La Transformada de Laplace: del Análisis Funcional a la resolución de ecuaciones diferenciales

Marta Sanz Muñoz
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Pedro J. Miana Sanz
13 de septiembre de 2019

Abstract

0.1. Introduction to the Laplace transform

This first chapter begins with a historical introduction about the Laplace transform. This integral transform had been studied by great mathematicians such as Euler, Lagrange, Laplace and Heavisi-de.Then the Laplace transform of a f function is defined such as

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

From this definition some results of existence of solution and linearity among others are stated, some simple examples of calculating Laplace's transformations are shown and finally Lerch's theorem and the definition of the inverse transform, is also stated.

0.2. Previous notions

First, we set several basic results in Lebesgue spaces. Namely dominated convergence theorem, the Hölder inequelity in integration theory and Plancherel theorem. We also state the definitions of norm in a vector space, Banach space, Lebesgue space $\mathscr{L}^1$ among others.

Then, we introduce complex variable concepts such as Cauchy formula and the definition of analytical function in vector space.

0.3. The Laplace transform in $L^1(\mathbb{R}^+)$ and semigroups

In the first section, we define the Laplace transform in the space $L^1(\mathbb{R}^+)$ and verify that it is well defined, linear and continuous. Then, we highlight the relationship between the Laplace transform and the Gelfand transform defining for this, the spectrum of Banach algebra.

In the second section, semigroups, we are going to see the definitions of semigroup and analytical semigroup. Then we state some theorems without proof in order to prove interesting theorems in the study of semigroups.

0.4. The Laplace transform in Hilbert's space $L^2(\mathbb{R}^+)$

In the first part of the chapter, we can see different results on Hilbert spaces and properties of these spaces. Then we enunciate the Gram-Schmidt method to apply it later in a theorem that assures us the existence that every Hilbert space has an orthonormal basis. Since $L^2(\mathbb{R}^+)$ is Hilbert's space, we give a example of a space basis.

In the second part of the chapter, we can see Paley Wiener's theorem along with his detailed proof.

0.5. Applications in the solution of differential equations

Finally, in this last chapter, at first we clarify the concept of Laplace transform for its real applications, since all the theory set forth above will not be usable in many cases because the functions are defined in larger spaces than those studied in this TFG.
Then we show a table of Laplace transform.

In the end, we will make a brief comment about some applications in practical cases and then two cases will be developed in greater detail.

Índice general

Capítulo 1

Introducción a la Transformada de Laplace

La motivación principal de este trabajo es presentar la transformada de Laplace en el campo del análisis funcional y mostrar algunas de sus aplicaciones.

1.1. Introducción histórica

La transformada de Laplace ha sido en los últimos años de gran importancia en los estudios de áreas científicas, ya que además de ser de gran interés en lo teórico, proporciona una forma sencilla de resolver problemas en ciencias e ingenierías.

En la transformada de Laplace trabajaron Leonhard Euler, quien ya planteó la idea de utilizar integrales de la forma $\int \chi(x)e^{ax}\,dx$ para la resolución de ecuaciones diferenciales, Joseph-Louis Lagrange, el cual también investigó este tipo de integrales pero vinculándolas hacía la teoría de probabilidad.
Finalmente, en 1782, Laplace siguiendo la idea de Euler, comenzó a estudiar este tipo de integrales aplicadas a la resolución de ecuaciones diferenciales hasta que en 1785 decidió reformular el problema, lo que dio nacimiento a las transformadas de Laplace que se conocen actualmente. Pero el estudio de este método tan útil en la actualidad no quedó ahí, fue a mediados del siglo XIX cuando Heaviside descubrió que los operadores diferenciales pueden ser tratados como variables algebraicas, dándole así su aplicación actual.

1.2. Definición y propiedades de la transformada de Laplace

Como ya se ha mencionado, la transformada de Laplace es una herramienta muy útil en la resolución de ecuaciones diferenciales. Comenzaremos por dar una definición técnica y algunas propiedades interesantes de la transformada de Laplace.

Definición 1.1. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ localmente integrable. Llamaremos transformada de Laplace de f, y la denotaremos como $\mathscr{L}(f) = F$, a la siguiente función:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt,$$

cuyo dominio, es el campo de convergencia de la integral paramétrica que la define.

Notemos que es una transformada de tipo integral.

Proposición 1.2. *Si la integral que define la transformada de Laplace de una función es absolutamente convergente para $s = s_0$, entonces también es absolutamente convergente para todo $s \geq s_0$.*

Definición 1.3. Una función $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ es de orden exponencial si existen $k \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| \leq ke^{\gamma t}$ para todo $t \geq T$.

Proposición 1.4. *Si f es de orden exponencial, entonces f tiene transformada de Laplace definida, al menos, en el semiplano* $\mathrm{Re}(s) > s_0$.

En el último capítulo se introducirán más propiedades sobre la transformada de Laplace, además de mostrar algunos ejemplos.

Proposición 1.5. *Si f_1 y f_2 tienen transformada de Laplace y λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$, entonces $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ tiene transformada de Laplace y es, $\lambda_1 \mathscr{L}(f_1) + \lambda_2 \mathscr{L}(f_2)$.*

Ejemplos. Cálculo de la trasformada de Laplace de las siguientes funciones:

- $f(z) = e^{at} \longmapsto F(s) = \dfrac{1}{s-a}$, $s > \mathrm{Re}(a)$.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt \overset{s\neq a}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{s-a}e^{-(s-a)t} + \frac{1}{s-a} \overset{s>a}{=} \frac{-1}{s-a}.$$

- $f(t-a)H(t-a) \longmapsto e^{-as}F(s)$, $a > 0$, con H la función de Heaviside.

$$f(t)H(t) = \begin{cases} f(t), \ t \geq 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty e^{-st} f(-a)H(t-a)dt = \int_0^a 0\ dt + \int_a^\infty e^{-st} f(-a)H(t-a)dt \overset{\text{c.v.}}{=} \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau)d\tau$$
$$= e^{-sa} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau = e^{-sa}F(s).$$

Notemos que $H(t-a) = 0$, si $t < a$.

El operador de Laplace es un operador lineal e invertible. La unicidad de la fórmula inversa que enunciaremos a continuación está grantizada por eñ siguiente teorema que podemos encontrar en [1]

Teorema 1.6. ***(Teorema de Lerch)*** *Si f y g son funciones continuas a trozos en $[0,\infty)$ de orden exponencial y existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathscr{L}(f)(t) = \mathscr{L}(g)(t)$, para todo $s > s_0$.*
Entonces, $f(t) = g(t)$ para todo $t > 0$, salvo en los puntos de discontinuidad.

La propiedad de ser invertible es necesaria para así, una vez realizadas las correspondientes operaciones con la transformada de Laplace, poder obtener la solución que buscamos en el espacio inicial donde vive nuestra ecuación.

Definición 1.7. Definiremos como transformada inversa de Laplace, $\mathscr{L}^{-1}(F)$, de una función F definida en $\mathbb{C}^+$ por la integral

$$\mathscr{L}^{-1}(F)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+ib)t} F(a+ib)\, du = \frac{1}{2\pi i} \int_{V_h} e^{pt} F(p)\, dp,$$

donde hemos denotado por V_h a la recta vertical $h + i\mathbb{R}$.

Veamos algunos resultados sobre la traslación de la transformada de Laplace y la transformada de las derivadas.

Proposición 1.8. *Si $f(t)$ es tal que existe su transformada de Laplace, $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que*

$$\mathscr{L}(e^{at} f(t)) = F(s-a).$$

Demostración. Sea f cumpliendo las hipótesis del enunciado, entonces

$$\mathscr{L}(e^{at}f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt = F(s-a).$$

$\square$

Proposición 1.9. *Sea $f(t)$ derivable tal que existe su transformada de Laplace, $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$, entonces*

$$\mathscr{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f'(t)) &= \int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}f'(t)\,dt = \left[\begin{array}{c} u = e^{-st}\ ,\ du = -se^{-st}dv \\ dv = f'(t)dt\ ,\ v = f(t)\end{array}\right] \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(e^{-st}f(t)\Big|_{t=0}^{t=N} - \int_0^N (-s)e^{-st}f(t)\,dt\right) = \lim_{N\to\infty}\left(e^{-sN}f(N) - e^0f(0) - \int_0^N (-s)e^{-st}f(t)\,dt\right) \\ &= -f(0) + sF(s).\end{aligned}$$

$\square$

De manera análoga, si existe $f^{n)}$ con las sucesivas derivadas continuas para $t > 0$, la transformada de Laplace para las derivadas de mayor grado es:

$$\mathscr{L}(f^{\,n)}(t)) = s^{\,n}F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{(n-1-i)}f^{\,i)}(0).$$

Antes de enunciar la siguiente proposición se debe recordar la definición de la función de Heaviside.

Definición 1.10. Sea $H : \mathbb{R} \to \{0,1\}$, $x \mapsto H(x)$ donde

$$H(x) = \begin{cases} 1,\ t \geq 0 \\ 0,\ t < 0.\end{cases}$$

Esta función recibe el nombre de escalón unitario o función de Heaviside.

Proposición 1.11. *Si $f(t)$ es tal que existe su transformada de Laplace, $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ y $a > 0$, entonces se tiene que*

$$\mathscr{L}(f(t-a)H(t-a)) = e^{-as}F(s),$$

con $H(t-a)$ la función de Heaviside.

Para la demostración de esta proposición basta con volver a aplicar la transformada de Laplace de igual forma que los ejemplos realizados anteriormente.

Capítulo 2

Conceptos previos

Con el objetivo de hacer más sencilla la lectura de este trabajo de fin de grado, vamos a presentar algunas definiciones y teoremas previos sin demostración vistos en el grado de Matemáticas en asignaturas tales como Análisis de Fourier, Integral de Lebesgue y Variable Compleja entre otros, así como la definición de la transformada de Laplace y propiedades interesantes de la misma.

2.1. Resultados de espacios de Lebesgue

Los siguientes resultados se pueden encontrar en [9].

Definición 2.1. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Una norma sobre E es una aplicación $||\cdot|| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que cumple:

a) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, para todo $x \in E, \lambda \in \mathbb{K}$.

c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in E$ (desigualdad triangular).

Definición 2.2. Un espacio vectorial E, dotado de una norma, $(E, \|\cdot\|)$, lo denominaremos espacio normado.
Dado $(E, \|\cdot\|)$, diremos que una sucesión $\{a_n\} \subset E$ es de Cauchy si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|a_n - a_m\| < \varepsilon, \forall\, n, m \geq n_0,$$

abreviadamente, lo escribiremos $\|a_n - a_m\| \longrightarrow 0$.
Además, si en $(E, \|\cdot\|)$ se cumple que toda sucesión de Cauchy es convergente a un elemento del espacio, entonces éste recibe el nombre de espacio normado completo o espacio de Banach.

Daremos a continuación las definiciones de los dos espacios en los que vamos a trabajar.

Definición 2.3. Denotaremos por $\mathscr{L}^1([a,b])$ al espacio de las funciones integrables Lebesgue en $[a,b]$ dado por

$$\mathscr{L}^1([a,b]) := \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \;\; f \text{ es medible en } [a,b], \text{ y } \int_a^b |f(t)|\, dt < +\infty\}.$$

Si $f \in \mathscr{L}^1([a,b])$, definimos

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Por otro lado, denotemos $N = \{f : \|f\|_1 = 0\}$ es cero en casi todo punto en $[a,b]\}$. Con esta notación definiremos $L^1([a,b]) = \mathscr{L}^1([a,b])/N$ como la identificación de todas las funciones que son iguales en casi todo punto.

Notemos, que en nuestro caso particular, trabajaremos con $Ł^1(\mathbb{R}^+)$, es decir, basta tomar $a = 0$ y $b = \infty$ en la definiciones anteriores para tener nuestro espacio.
El siguiente espacio ya damos la definición para nuestro caso particular.

Definición 2.4. Denotaremos por $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^+)$ al espacio de las funciones integrables Lebesgue en $[a,b]$ dado por $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^+) := \{f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}\ \ f$ es medible en $\mathbb{R}^+$, y $\displaystyle\int_0^\infty |f(t)|^2\, dt < +\infty\}$.

Teorema 2.5. *EL par $(L^1([a,b]), \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach.*

Definición 2.6. Tomando como dominio $\mathbb{R}$, definimos la norma en el espacio $L^1(\mathbb{R})$ como $\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$.

De forma análoga podemos definir los siguientes espacios:

Definición 2.7. Dado $1 \le p < \infty$, denotamos

$$L^p(\mathbb{R}^+) := \{f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C} : \int_A |f(t)|^p\, dt < +\infty\}.$$

Para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, definimos

$$\|f\|_p := \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\, dt\Big)^{1/p}$$

Definición 2.8. Un álgebra normada, A, es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ con una segunda operación interna, producto, $A \,\mathrm{x}\, A \to A,\ (x,y) \mapsto xy$ tal que

i) $x(yz) = (xy)z$,

ii) $x(y+z) = xy + xz,\ (x+y)z = xz + yz$,

iii) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$,

y $||xy|| \le K||x||\,||y||$ con $K > 0$, $x, y, z \in A,$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.
Un álgebra de Banach es un álgebra normada completa.

Definición 2.9. Denotemos por $\mathscr{B}(X,Y)$ al conjunto de las aplicaciones lineales y continuas entre los espacios X e Y. Para el caso de aplicaciones entre un mismo espacio pondremos $\mathscr{B}(X,X) = \mathscr{B}(X)$.
Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, $T \in \mathscr{B}(X)$ e I la identidad sobre X.

- Se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor regular de T si $T - \lambda I$ es un operador invertible.
- Los valores no regulares de T se llaman valores espectrales de T. El conjunto de los valores espectrales de T se denomina espectro de T, $\sigma(T)$.

Definición 2.10. (Integral de Gauss)
La integral de Gauss es la integral impropia de la función gaussiana e^{-u^2} sobre toda la recta real. El valor de dicha integral es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \tag{2.1}$$

Teorema 2.11. ***(Teorema de la convergencia dominada)***
Sea (f_n) una sucesión de funciones reales, (complejas), medibles sobre E que converge en casi todo punto de E a una función real, (compleja), f.
Si existe una función g integrable sobre E tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $|f_n| \le g$ en casi todo punto de E, entonces f y cada una de las f_n son integrables sobre E y

$$\int_E f\, d\mu = \lim_n \int_E f_n\, d\mu.$$

Teorema 2.12. ***(Desigualdad de Hölder)***
Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funciones medibles y $1 \leq p, q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f\, g| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = ||f||_p ||g||_q.$$

Definición 2.13. (Transformada de Fourier)
Definiremos la transformada de Fourier de una función $f \in L^1$ de la siguiente manera: $\widehat{f} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-int} dx$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Notemos que, una vez vista la definición de la transformada de Fourier, hay gran relación entre ambas transformadas.

Proposición 2.14. *Sea f integrable, entonces la transformada de Laplace de f, $\mathscr{L}(f)$ puede expresarse en términos de la transformada de Fourier de la siguiente manera:*

$$\mathscr{L}(f)(a+ib) = \widehat{f}(e^{-at} f) \left(\frac{b}{2\pi} \right).$$

La ventaja que proporciona la transformada de Laplace frente a la transformada de Fourier es la utilización de las herramientas de variable compleja.
El siguiente resultado se conoce como Teorema de Plancherel.

Teorema 2.15. *A cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se le puede asociar una función $\widehat{f}$ tal que se verifican las siguientes propiedades:*

a) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{f}(x) = \int_{R^n} f(t) e^{-ixt} dm_n(t)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Para toda $d \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.

c) La aplicación $\mathfrak{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ que a cada f se le asocia $\widehat{f}$ es un isomorfismo isométrico de espacios de Hilbert.

d) Existe una relación simétrica entre f y $\widehat{f}$. Sea $A > 0$, si

$$\varphi_A(x) = \int_{-A}^{A} f(t) e^{-ixt} dm_n(t) \text{ y } \Psi_A(t) = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(x) e^{ixt} dm_n(x) \; (x \in \mathbb{R}^n),$$

entonces $\|\varphi_A - \widehat{f}\|_2 \xrightarrow[A \to \infty]{} 0$ y $\|\Psi_A - f\|_2 \xrightarrow[A \to \infty]{} 0$.

2.2. Variable compleja

Los mayor parte de los resultados de esta sección se han visto en la asignatura de variable compleja en el grado de matemáticas.
Empecemos recordando las siguientes definiciones:

Definición 2.16. Sea f una función compleja definida sobre un abierto no vacio de $\mathbb{C}$, Ω. Si $z_0 \in \Omega$ y si existe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C},$$

entonces a $f'(z_0)$ lo llamaremos derivada de f en z_0.

Definición 2.17. Sea Ω abierto de $\mathbb{C}$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Diremos que f es holomorfa en un punto $z_0 \in \Omega$ si f es derivable en todos los puntos de un entorno de z_0, para todo $z_0 \in \Omega$.
Denotaremos por $\mathscr{H}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω.
Si $\Omega = \mathbb{C}$ entonces una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa se dice entera.

Definición 2.18. Un camino en $\mathbb{C}$ es una aplicación $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$, continua y $\mathscr{C}^{1)}$ a trozos. Denotaremos por $sop(\Gamma) = \{\Gamma(t) : t \in [a,b]\}$ al soporte del camino.
El soporte es compacto y conexo en $\mathbb{C}$.

Definición 2.19. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ se dice estrellado si existe un punto $a \in A$, al que llamaremos centro, tal que para cualquier $z \in A$ se tiene que $[a,z] \subseteq A$.

Teorema 2.20. ***(Fórmula de Cauchy para abiertos estrellados)***
Sea Ω un abierto estrellado de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Si Γ es un camino cerrado contenido en Ω, para cualquier z de Ω que no esté en el soporte de Γ es

$$f(z)\, Ind_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Veamos ahora la definición de función analítica en el caso de espacios vectoriales, que nos será de utilidad en el estudio de semigrupos.

Definición 2.21. Sea X un espacio vectorial, $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to X$ se dice que f es analítica si para todo $x' \in X'$ se tiene que $x'f$ es analítica, es decir, f se puede componer con cualquier función del espacio dual y el resultado es analítico.

Capítulo 3

La transformada de Laplace en el álgebra $L^1(\mathbb{R}^+)$ y semigrupos

3.1. Resultados del espacio $L^1(\mathbb{R}^+)$

En la introducción hemos visto que $L^1(\mathbb{R})$ junto con la norma $\|\cdot\|$ es un espacio de Banach, notemos entonces que $L^1(\mathbb{R}^+)$ también es un espacio de Banach de funciones integrables en $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$ con la norma

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^+} |f(t)|\, dt.$$

Si le añadimos el producto de convolución,

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-x)\, g(x)dx,$$

definido en casi todo punto, entonces $L^1(\mathbb{R}^+)$ es un álgebra de Banach conmutativo sin identidad.

Teorema 3.1. *La transformada de Laplace, $\mathscr{L} : L^1(\mathbb{R}^+) \to \mathscr{H}_0(\mathbb{C}^+)$ está bien definida, es lineal, continua y $\mathscr{L}(f+g)(z) = \mathscr{L}(f)(z)\mathscr{L}(g)(z)$.*

Demostración. Para ver que esta bien definida, tenemos que ver que $\mathscr{L}(f)(z) \in \mathscr{H}_0(\mathbb{C}^+)$.
Por teoría de variable compleja tenemos que e^{-st} es holomorfa. Falta ver que

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^\infty e^{st} f(t)\, dt = 0.$$

Para ello, basta aplicar el teorema de la convergencia dominada.
La linealidad se obtiene de la proposición 1.5.
Veamos finalmente que $\mathscr{L}(f+g)(z) = \mathscr{L}(f)(z)\mathscr{L}(g)(z)$.

$$\mathscr{L}(f*g)(s) = \int_0^\infty (f*g)(t)e^{-st}\, dt = \int_0^\infty \int_0^t f(t-u)g(u)e^{-st}\, du\, dt$$

$$= \int_0^\infty \int_u^\infty f(t-u)g(u)e^{-st}\, dt\, du = \begin{bmatrix} c.v \\ v = t-u \\ dv = dt \end{bmatrix} = \int_0^\infty \int_0^\infty f(v)g(u)e^{-s(v+u)}\, dv\, du$$

$$= \int_0^\infty f(v)e^{-sv}\, dv \int_0^\infty g(u)e^{-su}\, du = \mathscr{L}(f)(s)\, \mathscr{L}(g)(s).$$

$\square$

El espectro del álgebra de Banach $L^1(\mathbb{R}^+)$, ϕ, puede identificarse con el semiplano cerrado $\mathbb{C}^+$ por la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^+ & \longrightarrow & \phi; \\ \lambda & \longmapsto & \phi_\lambda, \end{array}$$

donde ϕ_λ viene definido por

$$\phi_\lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^+} f(x)\, e^{-\lambda x}\, dx,$$

para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$.
En este caso, donde $\lambda \in L^1(\mathbb{R}^+)$ con el álgebra $L^1(\mathbb{R}^+)$ de convolución del semiplano, tenemos que ϕ_λ es homeomorfo a $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq 0\}$, la transformada de Gelfand de un elemento $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ coincide con la transformada de Laplace, $\mathscr{L} : L^1(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathscr{H}(\overline{\mathbb{C}^+})$ donde $(\mathscr{L}f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^+} f(x)e^{-\lambda x}\, dw$, porque $\widehat{f}(\phi_\lambda) = \phi_\lambda(f) = (\mathscr{L}f)(\lambda)$. La transformada de Laplace es continua en $\mathbb{C}^+$ y analítica en $\mathbb{C}$.

El siguiente resultado sobre unidad aproximadamente acotada y otras definiciones del álgebra se encuentran en [5].
El álgebra $L^1(\mathbb{R}^+)$ tiene unidad aproximadamente acotada por 1. Un ejemplo de esto es $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ donde

$$e_n(w) = \begin{cases} n, & \text{para } 0 \leq w \leq \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{para } \frac{1}{n} < w. \end{cases}$$

El teorema de convolución de Titchmarsh implica que $L^1(\mathbb{R}^+)$ es un dominio integral, es decir, si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ con $f * g = 0$ entonces $f = 0$ o $g = 0$. La demostración de este teorema de puede encontrar en [7].

El álgebra multiplicativa $Mul(L^1(\mathbb{R}^+))$ de $L^1(\mathbb{R}^+)$ es naturalmente isométrico e isomorfo con el álgebra de la medida de convolución $M(\mathbb{R}^+)$ en $\mathbb{R}^+$. Aqui $M(\mathbb{R}^+)$ es el espacio de Banach de las medidas de Borel regulares cerradas, μ, en $\mathbb{R}^+$ con la norma $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^+)$ y el producto $\mu * \nu$ definido por

$$(\mu + \nu)(E) = \iint \chi_E(w+u)\partial\mu(w)\partial\nu(u),$$

donde χ_E es la función característica del conjunto de Borel E. Tenemos que la transformada de Laplace se puede definir como $\mathscr{L} : M(\mathbb{R}^+) \to \mathscr{H}_\infty(\mathbb{C}^+)$ de manera que a la $\delta_0 \mapsto \mathscr{L}(\delta_0) = 1_{\mathbb{C}^+}$.
El isomorfismo isométrico de $M(\mathbb{R}^+)$ sobre $Mul(L^1(\mathbb{R}^+))$ está definido por $\mu \longmapsto T_\mu f = \mu * f$.

3.2. Semigrupos en $L^1(\mathbb{R}^+)$

Comencemos por dar la definición de semigrupo y semigrupo analítico.

Definición 3.2. Sea X un espacio de Banach. Un semigrupo de X es una familia de operadores lineales y continuos $\{\varphi_t\}$ que dependen de un parámetro $t \geq 0$ tal que

i) $\|\varphi^t\| \leq M(t)$.

ii) $\varphi^0 = I$, con I la identidad.

iii) $\varphi^{t_1+t_2} = \varphi^{t_1}\varphi^{t_2}$, $t_1, t_2 \geq 0$.

Se dice que un semigrupo es fuertemente continuo si $\|\varphi^t x - x\|_B \xrightarrow{t \to 0} 0$ para todo $x \in B$. Además, si φ_t es un semigrupo continuo, entonces existen M, $w \in \mathbb{R}$ tales que

$$\|\varphi_t x\| \leq Me^{wt}\|x\| \text{ para todo } v \in B,\ t \geq 0.$$

Definiendo ahora un sector del plano con ángulo θ, diremos que el semigrupo es analítico si cumple

1) $\lim_{t\to t_0} \varphi_t\, x = \varphi_{t_0}\, x$ para todo $x \in \mathscr{B}(X)$.

2) la aplicación $x \mapsto \varphi_t(x)$ es analítica.

Esta primera definición se puede encontrar en [4] y [12, páginas 31-44]. Por otro lado, recordemos que la función Gamma, Γ, está definida por

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} w^{t-1} e^{-w} dw,$$

para todo $t \in \mathbb{C}^+$, asintóticamente,

$$\Gamma(t) = t^t \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \exp\left(-t + O(|t|^{-1})\right), \tag{3.1}$$

cuando $|t| \to \infty$, para todo $t \in \mathbb{C}^+$. Más aún, Γ es analítica en $\mathbb{C}^+$, $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$ para todo $t \in \mathbb{C}^+$, $\Gamma(n+1) = n!$ y $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Todo esto nos ayudará en la demostración de teorema que enunciaremos después de enunciar los dos siguientes lemas que nos facilitarán la demostración del teorema.

La demostración de ambos lemas se pueden encontrar en [13, Capítulo 2].

Lema 3.3. *Sean (W,Σ,μ) un espacio de medida con μ medida positiva, $1 \le p \le \infty$, y $\mathbb{C}\ x\ W \longrightarrow \mathbb{C}$: $(t,w) \longmapsto F(t,w)$ una función medible, tal que la función $w \longmapsto F(t,w)$ está en $L^p(w)$ para cada $t \in \mathbb{C}$ y $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto ||F(t,\cdot)||_p$ es continua. Si la función $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : t \longmapsto F(t,w)$ es analítica para cada $w \in W$, entonces $\mathbb{C} \longrightarrow L^p(W) : t \longmapsto F(t,\cdot)$ es analítica.*

Lema 3.4. *Sea A un álgebra de convolución en $L^1(\mathbb{R}^+)$, y sea $\mathbb{C} \longrightarrow A : t \longmapsto a^t$ un semigrupo analítico en A con $a^t \ge 0$ en casi todo punto y $||a^t||_1 = 1$ para todo $t > 0$. Entonces $(a^t * A)^- = A$ para todo $t \in \mathbb{C}$ si y solo si $\int_{|w|\le\delta} a^t(w)dw \to 0$ cuando $t \to 0$, $t > 0$ y para todo $\delta > 0$.*

Una vez enunciados los dos lemas podemos proceder a enunciar y demostrar el teorema.
La demostración de este teorema, sin tanto detalle, se puede encontrar en [13, Capítulo 2].

Teorema 3.5. *Sea $I^t \in L^1(\mathbb{R}^+)$ definido por $I^t(w) = w^{t-1}e^{-w}\,\Gamma(t)^{-1}$ para todo $w \in (0,\infty)$ y todo $t \in \mathbb{C}$, entonces $\mathbb{C} \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^+) : t \longmapsto I^t$ es un semigrupo analítico que denominamos semigrupo integral fraccional, con las siguientes propiedades*

1. $(I^t * L^1(\mathbb{R}^+))^- = L^1(\mathbb{R}^+)$ *para todo* $t \in \mathbb{C}$

2. $\|I^{x+iy}\|_1 = \dfrac{\Gamma(x)}{|\Gamma(x+iy)|}$, *para todo* $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$.

3. $(\mathscr{L}I^t)(z) = (z+1)^{-t}$ *para todo* $z \in \mathbb{C}^+, t \in \mathbb{C}$ *y* $\sigma(I^t) = \{0\} \cup \{(z+1)^{-t}\,|\,z \in \mathbb{C}^+\}$.

4. *Sea* $x+iy \in \mathbb{C}$, *entonces*

$$||I^{x+iy}||_1 = k(x)\,(1+y^2x^{-2})^{-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}}\ \exp\left(\frac{\pi\,|y|}{2} + O(\,|y|^{-1})\right),$$

donde $k(x)$ es una constante que depende de x pero no de y, además O es independiente de x.

Demostración. Sea $t = x+iy$ con $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}$. Entonces I^t es una función continua en $(0,+\infty)$ y

$$\|I^t\|_1 = \|I^{x+iy}\|_1 = \int_0^{\infty} \left|\frac{w^{x+iy-1}\,e^{-w}}{\Gamma(x+iy)}\right| dw = \int_0^{\infty} \frac{w^{x-1}\,e^{-w}}{|\Gamma(x+iy)|} dw = \frac{1}{|\Gamma(x+iy)|}\int_0^{\infty} w^{x-1}e^{-w}dw = \frac{\Gamma(x)}{|\Gamma(x+iy)|},$$

para todo $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$. Así ya hemos demostrado (2).

Veamos que es semigrupo analítico. Por hipótesis, tenemos que $I^t \in L^1(\mathbb{R}^+)$ para todo $t \in \mathbb{C}$, y la aplicación $t \longmapsto \|I^t\|_1$ es continua.
Además, notemos que $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : t \longmapsto I^t(w)$ es analítica porque $\Gamma(t)$, e^{-w} siempre son analíticas y $w^{t-1} = e^{(t-1)\mathrm{Log}(w)}$ es analítica ya que por hipótesis teníamos que $w > 0$.
Por otro lado tenemos que

$$\frac{\partial I^t}{\partial t}(w) = \frac{w^{t-1}e^{-w}}{\Gamma(t)} \left\{ \log w - \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} \right\},$$

para cada $w > 0$.

Ahora, aplicando el Lema 3.3 sabemos que $\mathbb{C} \to L^1(R^+) : t \longmapsto I^t$ es analítica.
Veamos ahora que el producto equivale a la suma aplicando directamente el producto de convolución:

Sean ahora $s, t, w > 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
I^t * I^s(w) &= \int_0^w \frac{(w-u)^{t-1}\, e^{-(w-u)}\, u^{s-1} e^{-u}}{\Gamma(t)\,\Gamma(s)} du = \frac{e^{-w}}{\Gamma(t)\,\Gamma(s)} \int_0^w (w-u)^{t-1} e^u u^{s-1} e^{-u} du \\
&= \begin{bmatrix} c.v \\ u = w\,v\,,\ du = w\,dv \\ u = 0 \to v = 0 \\ u = w \to v = 1 \end{bmatrix} = \frac{e^{-u}}{\Gamma(t)\Gamma(s)} \int_0^1 (w - v\,w)^{t-1} (vw)^{s-1} w dv = \\
&= \frac{e^{-w}}{\Gamma(t)\,\Gamma(s)} \int_0^1 w^{t-1} (1-v)^{t-1}\, w^{s-1}\, v^{s-1}\, w\,dv = \frac{e^{-w} w^{t+s-1}}{\Gamma(t)\,\Gamma(s)} \int_0^1 (1-v)^{t-1}\, v^{s-1}\, dv \\
&= \frac{w^{t+s-1} e^{-w}}{\Gamma(t)\,\Gamma(s)} \beta(t,s) = \frac{w^{t+s-1} w^{-w}}{\Gamma(t)\,\Gamma(s)} \frac{\Gamma(t)\,\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)} = \frac{e^{t+s-1} e^{-w}}{\Gamma(t+s)} = I^{t+s}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, así hemos visto que efectivamente es semigrupo analítico para todo t, $s > 0$, más aún, como la función $t \longmapsto I^t$ hemos probado que es analítica, entonces se cumple para todo s y t en $\mathbb{C}$.

Si $0 < t < r = \delta\, e^{-1} < 1$ y $\delta \leq w$ veamos entonces que $w^t \leq \left(\frac{w}{t}\right)^t \leq \left(\frac{w}{r}\right)^r$.

Notemos que esta prueba no aparece en la referencia donde podemos encontrar la demostración de este teorema.

Es claro ver que $w^t \leq \left(\frac{w}{t}\right)^t$ por ser $t \in (0,1)$. Para ver que $\left(\frac{w}{t}\right)^t \leq \left(\frac{w}{r}\right)^r$ tenemos que estudiar el comportamiento de crecimiento y decrecimiento de la función

$$g(x) = \left(\frac{w}{x}\right)^x.$$

Derivamos dicha función:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{w}{x}\right)^x = \left(\frac{w}{x}\right)^x \left(\log\left(\frac{w}{x}\right) - 1\right),$$

de donde es claro que $\left(\frac{w}{x}\right)^x > 0$, para todo $x > 0$ y $w > 0$. Nos falta ver qué pasa con la segunda parte del producto.

$$\log\left(\frac{w}{x}\right) - 1 > 0 \Leftrightarrow \log\left(\frac{w}{x}\right) - \log e > 0 \Leftrightarrow \log\left(\frac{w}{xe}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{w}{xe} > 0 \Leftrightarrow w > xe.$$

Teniendo en cuenta que $x > 0$ y que $0 < t < r = \delta\, e^{-1} < 1$ y $\delta \leq w$ obtenemos que $0 < e\,t < e\,r = \delta$, de donde, si sustituimos en las implicaciones anteriores $x = r$ obtenemos que $w - re \geq 0$ y así, quitando el caso $w=\delta$ tenemos que todas las implicaciones son ciertas para nuestros valores de r y t y por lo tanto nuestra función es creciente. Además, como $t<r$ obtenemos que $\left(\frac{w}{t}\right)^t \leq \left(\frac{w}{r}\right)^r$.

Considerando la derivabilidad de $t \longmapsto \log(\frac{w}{t})$ y que $w>0$ entonces:

$$\int_{|w|\geq\delta} I^t(w)dw = \int_\delta^\infty \frac{w^{t-1}e^{-w}}{\Gamma(t)}dw \leq \frac{r^{-r}}{\Gamma(t)}\int_\delta^\infty w^{t-1}e^{-w}\,dw \leq r^{-r}\,\Gamma(r)\Gamma(t)^{-1}.$$

Si hacemos $t\to 0$, entonces $r^{-r}\,\Gamma(r)\Gamma(t)^{-1}\to 0$, para todo $\delta>0$ ya que $\lim_{t\to 0}\Gamma(t)=\infty$.

Como $I^t>0$ y $\|I^t\|=1$ para todo $t>0$, se cumplen las hipótesis del lema 3.4 de donde podemos deducir la propiedad (1) del teorema.

Como se ha mostrado en la introducción a la sección tenemos que en $L^1(R^+)$ la transformada de Gelfand es esencialmente la transformada de Laplace:

$$\sigma(I^t) = \{0\}\cup\widehat{I^t}(\Phi) = \{0\}\cup\{\mathscr{L}I^t(z)\,:\,z\in\mathbb{C}^+\}\ \forall t\in\mathbb{C}.$$

Luego para probar (3) basta probar que $(\mathscr{L}I^t)(z)=(z+1)^{-t}$ para todo $z\in\mathbb{C}^+$, $t\in\mathbb{C}$.

Fijamos $t\in\mathbb{C}$, las funciones $z\longmapsto(\mathscr{L}I^t)(z)$ y $z\longmapsto(z+1)^{-t}$ son analíticas en $\mathbb{C}$ y continuas en $\mathbb{C}^+$ y por las propiedades de las funciones analíticas sólo tenemos que demostrar que $\mathscr{L}I^t(z)=(z+1)^{-t}$ para todo $t\in\mathbb{C}$ y $z\geq 0$.

Repitiendo el argumento, dejando fijo $z\geq 0$ y variando t ya tenemos lo que queremos:

$$\mathscr{L}I^t(z) = \int_0^\infty \frac{w^{t-1}e^{-w}}{\Gamma(t)}e^{-wz}dw = \begin{bmatrix} c.v \\ w=\frac{u}{z+1} \\ dw=\frac{1}{z+1}\,du \end{bmatrix} = (z+1)^t\int_0^\infty \frac{u^{t-1}e^{-u}}{\Gamma(t)}du = (z+1)^{-t},\ \forall t>0.$$

Por la fórmula asintótica (3.1) para $\Gamma(x+iy)$ obtenemos:

$$\|I^{x+iy}\|_1 = \Gamma(x)|x+iy|^{-1} = |(x+iy)^{-x-iy}|\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\Gamma(x)\sqrt{|x+iy|}\exp(x+o(|x+iy|^{-1}) =$$

$$= (x^2+y^2)^{-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\Gamma(x)\sqrt{|x+iy|}\exp\left(yArg(x+iy)+x+o(|x+iy|^{-1})\right),$$

siendo $yArg(x+iy)=|y|\frac{\pi}{2}-o(1)$ cuando $|y|\to\infty$, tenemos:

$$\|I^{x+iy}\|_1 = k(x)(1+\frac{y^2}{x^2})^{-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}}\exp\left(\pi\frac{|y|}{2}+o(1)\right)\text{ para cada } x>0.$$

Así queda demostrado el teorema. □

El semigrupo C^t definido en $\mathbb{R}$, es muy útil en el estudio de las propiedades del semigrupo de Poisson, pero esto está fuera del objetivo de este TFG debido a que este semigrupo se encuentra en $L^1(\mathbb{R})$ y nosotros nos limitaremos a $L^1(\mathbb{R}^+)$.

Veamos un lema sobre una integral muy relacionada con la transformada de Laplace de C^t donde $C^t(w)=\frac{t}{2\sqrt{\pi}}\,w^{\frac{-3}{2}}\exp\left(\frac{t^2}{4w}\right)$ que motivará la demostración del siguiente lema.

Lema 3.6. *Sea $\alpha > 0$, entonces:*

$$e^{-\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} e^{(-u-\frac{\alpha^2}{4u})} du = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{-\frac{3}{2}} e^{(-u-\frac{\alpha^2}{4u})} du.$$

Antes de proceder a la demostración, notemos que el enunciado nos indica que el lema se cumple para $\alpha > 0$, aunque es claro ver que la primera igualdad se cumple para $\alpha \geq 0$.

Demostración. Definimos

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-u-\frac{\alpha^2}{4u}} du, \text{ para todo } \alpha \geq 0.$$

Aplicando el teorema de la convergencia dominada obtenemos la continuidad de F en el 0. Ahora, derivando F:

$$\frac{dF}{d\alpha}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} e^{\left(-u-\frac{\alpha^2}{4u}\right)} \left(-\frac{2\alpha}{4u}\right) du = \frac{-\alpha}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{-\frac{3}{2}} e^{\left(-u-\frac{\alpha^2}{4u}\right)} du.$$

Aplicando el cambio de variable $w = \frac{\alpha^2}{4u}$ y simplificando:

$$\frac{dF}{d\alpha}(\alpha) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int_\infty^0 \alpha \left(\frac{\alpha^2}{4w}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{-\alpha^2}{4w^2}\right) e^{\left(-w-\frac{\alpha^2}{4w}\right)} dw = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty 2 \frac{1}{\sqrt{w}} e^{\left(-w-\frac{\alpha^2}{4w}\right)} dw =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{w}} e^{\left(-w-\frac{\alpha^2}{4w}\right)} dw = -F(w).$$

Así, F satisface la ecuación diferencial $\dfrac{dF}{d\alpha} + F = 0$, y por lo tanto, $F(\alpha) = Ce^{-\alpha}$, para todo $\alpha > 0$.

Como ya hemos visto que F es continua en 0, obtenemos que:

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

de donde obtenemos que $Ce^0 = 1 \Leftrightarrow C = 1$. Así quedan demostradas las igualdades y el teorema. □

Lema 3.7. *Si $C^t \in L^1(R^+)$ está definido por*

$$C^t(w) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} w^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{t^2}{4w}},$$

para todo $w > 0$ y para todo $t \in S_{\pi/4} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |Arg\, z| < \frac{\pi}{4}\}$, entonces la aplicación que va de $S_{\pi/4}$ en $L^1(R^+)$ tal que a cada t le asocia C^t, es un semigrupo analítico con las siguientes propiedades:

1. $(C^t \in L^1(R^+))^- = L^1(R^+)$, *para todo $t \in S_{\pi/4}$.*
2. $\|C^t\|_1 = \left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, *para $t = x + iy \in S_{\pi/4}$.*
3. $(\mathscr{L}C^t)(z) = e^{-t\sqrt{z}}$, *para $t \in S_{\pi/4}$ y $z \in \mathbb{C}^+$.*

Demostración. Tomamos $t = x + iy \in S_{\pi/4}$, x e y reales, entonces C^t es una función continua en $(0,\infty)$. Vamos a calcular la norma 1 de C^t:

$$\|C^t\|_1 = \int_0^\infty \left| \frac{t}{2\sqrt{\pi}} w^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4w}\right) \right| dw \overset{w\geq 0}{=} \frac{|t|}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty w^{-\frac{3}{2}} \left| \exp\left(-\frac{(x+iy)^2}{4w}\right) \right| dw =$$

$$= \frac{|t|}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty w^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(x^2-y^2)}{4w}\right) dw = \left[\begin{array}{c} c.v \\ \frac{x^2-y^2}{4w} = u^2 \\ dw = -\frac{1}{2u^3}\,(x^2-y^2)\,du \end{array} \right] =$$

$$\frac{|t|}{\sqrt{(x^2-y^2)}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} du \overset{(2.1)}{=} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}.$$

Por tanto, $C^t \in L^1(\mathbb{R}^+)$ y la función $S_{\pi/4} \to \mathbb{R} : t \longmapsto \|C^t\|_1$ es continua.
Más aún, la función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ tal que $t \longmapsto C^t(w)$ es analítica y $\dfrac{\partial C^t}{\partial t}(w) = \left(1 - \dfrac{t}{2w}\right) C^t(w),\ \forall w > 0.$
Entonces, aplicando el lema 3.3, tenemos que la función $S_{\pi/4} \to L^1(\mathbb{R}^+)\,,\, t \longmapsto C^t$ es analítica.

Sean $t, z > 0$, calculamos la transformada de Laplace de C^t:

$$(\mathscr{L}C^t)(z) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty w^{-\frac{3}{2}} \exp\left(wz - \frac{t^2}{4w}\right) dw = \left[\begin{array}{c} c.v \\ wz = u \\ z\,dw = du \end{array} \right] = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left(\frac{u}{z}\right)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(u - \frac{zt^2}{4u}\right) \frac{1}{z}\,du =$$

$$= \frac{t\sqrt{z}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-u - \frac{zt^2}{4u}\right) du \overset{Lema\ 3,6}{=} e^{-t\sqrt{z}}.$$

La analiticidad de las funciones $(\mathscr{L}C^t)(z)$ y $e^{-t\sqrt{z}}$ implica que son iguales para $T \in S_{\pi/4}$ y $z \in \mathbb{C}^+$.

La propiedad de semigrupo se sigue de la inyectividad de la transformada de Laplace y

$$e^{(-(t+s)\,\sqrt{z})} = e^{(-t\,\sqrt{z})}\, e^{(-s\,\sqrt{z})},\ \text{para todo } z \in \mathbb{C}^+,$$

por las propiedades de la exponencial.
Así hemos visto que es semigrupo analítico.

Sean ahora $t, \delta > 0$, entonces:

$$\int_{|w|\geq\delta} C^t(w)dw \overset{(1)}{\leq} \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_{w\geq\delta} w^{-\frac{3}{2}}\, dw = \frac{t}{\sqrt{\pi\delta}},$$

este resultado tiende a cero conforme t decrece hacia 0 para un δ fijo.

La cota (1) se obtiene al ver el máximo valor que puede alcanzar la parte exponencial de C^t ya que, el exponente, $-\frac{t^2}{4w}$ es menor que 0 dado que $w > 0$, por lo tanto, el máximo valor de la exponencial se alcanzará cuando el exponente sea 0, y en consecuencia $\exp\left(-\frac{t^2}{4w}\right) \leq e^0 = 1$. Con esto queda probado el lema. $\square$

Capítulo 4

La transformada de Laplace en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+)$

4.1. Resultados de espacios de Hilbert y bases de $L^2(\mathbb{R}^+)$

Definición 4.1. Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un producto escalar sobre H es una aplicación $\langle\ ,\ \rangle : H \text{ x } H \to \mathbb{R}$ tal que

i) $\langle x,x\rangle \geq 0$ para $x \in H$ y $\langle x,x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

ii) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ para todos $x,y \in H$.

iii) $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle$ para todos $x,y \in H$ y $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

El par $(H,\langle\ ,\ \rangle)$ se llama espacio pre-Hilbert.

Proposición 4.2. ***(Desigualdad de Cauchy- Schwarz)***
Sean $x,y \in H$ donde H es un espacio pre-Hilbert. Entonces

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Teorema 4.3. *Sea $(H,\langle\ ,\ \rangle)$ un espacio pre-Hilbert. Entonces $(H,\|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado donde la aplicación $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$ está definida mediante*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle},\ \ x \in X.$$

Definición 4.4. Un espacio pre-Hilbert $(H,\langle\ ,\ \rangle)$ se dice de Hilbert si es completo con la topología asociada al producto escalar, es decir, a la norma definida por éste.

Los dos teoremas que se enuncian a continuación se encuentran en [9, Capítulo 2].

Teorema 4.5. ***(Método de Gram-Schmidt)*** *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una colección contable (finito o numerable) de vectores linealmente independientes en un espacio Hilbert, $(H,\langle\ ,\ \rangle)$. Si se define por inducción la sucesión de vectores $(u_n)_n$ mediante las fórmulas*

$$y_1 := x_1, \qquad y_n := x_n - \sum_{j=1}^{n-1}\langle x_n, u_j\rangle\rangle u_j, \qquad u_1 := \frac{y_1}{\|y_1\|}, \qquad u_n := \frac{y_n}{\|y_n\|}.$$

para $n \geq 2$, entonces $(u_n)_n$ es una sucesión ortonormal en H, y para cada n se tiene que $span\{u_1,\cdots,u_n\} = span\{x_1,\cdots,x_n\}$.

Teorema 4.6. *Sea H un espacio Hilbert. Toda familia ortonormal está contenida en una base. En particular, todo espacio Hilbert tiene una base.*

Mostremos ahora una base del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Definición 4.7. Los polinomios de Laguerre son una familia de polinomios ortogonales $\{L_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ en el intervalo $[0,\infty)$. A partir de la fórmula de Rodrigues, se pueden definir los polinomios de Laguerre mediante la expresión

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}).$$

Existe una generalización de estos polinomios que se puede encontrar en [3], pero para nuestro caso nos basta con quedarnos con la expresión anterior. A través de los polinomios de Laguerre, las funciones de Laguerre estan definidas por

$$\mathscr{L}_n(t) := e^{-\frac{t}{2}} L_n(t),\ t > 0.$$

Estas funciones definen una base ortonormal del espacio $L^2(\mathbb{R}^+)$.

4.2. Teorema de Paley-Wiener

En este apartado seguiremos la notación tradicional, asociada a la transformada de Fourier, del teorema de Paley-Wiener.

Definición 4.8. Definimos por Π^+ al semiplano superior complejo, es decir,

$$\Pi^+ = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : y > 0,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Teorema 4.9. ***(Teorema de Paley-Wiener)***
Supongamos que $f \in \mathscr{H}(\Pi^+)$ y que

$$\sup_{0<y<+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dx = C < \infty. \tag{4.1}$$

Entonces existe una $F \in L^2(0,+\infty)$ tal que

$$f(z) = \int_0^{\infty} F(t)e^{itz} dt \ \ (z \in \Pi^+) \ y \ \int_0^{\infty} |F(t)|^2 dt = C.$$

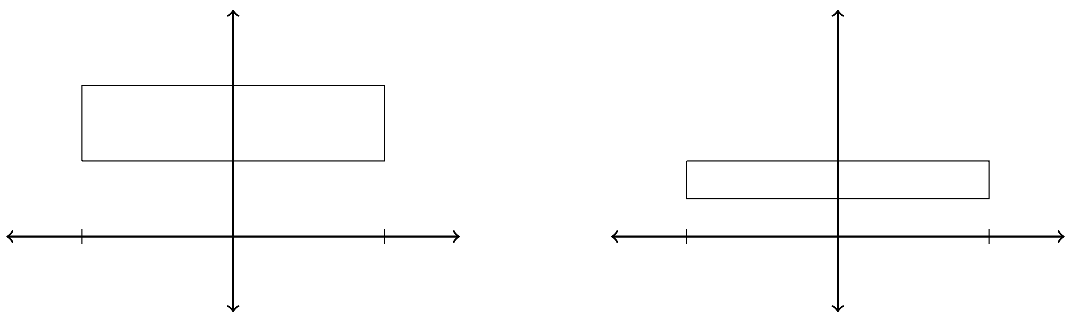
Antes de comenzar la demostración, notemos que la función F que buscamos tiene que cumplir la propiedad de que $f(x+iy)$ debe ser la transformada de Fourier de $F(t)e^{-yt}$, tomando y como una constante positiva. Dicha F debería ser de la forma

$$F(t) = e^{ty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy)e^{-itx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-itz}\, dz.$$

Vamos a probar el Teorema 4.9:

Demostración. Fijemos y tal que $0 < y < +\infty$. Sea Γ_α el camino rectangular con vértices en $(\pm\alpha + i)$ y $(\pm\alpha + iy)$ para cada $\alpha > 0$.

Caso $y > 1$ Caso $0 < y < 1$



Por el teorema de Cauchy sabemos que:

$$\int_{\Gamma_\alpha} f(z)e^{-itz}\,dz = 0, \tag{4.2}$$

por ser $f(z)$ holomorfa en Π^+ y $\Gamma_\alpha \subseteq \Pi^+$.

Consideremos únicamente los valores reales de t. Sea β real y denotemos por $\Phi(\beta)$ a la siguiente integral:

$$\int_{\beta+i}^{\beta+iy} f(z)e^{-itz}$$

Sea $I=[y,1]$ si $y<1$ o $I=[1,y]$ si $y>1$. Entonces:

$$|\Phi(\beta)|^2 = \left|\int_I f(\beta+iu)e^{-it(\beta+iu)}du\right|^2 \leq \int_I |f(\beta+iu)|^2 du \int_I e^{2tu}du.$$

Definimos

$$\Lambda(\beta) = \int_I |f(\beta+iu)|^2 du.$$

Teniendo en cuenta (4.1) y aplicando el teorema de Fubini tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_I |f(\beta+iu)|^2 du\,d\beta &= \frac{1}{2\pi}\int_I\int_{-\infty}^{\infty} |f(\beta+iu)|^2 d\beta\,du \\ &\leq \int_I \sup_{u>0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(\beta+iu)|^2 d\beta\,du \overset{(4.1)}{=} C\int_I d\mu = Cm(I),\end{aligned}$$

esto es,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(\beta)d\beta \leq Cm(I),$$

donde $m(I)$ es la medida de Lebesgue.
En consecuencia, $\Lambda \in L^1(\mathbb{R})$ y de antes tenemos que $\Lambda(\beta)\geq 0,$ para todo $\beta\in\mathbb{R}$.
Probemos entonces que existe una sucesión $\{\alpha_j\}$ tal que

$$\alpha_j \to +\infty \text{ y } \Lambda(\alpha_j)+\Lambda(-\alpha_j) \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Para ello, definimos la función $\varphi(y)=\Lambda(y)+\Lambda(-y)$ para cada $y\in\mathbb{R}$.
Sea $L=\lim\limits_{|x|\to\infty}\varphi(x)$. Observemos que $L=0$ o $L\neq 0$ por ser $\Lambda(y)\geq 0$ para todo $y\in\mathbb{R}$.

Supongamos primero que $L=0$, entonces

$$0=\liminf_{|x|\to\infty}\varphi(x) = \sup_{n\nearrow\infty}\left(\inf_{|x|>n}\{\varphi(x)\}\right) \Rightarrow \inf_{|x|>n}\{\varphi(x)\}=0 \text{ para todo } n.$$

Así, existe $x_1\in\mathbb{R}$ de manera que $|x_1|>1$ y $|\varphi(x_1)|<1$. Como

$$\inf_{|x|>|x_1|}\{\varphi(x)\}=0,$$

se tiene que

$$\inf_{|x|>\max\{|x_1|,2\}}\{\varphi(x)\}=0,$$

entonces existe $x_2\in\mathbb{R}$ tal que $|x_2|>\max\{|x_1|,2\}$ con $|\varphi(x_2)|<\frac{1}{2}$. Reiterando el proceso, se puede construir una sucesión $\{x_n\}$ tal que $|x_1|<|x_2|<\ldots<|x_n|<\ldots$, con $|x_n|>n$ y $\varphi(x_n)<\frac{1}{n}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.
Es decir, $|x_n| \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ y $\varphi(x_n)\underset{n\to\infty}{\to} 0$. Basta tomar $\alpha_j=|x_j|$.

Supongamos ahora que $L > 0$, es decir,

$$0 < L = \liminf_{|x|\to\infty} \varphi(x) = \sup_{n\nearrow\infty}\left(\inf_{|x|>n}\{\varphi(x)\}\right),$$

entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\inf\limits_{|x|>n_0}\{\varphi(x)\} > \frac{L}{2}$. Tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(y)dy < \infty \text{ y } \varphi(y) = \Lambda(y) + \Lambda(-y),$$

luego $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)dy$. Por tanto,

$$\infty > \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = \int_{|x|>n_0} \varphi(x)dx + \int_{|x|\leq n_0} \varphi(x)dx >$$

$$> \int_{|x|>n_0} \varphi(x)dx + \int_{|x|>n_0} \frac{L}{2}dx = C + \frac{L}{2}\int_{|x|>n_0} dx = \infty,$$

con $C \in [0,\infty)$, y así llegamos a una contradicción.

En consecuencia, L necesariamente tiene que se nula y finalmente ya tenemos probado que existe una sucesión $\{\alpha_j\}$ tal que

$$\alpha_j \to +\infty \text{ y } \Lambda(\alpha_j) + \Lambda(-\alpha_j) \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Teniendo en cuenta que $\Lambda(\beta) \geq 0$ entonces, además podemos afirmar que $\Lambda(\alpha_j) \overset{j\to\infty}{\to} 0$ y $\Lambda(-\alpha_j) \overset{j\to\infty}{\to} 0$.

Como en (4.2) hemos visto que:

$$|\Phi(\beta)| \leq \Lambda(\beta)\int_I e^{2tu}du,$$

se deduce que:

$$\Phi(\alpha_j) \to 0,\ \Phi(-\alpha_j) \to 0, \text{ cuando } j \to +\infty. \tag{4.3}$$

Notemos que esto último se cumple para todo t real y que la sucesión $\{\alpha_j\}$ no depende de t.

Definamos la función:

$$g_j(y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} f(x+iy)e^{-itx}dx. \tag{4.4}$$

Aplicando (4.2) y (4.3) tenemos

$$\begin{aligned}
0 &\overset{(4.2)}{=} \int_{\Gamma_{\alpha_j}} f(z)e^{-itz}dz = i\int_I f(\alpha_j+iw)e^{-it(\alpha_j+iw)} - i\int_I f(-\alpha_j+iw)e^{-it(-\alpha_j+iw)} \\
&+ \int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} f(x+i)e^{-it(x+i)}dx - \int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} f(x+yi)e^{-it(x+yi)}dx \\
&= i\Phi(\alpha_j) - i\Phi(-\alpha_j) + 2\pi e^t g_j(1,t) - 2\pi e^{ty} g_j(y,t).
\end{aligned}$$

Aplicando el límite cuando $j \to \infty$ finalmente deducimos que

$$\lim_{j\to\infty}\left(e^{ty}g_j(y,t) - e^t g_j(1,t)\right) = 0, \text{ con } -\infty < t < \infty. \tag{4.5}$$

Para simplificar notación tomemos $f_y(x) = f(x+iy)$.

Entonces, por hipótesis $f_y \in L^2(-\infty,\infty)$ y el teorema de Plancherel afirma que

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f_y}(t)-g_j(y,t)|^2dt=0,$$

donde $\widehat{f_y}$ es la transformada de Fourier de f_y. Tenemos así que, existe una subsucesión de $\{g_j(y,t)\}$ que converge puntualmente a $\widehat{f_y}(t)$ para casi todo t.

Si definimos

$$F(t)=e^t\widehat{f_y}(t),$$

de (4.5) se sigue que

$$F(t)=e^{ty}\widehat{f_y}(t),\ \forall\, y\in(0,\infty).$$

Aplicando el teorema de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2ty}|F(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f_y}(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f_y(x)|^2dx\leq C. \tag{4.6}$$

Si en (4.6) hacemos $y\to\infty$ y aplicamos el teorema de la convergencia dominada obtenemos:

$$C\geq\lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{0}e^{-2ty}|F(t)|^2dt+\lim_{y\to\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-2ty}|F(t)|^2dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\lim_{y\to\infty}e^{-2ty}|F(t)|^2dt+\int_{0}^{\infty}\lim_{y\to\infty}e^{-2ty}|F(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{0}\lim_{y\to\infty}e^{-2ty}|F(t)|^2dt.$$

Destaquemos que esta última integral es divergente, lo que nos lleva a una contradicción salvo que $|F(t)|=0$ en casi todo $t\in(-\infty,0)$, y por lo tanto $F(t)$ debe ser nula en casi todo t, para valores de t negativos.

Reiterando el proceso, es decir, aplicando el teorema de la convergencia dominada y el límite, en este caso, cuando y tiende a 0, sobre (4.6) tenemos

$$C\geq\lim_{y\to 0}\int_{0}^{\infty}e^{-2ty}|F(t)|^2dt=\int_{0}^{\infty}\lim_{y\to 0}e^{-2ty}|F(t)|^2dt=\int_{0}^{\infty}|F(t)|^2dt$$

Uniendo ambos extremos de la desigualdad obtenemos

$$\int_{0}^{\infty}|F(t)|^2dt\leq C.$$

Observemos que $F\in L^2(0,\infty)$ y junto con la desigualdad anterior, basta tomar

$$C=\min\{C|\int_{0}^{\infty}|F(t)|^2dt\leq C\},$$

y así obtenemos la igualdad.
Se sigue que, si $y>0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f_y}(t)|dt=\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-ty}F(t)|dt=\int_{0}^{\infty}e^{-ty}|F(t)|\leq||F(t)||_2||e^{-ty}||_2<\infty$$

Por lo tanto, $\widehat{f_y}(t)\in L^1$ siempre que $y>0$. Luego podemos aplicar el teorema de inversión de la transformada de Fourier para obtener $F_y(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f_y}(t)e^{itx}dt$. Y de aquí

$$f(z)=\int_{0}^{\infty}F(t)e^{-yt}e^{itx}dt=\int_{0}^{\infty}F(t)e^{itz}dt\quad(z\in\Pi^+).$$

Con esto damos por finalizada la demostración del teorema. $\square$

Notemos que $\mathbb{C}^+ = -i\Pi^+$, lo que hace que los resultados obtenidos se puedan trasladar a $\mathbb{C}^+$.

Para concluir este capítulo, enunciaremos un teorema que esta muy ligado al que acabamos de enunciar cuya demostración omitiremos porque se va del objetivo inicial de este TFG.
La demostración de este teorema puede encontrarse en [11, Capítulo 19].

Teorema 4.10. *Sean A y C constantes positivas y f una función entera tales que*

$$|f(z)| \leq Ce^{A|z|}, \ \forall z \ \ y \ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Entonces existe una $F \in L^2(-A,A)$ tal que

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(t)e^{itz} dt,$$

para todo z.

Capítulo 5

Aplicación en la resolución de Ecuaciones Diferenciales

Una vez vista la teoría de la transformada de Laplace, estudiemos el caso práctico y el por qué de la importancia de ésta en el mundo de las ecuaciones diferenciales.

Antes de nada, notemos que la transformada de Laplace se extiende a funciones más generales que $L^1(\mathbb{R}^+)$ o $L^2(\mathbb{R}^+)$. Lo cual permite resolver ecuaciones diferenciales cuya solución no está en estos espacios. En el caso de que la solución cae en los espacios citados se podrán precisar más propiedades a través de la teoría anteriormente planteada. En primer lugar, se muestra una pequeña tabla con algunas transformadas elementales.

$f(x)$	$\mathscr{L}\{f(x)\}$
1	$\frac{1}{s}$
x	$\frac{1}{s^2}$
x^n	$\frac{n!}{s^{n-1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-3/2}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\pi}s^{-3/2}$
$x^{n-1/2}$	$\frac{1}{s}$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$ $(s > a)$
$\operatorname{sen}(ax)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(ax)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

Cuadro 5.1: Tabla de la Transformada de Laplace.

Como ya sabemos, una ecuación diferencial posee infinitas soluciones pero, en algunas ocasiones como son los casos prácticos, sólo interesa una de entre todas las soluciones. Este es el caso del estudio de un fenómeno regido por dicha ecuación diferencial y cuya realización supone una única solución concreta. Éstos son los llamados problemas con condiciones iniciales. Las condiciones iniciales nos proporcionan información adicional sobre la solución deseada.

Este tipo de problemas pueden ser abarcados con la transformada de Laplace de la siguiente manera. Lo ilustramos con un ejemplo práctico.

Ejemplo.
Problema:

$$\begin{cases} \ddot{y} - 3\dot{y} - 2y = t \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

Resolución:

$$\mathscr{L}(\ddot{y}) - 3\mathscr{L}(\dot{y}) - 2\mathscr{L}(y) = \mathscr{L}(t).$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$s^2Y - sy(0) - \dot{y}(0) - 3(sY - y(0)) - 2Y = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 - 3s - 2)Y = \frac{1}{s^2} - s - 3 \Rightarrow Y = \frac{1 - s^3 - 3s^2}{s^2(s^2 - 3s - 2)}$$

$$Y = \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{s} + 3\frac{1}{s+1} - \frac{5}{4}\frac{1}{s+2} = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + 3e^{-t} - \frac{5}{4}e^{-2t}$$

Una vez calculado esto, para obtener la solución del sistema haría falta calcular la antitransformada. Pero como no nos interesa la solución completa del sistema, sólo desarrollamos hasta aquí el ejemplo.

Vamos a enunciar algunos problemas en la vida real donde interfieren las ecuaciones diferenciales y en los que la transformada de Laplace es de gran interés. En primer lugar nombraremos ejemplos donde se suelen aplicar las transformadas de Laplace y finalmente, desarrollaremos un par de ejemplos particulares de forma más detallada.

- Lanzamiento de un cuerpo
  Este tipo de problema es un ejemplo esencial en la física. Se trata de estudiar el comportamiento de un cuerpo lanzado hacia arriba verticalmente desde la superficie terrestre.

- Circuitos eléctricos
  En este tipo de fenómenos la función más habitual que encontraremos es la intensidad de una corriente que pasa por un circuito. Este ejemplo se desarrollará después.

- Muelles
  Otro problema básico en la física es el estudio del comportamiento del muelle, el cuál se deduce de la ley de Hooke, según la cual la fuerza del muelle para volver a su posición inicial es proporcional al desplazamiento experimentado,y además en sentido contrario al desplazamiento. La fórmula de la ley de Hooke es $f = -kx$, donde k es una contante positiva propia del muelle. Pero como podemos observar, esto no es una ecuación diferencial que es lo que buscamos. Recordemos que $f = mx''$, y sustituyendo ya tenemos el problema de ecuaciones diferenciales para el comportamiento del muelle en el caso más sencillo en el que sólo hay presencia de fuerza anterior.

Ejemplo. (Mecánica y circuitos eléctricos)

Antes de comenzar con las ecuaciones, se explican las componentes de un problema de este tipo de manera básica.

Un circuito eléctrico siempre esta compuesto de un interruptor, una batería, un inductor, una resistencia y un capacitor. Cuando el interruptor esta cerrado se produce una corriente eléctrica que se denota $i(t)$ y la carga del capacitor de denota $q(t)$. Por la segunda ley de Kirchhoff el voltaje que produce la fuente, E, al circuito cerrado tiene que ser igual a la suma de cada una de las caídas de voltaje. La relación entre la corriente eléctrica y la carga en el capacitor es $i = \frac{dq}{dt}$.

Definimos la caída de voltaje en una resistencia por $iR = R\left(\frac{dq}{dt}\right)$, la caída de voltaje en un inductor por $L\left(\frac{di}{dt}\right) = L\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right)$ y la caída de voltaje en un capacitor por $\frac{q}{C}$. Con estos datos y aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito simple cerrado se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden que describe el sistema y nos permite calcular el valor de $q(t)$. Consideremos un circuito con condiciones iniciales en la carga nulas. Entonces, la ecuación diferencial ordinaria lineal, que modela el circuito es:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t), \text{ o bien, } L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = E(t).$$

Aplicando Laplace, queda:

$$Q(s) = \frac{E(s)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}.$$

Ejemplo. (Funciones de impulso)

Estas funciones se utilizan para modelizar fenómenos en los que la transferencia del momento es tan rápida que sólo pueden observarse los instantes anterior y posterior. Por ejemplo, cuando excitamos instantáneamente un determinado sistema.

Este tipo de fenómenos se modelizan con la llamada delta de Dirac. Si $a > 0$, definimos la función delta de Dirac por

$$\delta_a(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = a; \\ 0 & \text{si } t \neq a. \end{cases}$$

Observemos que

$$\mathscr{L}(\delta_a)(s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta_a(t)dt = e^{-as}.$$

La función delta tiene su aplicación en el contexto de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constante. Consideremos, por ejemplo, el problema formal de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y'' + y = \delta(t); \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$

Aplicando la transformada de Laplace obtenemos que

$$\mathscr{L}(y)(s) = \frac{1}{a + s^2},$$

de donde la solución, tras aplicar la transformada inversa es

$$y_\delta(t) = \operatorname{sen} t.$$

Esta solución recibe el nombre de respuesta al impulso δ. Notemos que y_δ no satisface las condiciones iniciales del problema. Notemos que esta solución no cumple las condiciones iniciales, sin embargo, si tomamos el problema

$$\begin{cases} y'' + y = f(t); \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, \end{cases}$$

su solución es de la forma $y(t) = (f * y_\delta)(t)$.
Por ejemplo, si $f(t) = \cos(t)$ la solución del problema sería $y(t) = \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t$, la cual, si que cumple las condiciones iniciales.

Estas y más aplicaciones se pueden encontrar en [6] y [2].

Bibliografía

[1] Algunas aplicaciones de la transformada de laplace.

[2] Transformada de laplace y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales.

[3] Pedro J. Abadias, Luciano y Miana. c_0-semigroups and resolvent operators approximated by laguerre expansions. *arXiv preprint arXiv:1311.7542*, 2013.

[4] José Alberto Conejero Casares. Operadores y semigrupos de operadores en espacios de fréchet y espacios localmente convexos. 2004.

[5] H. Dales and Ali Ülger. Approximate identities in banach function algebras. *Studia Mathematica*, 226:155–187, 01 2015.

[6] Olga Raquel García de Pablo, José Garay y Catalán. *Una introducción a las ecuaciones diferenciales: transformada de Laplace*. Prensas Universitarias de Zaragoza, 1999.

[7] Raouf Doss. Two generalizations of titchmarsh's convolution theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 108(4):893–897, 1990.

[8] Laurent Guillopé. Analyse fonctionnelle. *Distributions et transformées. Ecole polytechnique de l'université de Nantes*, 37:38, 2008.

[9] Pedro J. Miana. *Curso de análisis funcional*. Prensas Universitarias de Zaragoza, 2006.

[10] Abel Rosales Tristancho. Semigrupos de operadores de composición. 2017.

[11] A. Casal Rudin, Walter y Piga. *Análisis real y complejo*. Alhambra, 1979.

[12] Enrique Sanchez-Palencia. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. 1980.

[13] Allan M. Sinclair. *Continuous semigroups in Banach algebras*, volume 63. Cambridge University Press, 1982.

[14] Murray R Spiegel. Laplace transforms. *Schaun, New York*, 1965.