mathbf{z} = r\mathbf{z}$ y $\mathbf{0} < \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A^t\mathbf{y} = r\mathbf{y}$ elegidos de modo que $\mathbf{y}^t\mathbf{z} = 1$ (y que sabemos que existen por el teorema de irreducibles 1.4). Se tiene*

a)

$$\lim_{k\to\infty} r^{-k}A^k = \begin{pmatrix} z_1y_1 & \cdots & z_1y_n \\ \vdots & & \vdots \\ z_ny_1 & \cdots & z_ny_n \end{pmatrix} = P$$

y

$$P\mathbf{v} = (\mathbf{y}^t\mathbf{v})\mathbf{z} \qquad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

b) Si $\mathbf{0} \leq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{0} \leq \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. *Para un k suficientemente grande se tiene que*

$$A^k \mathbf{v} > \mathbf{0}$$

y

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(A^k \mathbf{v})_j}{(A^k \mathbf{w})_j} = \frac{\mathbf{y}^t \mathbf{v}}{\mathbf{y}^t \mathbf{w}} \quad \text{independientemente de } j$$

y

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(A^k \mathbf{v})_i}{(A^k \mathbf{v})_j} = \frac{z_i}{z_j} \quad \text{independientemente de } \mathbf{v}$$

Demostración. a) La matriz $r^{-1}A$ es irreducible por serlo A y los valores propios de $r^{-1}A$ son los valores propios de A multiplicados por r^{-1}, luego por 1.4 $\sigma(r^{-1}A) = \{1\}$. Además, por el teorema 1.4 hay un único divisor elemental con base $x-1$ que es $x-1$ y por las formas canónicas existe una matriz regular T tal que

$$T^{-1}(r^{-1}A)T = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times n-1} \\ 0_{n-1\times 1} & B \end{pmatrix}$$

La matriz B no tiene al 1 de valor propio luego $r(B) < 1$ y aplicando A.1

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0_{n-1\times n-1}$$

Así

$$T^{-1} \lim_{k\to\infty} (r^{-k}A^k)T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Más concretamente, si $T = \begin{pmatrix} s_1 & \\ \vdots & * \\ s_n & \end{pmatrix}$ y $T^{-1} = \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_n \\ & * & \\ & & \end{pmatrix}$ se tiene

$$P = \lim_{k\to\infty} (r^{-k}A^k) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} s_1 t_1 & \cdots & s_1 t_n \\ \vdots & & \vdots \\ s_n t_1 & \cdots & s_n t_n \end{pmatrix}$$

Llamamos $\mathbf{t}^t = (t_1, \ldots, t_n)$.

Por ser $A\mathbf{z} = r\,\mathbf{z}$, se tiene que $P\mathbf{z} = \mathbf{z}$, es decir

$$\mathbf{0} \neq \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = P\mathbf{z} = \begin{pmatrix} s_1 \mathbf{t}^t \mathbf{z} \\ \vdots \\ s_n \mathbf{t}^t \mathbf{z} \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que $\mathbf{t}^t \mathbf{z} \neq 0$ y podemos multiplicar T por un escalar adecuado para que $\mathbf{t}^t \mathbf{z} = 1$. Se llega a que $z_i = s_i$ para todo i.

También se tiene que $A^t \mathbf{y} = r\,\mathbf{y}$. Trasponiendo dicha igualdad nos queda $\mathbf{y}^t A = r\,\mathbf{y}^t$ y por tanto $\mathbf{y}^t P = \mathbf{y}^t$, es decir

$$(y_1, \ldots, y_n) = \mathbf{y}^t P = (t_1 \mathbf{y}^t \mathbf{z}, \ldots, t_n \mathbf{y}^t \mathbf{z}) = (t_1, \ldots, t_n)$$

Así, para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$P\mathbf{v} = \begin{pmatrix} z_1 \mathbf{y}^t \mathbf{v} \\ \vdots \\ z_n \mathbf{y}^t \mathbf{v} \end{pmatrix} = (\mathbf{y}^t \mathbf{v})\mathbf{z}$$

b) Por a) tenemos que para $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k\to\infty} r^{-k}(A^k \mathbf{v})_j = (P\mathbf{v})_j = \mathbf{y}^{\mathbf{t}} \mathbf{v}\, z_j$$

con $z_j > 0$.

Como por hipótesis $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ y $\mathbf{0} \neq \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ se sigue

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(A^k\,\mathbf{v})_j}{(A^k\,\mathbf{w})_j} = \lim_{k\to\infty} \frac{(r^{-k}A^k\,\mathbf{v})_j}{(r^{-k}A^k\,\mathbf{w})_j} = \frac{\mathbf{y}^t\mathbf{v}\,z_j}{\mathbf{y}^t\mathbf{w}\,z_j} = \frac{\mathbf{y}^t\mathbf{v}}{\mathbf{y}^t\mathbf{w}}$$

Además,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(A^k\mathbf{v})_i}{(A^k\mathbf{v})_j} = \frac{(\mathbf{y}^t\mathbf{v})\,z_i}{(\mathbf{y}^t\mathbf{x})\,z_j} = \frac{z_i}{z_j}$$

□

Observación. Observemos que esto permite calcular el vector propio $\mathbf{z}$ por aproximación simplemente partiendo de un $\mathbf{v}$ cualquiera, no negativo por ejemplo, para tener asegurado que $(\mathbf{y}^t\mathbf{v}) \neq 0$ y $A^k\mathbf{v}$ se va aproximando a un vector proporcional a $\mathbf{z}$.

Veamos ahora una caracterización de las matrices primitivas.

Proposición 1.8. *Para una matriz A cuadrada real y no negativa, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) Existe un k_0 tal que para todo $k \geq k_0$ se tiene que A^k es positiva.

b) Existe un k tal que A^k es positiva.

c) A es primitiva.

Demostración. a) $\Longrightarrow$ b) Trivial.

b) $\Longrightarrow$ c) Probamos primero que A es irreducible. Supongamos que no lo es y que existe una matriz permutación P tal que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$PA^kP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^k & 0 \\ * & A_{22}^k \end{pmatrix}$$

que no es positiva, luego A^k tampoco puede ser positiva.

Consideramos ahora $a_1, \ldots, a_m$ los valores propios de módulo $r(A)$ y sean los vectores $\mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}$ tales que $A\mathbf{v}_j = a_j\mathbf{v}_j$ para $j = 1, \ldots, m$.

Recordar que $a^m = (r(A))^m$, luego se tiene que $A^m\mathbf{v}_j = a_j^m\mathbf{v}_j = (r(A))^m\mathbf{v}_j$

A continuación, si elegimos un t tal que $tm \geq k$ de modo que $A^{tm}\mathbf{v}_j = a_j^{tm}\mathbf{v}_j = (r(A))^{tm}\mathbf{v}_j$ y $r(A^{tm}) = r(A)^{tm}$, deducimos que la matriz A^{tm} es positiva, luego es irreducible. Por tanto, por 1.4 sabemos que $r(A)^{tm}$ es un valor propio simple de A^{tm}. Luego necesariamente $m = 1$ y A es primitiva.

c) $\Longrightarrow$ a) Por 1.7 a) como $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ y $\mathbf{z} > \mathbf{0}$ entonces $\lim_{k\to\infty} r^{-k}A^k > 0$. Así que $A^k > 0$ para todo los k suficientemente grandes. □

Observación.

- Sea A una matriz real de tamaño $n \times n$ no negativa, $A \geq \mathbf{0}$. Si existe un $t \in \mathbb{N}$ de modo que A^t es primitiva, entonces A también es primitiva.
- Todas las matrices estocásticas (matrices reales cuyas columnas suman 1) son primitivas.

  Además, si la matriz estocástica es positiva la raíz de Perron es 1.

Todos los resultados expuestos se estudian para matrices irreducibles, sin embargo, cabe preguntarse qué ocurre con aquellas matrices que no cumplen esta propiedad. Por ello, hemos dedicado un anexo (ver *Apéndice* A) a las matrices reducibles, en el cual se estudian algunos resultados similares que pueden ser de gran utilidad. Además, destacar el hecho de que los enunciados se prueban por inducción a partir de los resultados expuestos en este capítulo.

Capítulo 2

Algoritmo de ordenación

En este capítulo presentamos el algoritmo en el cual se basa el índice Eigenfactor Score, realizando un análisis detallado del mismo y justificando los pasos, así como la obtención de la solución final. Primero se plantea la idea general, junto con algunos ejemplos para aclarar los conceptos y posteriormente se describe el algoritmo. Finaliza con un ejemplo práctico en el que se ordena un conjunto de revistas en función de su índice Eigenfactor. La base matemática que permite y asegura la existencia de los resultados que se alcanzan a lo largo de esta sección es la desarrollada a lo largo del capítulo 1.

Hay muchas situaciones en las que se requiere una ordenación de entidades o personas en función de su importancia o bondad. Nos centraremos en las ordenaciones que se basan en la importancia que unos elementos le dan a otros. Por ejemplo, los alumnos de una clase según sus conocimientos donde cada alumno evalúa al resto, los equipos de fútbol o baloncesto de acuerdo a sus resultados enfrentándose a otro equipo o incluso un conjunto de revistas según las citas que unas revistas hacen a otras o un conjunto de páginas *webs* contando con qué páginas tienen enlaces con otras según su interés (como ocurre al realizar una búsqueda en Google). En todos estos casos se les asigna un valor o importancia que nos sirve para realizar un ranking.

2.1. Planteamiento general

Trataremos el problema de establecer un ranking basado en el hecho de que un elemento le da importancia a otro; es decir, en el fútbol por ejemplo un equipo juega contra otro, de modo que podríamos interpretarlo como que un equipo le da puntos a otro en caso de ganar ($+3$ puntos), empatar ($+1$ puntos) o perder ($+0$ puntos).

En general, en este tipo de problemas tenemos un número n de elementos de modo que el elemento j le da al elemento i un valor (una importancia, puntos, citas,...) en función de un criterio que se establece previamente. Estos datos los podemos expresar en forma de una matriz de importancias, A, de tal forma que la fila 1 muestra el valor que le dan al elemento 1 el elemento 2, el elemento 3,... e incluso la importancia que se da a sí mismo.

Más formalmente, se tiene una matriz $A = (a_{ij})$ donde

$$a_{ij} = \{\textit{La importancia que } \mathrm{j} \textit{ le da a } \mathrm{i}\}$$

Además se entiende que esta importancia es un valor real y positivo.

Visualicemos la idea con un pequeño ejemplo.

Ejemplo 1. Suponer que tenemos una clase con cuatro estudiantes: e_1, e_2, e_3, e_4. Cada uno de ellos califica sobre 10 los exámenes del resto. Veamos cuáles serían las notas finales. La matriz A en este ejemplo sería:

$$a_{ij} = \{\text{Calificación que el estudiante } e_j \text{ ha puesto al estudiante } e_i\}$$

Por ejemplo, consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 0 & 5 \\ 7 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Como cada examen se evalúa sobre 10, al sumar las tres calificaciones nos quedarían la nota de cada alumno sobre 30 (teniendo en cuenta que cada uno no se califica a sí mismo). Por lo cual las notas serían:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 6 & 16 & 20 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

donde $A_i = \sum_j a_{ij}$.

Si se quieren escalar las notas de modo que queden evaluadas sobre 10, basta multiplicar el vector (2.1) por $\lambda = \frac{10}{30}$ y quedaría: $\begin{pmatrix} 8{,}66 & 2 & 5{,}33 & 6{,}66 \end{pmatrix}$.

O en caso de seguir el criterio de poner un 10 al alumno con mayor nota, bastaría multiplicar (2.1) por $\lambda = \frac{10}{\max_i(A_i)}$ y el resultado sería: $\begin{pmatrix} 10 & 2{,}3 & 6{,}15 & 7{,}69 \end{pmatrix}$.

Se deduce así que las notas son proporcionales a las sumas de las tres calificaciones puestas por sus compañeros. De manera que,

$$N_i = \lambda \sum_j a_{ij}$$

donde N_i = {La nota del estudiante e_i}.

Este ejemplo representa cómo a través de una matriz A, formada por las calificaciones de un alumno a otro (en este caso, la calificación equivale a la noción de *importancia* nombrada en el planteamiento general), se obtiene la siguiente ordenación de los estudiante según sus resultados en el examen: $\begin{pmatrix} e_1 & e_4 & e_3 & e_2 \end{pmatrix}$. A grandes rasgos podemos empezar a intuir la idea de cómo establecer un ranking, en este caso de cuatro elementos (estudiantes) bajo la idea de que un elemento (estudiante e_j) le da una importancia (calificación a_{ij}) a otro elemento (estudiante e_i).

A continuación describimos dos tipos de importancias definidas a partir de una matriz $A = (a_{ij})$ con las que es posible obtener un ranking de un conjunto de elementos.

2.1.1. Importancia simple

A partir de una matriz A como la descrita anteriormente, definimos la importancia *simple* de i, A_i, como la suma en j de las importancias que le dan a i, salvo un factor constante λ. Es decir, teniendo en cuenta la notación anterior,

$$A_i = \lambda \sum_j a_{ij}$$

Ponemos algunos ejemplos reales en los que se establece así un ranking.

Clasificación de La Liga

El fútbol es uno de los deportes más populares hoy en día y es bien conocida la clasificación final de cada temporada. Actualmente en España es la liga Santander y podemos ver cómo van los equipos así como sus respectivas posiciones. En ella, la importancia vendría dada por los puntos conseguidos en cada partido. Luego en este caso,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \{\text{Número de puntos totales que consigue el equipo } i \text{ al jugar contra el } j\ \} \\ &\equiv \{\text{Número de puntos que le da } j \text{ a } i\} \end{aligned}$$

Así, la fila i de la matriz se muestran los puntos que ha ganado i tras jugar el partido de ida y el partido de vuelta contra j. Los elementos de nuestra matriz A serán: $0,1,2,3,4$ ó 6.

Por ejemplo, los puntos ganados por el Zaragoza (Zgz), si

$$\left\{ \begin{array}{c} i = Zaragoza \\ j = Huesca \end{array} \right. \implies a_{ij} = \left\{ \begin{array}{cc} 6 & si\ gana\ los\ dos\ el\ Zgz \\ 4 & si\ gana\ uno\ y\ empatan\ otro \\ 3 & si\ gana\ uno\ y\ pierde\ otro \\ 2 & si\ empatan\ los\ dos \\ 1 & si\ empatan\ uno\ y\ pierde\ otro \\ 0 & si\ pierde\ el\ Zgz\ los\ dos \end{array} \right.$$

Así, la clasificación del fútbol la dan los valores

$$A_i = \sum_j a_{ij}$$

donde A_i es el número total de puntos conseguidos por el equipo i. Notar que en este caso la constante de proporcionalidad λ toma el valor 1.

Factor de Impacto JCR

El *Journal Citation Reports* (JCR) es la fuente más completa de mediciones bibliométricas para publicaciones científicas y actualmente es producto de la empresa Thomson Reuters. Cada año lista de forma ordenada todas las revistas que han publicado algún artículo el año anterior, según la categoría en la que se encuentren (matemáticas, bioquímica, oncología,...) en función de varios indicadores. El más conocido es el Factor de Impacto JCR o Índice de Impacto.

El *Factor de Impacto* (FI) es un índice de calidad relativo para evaluar la calidad científica de las revistas académicas (no la de un artículo). Se interpreta como el número medio de citas, en un año determinado N, a artículos de una revista determinada publicados en los dos años anteriores.

Concretamente, siguiendo la notación descrita en la importancia simple interpretamos

$$a_{ij} = \frac{c_{ij}}{p_{1i} + p_{2i}} \tag{2.2}$$

donde:

- c_{ij} = {Número de citas, durante un año determinado N, de la revista j a los artículos de la revista i que han sido publicados los dos años anteriores}.
- p_{1i} = {Número total de artículos de la revista i publicados en el año N-1}.
- p_{2i} = {Número total de artículos de la revista i publicados en el año N-2}.

Entonces el FI para cada revista i que representa su importancia, $FI_{\mathbf{i}}$, se define como

$$FI_i\,(=A_i) = \sum_j \frac{c_{ij}}{p_{1i} + p_{2i}} \tag{2.3}$$

donde $\lambda = 1$.

Observar que el valor del FI depende de cada revista y claramente puede variar. Además, cada año el JCR lista las revistas nuevas, al igual que aquellas que han desaparecido; luego podría ocurrir que una revista no tenga Factor de Impacto en un determinado año. Todo esto conlleva una inevitable variabilidad estadística, que nos hace pensar que a pesar de que el FI es una idea muy razonable, presenta una serie de limitaciones.

Nota. Este modo no es el único que existe para establecer un ranking. Por ejemplo, la clasificación mundial de La FIFA se basa, en parte, en los puntos ganados por partido. No obstante, se tiene en cuenta a su vez, los resultados de los últimos cuatro años, ponderando con mayor valor los más recientes, características del rival, lugar del partido y torneo disputado (dando más valor si es una final que a un partido amistosa). En esta clasificación influyen muchos más aspectos que en la clasificación de fútbol descrita anteriormente, luego da la sensación de que su ajuste es más acertado. Actualmente se usa un algoritmo bautizado como "SUMA", un algoritmo basado en la suma o resta de puntuación.

Para más información ver: `https://resources.fifa.com/image/upload/fifa-world-ranking-technical-explanation-revision.pdf?cloudid=o1x9opdeidahofz8zbbp`

Esta idea se asemeja a la que vamos a introducir con el tipo de ranking que nos interesa: El hecho de que algunos aspectos influyan más que otros.

2.1.2. Importancia matizada

La importancia *matizada* que le damos a un elemento no se centra solo en la importancia que un elemento j le da a otro i, sino que ese valor se multiplica por la propia importancia del elemento j. Parece lógico este planteamiento ya que así se tiene en consideración si quien otorga la importancia a i está mejor o peor valorado, y por tanto cuenta más o menos.

Por consiguiente, si denotamos $\widehat{A}_j$ la importancia de un elemento j, se debe cumplir

$$\widehat{A}_i = \lambda \sum_j a_{ij} \widehat{A}_j$$

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{A}_1 \\ \vdots \\ \widehat{A}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \widehat{A}_1 \\ \vdots \\ \widehat{A}_n \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Observar que estamos ante un problema de valores y vectores propios. Así es, se trata de buscar un vector propio único asociado al valor propio $\frac{1}{\lambda}$ $(\lambda > 0)$ cumpliendo que todas sus componentes son reales y positivas (puesto que no tiene sentido hablar de importancias negativas). Como veremos más adelante, no siempre será posible obtener un vector con dichas características, para asegurar que existe solución, es decir, que existe dicho vector propio- la matriz A deberá cumplir unas condiciones.

El teorema de Perron-Frobenius será el que nos garantice la existencia de una posible solución a nuestro problema, que es el conocido Vector propio de Perron; aunque para ello recordar que la matriz ha de ser no negativa e irreducible, tal y como hemos demostrado en el capítulo anterior 1.4.

Visualicemos primero algunos ejemplos para asentar la idea.

Pagerank

Cuando consultamos en la red algún tipo de información usando Google u otros buscadores y deseamos encontrar páginas relacionadas con la información que buscamos, la lista con las primeras *webs* encontradas en relación a nuestra búsqueda, aparece ordenada según su importancia.

Esta lista ordenada se realiza gracias a un algoritmo de búsqueda y ordenación diseñado por Sergey Brin (matemático) y Lawrence Page (informático) en 1998. Este algoritmo recibe el nombre de *PageRank*. En este caso la matriz A en cuestión es la conocida como *matriz de Google*, y a partir de ella se obtiene el ranking.

Para más información merece la pena consultar la lección inaugural del profesor Luis M. Ezquerro Marín [2] y el trabajo de Fin de Grado de Adrián Inés Armas [5].

Factor de Impacto

La diferencia entre la importancia matizada de la simple es el encontrar un vector propio. Más concretamente, en la simple solo hay que sumar; sin embargo parece una mejor medida el considerar la importancia del que otorga los puntos y matizar así la suma. Claramente es más costoso calcular la importancia matizada —en el caso de existir— ya que hay que calcular un vector propio mientras que la anterior se basa en sumar. Cabe preguntarse si se puede aplicar dicha importancia a la matriz A del Factor de Impacto explicado anteriormente. Para ello consideraremos un pequeño ejemplo.

Ejemplo 2. Consideremos 4 revistas R_1, R_2, R_3, R_4.

i	*Revista*	p_{1i}	p_{2i}	*Citas*	*Autocitas*
1	R_1	3	3	2 citas a R_2	8
2	R_2	5	3	4 citas a R_1	8
3	R_3	8	2	2 cita a R_1, 4 a la R_2 , 4 a la R_4	5
4	R_4	0	2	no cita a ninguna revista	2

Construimos la matriz A teniendo en cuenta (2.2):

$$A = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8/6 & 4/6 & 2/6 & 0 \\ 2/8 & 8/8 & 4/8 & 0 \\ 0 & 0 & 5/10 & 0 \\ 0 & 0 & 4/2 & 2/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Notar que la matriz A es no negativa y reducible. Sus valores propios son: $1, \frac{1}{2}, \frac{7+\sqrt{7}}{6}, \frac{7-\sqrt{7}}{6}$.

Y los vectores propios respectivamente son: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3/2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{7}}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-\sqrt{7}}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Observar que ninguno de los cuatro posibles vectores propios verifica las condiciones que buscamos (aparecen componentes nulas o negativas). Luego en este caso no existe la importancia matizada. Este es un ejemplo ilustrativo de por qué a la matriz usada en el Factor de Impacto no siempre se le puede aplicar la importancia matizada.

Además, notar que en este caso teníamos una matriz 4×4, pero en caso de tener dimensiones mayores, la complejidad de obtener los valores propios es mayor. El único valor propio posible de calcular es el dominante, por ejemplo usando el método de la potencia o en el caso de matrices irreducibles, aplicando el resultado 1.7.

Al igual que hemos estudiado la importancia matizada aplicada a la matriz del Factor de Impacto, podemos visualizar qué ocurre con la matriz obtenida en la liga de fútbol. En este caso sí se puede calcular dicha importancia y encontramos algunos ejemplos de clasificaciones de la Liga de fútbol en el Blog del profesor Manuel Vázquez (Universidad de Zaragoza) disponible en web: `https://futbolymates.blogspot.com/2009/11/emparejamientos-y-calendario.html`.

2.2. Eigenfactor

El índice *Eigenfactor Score* o *Factor Propio* fue desarrollado por Jevin West y Carl Bergstrom en la Universidad de Washington. Es un índice basado en el número de veces que los artículos —publicados en los cinco años anteriores— han sido citados el presente año y de la importancia de las revistas los que citan. Se considera una clasificación de la importancia total de las que revistas de ámbito científico.

Cabe destacar, sin duda, que estos no son los únicos factores influyentes en la situación real, depende también del número de consultas, de la calidad de sus artículos así como el renombre de los investigadores que los escriben,... E incluso, en lo referente a las citas, también se puede especificar si dicha referencia es de fuente primaria o secundaria, de modo que en caso de ser fuente primaria se consideraría todavía un poco más importante. Sin embargo, estos detalles tampoco los tendremos en cuenta.

Las características del Eigenfactor son: [7]

- El periodo que considera como referencia para contar las citas admisibles es de cinco años en cuenta de dos como el FI.
- No tiene en cuenta las citas que una revista se ha hecho así misma (el FI sí tiene en cuenta las autocitas). Así se evita que las propias revistas inflen sus categorías o que pequeñas revistas con citas poco usuales se comporten como nodos aislados al representar las referencias de una revista a otra en forma de grafo.
- Pondera la importancia de las citas recibidas por una revista por la importancia de las revistas que la citan.
- Genera una clasificación temática endógena y unívoca en 87 categorías, de modo que cada revista está en una y sólo una de las categorías.
- La base de datos que usa es la misma que la del factor de impacto (más de 7,000 revistas del Journal Citation Reports).
- El acceso es fácil e inmediato a través de la *web* [8].

2.3. Planteamiento del Eigenfactor

En la siguiente sección nos centraremos en explicar el procedimiento completo para establecer este ranking.

En primer lugar, para hacer una ordenación debemos determinar el criterio que vamos a seguir. Esto es, debe estar clara la idea en la que nos basamos para listar una serie de elementos o entidades. Por ejemplo, un criterio es clasificar en función del número medio de citas —como es el caso del Factor de Impacto—. De acuerdo con nuestro ejemplo 2 no podemos construir una "importancia matizada" sobre el FI puesto que no siempre es posible encontrar solución, de ahí que el Eigenfactor introduzca una variante que salve esta dificultad. No obstante, el Eigenfactor se rige por la probabilidad de que un lector lea una revista, luego cuanto mayor sea esa probabilidad, mejor puesto tendrá la revista en el ranking.

2.3.1. Criterio del Eigenfactor

El punto de partida es, como en todos los ejemplos anteriores, definir una matriz A. En este caso es una matriz de probabilidades y a partir de ahora la denotaremos $P = (p_{ij})$.

Describiremos la probabilidad p_{ij} de que un lector de la revista j pase a leer un artículo de la revista i. Esta probabilidad dependerá de dos parámetros: el número de citas que recibe la revista i y el número de artículos de la revista i.

Aunque a priori esta matriz de importancias parezca muy distinta de la del Factor de Impacto, en realidad no lo es tanto puesto que esta probabilidad, como veremos a continuación, se basa fundamentalmente en el número de citas que le hace la revista j a la revista i.

Podemos interpretarlo como que p_{ij} corresponde a puntos que la revista j le da a la revista i.

Una primera aproximación para determinar esta importancia sería considerar la probabilidad para llegar a la revista i desde cualquier otra revista. Así, podemos estimar el valor de $\sum_j p_{ij}$ que sería la probabilidad de que un lector de cualquier revista elija la revista i. Este valor marcaría la importancia de la revista i.

Notar que para cada revista podemos calcular esta importancia. Parece lógico entonces reflexionar sobre cómo influye la relevancia de una revista a la hora de calcular p_{ij}. Dicho en otras palabras, lo que se hace es ajustar esa probabilidad por su importancia (el propio índice de influencia de las revistas que citan). Así, representamos el hecho de que si una revista es muy importante, los "puntos" que asigna —a otra revista— se valoren más que los "puntos" de una revista pequeña con poca relevancia.

De esta manera, definimos el *Vector de Importancias* como el vector con componentes $I(1),\ldots,I(n)$ proporcional a la suma de las aportaciones que le otorga cada una de las demás revistas. Es decir,

$$I(i) = \lambda \sum_j p_{ij} I(j)$$

Matricialmente quedaría,

$$P \begin{pmatrix} I(1) \\ \vdots \\ I(n) \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} I(1) \\ \vdots \\ I(n) \end{pmatrix}$$

con $P = (p_{ij})$ la matriz que representa la probabilidad de ir desde la revista j a la revista i, y $\lambda \in \mathbb{R}$ la constante de proporcionalidad.

Observamos que el vector $\begin{pmatrix} I(1) \\ \vdots \\ I(n) \end{pmatrix}$ es un vector propio de P asociado al valor propio $\frac{1}{\lambda}$.

En principio nuestro objetivo es conseguir dicho vector, ya que en él quedarían reflejadas las importancias de todas las revistas, que es lo que buscamos para posteriormente llevar acabo la ordenación. Naturalmente, este criterio tiene sentido si lo que obtenemos es un vector I con todas componentes reales y del mismo signo (no parece razonable tener una importancia negativa), único (para evitar la ambigüedad a la hora de elegir la ordenación) y que sea un vector propio de P de valor propio $\frac{1}{\lambda}$.

Una vez explicado el criterio que se va a seguir, y los elementos que lo componente, veamos cómo se hallan las probabilidades que componen la matriz P en cuestión, así como los datos que necesitamos.

2.4. Determinación de p_{ij}

A continuación describiremos cómo obtener estos valores p_{ij}, con el fin de construir la matriz principal del algoritmo de ordenación.

Por experiencia sabemos que cuando estamos leyendo un artículo de una revista R_1 y cambiamos de artículo, lo más probable es que el artículo elegido estuviese citado en la revista R_1. Por lo general, suele buscarse más información sobre el tema que estamos consultando y que tiene relación con lo que acabamos de leer. Supondremos así que esta probabilidad, α, es bastante alta y que además es idéntica para cualquier lector y para todas las revistas. Es decir, que la probabilidad de pasar de una revista a otra, sabiendo que la primera ha citado a la segunda es la misma sean cuales sean las revistas, e independientemente de quién esté leyendo. Fijamos $\alpha = 0{,}85$[1].

[1]La fijación del valor 0,85 para el parámetro α es una decisión puramente empírica, aunque hay tener en cuenta que para que nuestra matriz siga siendo positiva ha de ser $\alpha < 1$. Google adoptó $\alpha = 0{,}85$ tras muchos experimentos ya que ofrece una buena aproximación del vector I al efectuar entre 50 y 100 iteraciones. Debido a que el Eigenfactor sigue un procedimiento similar, consideramos el mismo valor.

Luego, con probabilidad $1-\alpha = 0{,}15$ supondremos que, estando en una revista, se elige un artículo de cualquier otra revista de forma aleatoria, es decir, no depende de que haya citas de una a otra.

De este modo, la probabilidad p_{ij} nombrada en la sección anterior queda definida como:

p_{ij} = {*Probabilidad de que un lector de la revista* j *pase a la revista* i}
= 0,85·{*Probabilidad de que la revista* j *cite a* i} + 0,15·{*Probabilidad de elegir* i *al azar*}

Para matizar un poco más el valor de p_{ij} hemos de concretar esas dos últimas probabilidades:

- Al suceso {*Revista* j *cita a revista* i} se le asigna la probabilidad de forma intuitiva, es decir, la proporción del número de citas que le hace j a i entre el número total de referencias que hace j.[2]
- El suceso {*Elegir* i *al azar*} tiene una probabilidad que dependerá de la proporción de artículos que tenga la revista, ya que parece lógico pensar que si se publican muchos artículos, es más probable elegir uno de esos entre todos los que hay.

Luego,

$$p_{ij} = 0{,}85 \cdot \frac{h_{ij}}{\sum\limits_i h_{ij}} + 0{,}15 \cdot \frac{\widehat{a}_i}{\sum\limits_i \widehat{a}_i}$$

donde:
h_{ij} = {*Número de citas de la revista* j *a artículos de* i *para* i $\neq$ j}.
$\widehat{a}_i$ = {*Número de artículos publicados por* i *en un año determinado* N}.

Denotamos $h'_{ij} = \dfrac{h_{ij}}{\sum\limits_i h_{ij}}$ y $a_i = \dfrac{\widehat{a}_i}{\sum\limits_i \widehat{a}_i}$. Esta última información se recoge en un vector $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, que llamaremos a partir de este momento *Vector Artículo*. Notar que $\mathbf{a}$ es un vector normalizado.

Así queda,

$$\boxed{p_{ij} = 0{,}85 \cdot h'_{ij} + 0{,}15 \cdot a_i}$$

Expresado en forma matricial sería:

$$\boxed{P = 0{,}85 \cdot H' + 0{,}15 \cdot \mathbf{a}\,\mathbf{e}^T} \tag{2.5}$$

donde $\mathbf{e}^t = (1 \ \cdots \ 1)$.

Hemos llegado así a una matriz P no negativa, cuyos elementos denotan probabilidades, es decir, valores entre 0 y 1. Interpretamos cada columna de P —asociada a una revista— como una distribución de probabilidad, de forma que, si el lector se encuentra en una revista j, la probabilidad de que pase a otra revista i es el valor dado en p_{ij}. Luego, las componentes de cada columna de P suman 1. Este tipo de matrices se conocen como *Matrices Estocásticas* (ver última *observación* de la sección 1.4).

2.4.1. Construcción de H'

La probabilidad de que una revista cualquiera haga referencia a otra está recogida de forma matricial en la matriz H'. Es más, esta matriz H' proviene de una matriz H cuyas columnas han sido normalizadas y del vector Artículo. Cada entrada de la matriz H indica simplemente el número de citas de una revista a otra, sin considerar las referencias que una revista se hace a sí misma. Es decir, acorde con la notación que hemos introducido, se tiene

$$h_{ij} = \begin{cases} z_{ij} & si \quad i \neq j \\ 0 & si \quad i = j \end{cases}$$

[2]Como no existe ninguna razón a priori por la que considerar que dicho suceso S (la cita de una revista a otra) es más probable, se consideran todos equiprobables, de modo que basta usar la *Ley de Laplace*: $P(S)=\frac{n^o \ de\ casos\ favorables\ de\ S}{n^o\ de\ casos\ posibles}$.

La justificación de que los elementos de la diagonal sean nulos se debe, como ya comentamos al principio de la sección 2.2, al hecho de que el Eigenfactor no tenga en cuenta las autocitas. Además, siendo más precisos con la notación hemos de tener presente el hecho de que este índice se calcula cada año y varía, luego lo correcto sería definir

z_{ij} = {*Número de citas, en un año determinado N, de la revista* j *a artículos de* i *publicados en los cinco años anteriores a N*}.

Hemos llegado, así, al mismo punto de partida que se valora en el Factor de Impacto, aunque en ese caso se recurre solamente al número de citas en los dos años anteriores.

Nota. Todo lo comentado hasta ahora parece una situación idealizada, en la que una revista cita a otras o recibe citas de alguna. Sin embargo, no es de extrañar que haya una revista que solo se cite a sí misma, y que por el motivo que sea, no reciba citas de ninguna otra. Es suficiente con pensar en alguna revista de divulgación científica que trate un tema muy concreto. Lo que hace un lector en caso de estar en una revista en estas circunstancias —y suponiendo que sigue leyendo— es simplemente elegir aleatoriamente otro artículo.
Suponer que la revista j no referencia a ninguna otra revista. Esta situación queda reflejada en la matriz H con una columna nula en la posición j.

El problema que nos surge es el siguiente: Si la matriz H' procediese solamente de normalizar las columnas de H, entonces al construir la matriz P en las posiciones de las columnas nulas de H' quedaría sumado solo el término $0,15 \cdot \mathbf{a}$, y esta columna contradice que P sea estocástica (no suma 1). De modo que para solucionarlo, bastará construir H' reemplazando las columnas nulas de H por el vector Artículo $\mathbf{a}$.
Así, la columna de P asociada a una revista "aislada" —aquella que no referencia a ninguna revista— representará la probabilidad de pasar a otra revista en función del número de artículos que haya publicado, es decir, el propio vector $\mathbf{a}$.

En definitiva, nuestra matriz H' se construye con el objetivo de que también sea una matriz con todas sus columnas normalizadas. Queda definida como,

$$h'_{ij} = \begin{cases} h_{ij} & \textit{si la columna } j \textit{ de } H \textit{ es no nula} \\ a_i & \textit{si la columna } j \textit{ de } H \textit{ es nula} \end{cases}$$

Concluimos la sección con nuestra matriz H' bien definida, cumpliendo que todas sus columnas suman 1, y cuyos elementos son no negativos, $H' \geq \mathbf{0}$.

2.4.2. Propiedades de la matriz P

Todo el recorrido hasta llegar a nuestra matriz P tiene unas ventajas, la más importante es ser estocástica. Y es que, toda matriz estocástica no solo es irreducible, sino también primitiva (ver *definición* en 1.4). Luego, sabemos que tendrá un único valor propio dominante y de módulo máximo. Remarcar que este valor propio, que es exactamente la *Raíz de Perron*, es 1 y es único.

Aquí es donde interviene el teorema de *Perron-Frobenius* (1.4) demostrado en el capítulo anterior, ya que nos asegura que P tendrá un único vector asociado a ese valor propio dominante y que además, por ser primitiva podemos obtenerlo usando el *Método de la Potencia* (1.7). Veamos cómo puede aplicarse en la obtención del ranking de revistas publicadas en el JCR.

2.5. Ejemplo práctico

Hasta ahora hemos explicado con detalle el algoritmo para la obtención de nuestro vector propio I. A continuación aplicaremos todo ello al caso de la ordenación de quince revistas listadas en el JCR en

2017, tal y como hemos ido comentando anteriormente. El objetivo es crear nuestra matriz P, calcular el vector propio I (vector de importancias) asociado al valor propio dominante de módulo máximo, que será 1 por ser P estocástica (ver última *observación* de la sección 1.4) y ordenar de mayor a menor las componentes del vector I obteniendo así el ranking de las revistas. Todos los datos que usaremos se encuentran en la propia página del Thomson Reuters [4]. Tener en cuenta que en 2017 se publicaron 310 revistas en el JCR en el campo de las Matemáticas; sin embargo, debido a la gran dimensión de la matriz resultante y sobre todo a la falta de datos en algunos casos, se han seleccionado para el ejemplo quince revistas de esas 310. El criterio a seguir ha sido escoger mayoritariamente revistas relacionadas con álgebra.

Revistas del JCR (Abreviaciones JCR)

0. Journal of Algebra (J ALGEBRA)
1. Advances in Mathematics (ADV MATH)
2. Journal of pure and Applied Algebra (J PURE APPL ALGEBRA)
3. Algebras and Representation Theory (ALGEBRA REPRESENT TH)
4. Communications in Algebra (COMMUN ALGEBRA)
5. Journal of Group Theory (J GROUP THEORY)
6. Linear & Multilinear Algebra (LINEAR MULTILINEAR A)
7. Algebra Colloquium (ALGEBR COLLOQ)
8. Linear Algebra and its Applications (LINEAR ALGEBRA APPL)
9. Compositio Mathematica (COMPOS MATH)
10. Annals of Mathematics (ANN MATH)
11. Algebra and Number Theory (ALGEBR NUMBER THEORY)
12. Journal of Algebra and its Applications (J ALGEBRA APPL)
13. Journal of Commutative Algebra (J COMMUT ALGEBR)
14. Algebraic and Geometric Topology (ALGEBR GEOM TOPOL)

Así pues, la matriz Z resultante 15×15 con todos nuestros datos es la que se muestra en B.2 (Ver *Apéndice* B.1).
Y calculamos el Vector Artículo normalizado, **a** (ver *Apéndice* B.1).
A continuación creamos la matriz P en cuestión de la que tendremos que obtener el vector propio I. Como ya hemos estudiado en la sección anterior, gracias a las propiedades de la matriz P sabemos que $\lambda = 1$ es el valor propio dominante (el único de módulo 1) y el *Vector de Perron* que nos interesa puede obtenerse con el método de la potencia (dicho vector existe por 1.7), y para ello elegiremos como vector de inicio, $I_0 = \left(\frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}\right)$.
Realizando las cuentas usando el *Servidor de Sage* (ver *Apéndice* B.2) obtenemos el siguiente *Vector de Importancias* :

$$I = \begin{pmatrix} 0{,}185868522624872 \\ 0{,}138347685809946 \\ 0{,}0848240202115494 \\ 0{,}0408545807001841 \\ 0{,}0845745913277105 \\ 0{,}0155659548851805 \\ 0{,}0622536419039983 \\ 0{,}0122005910180522 \\ 0{,}0875951530597140 \\ 0{,}0827897757794808 \\ 0{,}0816964883997827 \\ 0{,}0436265133890733 \\ 0{,}0483777702345577 \\ 0{,}00489615964270982 \\ 0{,}0265285510131720 \end{pmatrix}$$

Este vector indica las ponderaciones del Eigenfactor Score en el orden en el que se encuentran en la tabla B.2, y a partir del cual obtenemos el ranking.
Además, es interesante comentar que su interpretación en términos estocásticos hace referencia a la fracción de tiempo —en un estado estacionario— que invertimos en cada una de las revistas.
La ordenación final queda de la siguiente forma:

Ordenación:
J ALGEBRA
ADV MATH
LINEAR ALGEBRA APPL
J PURE APPL ALGEBRA
COMMUN ALGEBRA
COMPOS MATH
ANN MATH
LINEAR MULTILINEAR A
J ALGEBRA APPL
ALGEBR NUMBER THEORY
ALGEBRA REPRESENT TH
ALGEBR GEOM TOPOL
J GROUP THEORY
ALGEBR COLLOQ
J COMMUT ALGEBR

Para concluir, mostramos la comparación entre los índices:

Revistas	Factor de Impacto	Eigenfactor Score
Annals of Mathematics	0.46341	0.081696
Algebras and Representation Theory	0.35135	0.04085
Linear & Multilinear Algebra	0.28378	0.062253
Journal of Algebra	0.262658	0.18586
Algebra and Number Theory	0.253846	0.043626
Compositio Mathematica	0.251572	0.08278
Journal of Algebra and its Applications	0.25135	0.048377
Journal of Group Theory	0.247619	0.015565
Journal of pure and Applied Algebra	0.231237	0.08482
Communications in Algebra	0.213872	0.08457
Algebraic and Geometric Topology	0.180995	0.026528
Algebra Colloquium	0.16788	0.01220
Advances in Mathematics	0.165517	0.13834
Journal of Commutative Algebra	0.10909	0.004896
Linear Algebra and its Applications	0.09432	0.08759

Basta observar ambas clasificacines para deducir directamente el cambio de posiciones de algunas revistas. La más destacada es la revista *Annals of Mathematics*, que pasa del último puesto - con la puntuación Eigenfactor - al primero - con el Factor de Impacto. Y parecido ocurre con revistas como *Communications in Algebra* o *Linear Algebra and its Applications* que están entre los primeros puestos (1^{o} y 5^{o} puesto respectivamente) en la primera clasificación, y bajan al décimo y último puesto respectivamente.

2.6. Conclusión

A modo de conclusión, señalar la importancia que alberga esta aplicación del Teorema de Perron-Frobenius, ya que un ranking se debe establecer de la mejor manera posible para cumplir sus objetivos, ya sea en el caso de las páginas web para conseguir un buen buscador o en el caso de las revistas de matemáticas que usa la ANECA para puntuar el trabajo de los investigadores.

Por ello tiene sentido que se renueven los criterios de las clasificaciones y se mejoren, con el fin de conseguir una ordenación lo más acertada y realista posible. De modo que quizá en unos años, con el afán de un mejor ajuste, se establezca el eigenfactor como indicador habitual en el JCR en cuenta del FI. Pero sin olvidar que detrás de todo hay una base matemática, el *teorema de Perron-Frobenius*, que sin duda, es el vivo ejemplo de cuán adelantadas están las matemáticas a nuestra realidad actual. Además, cada vez hay menos teoremas y postulados inaplicables. Este teorema es la muestra de cómo los hilos de la abstracción nos unen a todos.

Apéndice A

Matrices no irreducibles

A lo largo del primer capítulo nos hemos centrado en las matrices irreducibles, ya que es una de las hipótesis que exige el teorema de Perron-Frobenius. Sin embargo, podemos deducir resultados similares para matrices reducibles (ver definición en la *sección* 1.1) a partir de las conclusiones del capítulo 1.

Veremos que dada una matriz A que no es necesariamente irreducible también existe un valor propio real, aunque no se asegura que sea de multiplicidad 1, con un vector propio asociado cuyas componentes son no negativas. Este resultado, al igual que en el caso de matrices irreducibles será útil para algunas aplicaciones. Antes de llegar a probar dicha proposición estudiaremos dos propiedades que cumplen las matrices cuadradas y que necesitaremos posteriormente.

A.1. Propiedades

Las siguientes propiedades están relacionadas con el radio espectral de una matriz A cuadrada (podemos recordar la definición de radio espectral en la *sección* 1.3). En la primera de ellas demostraremos la *Fórmula del radio espectral de Gelfand* por lo que trataremos con normas matriciales. Por ello introduciremos primero la noción de norma.

Definición. La *norma* en un espacio vectorial real o complejo V se define como una aplicación $\|\cdot\|$ de V en K tal que
i) $\|v\| = 0$ si y solo si $v = \overline{\mathbf{0}}$ (siendo $\overline{\mathbf{0}}$ es el vector nulo).
ii) $\|tv\| = |t|\|v\|$ para $v \in V$ y un escalar t .
iii) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ para todo $v_1, v_2 \in V$.

Lema A.1 (Fórmula del radio espectral de Gelfand)**.** *Sea A una matriz $n \times n$. Para cualquier norma $\|\cdot\|$, en el $\mathbb{C}$-espacio de las matrices cuadradas en $\mathbb{C}$, se tiene que el radio espectral de A se puede escribir en términos de la norma de sus potencias:*

$$r(A) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}$$

Demostración. Primero vamos a probar que este límite es independiente de la norma que se elija, es decir, si existe el límite $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}$ para una norma $\|.\|$, entonces también existirá para cualquier otra norma $\|.\|'$ de $\mathbb{C}^n$ y los límites coinciden.

Sabemos que dado un espacio vectorial de dimensión finita y dos normas definidas en dicho espacio existen $a > 0$ y $b > 0$ tales que [1]

$$a\|A^k\| \leq \|A^k\|' \leq b\|A^k\|$$

Luego la desigualdad se mantiene

$$\sqrt[k]{a}\,\sqrt[k]{\|A^k\|} \leq \sqrt[k]{\|A^k\|'} \leq \sqrt[k]{b}\,\sqrt[k]{\|A^k\|}$$

[1] Sea $\mathfrak{B}$ un K-espacio vectorial de dimensión finita. Sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ dos normas cualesquiera sobre $\mathfrak{B}$. Entonces existen a, b números reales siendo $a, b > 0$ tales que $a\|v\| \leq \|v\|' \leq b\|v\|$ para todo $v \in \mathfrak{B}$.

Así, aplicando que $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a} = 1$ y $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{b} = 1$ [2] se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|'}$$

Visto que el límite no depende de la norma que consideremos, vamos a construir una norma apropiada que nos permite ver fácilmente la igualdad.

Sabemos que dada una matriz cuadrada A compleja de tamaño n, existe una matriz T regular tal que

$$T^{-1}AT = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

es una matriz triangular. Por ejemplo, la forma canónica de Jordan es de esta forma. [3]

Dado que A y B tienen los mismos valores propios $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$ (por ser semejantes) se tiene $r(A) = \max_j |b_{jj}|$.

Recordar que para cada $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^n$, la norma $\|\cdot\|_1$, definida por

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}|$$

es una norma que verifica $\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1$ (se dice que es una norma en el álgebra de las matrices cuadradas).

Entonces para cada matriz $A \in \mathbb{C}^n$ elegimos una matriz T como acabamos de comentar y definimos

$$\|A\| = \|T^{-1}AT\|_1$$

Es fácil comprobar que es una norma (basta probar que cumple la definición).

Denotamos ahora $r = r(A)$. Estudiamos ahora dos posibles casos:

- Si $r = 0$, se tiene que el único valor propio de A es el 0, luego el polinomio característico de A es x^n. Por el *teorema de Cayley-Hamilton*, se tiene que A^n es la matriz nula $(O_{n\times n})$. [4]
  Así $\sqrt[k]{\|A^k\|} = 0 = r(A)$ para todo $k \geq n$.
- Supongamos ahora $r > 0$. Sea $s = \max_{j<k} |b_{jk}|$ y consideramos

$$C = \begin{pmatrix} r & s & \cdots & s \\ 0 & r & \cdots & s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r \end{pmatrix} = rI_n + D \quad \text{siendo } D = \begin{pmatrix} 0 & s & \cdots & s \\ 0 & 0 & \cdots & s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

[2] Este límite se prueba de la siguiente forma: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a} = \lim_{k\to\infty} e^{\frac{1}{k}\log a} = e^0 = 1$, y análogamente para el escalar b.

[3] Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo K (K = $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) de dimensión finita n y $f : E \longrightarrow E$ un endomorfismo. Supongamos que los λ_i son las raíces del polinomio característico distintas dos a dos. Entonces, existe una base B_j de E respecto de la cual la matriz J de f es diagonal por bloques, siendo cada uno de los bloques de J de la forma:

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

A esta matriz J se le denomina *forma canónica de Jordan* de f.

[4] El *teorema de Cayley-Hamilton* establece que cada matriz cuadrada A de tamaño n satisface su ecuación característica: Si $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$ es el polinomio característico de A de orden n, entonces $p(A)$ es la matriz nula.
Ver *demostración* en: `https://www.um.es/asepuma04/comunica/gomez.pdf`

D tiene como único valor propio el cero, luego razonando como antes $D^n = 0$.

Ahora denotamos a los elementos de la matriz potencia del siguiente modo $B^m = (b_{ij}^{(m)})$, $C^m = (c_{ij}^{(m)})$.

Es claro que

$$|b_{ij}^{(1)}| = |b_{ij}| \leq c_{ij}^{(1)}$$

Procediendo por inducción, si suponemos que $|b_{jk}^{(m-1)}| \leq |c_{jk}^{(m-1)}|$ para $m > 1$ y para todo j, k, se sigue

$$|b_{jk}^{(m)}| = |\sum_{r=1}^{n} b_{jr}^{(m-1)} b_{rk}^{(1)}| \leq \sum_{r=1}^{n} |c_{jr}^{(m-1)}||c_{rk}^{(1)}| = \sum_{r=1}^{n} c_{jr}^{(m-1)} c_{rk}^{(1)} = c_{jk}^{(m)}$$

Así pues para $m > n$

$$\begin{aligned} \|A^m\| = \|T^{-1}A^mT\|_1 = \|B^m\|_1 \leq \|C^m\|_1 = \|(rE+D)^m\|_1 \\ = \Big\| \sum_{j=0}^{n-1} \binom{m}{j} r^{m-j} D^j \Big\|_1 \quad \text{(Por el Binomio de Newton y por ser } D^n = 0) \\ \leq \sum_{j=0}^{n-1} \binom{m}{j} r^{m-j} \|D^j\|_1 = r^m\, p(m) \end{aligned} \tag{A.1}$$

siendo $p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x(x-1)\ldots(x-j+1)}{j!} \frac{\|D\|_1^j}{r^j}$.

Notar que p es un polinomio de grado $p \leq n-1$. Por lo que existe un $d > 0$ tal que

$$|p(m)| \leq dm^{n-1} \leq dm^n \qquad \text{para todo número natural } m$$

Luego aplicándolo a (A.1) y tomando la raíz *n-ésima*

$$\sqrt[m]{\|A^m\|} \leq r\, \sqrt[m]{|p(m)|} \leq r\, \sqrt[m]{d}\, \sqrt[m]{m^n}$$

Tomando límites observamos por un lado

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{d}\, \sqrt[m]{m^n} = \lim_{m\to\infty} e^{\frac{1}{m}(\log d + n \log m)} = 1$$

de lo que resulta que para $\varepsilon > 0$ existe $n(\varepsilon)$ tal que

$$\sqrt[m]{\|A^m\|} \leq r(1+\varepsilon) \qquad \text{para } m \geq n(\varepsilon)$$

Y por otro lado,

$$\|A^m\| = \|B^m\|_1 \geq \sum_{j=1}^{n} |b_{jj}|^m \geq r^m \implies \sqrt[m]{\|A^m\|} \geq r \quad \forall\, m$$

Por tanto,

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|A^m\|} = r(A)$$

□

Lema A.2. *Sea A una matriz cuadrada de tamaño n en $\mathbb{C}$. Si $r(A) < 1$,*

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j$$

Demostración. Por hipótesis $r(A) < 1$, luego sea $r(A) = 1 - 2\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$. Por A.1 existe un $n(\varepsilon)$ tal que para todo $k \geq n(\varepsilon)$

$$\sqrt[k]{\|A^k\|} \leq r(A) + \varepsilon = 1 - \varepsilon$$

Por tanto, para todo $k \geq n(\varepsilon)$ se tiene

$$\|A^k\| \leq (1-\varepsilon)^k$$

De aquí se deduce que en este caso

$$\lim_{k \to \infty} A^k = O_{n \times n}$$

Consideramos $S_m = \sum\limits_{j=0}^{m} A^j$. Así para $k \geq m \geq n(\varepsilon)$ se verifica

$$\|S_k - S_m\| = \|A^{m+1} + \cdots + A^k\| \leq \|A^{m+1}\| + \cdots + \|A^k\| \leq \sum_{j=m+1}^{k} (1-\varepsilon)^j <$$

$$< (1-\varepsilon)^{m+1} \sum_{j=0}^{\infty} (1-\varepsilon)^j =^{5} (1-\varepsilon)^{m+1} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

Como $\lim\limits_{m \to \infty} (1-\varepsilon)^{m+1} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 0$, se tiene que la sucesión S_m de matrices en $\mathbb{C}^n$ es una sucesión de *Cauchy* [6] y sabemos que tiene límite, al que denotamos

$$S = \lim_{m \to \infty} S_m = \sum_{j=0}^{\infty} A^j$$

Como $(I_n - A)S_m = I_n - A^{m+1}$, tomamos el límite cuando $m \to \infty$ y se obtiene que

$$(I_n - A)S = I_n$$

Por tanto

$$S = (I_n - A)^{-1}$$

□

Vistos estos dos lemas y recordando los resultados para matrices irreducibles podemos llevar a cabo las siguientes demostraciones. Con ellos mostraremos cómo dada una matriz reducible podemos obtener la forma de una matriz irreducible.

[5] Recordar que la serie geométrica $\sum\limits_{k=0}^{n} ar^k = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ y converge si $|r| < 1$, en este caso, nuestra serie es de razón $1-\varepsilon < 1$ es convergente y su suma es $\frac{1}{1-(1-\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon}$.

[6] Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión. Diremos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de *Cauchy* si para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que $\forall\, m,n \in \mathbb{N}$ con $m,n > N$ se cumple $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

A.2. Matrices no negativas

A continuación probaremos el resultado comentado al principio de la sección, y nos apoyaremos en los lemas anteriores para concluir la demostración.

Proposición A.3. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ real no negativa $A \geq \mathbf{0}$.*

a) En el espectro de A hay un valor propio real $r = r(A)$ (no necesariamente de multiplicidad 1)

b) Si a es un valor propio del espectro de A es decir tal que $|a| = r(A)$, entonces $a = \varepsilon r(A)$ siendo $\varepsilon^m = 1$ para algún $m \leq n$.

c) Hay un vector propio $\mathbf{0} \neq \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$ para A con $A\mathbf{z} = r(A)\mathbf{z}$

d) Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ se tiene que

$$r(A) \leq \max_j \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk} x_k}{x_j}$$

Demostración. a) Sabemos que este enunciado es cierto para matrices irreducibles (ver *apartado a)* de 1.4). A continuación, lo probamos en general por inducción sobre n. Supongamos que B y D verifican las hipótesis del enunciado.

Supongamos

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

siendo B una matriz $k \times k$ donde $1 \leq k < n$. Por inducción $r(B)$ y $r(D)$ son valores propios de A, y además, tanto en el espectro de B como en el de D hay un valor propio real. Luego como el módulo del mayor valor propio de A viene dado por $r(A) = \max\{r(B), r(D)\}$, se deduce que en el espectro de A también hay un valor propio real.

b) Este apartado es cierto también para matrices irreducibles (ver *apartado a)* de 1.6). Estudiemos el caso general.

Sea a un valor propio de B, se tiene que

$$r(A) = |a| \leq r(B) \leq r(A)$$

Por tanto, $r(A) = r(B)$. Luego de acuerdo con la hipótesis será $a = \varepsilon r(A)$ con $\varepsilon^m = 1$ para $m \leq k < n$. Análogamente ocurre si a fuese un valor propio de D, siendo $a = \varepsilon r(A)$ con $\varepsilon^m = 1$ para $m \leq n - k < n$.

c) Sabemos que para matrices irreducibles se cumple este apartado (visto en 1.4 *a)*).

Para el caso general: Buscamos un vector $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$ tal que

$$r(A) \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix} = A\mathbf{z} = \begin{pmatrix} B\mathbf{z}_1 \\ C\mathbf{z}_1 + D\mathbf{z}_2 \end{pmatrix}$$

Estudiaremos dos posibles casos:

Caso 1: Si $r(A) = r(D)$, por inducción existe $\mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{z}_2 \geq \mathbf{0}$ verificando

$$D\mathbf{z}_2 = r(D)\mathbf{z}_2 = r(A)\,\mathbf{z}_2$$

Tomando

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{0}$$

se tiene lo que queríamos.

Caso 2: Si $r(A) = r(B) > r(D)$. Podemos tomar por inducción $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{z}_1 \geq \mathbf{0}$ verificando

$$B\,\mathbf{z}_1 = r(A)\,\mathbf{z}_1$$

Buscamos entonces un $\mathbf{z}_2 \geq \mathbf{0}$ con

$$C\mathbf{z}_1 + D\,\mathbf{z}_2 = r(A)\,\mathbf{z}_2$$

Luego,

$$(I_n - \frac{1}{r(A)}D)\,\mathbf{z}_2 = \frac{1}{r(A)}\,C\,\mathbf{z}_1 \geq \mathbf{0}$$

Notar que la matriz $(I_n - \frac{1}{r(A)}D)$ es inversible. Además por hipótesis se tiene que $r(\frac{1}{r(A)}D) = \frac{r(D)}{r(A)} < 1$, por lo que podemos aplicar el lema A.2. Así,

$$(I_n - \frac{1}{r(A)}\,D)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(\frac{1}{r(A)}\,D)^j$$

Luego llegamos a que

$$\mathbf{z_2} = (I_n - \frac{1}{r(A)}\,D)^{-1}\frac{1}{r(A)}\,C\,\mathbf{z}_1 = \sum_{j=0}^{\infty} r(A)^{-(j+1)}\,D^j\,C\,\mathbf{z}_1 \geq 0$$

Y ya tendríamos el vector $\mathbf{z}_2$ que buscamos, con lo que concluimos la demostración del apartado c).

d) Veamos primero que se cumple en el caso de matrices irreducibles. Vamos a demostrar que dada un matriz irreducible $A = (a_{jk}) \geq \mathbf{0}$ real de tamaño $n \times n$ se cumple que

$$\min_j \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{jk}\,x_k}{x_j} \leq r(A) \leq \max_j \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{jk}\,x_k}{x_j} \quad \text{para } \mathbf{0} < \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Denotamos previamente $y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}$ y $t_j = \frac{y_j}{x_j}$.

Por 1.4 sabemos que existe un vector $\mathbf{z} > \mathbf{0}$ tal que $A^t\mathbf{z} = r(A)\,\mathbf{z}$. Luego

$$\sum_{j=1}^{n}(t_j - r(A))\,x_j\,z_j = \sum_{j=1}^{n} y_j z_j - \sum_{j,k=1}^{n} a_{kj}z_k x_j = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}x_k z_j - \sum_{j,k=1}^{n} a_{kj}x_j z_k = 0$$

Como $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ y $\mathbf{z} > \mathbf{0}$ existen índices (j,k) tales que

$$t_j - r(A) \geq 0 \qquad t_k - r(A) \leq 0$$

Luego,

$$\min_i t_I \leq t_k \leq r(A) \leq t_j \leq \max_i t_i$$

Ahora estudiemos el caso general.

Sea $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ con $\mathbf{0} < \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ y $\mathbf{0} < \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Por inducción,

$$r(B) \leq \max_{j=1,\dots,k} \frac{\sum_{l=1}^{k} b_{jl}y_l}{y_j} = \max_{j=1,\dots,k} \frac{\sum_{l=1}^{n} a_{jl}x_l}{x_j} \leq \max_{j=1,\dots,n} \frac{\sum_{l=1}^{n} a_{jl}x_l}{x_j}$$

Por otra parte,

$$r(D) \leq \max_{j=1,\dots,n-k} \frac{\sum_{l=1}^{n-k} d_{jl}y_l}{z_j} \leq \max_{j=1,\dots,n-k} \frac{\sum_{l=1}^{n-k} d_{jl}z_l + \sum_{l=1}^{n} c_{jl}y_l}{z_j} = \max_{j=k+1,\dots,n} \frac{\sum_{l=1}^{n} a_{jl}x_l}{x_j} \leq \max_{j=1,\dots,n} \frac{\sum_{l=1}^{n} a_{jl}x_l}{x_j}$$

Luego como $r(A) = \max\{r(B), r(D)\}$, se deduce directamente que

$$r(A) \leq \max_{j=1,\dots,n} \frac{\sum_{l=1}^{n} a_{jl}x_l}{x_j}$$

$\square$

Apéndice B

Ejemplo práctico

B.1. Datos del ejemplo

En este primer apéndice mostraremos todos los datos iniciales con los cuales hemos llevado a cabo el ejemplo práctico 2.5.

Todos los datos utilizados en este trabajo se han obtenido directamente de la página web oficial del *Thomson Reuters*, en la sección de matemáticas:

https://jcr.clarivate.com/JCRJournalHomeAction.action

En ella están disponibles los datos desde 1997, así como el Factor de Impacto obtenido. Sin embargo, el índice Eigenfactor aparece a partir de 2007.

Como ya se ha mencionado en el ejemplo que ha sido resuelto, para obtener nuestro Vector de Importancias necesitamos una matriz Z en la que recoger todos los datos referentes al número de citas que una revista le hace a otra revista, y un *Vector Artículo* que aporta la información sobre la cantidad de publicaciones.

Matriz Z

La colección de los datos en cuestión han sido obtenidos a partir de cada una de las revistas, donde se pueden encontrar tanto las citas de dicha revista a otras, como el número de citas que le han hecho a la revista y también el número de artículos publicados.

Cabe remarcar algunos de los inconvenientes con los que nos hemos encontrado a la hora de llevar a cabo este ejemplo práctico 2.5.

- En la pagina web no aparecen la totalidad de los datos, ya que para cada revistas R_i nos proporcionan dos tablas con unas 27 revistas aproximadamente, con la siguiente información:

  ○ Número de citas que recibe la revista R_i de cada revista R_j (*cited data*).

  ○ Número de citas que hace la revista R_i de cada revista R_j (*citing data*).

  Cuando las revistas aparecen en las dos tablas, los números efectivamente coinciden y si nos fijamos, la matriz obtenida con la tabla denominada *cited data* es la traspuesta de la que resulta de la tabla *citing data*.

- Debido a que no aparecen todas las revistas en esas tablas, a esas revistas les hemos asignado un número de citas igual a cero, pese a que no ha de darse este caso. Esto en cierto modo puede hacer que nuestro resultado no sea fiable en su totalidad, pero el objetivo es comprender la importancia de la aplicación del *teorema de Perron-Frobenius* en el *Eigenfactor Score*.

Así mismo, como el número de autocitas no se tiene en cuenta, directamente a los elementos de la diagonal se les atribuye el valor cero. Recordar que cada elemento de la matriz a_{ij} (cada casilla de la tabla) representa el número de veces que la revista j ha citado a la revista i (en los cinco años anteriores: desde 2012 hasta 2016), es decir, cada columna (asociada a una revista) indica el número de citas de esa revista a las otras catorce restantes.

	J ALGEBRA	ADV MATH	J PURE APPL ALGEBRA	ALBEGRA REPRESENT TH	COMMUN ALGEBRA	J GROUP THEORY	LINEAR MULTILINEAR A	ALGEBRA COLLOQ	LINEAR ALGEBRA APPL	COMPOS MATH	ANN MATH	ALGEBR NUMBER THEORY	J ALGEBRA APPL	J COMMUT ALGEBR	ALGEBR GEOM TOPOL
J ALGEBRA	0	49	43	34	134	22	10	8	18	6	2	10	74	9	0
ADV MATH	73	0	18	10	20	2	3	7	13	13	3	9	3	1	16
J PURE APPL ALGEBRA	93	22	0	8	38	2	0	1	0	0	0	0	25	4	5
ALBEGRA REPRESENT TH	44	6	3	0	39	0	9	0	0	0	0	0	17	0	0
COMMUN ALGEBRA	39	10	13	8	0	7	14	11	12	0	0	0	88	6	0
J GROUP THEORY	11	1	2	4	10	0	0	4	0	0	0	0	6	0	1
LINEAR MULTILINEAR A	9	0	0	0	20	0	0	9	76	0	0	0	0	0	0
ALGEBRA COLLOQ	7	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0
LINEAR ALGEBRA APPL	0	0	0	0	55	0	174	10	0	0	0	0	25	0	0
COMPOS MATH	16	38	4	3	9	0	0	0	0	0	4	17	0	0	0
ANN MATH	15	48	7	1	4	5	0	1	0	20	0	11	0	0	7
ALGEBR NUMBER THEORY	18	12	2	5	2	0	0	0	0	16	0	0	0	0	3
J ALGEBRA APPL	26	0	10	6	64	5	5	4	6	0	0	0	0	0	0
J COMMUT ALGEBR	3	0	0	0	4	0	0	2	0	0	0	0	7	0	0
ALGEBR GEOM TOPOL	4	22	3	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0

Cuadro B.1: Matriz Z que refleja el número de citas de una revista a otra

A continuación, mostraremos el número de artículos que cada revista publicó en el periodo desde el 2012 hasta el 2016.

Vector Artículo

El Vector Artículo muestra la proporción de artículos que ha publicado cad aun de las revistas a lo largo de los cinco años anteriores al 2017. Los datos necesarios para dicho vector son simplemente el número de publicaciones por año de las quince revistas seleccionadas. Se muestran a continuación :

	2016	**2015**	**2014**	**2013**	**2012**	**total** (*)
J ALGEBRA	462	485	475	383	421	2226
ADV MATH	399	275	299	299	317	1589
J PURE APPL ALGEBRA	201	311	168	173	226	1079
ALBEGRA REPRESENT TH	73	75	94	88	56	386
COMMUN ALGEBRA	349	343	366	306	334	1698
J GROUP THEORY	56	49	56	47	50	258
LINEAR MULTILINEAR A	186	184	119	117	101	707
ALGEBRA COLLOQ	58	79	64	67	94	362
LINEAR ALGEBRA APPL	498	488	461	635	542	2624
COMPOS MATH	82	77	77	83	69	388
ANN MATH	39	43	46	49	74	251
ALGEBR NUMBER THEORY	68	62	74	80	53	337
J ALGEBRA APPL	197	172	178	162	123	832
J COMMUT ALGEBR	31	24	29	27	13	124
ALGEBR GEOM TOPOL	112	91	77	117	92	489

Cuadro B.2: Tabla que refleja el número de artículos de una revista en los 5 años anteriores

En efecto, el número total de artículos publicados es 13.350, de modo que las componentes del siguiente vector resultan de dividir la columna *total*, que indica el total de artículos, entre el número total de artículos.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0{,}0250112359550562 \\ 0{,}0178539325842697 \\ 0{,}0121235955056180 \\ 0{,}00433707865168539 \\ 0{,}0190786516853933 \\ 0{,}00289887640449438 \\ 0{,}00794382022471910 \\ 0{,}00406741573033708 \\ 0{,}0294831460674157 \\ 0{,}00435955056179775 \\ 0{,}00282022471910112 \\ 0{,}00378651685393258 \\ 0{,}00934831460674158 \\ 0{,}00139325842696629 \\ 0{,}00549438202247191 \end{pmatrix}$$

En efecto, este vector **a** es un vector normalizado, si sumamos todas sus componentes la suma es igual a uno.

B.2. Código de Sage

Este apartado está destinado a mostrar el código de Sage que se ha utilizado para resolver y calcular la solución del ejemplo práctico 2.5. Recordar que nuestro objetivo es obtener el vector propio asociado al valor propio dominante, el Valor Propio de Perron, y dicho vector es el vector propio de la matriz irreducible, positiva y estocástica P, siendo $P = \alpha \cdot H + (1-\alpha) \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^T$.

Con el objetivo de que este apéndice sea lo más compacto y breve posible, no mostraremos la introducción de los datos vistos en el apéndice A.

CÓGIDO

```
# Matriz en la que recogemos todos los datos referentes al número de citas entre las revistas
q = matrix(ZZ,15)

# Vector articulo
a1 = matrix(QQ,15,1)
a = matrix(RR,15,1)

# Numero total de articulos
M1 = matrix(ZZ,1,15,[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1])
totalArticulos= M1 * a1

# Vector articulo normalizado
a = a1 *(totalArticulos)(−1)

# Por convenio para formar nuestra matriz P elegimos la probabilidad α = 0,85
b = 0.85
r = (1-b) / totalArticulos

# Creamos la matriz Z
Wz = matrix(ZZ,15)
for i in [0..14]:
   for j in [0..14]:
     if i == j :
       Wz[i,j] = 0
         elif q[i,j] == 0 :
       Wz[i,j] = 0
         elif q[i,j] != 0 :
       Wz[i,j] = q[i,j]

Z=transpose(Wz)

# Citas que ha hecho cada revista (en 2017) al resto de revistas (en los 5 años anteriores), es la suma de cada columna
citas_17 = M1 * (Z)
listaCitas= list(citas_17)[0]

# Creamos la matriz H (matriz Z normalizada)
H=matrix(QQ,15)
for i in [0..14] :
   for j in [0..14] :
```

```
        if i == j :
          H[i,j] = 0
            elif Wz[i,j] == 0 :
          H[i,j] = 0
            elif Wz[i,j] != 0 :
          H[i,j] = Wz[i,j]/lc[j]
```

Definimos la matriz $A = (1-\alpha)\cdot \mathbf{a}\cdot \mathbf{e}^T$

```
A=matrix(QQ,15)
ar = matrix(RR,15,1)
ar = a*r
A = ar *M1
```

Creamos la matriz P

```
P=matrix(QQ,15)
P = b*H + A
```

Calculamos los valores propios de la matriz P

```
def sinparteimag(xnum):
   return xnum.imag() == 0
valoresPropios = P.eigenvalues()
print "valores propios"
for i in [0..14]: print valoresPropios[i]
print
valorPdominante = max(filter(sinparteimag, valoresPropios))
print "valor propio dominante:",valorPdominante

# Calculamos los vectores propios asociados a este valor propio dominante
espVecPro = transpose((valorPdominante * identity_matrix(ZZ,15))-P).kernel()
vecPro = espVecPro.basis()
vecPro1 = list(vecPro[0])
```

Como hemos visto en la teoría 1.7, podemos usar el método de la potencia y obtenemos el mismo vector propio. Elegimos un vector $I0$, preferiblemente con sus componentes todas positivas. Y el vector I resultante es el vector propio.

```
IO=matrix([1/15, 1/15,1/15,1/15,1/15,1/15,1/15,1/15,1/15,1/15,1/15,1/15,1/15,1/15,1/15])
I=(P ^90)*transpose(IO)
```

Bibliografía

[1] GEMA MARÍA BAENA MARZO, *Una demostración geométrica del teorema de Perron-Frobenius*. Trabajo de Master Universitario en Matemáticas Avanzadas. UNED (2015).
Disponible en web: `http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:masterMatavanz-Gmbaena/BAENA_MARZO_Gema_TFM.pdf`

[2] LUIS M. EZQUERRO MARÍN, *Cómo encontrar una aguja en un pajar*. Lección inaugural del curso académico 2013-2014. Universidad Pública de Navarra (España).

[3] BERTRAM HUPPERT, *Angewandte Lineare Algebra*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, (1990), pp.80-85, 351–372.

[4] INCITES JOURNAL CITATION REPORT, *Thomson Reuters*, `https://jcr.clarivate.com`

[5] ADRIÁN INÉS ARMAS, *El teorema de Perron-Frobenius y su aplicación en el algoritmo de búsqueda de Google*. Trabajo Fin de Grado en Matemáticas. Universidad de la Rioja (España) (2015).
Disponible en web: `https://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/TFE001026.pdf`

[6] YEA-SEUL KIM Y RAY HONG, *Calculating Author-Level Eigenfactors (Pseudocode)*, Disponible en web: `http://www.eigenfactor.org/about.php`

[7] ANTONIO VILLAR, *El $\ll$ eigenfactor $\gg$: un nuevo y potente instrumento bibliométrico para evaluar la investigación*. Universidad de Oviedo, Aula Abierta 11, Vol 39, num.3, 85-96.
Disponible en web : `https://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/TFE001026.pdf`

[8] JEVIN WEST Y CARLT.BERGSTROM*, *Eigenfactor.org*.
Disponible en web: `http://www.eigenfactor.org/projects/journalRank/documents/AuthorPseudocode_EF.pdf`

[9] $Eigenfactor^{TM}$*Score and Article* $Influence^{TM}$ *Score: Detailed methods**,
Disponible en web: `http://eigenfactor.org/methods.pdf`.