

TEORÍA DE POLINOMIOS ORTOGONALES
Y
TEORÍA DE OPERADORES

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

MÁSTER UNIVERSITARIO EN INICIACIÓN A LA INVESTIGACIÓN EN
MATEMÁTICAS

Trabajo elaborado por Santiago Montaner García
bajo la supervisión del profesor Dr. Luis Velázquez Campoy.
Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza
Septiembre de 2012

Prólogo

La temática de este trabajo conecta la teoría de polinomios ortogonales sobre la recta real y la teoría espectral de operadores autoadjuntos. La estructura de este trabajo está formada por cuatro secciones. La primera sección, que es la más breve de todas, sirve para exponer —sin demostraciones— resultados bien conocidos de teoría de la medida y aproximación de funciones que, aunque clásicamente no forman parte del tema desarrollado en la memoria, son necesarios para fundamentar el trabajo posterior. Los resultados más importantes expuestos en esta primera sección son el teorema de representación de Riesz-Markov para los funcionales de los espacios de funciones continuas sobre compactos; el teorema de descomposición y representación de medidas de Radon-Nikodym-Lebesgue, y el teorema de aproximación uniforme de Weierstrass. Las referencias [6] y [7] han sido empleadas para la exposición hecha en esta sección.

La segunda sección trata sobre la teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert; en la que primero se dan algunas definiciones básicas sobre los espacios de Hilbert y los operadores acotados. En segundo lugar, se definen y se da una caracterización de los operadores compactos en términos de la convergencia débil de sucesiones en espacios de Banach particularizadas aquí para el caso de espacios de Hilbert. Esta caracterización resulta muy útil para el desarrollo posterior de la teoría, y en particular, juega un papel en la demostración del teorema de Weyl y en la caracterización de los operadores de Jacobi compactos que se da en la última sección. A continuación de la discusión sobre los operadores compactos, se demuestra la existencia de un cálculo funcional continuo y el teorema espectral en forma multiplicativa para operadores acotados autoadjuntos; es decir, se demuestra que todos los operadores acotados autoadjuntos son unitariamente equivalentes a un operador de la forma

$$T : \begin{array}{ccc} \bigoplus_{n=1}^N L^2_{\mu_n}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \bigoplus_{n=1}^N L^2_{\mu_n}(\mathbb{R}) \\ f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)) & \mapsto & Tf(x) = (xf_1(x), \dots, xf_N(x)), \end{array}$$

siendo la familia de medidas $\{\mu_n\}$ lo que distingue a cada operador. Este teorema es un análogo infinito dimensional al teorema de álgebra lineal que nos proporciona la forma diagonal de las matrices hermiticas. Posteriormente, en esta misma sección, se dan otras dos versiones del teorema espectral —el cálculo funcional boreliano y la representación integral— y se define el espectro discreto y el espectro esencial, que separan en dos conjuntos disjuntos el espectro de un operador; asimismo, se dan criterios para caracterizar el espectro discreto y esencial. Finalmente se demuestra el criterio de Weyl —que da un criterio en términos de sucesiones para saber si un número real forma parte del espectro de un operador acotado autoadjunto, y en caso afirmativo, para saber si forma parte del espectro esencial— y el teorema de Weyl de perturbaciones compactas, que afirma que el espectro esencial de dos operadores acotados autoadjuntos es idéntico si la diferencia de esos dos operadores es un operador compacto. En esta sección se ha seguido el planteamiento de [1] y ha sido útil la consulta de [2] en algunos aspectos.

En la tercera sección se hace una breve introducción a la teoría de los polinomios ortogonales sobre la recta real, dando la definición de lo que es una sucesión de polinomios ortogonales y demostrando que cualquier sucesión de polinomios ortogonales verifica una cierta relación de recurrencia a tres términos, que permite obtener cualquier polinomio de la sucesión como una cierta combinación de los dos polinomios anteriores. Esta relación es básica, y el estudio de los coeficientes que aparecen en dicha relación son fundamentales para el desarrollo de la teoría posterior. Un recíproco para la existencia de esta relación de recurrencia es el teorema de Favard, que asegura que para cualquier sucesión de polinomios $\{p_n\}$, siendo p_n un polinomio de grado n tal que satisfaga una cierta relación de recurrencia a tres términos, entonces existe una medida μ de forma que la sucesión $\{p_n\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales en el espacio $L^2_{\mu}(\mathbb{R})$. Este teorema es importante desde el punto de vista teórico porque establece una biyección entre medidas sobre la recta real y sucesiones de polinomios ortogonales. Además, se ponen como ejemplo los polinomios de Chebychev de primera especie, que por la forma que toma la relación de recurrencia asociada, son especialmente útiles para obtener resultados de cierta generalidad en la siguiente sección. Una referencia clásica para introducirse en la teoría de polinomios ortogonales, y que aquí ha sido empleada, es [3]. El punto de

vista abordado en esa obra hace hincapié en el estudio de la acumulación de los ceros de polinomios ortogonales, aunque llega a mostrar el planteamiento de teoría de operadores de Krein. Para ver un planteamiento distinto, más cercano a la teoría de operadores, puede consultarse [4], que llega incluso a enunciar el teorema de Weyl que se demuestra en la segunda sección de la presente memoria.

En la cuarta sección se une la teoría de los polinomios ortogonales con la teoría espectral de operadores; el puente que une estas dos teorías son los operadores de Jacobi, que son operadores sobre espacios l^2 que pueden representarse mediante matrices reales, infinitas, simétricas y tridiagonales tales que los elementos de las dos diagonales secundarias son positivos. Estas matrices tridiagonales se relacionan con la teoría de polinomios ortogonales gracias a la relación de recurrencia a 3 términos explicada en la tercera sección. Después de ver cual es la relación entre las dos teorías, se plantea el problema de —dada una sucesión de polinomios ortogonales— localizar los puntos de acumulación del soporte de la medida μ cuya existencia asegura el teorema de Favard. A este problema se dan algunas respuestas para casos particulares de interés empleando el teorema de Weyl de perturbaciones compactas y los polinomios de Chebychev de primera especie. Finalmente, se demuestran una caracterización de los operadores compactos en términos del espectro esencial y el teorema de Krein, que da condiciones necesarias y suficientes para saber cuándo el espectro esencial de un operador acotado y autoadjunto está formado por un número finito de puntos. Para introducirse en los operadores de Jacobi, es interesante la referencia [5]. El artículo original en el que aparece el llamado teorema de Krein es [12] y en [11] se da un repaso a la teoría de polinomios ortogonales en la recta real desde los trabajos de Stieltjes hasta las ideas de Krein.

Aunque queda fuera del alcance de este trabajo, el lector interesado puede consultar la obra [8] para profundizar en la teoría de operadores de Jacobi; el primer capítulo resulta interesante no solamente por ser introductorio sino por incluir una sección que explica cómo los operadores de Jacobi aparecen en algunos modelos de redes cristalinas.

En esta memoria se ha incidido en la relación que hay entre los operadores autoadjuntos y los polinomios ortogonales sobre la recta real; en el fondo, dicha relación yace sobre el hecho de que el espectro de los operadores autoadjuntos está contenido en la recta real. Recientemente ha sido encontrada una relación análoga entre los operadores unitarios —cuyo espectro está contenido en la circunferencia unidad de $\mathbb{C}$ — y los polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad (POCU). Para introducirse en el estudio de la teoría de POCU pueden consultarse —entre otros trabajos— el artículo [10] o el extenso trabajo de Barry Simon [9].

Índice

1. Preliminares	5
1.1. Teoría de la medida y espacios L^p .	5
1.2. Descomposición de medidas	5
1.3. Aproximación de funciones	7
2. Teoría espectral en espacios de Hilbert	7
2.1. Introducción.	7
2.2. Operadores acotados	8
2.3. Operadores compactos	10
2.4. Espectro de un operador	11
2.5. Teorema espectral	11
2.6. Proyecciones espectrales y teorema de Weyl	17
3. Teoría de polinomios ortogonales	24
3.1. Sucesiones de polinomios ortogonales	24
3.2. Relación de recurrencia	26
3.3. Teorema de Favard	28
4. Operadores de multiplicación y matrices de Jacobi	30
4.1. Introducción	30
4.2. Matrices de Jacobi	30
4.3. Soporte de la medida de ortogonalidad	35
4.4. Teorema de Krein	38

1. Preliminares

En esta sección vamos a recordar algunos resultados de teoría de la medida, espacios de funciones integrables y aproximación que se emplearán en la teoría que desarrollaremos en las siguientes secciones.

1.1. Teoría de la medida y espacios L^p .

Definición 1.1.1. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida. Si μ es una medida positiva se dice que es una **medida de Borel** si la σ -álgebra $\mathfrak{A}$ contiene a todos los borelianos de X . Además, se dice que μ es **regular** si verifica las siguientes propiedades:

i) Dado un boreliano B , se tiene que

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq B, K \text{ compacto}\} = \inf\{\mu(U) \mid B \subseteq U, U \text{ abierto}\};$$

ii) $\mu(K) < \infty$ para todo compacto K .

Si dado un conjunto cualquiera $E \subseteq B \in \mathfrak{A}$ tal que $\mu(B) = 0$, se tiene que $E \in \mathfrak{A}$; entonces se dice que la medida μ es **completa**.

Definición 1.1.2. Dada una medida μ , se define el **soporte de μ** como el complementario de la unión de todos los abiertos B tales que $\mu(B) = 0$.

Denotaremos por $C_c(X)$ al conjunto de funciones continuas definidas en X con soporte compacto. El conjunto $C_c(X)$ es un espacio vectorial, y tiene asociado un espacio dual. Un funcional definido sobre un espacio de funciones es **positivo** si $\Lambda f \geq 0$ cuando $f(x) \geq 0$ para todo x donde f esté definida. El siguiente teorema representa los funcionales positivos de $C_c(X)$ mediante medidas de Borel.

Teorema 1.1.3. (Teorema de Riesz-Markov) Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, dado un funcional positivo $\Lambda : C(X) \rightarrow \mathbb{C}$, existe una única medida de Borel regular μ sobre X tal que

$$\Lambda f = \int_X f d\mu \quad \forall f \in C(X).$$

Dada una medida μ , recordamos que los espacios $L^p_\mu(\mathbb{R})$ ($0 < p < \infty$) se definen como

$$L^p_\mu(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

En este trabajo nos van a interesar son los espacios $L^2_\mu(\mathbb{R})$.

1.2. Descomposición de medidas

Definición 1.2.1. Dada una medida μ , se dice que $x \in \mathbb{R}$ es un **punto de masa** si $\mu(\{x\}) > 0$; llamamos P_μ al conjunto de puntos de masa de μ . Definimos

$$\mu_{pp}(X) = \sum_{x \in P_\mu \cap X} \mu(x) = \mu(P_\mu \cap X).$$

La función de conjunto μ_{pp} es una medida positiva; es la parte de la medida μ que mide los puntos de masa. Si la medida es de Borel, regular y de soporte compacto, la suma ha de ser sobre un conjunto contable y será una combinación lineal de deltas de Dirac.

Definición 1.2.2. Definimos la **parte continua** de una medida μ como la medida

$$\mu_{cont} = \mu - \mu_{pp}.$$

La medida μ_{cont} no tiene puntos de masa.

Definición 1.2.3. Decimos que una medida es **de puntos de masa** si $\mu(A) = \mu(A \cap P_\mu)$ para todo boreliano A ; y decimos que μ es **continua** si no tiene puntos de masa.

Esto nos da una primera descomposición (trivial) de una medida,

$$\mu = \mu_{pp} + \mu_{cont}.$$

Definición 1.2.4. Se dice que una medida de Borel μ es **absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue** si existe una función $f \in L^1_{loc}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mu = \int_{\mathbb{R}} g f dx$$

para cualquier función $g \in L^1_\mu(\mathbb{R})$.

Definición 1.2.5. Una medida de Borel μ es **singular con respecto a la medida de Lebesgue** si y sólo si $\mu(S) = 0$ para algún conjunto S tal que la medida de Lebesgue de $\mathbb{R} \setminus S$ es 0. Dada una medida μ , se dice que μ está **concentrada en un boreliano E** si $\mu(A) = \mu(E \cap A)$ para todo boreliano A . Decimos que dos medidas λ y μ son **mutuamente singulares** si están concentradas sobre conjuntos disjuntos.

Proposición 1.2.6. Sean μ_1 y μ_2 dos medidas de Borel mutuamente singulares y $\mu = \mu_1 + \mu_2$; entonces existe un boreliano A tal que $\mu_1(\mathbb{R} \setminus A) = 0$ y $\mu_2(A) = 0$. Además, la aplicación

$$\begin{aligned} L: L^2_\mu(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2_{\mu_1}(\mathbb{R})^2 \oplus L^2_{\mu_2}(\mathbb{R})^2 \\ f &\mapsto (1 - \chi_A)f \oplus \chi_A f. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

es un isomorfismo isométrico.

Un teorema que tendrá consecuencias en la teoría espectral de operadores es el teorema de descomposición de Lebesgue.

Teorema 1.2.7. (Teorema de descomposición de Lebesgue) Sea μ una medida de Borel σ -finita. Entonces existe una única descomposición

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing},$$

siendo μ_{ac} una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y μ_{sing} una medida singular con respecto a la medida de Lebesgue.

Podemos juntar estas dos descomposiciones en una única descomposición,

$$\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sc}, \quad (1.2.2)$$

donde μ_{pp} es una medida de puntos de masa, μ_{ac} es absolutamente continua y μ_{sc} es una medida continua singular respecto a la medida de Lebesgue.

1.3. Aproximación de funciones

Uno de los motivos por los que los polinomios ortogonales son interesantes; es que son un análogo infinito dimensional de las bases ortonormales de espacios de dimensión finita con producto escalar; es decir, nos permiten expresar funciones de un cierto espacio vectorial como combinaciones lineales de polinomios ortogonales. La demostración de este hecho requiere los siguientes teoremas de aproximación de funciones.

Teorema 1.3.1. (*Teorema de aproximación de Weierstrass*) Sea $K \subset \mathbb{R}$ un compacto; entonces la clausura del conjunto de polinomios definidos en K es todo $C(K)$.

Teorema 1.3.2. Sea $p \in [1, \infty)$ y μ una medida de Borel regular sobre un espacio topológico X . Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ y para toda $f \in L^p_\mu(X)$, existe $g \in C(X)$ tal que

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

Proposición 1.3.3. Si μ es una medida de Borel regular definida en $\mathbb{R}$ y con soporte compacto, entonces los polinomios son densos en $L^2_\mu(\mathbb{R})$.

Demostración. Sea K el soporte de μ ; como el soporte de μ es un compacto, se tiene que $C_c(K) = C(K)$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$ y $f \in L^2_\mu(\mathbb{R}) = L^2_\mu(K)$, por el teorema anterior, existe $g \in C(K)$ tal que $\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Por el teorema de aproximación de Weierstrass, existe un polinomio p en K tal que $\|g - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\mu(K)}}$. Juntando todo, tenemos

$$\begin{aligned} \|f - p\|_2^2 &\leq \|f - g\|_2^2 + \|g - p\|_2^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} + \int_K |g(x) - p(x)|^2 d\mu(x) \\ &< \frac{\varepsilon^2}{2} + \mu(K) \|g - p\|_\infty^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} + \mu(K) \frac{\varepsilon^2}{2\mu(K)} = \varepsilon^2. \end{aligned}$$

■

2. Teoría espectral en espacios de Hilbert

2.1. Introducción.

Recordaremos brevemente algunas nociones básicas de los espacios de Hilbert.

Definición 2.1.1. Dado un espacio vectorial $\mathcal{H}$ dotado de un producto escalar

$$(\cdot, \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C},$$

se dice que $\mathcal{H}$ es **espacio de Hilbert** si $\mathcal{H}$ es espacio de Banach con la norma

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{(x, x)}. \end{aligned}$$

Denotaremos por $\mathcal{H}$ a los espacios de Hilbert que consideremos, y llamamos **operadores** a las aplicaciones lineales entre dos espacios de Hilbert; aunque aquí consideraremos solamente aplicaciones $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ de un espacio en sí mismo.

Definición 2.1.2. Se define el **espacio dual topológico de $\mathcal{H}$** , y se denota por $\mathcal{H}^*$, al conjunto de funcionales lineales y continuos definidos sobre $\mathcal{H}$.

Un resultado importante de los espacios de Hilbert es el que relaciona $\mathcal{H}$ con su dual topológico $\mathcal{H}^*$.

Teorema 2.1.3. (Teorema de representación de Riesz) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación lineal y continua. Entonces existe un único $y_0 \in \mathcal{H}$ tal que

$$\psi(x) = (x, y_0).$$

Definición 2.1.4. Dados dos vectores $x, y \in \mathcal{H}$, decimos que x e y son **ortogonales** si $(x, y) = 0$. Sea $\{e_i\}_{i \in J}$ un conjunto de vectores de $\mathcal{H}$, se dice que $\{e_i\}_{i \in J}$ es un **sistema ortonormal** si se verifica $(e_i, e_j) = \delta_{ij} \forall i, j \in J$.

En un espacio de dimensión finita, el método de Gram-Schmidt nos proporciona una base ortonormal a partir de una base cualquiera. En espacios de Hilbert de dimensión infinita, la noción de base ortonormal es distinta, pero guarda la esencia de lo que es una base ortonormal en dimensión finita.

Teorema 2.1.5. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{e_i\}_{i \in J}$ un sistema ortonormal. Son equivalentes:

- a) $\{e_i\}_{i \in J}$ es maximal; es decir, cualquier otro vector ortogonal a los de $\{e_i\}_{i \in J}$ es nulo.
- b) $\overline{\mathbb{C}[e_i : i \in J]} = \mathcal{H}$ (el conjunto de combinaciones lineales finitas del sistema ortonormal es denso en $\mathcal{H}$).
- c) Dado $x \in \mathcal{H}$, se tiene que

$$x = \sum_{i \in J} (x, e_i) e_i,$$

siendo la suma convergente para cualquier reordenación. A este desarrollo en serie de x se le llama **serie de Fourier** asociada a $\{e_i\}_{i \in J}$, y a los números (x, e_i) **coeficientes de Fourier**.

- d) Para todos $x, y \in \mathcal{H}$ tenemos que

$$(x, y) = \sum_{i \in J} (x, e_i) \overline{(y, e_i)} \in \mathbb{C}.$$

- e) Para todo $x \in \mathcal{H}$,

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in J} |(x, e_i)|^2.$$

En estos casos, diremos que $\{e_i\}_{i \in J}$ es una **base ortonormal** de $\mathcal{H}$ o que es un **sistema ortonormal completo**.

La existencia de una base ortonormal para un espacio de Hilbert se puede demostrar haciendo uso del lema de Zorn. Cuando un espacio $\mathcal{H}$ admite una base ortonormal numerable se dice que el espacio $\mathcal{H}$ es **separable**.

2.2. Operadores acotados

Proposición 2.2.1. Sea el operador $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones

- a) T es continuo;
- b) $\{\|Tx\|; \|x\| \leq 1\}$ está acotado y denotamos

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\|; \|x\| \leq 1\},$$

a $\|T\|$ le llamamos **norma del operador** T ;

c) existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H};$$

además $C \geq \|T\|$.

Esta proposición motiva que a los operadores continuos se les llame **operadores acotados**. El conjunto

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \{T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}; T \text{ operador acotado}\}$$

es un espacio de Banach si tomamos como norma la norma de los operadores.

Definición 2.2.2. Se dice que una aplicación $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ es un **forma sesquilineal** si verifica

$$B(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda B(x_1, y) + \mu B(x_2, y) \quad (2.2.1)$$

$$B(y, \lambda x_1 + \mu x_2) = \bar{\lambda} B(y, x_1) + \bar{\mu} B(y, x_2). \quad (2.2.2)$$

Se dice que la forma sesquilineal B es **acotada** si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|.$$

Un ejemplo de forma sesquilineal es el producto escalar que hay definido en todo espacio de Hilbert.

Proposición 2.2.3. (Identidad de polarización) Dada una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, si denotamos $Q(x) = B(x, x)$, entonces se verifica la igualdad

$$B(x, y) = \frac{1}{2} (Q(x+y) - Q(x-y) - iQ(x+iy) + iQ(x-iy)). \quad (2.2.3)$$

El teorema de representación de Riesz asigna a cada vector de $\mathcal{H}$ un funcional de $\mathcal{H}^*$; ahora vamos a enunciar un resultado que relaciona cada operador acotado con una forma sesquilineal acotada.

Teorema 2.2.4. Sea B una forma sesquilineal acotada, entonces existe un único operador acotado S tal que

$$B(x, y) = (x, Sy) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Este teorema nos permite definir el **operador adjunto** de un operador acotado T . Si definimos la forma sesquilineal

$$\begin{aligned} B(\cdot, \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto B(x, y) = (Tx, y), \end{aligned}$$

como $|B(x, y)| = |(Tx, y)| \leq \|Tx\|\|y\| \leq \|T\|\|x\|\|y\|$, se tiene que B es una forma sesquilineal acotada, luego por el teorema anterior existe un único operador acotado, que denotaremos por T^* y que verifica

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Al operador T^* le llamamos **operador adjunto de T** .

Definición 2.2.5. Sea T un operador acotado, entonces

- a) Si $T = T^*$, se dice que T es **autoadjunto**.
- b) Si $TT^* = I$, se dice que T es **unitario**.
- c) Si $TT^* = T^*T$, se dice que T es **normal**.
- d) Si $T^2 = T$ se dice que T es una **proyección**; si además T es autoadjunto, se dice que T es una **proyección ortogonal**.

2.3. Operadores compactos

La clase de operadores acotados en espacios de Hilbert que está más cercana al caso finito dimensional es la de los operadores compactos.

Definición 2.3.1. Dado un operador $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, decimos que es **compacto** si para cualquier sucesión $\{x_n\}$, se verifica que la sucesión $\{Tx_n\}$ tiene una subsucesión convergente.

Definición 2.3.2. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ **converge débilmente** a x y se denota por $x_n \xrightarrow{w} x$ si

$$l(x_n) \xrightarrow{n} l(x) \quad \forall l \in \mathcal{H}^*. \quad (2.3.1)$$

Notemos que debido al teorema de representación de Riesz, la condición (2.3.1) es equivalente a

$$(x_n, y) \xrightarrow{n} (x, y) \quad \forall y \in \mathcal{H}.$$

Teorema 2.3.3. Un operador T es compacto si y sólo si transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma.

Demostración. Supongamos que T es compacto. Sea $\{x_n\}$ una sucesión débilmente convergente, entonces por el principio de la acotación uniforme se tiene que $\{x_n\}$ es acotada. Definimos $y_n = Tx_n$ y $y = Tx$, entonces

$$l(y_n) - l(y) = l(Tx_n) - l(Tx) = (l \circ T)(x_n) - (l \circ T)(x) = (l \circ T)(x_n - x) \xrightarrow{n} 0,$$

ya que $l \circ T \in \mathcal{H}^*$. Supongamos que y_n no converge a y en norma, entonces existe $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ de $\{y_n\}$ tal que $\|y_{n_k} - y\| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\{x_{n_k}\}$ es acotada y T es compacto, $\{y_{n_k}\} = \{Tx_{n_k}\}$ debe tener una subsucesión convergente en norma a un $\tilde{y} \neq y$, pero si converge a $\tilde{y}$ en norma, converge débilmente a $\tilde{y}$, lo cual es imposible, ya que $\{y_{n_k}\}$ converge débilmente a y , que es distinto de $\tilde{y}$. Recíprocamente, dado un operador T que lleve sucesiones débilmente convergentes a sucesiones convergentes en norma y dada una sucesión acotada $\{x_n\}$, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ convergente, que será por tanto débilmente convergente, y por la propiedad que cumple T , tendremos que $\{Tx_{n_k}\}$ es convergente en norma; es decir, que dada una sucesión acotada $\{x_n\}$, hemos encontrado una subsucesión de $\{Tx_n\}$ convergente, por tanto T es compacto. ■

De este teorema se deduce fácilmente que no puede haber operadores compactos que no estén acotados. El recíproco es falso, y el ejemplo más sencillo lo da el operador identidad; ya que dado un sistema ortonormal $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tenemos que $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$; luego $\{e_n\}$ es una sucesión acotada cuya imagen por el operador identidad no contiene ninguna subsucesión de Cauchy.

Las siguientes proposiciones son sencillas de probar usando la caracterización que acabamos de dar para operadores compactos.

Proposición 2.3.4. Todo operador de rango finito es compacto.

Teorema 2.3.5. Si $\{T_n\}$ es una sucesión de operadores compactos que converge a un operador T en norma de operadores, entonces T es compacto.

Teorema 2.3.6. Si T y S son operadores compactos y A es un operador acotado, entonces $T + S$, AS y SA son operadores compactos. En particular, λT es un operador compacto para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$. Estas propiedades hacen que el conjunto

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}); T \text{ compacto}\}$$

tenga estructura de subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, además es un ideal bilátero respecto de la composición.

2.4. Espectro de un operador

En esta sección vamos a definir lo que es el espectro de un operador y vamos a enunciar resultados básicos de la teoría espectral de operadores acotados autoadjuntos.

Definición 2.4.1. Dado un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ está en el **conjunto resolvente** $\rho(T)$ si el operador $T - \lambda$ es biyectivo y $(T - \lambda)^{-1}$ es acotado. Se dice que λ está en el **espectro** de T , que denotamos por $\sigma(T)$, si $\lambda \notin \rho(T)$.

Definición 2.4.2. Si existe un $0 \in \mathcal{H}$, con $x \neq 0$, y un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Tx = \lambda x$, entonces se dice que λ es un **valor propio** de T con **vector propio** asociado x . En este caso, el operador $T - \lambda$ no es inyectivo, luego no tiene inverso y por tanto $\lambda \in \sigma(T)$.

- i) Al conjunto de valores propios de T se le llama **espectro puntual** de T , y se denota por $\sigma_p(T)$
- ii) Si $T - \lambda$ es inyectivo pero no sobreyectivo, pero el rango de $T - \lambda$ es denso en $\mathcal{H}$, entonces λ pertenece al **espectro continuo** de T , denotamos dicho conjunto por $\sigma_c(T)$.
- iii) Si λ no es un valor propio de T y el rango de $T - \lambda$ no es denso en $\mathcal{H}$, entonces se dice que λ está en el **espectro residual**.

Teorema 2.4.3. El conjunto resolvente $\rho(T)$ de un operador T es un conjunto abierto, y el espectro $\sigma(T)$ es no vacío.

Teorema 2.4.4. Dado un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ autoadjunto, se verifica que:

- i) $\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \|T\|$, luego $\sigma(T)$ es un compacto;
- ii) el espectro residual de T es vacío;
- iii) $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$;
- iv) los subespacios invariantes asociados a valores propios distintos son ortogonales.

Teorema 2.4.5. (Riesz-Schauder) Sea $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, entonces $\sigma(T)$ es un conjunto contable que sólo puede tener como punto de acumulación el 0. Además, los elementos no nulos del espectro son valores propios de multiplicidad finita; es decir, sus subespacios invariantes asociados son de dimensión finita.

Teorema 2.4.6. (Hilbert-Schmidt) Sea $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ autoadjunto, entonces existe una base ortonormal $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$Te_n = \lambda_n e_n$$

y $\lambda_n \xrightarrow{n} 0$.

2.5. Teorema espectral

En esta subsección vamos a exponer los conceptos que rodean al teorema espectral y enunciaremos éste. Lo primero que vamos a hacer es introducir el cálculo funcional continuo, definiéndolo previamente para los polinomios.

Lema 2.5.1. Si tenemos el polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, dado un operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ autoadjunto, definimos el operador

$$p(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k,$$

que es autoadjunto. Entonces se tiene que

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(A)$. Como λ es una raíz del polinomio $p(x) - p(\lambda)$, tenemos que $p(x) - p(\lambda) = (x - \lambda)q(x)$, luego $p(A) - p(\lambda) = (A - \lambda)q(A)$. Como el operador $A - \lambda$ no tiene inverso continuo, tampoco $p(A) - p(\lambda)$ tiene inverso continuo, luego $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$. Supongamos ahora que $\mu \in \sigma(p(A))$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces de $p(x) - \mu$, entonces $p(x) - \mu = a(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$. Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_n \notin \sigma(A)$, entonces

$$(p(A) - \mu)^{-1} = a^{-1}(A - \lambda_1)^{-1} \cdots (A - \lambda_n)^{-1},$$

lo cual es contradictorio con que $\mu \in \sigma(p(A))$, por tanto, algún λ_i ($1 \leq i \leq n$) está en $\sigma(A)$. Como $p(\lambda_i) - \mu = 0$, se tiene que $\mu = p(\lambda_i)$; es decir, que $\mu = p(\lambda)$ para algún $\lambda \in \sigma(A)$. ■

Lema 2.5.2. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto, entonces

$$\|p(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |p(\lambda)|.$$

Demostración.

$$\|p(A)\|^2 = \|p(A)^* p(A)\| = \|(\bar{p}p)(A)\|$$

$$[2.4.4-(i)] = \sup_{\lambda \in \sigma(\bar{p}p(A))} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\bar{p}p(\lambda)| = \left(\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |p(\lambda)| \right)^2$$

■

Teorema 2.5.3. (Cálculo funcional continuo) Sea T un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existe una única aplicación $\phi : C(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que:

a) ϕ es un $*$ -homomorfismo algebraico; es decir,

$$\begin{aligned} \phi \text{ es lineal,} & \quad \phi(fg) = \phi(f)\phi(g), \\ \phi(1) = I, & \quad \phi(\bar{f}) = \phi(f)^*. \end{aligned}$$

b) ϕ es continuo; es decir, $\|\phi(f)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C\|f\|_{\infty}$.

c) Si f es la función $f(x) = x$; entonces $\phi(f) = T$.

d) Si $T\psi = \lambda\psi$, entonces $\phi(f)\psi = f(\lambda)\psi$.

e) $\sigma(\phi(f)) = f(\sigma(T))$.

f) Un operador T se dice que es **positivo**, y se denota $T \geq 0$, si $(T\psi, \psi) \geq 0$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Si $f \geq 0$, entonces $\phi(f) \geq 0$.

g) $\|\phi(f)\| = \|f\|_{\infty}$.

Suele denotarse $\phi(f)$ por $f(T)$.

Demostración. Si P es un polinomio, definimos $\phi(P) = P(T)$, luego, por el lema anterior, se tiene que $\|\phi(P)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|P\|_{C(\sigma(T))}$. La clausura de los polinomios en $C(\sigma(T))$ es todo $C(\sigma(T))$, así $C(\sigma(T))$ es la compleción de los polinomios definidos en $\sigma(T)$ con la norma $\|\cdot\|_{\infty}$. Por el teorema I.2-1.7 de [1] podemos extender ϕ a una $\tilde{\phi} : C(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ lineal y que verifique $\|\tilde{\phi}(f)\| = \|f\|_{\infty}$ para toda $f \in C(\sigma(T))$. Las propiedades algebraicas se deducen empleando la linealidad de ϕ y usando argumentos típicos de aproximación mediante polinomios. La propiedad (d) es trivial para polinomios; para funciones continuas se prueba también aproximando f por un polinomio. Para

probar (f), notemos que si $f \geq 0$, entonces existe una función real $g \in C(\sigma(T))$ tal que $f = g^2$; por tanto, $\phi(f) = \phi(g)^2$. Como g es real, se tiene que $\phi(g)^* = \phi(\bar{g}) = \phi(g)$, luego $\phi(g)$ es autoadjunto; finalmente,

$$(\phi(f)x, x) = (\phi(g)^2x, x) = (\phi(g)x, \phi(g)x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H},$$

luego $\phi(f)$ es un operador positivo. La propiedad (e) se prueba empleando el criterio de Weyl que veremos al final de la sección. ■

Corolario 2.5.4. *De la propiedad (g) se deduce que si $\lambda \notin \sigma(T)$, entonces*

$$\|(T - \lambda)^{-1}\| = [\text{dist}(\lambda, \sigma(T))]^{-1}.$$

Con el operador acotado autoadjunto T y el cálculo funcional continuo; dado $\psi \in \mathcal{H}$, podemos definir un funcional positivo sobre $C(\sigma(T))$ como $f \mapsto (f(T)\psi, \psi)$. Por el teorema de representación de Riesz-Markov, existe una única medida μ_ψ sobre $C(\sigma(T))$ tal que $(f(T)\psi, \psi) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) d\mu_\psi$. A la medida μ_ψ se le llama **medida espectral asociada al vector ψ** .

Definición 2.5.5. *Un vector $\psi \in \mathcal{H}$ se dice que es un **vector cíclico** si el conjunto de las combinaciones lineales finitas de elementos de $\{A^n\phi\}_{n=0}^\infty$ es denso en $\mathcal{H}$.*

El siguiente lema es el teorema espectral para operadores con un vector cíclico.

Lema 2.5.6. *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ autoadjunto con un vector cíclico ψ . Entonces existe un único operador unitario $U : \mathcal{H} \rightarrow L^2_{\mu_\psi}(\sigma(T))$ tal que*

$$(UTU^{-1}f)(\lambda) = \lambda f(\lambda),$$

siendo la igualdad en el sentido de las funciones de L^2 .

Demostración. El operador U lo definimos mediante $U\phi(f)\psi = f$, donde $f \in C(\sigma(T))$. Veamos que U está bien definido en $\{\phi(f)\psi | f \in C(\sigma(T))\}$. Calculamos

$$\|\phi(f)\psi\|^2 = (\phi(f)^*\phi(f)\psi, \psi) = (\phi(\bar{f}f)\psi, \psi) = \int_{\sigma(T)} |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi,$$

por tanto, si $f = g$ c.t.p- μ_ψ , entonces $\phi(f)\psi = \phi(g)\psi$. Esto asegura que U está bien definido y que conserva la norma. Como ψ es un vector cíclico, $\{\phi(f)\psi | f \in C(\sigma(T))\} = \mathcal{H}$, ya que $T^n\psi = p(T)\psi$, siendo $p(x) = x^n$, y los polinomios están en $C(\sigma(T))$; luego por el teorema [1]-I.7, la aplicación U se extiende a una isometría $U : \mathcal{H} \rightarrow L^2_{\mu_\psi}(\sigma(T))$. Sabemos que $C(\sigma(T))$ es denso en $L^2_{\mu_\psi}(\sigma(T))$; así, dada $f \in L^2$, existe una sucesión $\{f_n\} \subset C(\sigma(T))$ tal que $f_n \xrightarrow{n} f$ en L^2 . Toda $f_n \in C(\sigma(T))$ tiene una antiimagen ϕ_n , y como U conserva la norma,

$$\|\phi_n - \phi_m\| = \|U\phi_n - U\phi_m\| = \|f_n - f_m\| \xrightarrow{n} 0,$$

luego existe una $\phi \in \mathcal{H}$ tal que $\phi_n \xrightarrow{n} \phi$ en $\mathcal{H}$; y por ser U continuo tenemos que

$$U\phi = U(\lim_n \phi_n) = \lim_n U\phi_n = \lim_n f_n = f,$$

luego $\text{Ran } U = L^2_{\mu_\psi}(\sigma(T))$.

Si $f \in C(\sigma(T))$,

$$(UAU^{-1}f)(\lambda) = [UA\phi(f)](\lambda) = [U\phi(xf)](\lambda) = \lambda f(\lambda),$$

y por continuidad, la igualdad se extiende a $L^2_{\mu_\psi}(\sigma(T))$. ■

Este teorema nos dice que todo operador acotado autoadjunto con un vector cíclico es unitariamente equivalente al operador de multiplicación

$$\begin{aligned} T : L^2_\mu(\sigma(T)) &\rightarrow L^2_\mu(\sigma(T)) \\ f(x) &\mapsto Tf(x) = xf(x); \end{aligned}$$

siendo la medida μ lo que caracteriza a cada operador.

El siguiente paso para extender el teorema espectral a operadores sin vectores cíclicos lo da el siguiente lema, que se prueba empleando el lema de Zorn.

Lema 2.5.7. *Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es autoadjunto y $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable, existe una descomposición de $\mathcal{H}$ en suma directa*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^N \mathcal{H}_n, \quad N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

tal que

- a) T deja invariante cada $\mathcal{H}_n$;
- b) para cada n , existe un $\phi_n \in \mathcal{H}$ tal que es un vector cíclico para el operador $T|_{\mathcal{H}_n}$.

Juntando los dos lemas anteriores, tenemos el teorema espectral —en forma multiplicativa— para operadores acotados autoadjuntos.

Teorema 2.5.8. *(Teorema espectral) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y autoadjunto siendo $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable. Existe una familia de medidas $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ ($N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) en $\sigma(T)$ y un operador unitario*

$$U : \mathcal{H} \rightarrow \bigoplus_{n=1}^N L^2_{\mu_n}(\mathbb{R})$$

tal que

$$(UTU^{-1}\psi)_n(\lambda) = \lambda\psi_n(\lambda),$$

siendo $\psi \in \bigoplus_{n=1}^N L^2_{\mu_n}(\mathbb{R})$, de forma que $\psi = \psi_1 + \dots + \psi_N$ es la descomposición en suma directa de ψ . Las medidas $\{\mu_n\}$ se llaman **medidas espectrales** del operador T , y cada μ_n es precisamente la medida espectral μ_{ψ_n} asociada a los vectores cíclicos de la descomposición en suma directa del lema anterior. Además, el espectro de T y de UTU^{-1} es el mismo.

Observación 2.5.9. Sabemos que si el operador T tiene un vector cíclico, entonces T es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación entre dos espacios $L^2_\mu(\sigma(T))$; en este caso, decimos que el operador de multiplicación es **simple**. En el caso más general en el que el operador T no tiene necesariamente vectores cíclicos, el operador de multiplicación unitariamente equivalente a T —dado por el teorema espectral— no es simple. Así, **cada operador autoadjunto con un vector cíclico es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación simple**.

Definición 2.5.10. *Dada una familia de medidas $\{\mu_n\}_{n=1}^N$, se define el **soporte de μ_n** , y se denota por $\text{sop}\{\mu_n\}$ al conjunto complementario del abierto B más grande tal que $\mu_n(B) = 0$ para todo n .*

Proposición 2.5.11. *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ autoadjunto y $\{\mu_n\}$ su familia de medidas espectrales, entonces*

$$\sigma(T) = \text{sop}\{\mu_n\}.$$

Demostración. El teorema espectral nos dice que T es unitariamente equivalente al operador

$$\begin{aligned} T : \quad \bigoplus_{n=1}^N L_{\mu_n}^2(\sigma(T)) &\rightarrow \bigoplus_{n=1}^N L_{\mu_n}^2(\sigma(T)) \\ f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)) &\mapsto Tf(x) = (xf_1(x), \dots, xf_N(x)), \end{aligned}$$

luego estudiar el espectro del operador es lo mismo que estudiar el espectro de la representación unitaria en forma multiplicativa. Además, el teorema espectral nos dice que $\text{sop}\{\mu_n\} \subseteq \sigma(T)$. Supongamos ahora que $\lambda \in \sigma(T)$. Si λ no estuviera en $\text{sop}\{\mu_n\}$ el operador

$$\begin{aligned} (T - \lambda)^{-1} : \quad \bigoplus_{n=1}^N L_{\mu_n}^2(\sigma(T)) &\rightarrow \bigoplus_{n=1}^N L_{\mu_n}^2(\sigma(T)) \\ f = (f_1, \dots, f_N) &\mapsto (T - \lambda)^{-1}f = ((x - \lambda)^{-1}f_1, \dots, (x - \lambda)^{-1}f_N). \end{aligned}$$

quedaría bien definido para toda $f \in \bigoplus_{n=1}^N L_{\mu_n}^2(\sigma(T))$, ya que las funciones de $\bigoplus_{n=1}^N L_{\mu_n}^2(\sigma(T))$ son funciones «n casi todo punto»; es decir, que lo que sucede en un conjunto de medida nula — en este caso, el conjunto $\{\lambda\}$, ya que $\lambda \notin \text{sop}\{\mu_n\}$ — no afecta al comportamiento de la función. Además, si $\lambda \notin \text{sop}\{\mu_n\}$, λ estaría en un abierto B tal que $\mu_n(B) = 0$ para todo $n \in \{1, \dots, N\}$, por tanto

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda)^{-1}f\|^2 &= \sum_{n=1}^N \|(T - \lambda)^{-1}f_n\|^2 = \sum_{n=1}^N \int_{\sigma(T) \setminus B} (x - \lambda)^{-2} |f_n(x)|^2 d\mu(x) \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \int_B (x - \lambda)^{-2} |f_n(x)|^2 d\mu(x) \\ &\leq \sum_{n=1}^N \sup_{x \in \sigma(T) \setminus B} \{(x - \lambda)^{-2}\} \int_{\sigma(T) \setminus B} |f_n(x)|^2 d\mu(x) \leq \sum_{n=1}^N C \|f_n\|^2 < \infty, \end{aligned}$$

y en consecuencia $(T - \lambda)^{-1}$ sería acotado, lo que contradice a que λ esté en el espectro. $\blacksquare$

A la vista de esta proposición, queda claro que estudiar el espectro de un operador es equivalente a estudiar el soporte de las medidas espectrales.

Según la ecuación (1.2.2), una medida μ se descompone como

$$\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sc}.$$

Estas tres medidas en las se descompone μ son mutuamente singulares; luego por la proposición 1.2.6, $L_{\mu}^2(\mathbb{R})$ se descompone como

$$L_{\mu}^2(\mathbb{R}) = L_{\mu_{pp}}^2(\mathbb{R}) \oplus L_{\mu_{ac}}^2(\mathbb{R}) \oplus L_{\mu_{sc}}^2(\mathbb{R}). \quad (2.5.1)$$

Si restringimos un operador autoadjunto T a cada uno de estos subespacios, obtenemos la siguiente clasificación del espectro:

Definición 2.5.12.

$$\begin{aligned} \sigma_{cont}(T) &= \sigma(T|_{ac} + T|_{sc}) \\ \sigma_{ac}(T) &= \sigma(T|_{ac}) \\ \sigma_{sc}(T) &= \sigma(T|_{sc}). \end{aligned}$$

Más adelante nos interesará una clasificación del espectro que tendrá en cuenta si un $\lambda \in \sigma(T)$ es punto de acumulación de $\sigma(T)$ o es un punto aislado.

Lema 2.5.13. *Sea $\{\mu_n\}$ la familia de medidas espectrales de algún operador acotado y autoadjunto. Entonces, un punto $\lambda \in \text{sop}\{\mu_n\}$ si y sólo si existe un n tal que $\mu_n(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$.*

Demostración. Si $\lambda \in \text{sop}\{\mu_n\}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ existiera un $\varepsilon > 0$ tal que $\mu_n(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) = 0$, entonces λ estaría en un abierto B tal que $\mu_n(B) = 0$ para todo n , luego λ no pertenecería al complementario de la unión de abiertos cuya medida por μ_n se anula para todo n ; y en consecuencia λ no estaría en $\text{sop}\{\mu_n\}$. Recíprocamente, si λ no estuviera en $\text{sop}\{\mu_n\}$, existiría un abierto B tal que $\lambda \in B$ y $\mu_n(B) = 0$ para todo n . Como $\lambda \in B$ y B es abierto, existiría $\varepsilon > 0$ tal que $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \subseteq B$, luego $\mu_n(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \leq \mu_n(B) = 0$ para todo n ; lo que es contradictorio con que exista un n tal que $\mu_n(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$. ■

Si un punto $\lambda \in \sigma(T)$ es aislado de $\sigma(T)$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$, por otra parte, como $\lambda \in \sigma(T)$, existe n tal que $\mu_n(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$, luego

$$0 < \mu_n(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) = \mu_n(\lambda - \varepsilon, \lambda) + \mu_n(\{\lambda\}) + \mu_n(\lambda, \lambda + \varepsilon) = 0 + \mu_n(\{\lambda\}) + 0;$$

ya que ni $(\lambda - \varepsilon, \lambda)$, ni $(\lambda, \lambda + \varepsilon)$ están contenidos en $\text{sop}\{\mu_n\} = \sigma(T)$; y por tanto, λ es punto de masa de alguna medida μ_n . Esto significa que todo punto aislado de $\sigma(T)$ es un punto de masa de alguna μ_n y entonces el soporte de las partes continuas de las medidas $\{\mu_n\}$ está formado por puntos de acumulación de $\sigma(T)$.

Proposición 2.5.14. *Dado un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ autoadjunto, los puntos de masa de las medidas espectrales de T coinciden con los valores propios de T . Además, si el operador T tiene un vector cíclico, todos los valores propios son simples.*

Demostración. Sea M el operador de multiplicación unitariamente equivalente a T cuya existencia está asegurada por el teorema espectral, por la equivalencia unitaria podemos trabajar con el operador M para probar lo que nos interesa. Sea λ un punto de masa de alguna medida espectral μ_k y sea

$$f = (f_1, \dots, f_N) \in \bigoplus_{n=1}^N L_{\mu_n}^2(\mathbb{R})$$

tal que $f_j = 0$ c.t.p.- μ_j de $\mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$ para todo $j \in \{1, \dots, N\}$ y tal que $f_k(\lambda) \neq 0$. En ese caso, se tiene que

- a) o bien $f_j(x) = 0$ c.t.p.- μ_j de $\mathbb{R}$, luego $xf_j = 0 = \lambda f_j$ en c.t.p.- μ_j de $\mathbb{R}$;
- b) o bien $f_j(x) = 0$ c.t.p.- μ_j de $\mathbb{R} \setminus \lambda$ y $f_j(\lambda) \neq 0$. En este caso, se tiene que $f_j(x) = f_j(\lambda)$ en c.t.p.- μ_j de $\mathbb{R}$, luego $xf_j(x) = \lambda f_j(\lambda) = \lambda f_j(x)$ en c.t.p.- μ_j de $\mathbb{R}$.

Para que f sea vector propio con valor propio λ , no basta que $Mf = \lambda f$ —lo cual ya hemos probado—, además debe cumplirse que $f \neq 0$ en $\bigoplus_{n=1}^N L_{\mu_n}^2(\mathbb{R})$, y para ello, alguna de las componentes f_j de f debe verificar el caso b); pero hemos elegido una f tal que la componente f_k lo verifica, luego ya está.

Supongamos ahora que λ es valor propio de M ; entonces existe $f = f_1 + \dots + f_N \in \bigoplus_{n=1}^N L_{\mu_n}^2(\mathbb{R})$ tal que $xf_k(x) = \lambda f_k(x)$ c.t.p.- $\{\mu_n\}$ y $f \neq 0$ en $L_{\mu}^2(\mathbb{R})$. Veamos que se tiene que cumplir que $f_k(x) = 0$ c.t.p.- μ_k para todo k y para algún k $f_k(\lambda) \neq 0$ con $\mu_k(\{\lambda\}) > 0$. Si existiera un boreliano $B \subseteq \mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$ tal que $f_k(x) \neq 0$ para todo $x \in B$ con $\mu_k(\{\lambda\}) > 0$ para algún k ; entonces, dado $\alpha \in B$, se tiene que $\alpha f(\alpha) = \lambda f(\alpha)$, luego $\lambda = \alpha$, lo cual es absurdo, pues $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$. De esto se deduce que $f(x) = 0$ c.t.p.- $\{\mu_n\}$ de $\mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$. Además, para algún k , se verifica $f_k(\lambda) \neq 0$ con $\mu_k(\{\lambda\}) > 0$, pues en caso contrario se tendría que $f = 0$ en $L_{\mu}^2(\mathbb{R})$.

Si además el operador T tiene un vector cíclico, sabemos que T es unitariamente equivalente al operador

$$\begin{aligned} A: \quad L_{\mu}^2(\sigma(T)) &\rightarrow L_{\mu}^2(\sigma(T)) \\ f(x) &\mapsto Tf(x) = xf(x) \end{aligned}$$

para una cierta medida μ . Si f un vector propio del operador de multiplicación A ; que es unitariamente equivalente al operador autoadjunto T original, entonces f es una función de $L^2_\mu(\mathbb{R})$ que se anula en casi todo punto de $\mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$ respecto de la medida μ , siendo λ el valor propio asociado a f ; además, los vectores propios asociados a λ están determinados únicamente por el valor $f(\lambda)$, luego todos los vectores propios asociados a λ son proporcionales; es decir, λ es un valor propio cuyo subespacio invariante asociado es de dimensión uno, luego λ es simple. ■

Resumimos la discusión anterior en la siguiente proposición.

Proposición 2.5.15. *Dado un operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ autoadjunto, se tiene que:*

- a) *Los puntos aislados de $\sigma(T)$ son puntos de masa de alguna medida espectral;*
- b) *los valores propios de T coinciden con los puntos de masa de las medidas espectrales;*
- c) *el soporte de las partes continuas de las medidas espectrales está formado por puntos de acumulación de $\sigma(T)$.*

2.6. Proyecciones espectrales y teorema de Weyl

El teorema espectral nos permite extender el cálculo funcional continuo del teorema 2.5.3 a funciones medibles Borel acotadas sobre $\mathbb{R}$, conjunto que denotaremos por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Teorema 2.6.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ autoadjunto. Existe una única aplicación $\hat{\phi} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que*

- a) *$\hat{\phi}$ es un $*$ -homomorfismo algebraico.*
- b) *$\|\hat{\phi}(f)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|f\|_\infty$.*
- c) *Si f es la función $f(x) = x$; entonces $\hat{\phi}(f) = A$.*
- d) *si $f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$ para todo x y $\{\|f_n\|_\infty\}$ está acotado, entonces*

$$\hat{\phi}(f_n)\psi \xrightarrow{n} \hat{\phi}(f)\psi \text{ en norma de } \mathcal{H} \text{ para todo } \psi \in \mathcal{H}.$$

- e) *Si $A\psi = \lambda\psi$, entonces $\hat{\phi}(f)\psi = f(\lambda)\psi$.*
- f) *Si $f \geq 0$, entonces $\hat{\phi}(f) \geq 0$.*

Demostración. Sea $U : \mathcal{H} \rightarrow \bigoplus_{n=1}^N L^2_{\mu_n}(\mathbb{R})$ el operador unitario que proporciona el teorema espectral. Si denotamos

$$M_g : \begin{matrix} \bigoplus_{n=1}^N L^2_{\mu_n}(\mathbb{R}) \\ (f_1, \dots, f_N) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \bigoplus_{n=1}^N L^2_{\mu_n}(\mathbb{R}) \\ (gf_1, \dots, gf_N) \end{matrix}; \quad (2.6.1)$$

entonces definimos la aplicación $\hat{\phi}$ como $\hat{\phi}(f) = U^{-1}M_fU$. Como la función $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ está acotada, el operador de multiplicación M_f está bien definido, y por tanto $\hat{\phi}$ también lo está. Claramente, $\hat{\phi}$ es lineal. Además $\hat{\phi}(f)\hat{\phi}(g) = (U^{-1}M_fU)(U^{-1}M_gU) = U^{-1}M_fM_gU = U^{-1}M_{f \cdot g}U = \hat{\phi}(f \cdot g)$ y $\hat{\phi}(1) = U^{-1}M_1U = U^{-1}U = I$. El operador U es unitario, luego $U^* = U^{-1}$. Por otra parte, es fácil ver que $(M_{\bar{f}})^* = M_f$. Con esto, se prueba que

$$(U^{-1}M_{\bar{f}}U\psi, \phi) = (\psi, U^{-1}(M_{\bar{f}})^*U\phi) = (\psi, U^{-1}M_fU\phi),$$

y en consecuencia $\hat{\phi}(\bar{f}) = \hat{\phi}(f)^*$. Si $f(x) = x$, es consecuencia directa del teorema espectral y de la definición de $\hat{\phi}$ que $\hat{\phi}(A) = A$. Para probar (d), hay que tener en cuenta que U es unitario, luego

$$\begin{aligned}\|\hat{\phi}(f_n)\psi - \hat{\phi}(f)\psi\|^2 &= \|U^{-1}M_{f_n}U\psi - U^{-1}M_fU\psi\|_{\mathcal{H}}^2 = \|U^{-1}(M_{f_n}U - M_fU)\psi\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \|(M_{f_n}U - M_fU)\psi\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^N \int_{\sigma(T)} |f_n(x) - f(x)|^2 |U\psi(x)|^2 d\mu_k(x).\end{aligned}$$

Al tomar límite, aplicando el teorema de la convergencia dominada —gracias a que $\{\|f_n\|_{\infty}\}$ está acotado—, el límite pasa dentro de la integral; por tanto,

$$\|\hat{\phi}(f_n)\psi - \hat{\phi}(f)\psi\|_{\mathcal{H}}^2 \xrightarrow{n} 0 \text{ para cualquier } \psi \in \mathcal{H}.$$

Las otras dos propiedades son triviales. ■

Las funciones más importantes que están el cálculo funcional boreliano pero no en el cálculo continuo son las funciones características

$$\chi_{\Omega}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

sobre conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, que permiten definir las proyecciones espectrales.

Definición 2.6.2. Sea Ω un boreliano de $\mathbb{R}$, definimos la **proyección espectral sobre Ω** de un operador T como

$$P_{\Omega} = \chi_{\Omega}(T).$$

Proposición 2.6.3. La familia $\{P_{\Omega}\}$ de proyecciones espectrales de un operador autoadjunto verifica las siguientes propiedades:

- a) Cada P_{Ω} es una proyección ortogonal.
- b) $P_{\emptyset} = 0$; $P_{(-a,a)} = I$ para algún $a > 0$.
- c) Si $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ con $\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$ para todo $j \neq k$, entonces

$$P_{\Omega}\psi = \lim_n \sum_{k=1}^N P_{\Omega_k}\psi \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

- d) $P_{\Omega_1}P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$.

Demostración. a) $\chi_{\Omega}(A)^* = \overline{\chi_{\Omega}(A)} = \chi_{\Omega}(A)$, luego $P_{\Omega} = \chi_{\Omega}$ es autoadjunto. Además, $\chi_{\Omega}(A)^2 = \chi_{\Omega}^2(A) = \chi_{\Omega}(A)$.

- b) $\chi_{\emptyset}(A) = 0(A) = 0$. La función $\chi_{\sigma(T)}$ es 1 en $\sigma(T)$, luego por el cálculo funcional continuo, $\chi_{\sigma(T)}(T) = I$. Como estamos considerando operadores acotados, existe un a tal que $\sigma(T) \subset (-a, a)$ y $\chi_{(-a,a)}(T) = \chi_{\sigma(T)}(T) = I$.

- c) Por ser los $\{\Omega_k\}$ disjuntos dos a dos, se tiene que $\sum_{k=1}^n \chi_{\Omega_k}(x) \xrightarrow{n} \chi_{\Omega}(x)$ para todo $x \in \sigma(T)$ y que $\|\sum_{k=1}^n \chi_{\Omega_k}\|_{\infty} \leq 1$; luego por el teorema 2.6.1-(d), se tiene el resultado.

- d) $P_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = \chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(A) = (\chi_{\Omega_1}\chi_{\Omega_2})(A) = \chi_{\Omega_1}(A)\chi_{\Omega_2}(A) = P_{\Omega_1}P_{\Omega_2}$. ■

Observación 2.6.4. Dados $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ y dos borelianos Ω_1 y Ω_2 disjuntos; teniendo en cuenta las propiedades (a), (b) y (d), tenemos que

$$(P_{\Omega_1}\psi, P_{\Omega_2}\phi) = (\psi, P_{\Omega_1}P_{\Omega_2}\phi) = (\psi, P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}\phi) = (\phi, P_{\emptyset}\psi) = (\phi, 0) = 0.$$

Por tanto, si Ω_1 y Ω_2 son dos borelianos disjuntos, entonces

$$\text{Ran } P_{\Omega_1} \perp \text{Ran } P_{\Omega_2}.$$

Proposición 2.6.5. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ autoadjunto y sea $\lambda \in \sigma(T)$ un valor propio de T . Si $\{P_\Omega\}$ son las proyecciones espectrales de T , entonces $\text{Ran } P_{\{\lambda\}}$ coincide con el subespacio vectorial $\{\phi \in \mathcal{H} | T\phi = \lambda\phi\}$.

Demostración. Sea $\phi \in \text{Ran } P_{\{\lambda\}}$ y U el operador unitario que nos da el teorema espectral en forma multiplicativa. Entonces $\phi = P_{\{\lambda\}}\psi$ con $\psi \in \mathcal{H}$. Así, usando la definición del cálculo funcional boreliano y la representación espectral en forma de operador de multiplicación que proporciona el teorema espectral, obtenemos

$$\begin{aligned} T\phi &= TP_{\{\lambda\}}\psi \\ &= T\chi_{\{\lambda\}}(T)\psi \\ &= T(U^{-1}M_{\chi_{\{\lambda\}}}U)\psi \\ &= (U^{-1}M_\lambda U)(U^{-1}M_{\chi_{\{\lambda\}}}U)\psi \\ &= U^{-1}(M_\lambda M_{\chi_{\{\lambda\}}})U\psi \\ &= U^{-1}M_{\lambda \cdot \chi_{\{\lambda\}}}U\psi \\ &\stackrel{1}{=} U^{-1}(\lambda M_{\chi_{\{\lambda\}}})U\psi \\ &= \lambda(U^{-1}M_{\chi_{\{\lambda\}}}U)\psi \\ &= \lambda P_{\{\lambda\}}\psi \\ &= \lambda\phi. \end{aligned}$$

El otro contenido se prueba teniendo en cuenta cómo son los vectores propios de un operador de multiplicación — lo cual se ha visto en la demostración de la proposición 2.5.14— y usando la definición del cálculo funcional boreliano. ■

Definición 2.6.6. Una familia de proyecciones $\{P_\Omega\}$ que verifica las condiciones (a)-(c) de la proposición anterior se dice que es una **medida con valores proyectores** (m.v.p.)

Si $\{P_\Omega\}$ es una m.v.p., entonces la medida μ_ϕ definida por $\mu_\phi(\Omega) = (P_\Omega\phi, \phi)$ es una medida de Borel para todo $\phi \in \mathcal{H}$, respecto de la que podemos integrar. Usando el teorema de representación de Riesz para espacios de Hilbert es inmediato probar el siguiente teorema.

Teorema 2.6.7. Si $\{P_\Omega\}$ es una m.v.p. y $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces existe un único operador A , denotado por $A = \int f(\lambda)dP_\lambda$, tal que

$$(A\phi, \phi) = \int f(\lambda)d(P_\lambda\phi, \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{H},$$

donde $d(P_\lambda\phi, \phi)$ denota que estamos integrando respecto de la medida $\mu_\phi(\Omega) = (P_\Omega\phi, \phi)$.

Además, dada una m.v.p. $\{P_\Omega\}$ se tiene que las proyecciones espectrales de $A = \int \lambda dP_\lambda$ son precisamente las $\{P_\Omega\}$; por tanto, tenemos el siguiente teorema, que no es más que una versión alternativa del teorema espectral.

¹ Esta igualdad es cierta por ser λ un valor propio y ser por tanto un punto de masa para alguna medida espectral.

Teorema 2.6.8. *Existe una correspondencia biunívoca entre operadores autoadjuntos A y medidas con valores proyectivos $\{P_\Omega\}$ dada por:*

$$A \mapsto \{P_\Omega\} = \{\chi_\Omega(A)\}$$

$$\{P_\Omega\} \mapsto A = \int \lambda dP_\lambda.$$

Demostración. Hemos visto que a partir de una m.v.p. cualquiera, obtenemos un operador $A = \int \lambda dP_\lambda$. Además, a través del cálculo funcional boreliano, todo operador A tiene asociada una m.v.p. $\{P_\Omega\} = \{\chi_\Omega(A)\}$. Ahora se trata de probar que, dado un operador A y la m.v.p. asociada $\{P_\Omega\} = \{\chi_\Omega(A)\}$, recuperamos el operador a través de $\{P_\Omega\}$. Por la forma en que hemos definido el cálculo funcional boreliano, tenemos

$$(P_\Omega \phi, \phi) = (U^{-1} M_{\chi_\Omega} U \phi, \phi) = (M_{\chi_\Omega} U \phi, U \phi) = \sum_{n=1}^N \int_{\sigma(A)} \chi_\Omega(\lambda) |U \phi(\lambda)|^2 d\mu_n(\lambda)$$

$$= \int_{\sigma(A) \cap \Omega} \sum_{n=1}^N |U \phi(\lambda)|^2 d\mu_n(\lambda),$$

luego si llamamos $\mu(\Omega) = (P_\Omega \phi, \phi)$, se tiene que $d\mu = d(P_\lambda \phi, \phi) = \sum_{n=1}^N |U \phi(\lambda)|^2 d\mu_n(\lambda)$.

Ahora, consideremos $f(A)$, donde $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces

$$(f(A) \phi, \phi) = (U^{-1} M_f U \phi, \phi) = (M_f U \phi, U \phi) = \sum_{n=1}^N \int_{\sigma(A)} f(x) |U \phi(\lambda)|^2 d\mu_n(\lambda)$$

$$= \int_{\sigma(A)} \sum_{n=1}^N f(\lambda) |U \phi(\lambda)|^2 d\mu_n(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d(P_\lambda \phi, \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{H},$$

luego si $\{P_\Omega\} = \{\chi_\Omega(A)\}$, obtenemos

$$f(A) = \int f(\lambda) dP_\lambda,$$

en particular

$$A = \int \lambda dP_\lambda. \quad \blacksquare$$

Las proyecciones espectrales ayudan a conocer el espectro de un operador autoadjunto T y nos permiten dar otra clasificación de $\sigma(T)$.

Proposición 2.6.9. $\lambda \in \sigma(T)$ si y sólo si $P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)} \neq 0$ para todo $\varepsilon > 0$.

Demostración. El enunciado es equivalente a afirmar que $\lambda \notin \sigma(T)$ si y sólo si existe un $\varepsilon > 0$ tal que $P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)} = 0$. Supongamos que $\lambda \notin \sigma(T)$; entonces, como $[\sigma(T)]^c$ es abierto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \cap \sigma(T) = \emptyset$. Así, por las propiedades de las proyecciones espectrales, se tiene que

$$0 = P_\emptyset = P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \cap \sigma(T)} = P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)} P_{\sigma(T)} = P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}.$$

Recíprocamente, si existe $\varepsilon > 0$ tal que $P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)} = 0$, entonces, tal y como en la demostración del anterior teorema, tenemos que

$$0 = (P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)} \phi, \phi) = \int_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)} \sum_{n=1}^N |U \phi(\lambda)|^2 d\mu_n(\lambda) \quad \forall \phi \in \mathcal{H},$$

de lo que se deduce que $\mu_n(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) = 0$ para todo n , y por tanto $\lambda \notin \text{sop}\{\mu_n\} = \sigma(T)$. $\blacksquare$

Definición 2.6.10. Un operador T es **infinito dimensional** si la clausura del rango del operador es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Definición 2.6.11. Se dice que λ pertenece al **espectro esencial** de T , denotado por $\sigma_{ess}(T)$, si $P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}$ es infinito dimensional para todo $\varepsilon > 0$. Si $\lambda \in \sigma(T)$ pero $P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}$ no es infinito dimensional para algún $\varepsilon > 0$, entonces decimos que λ está en el **espectro discreto** de T , que denotaremos por $\sigma_d(T)$.

De la definición se desprende que $\sigma(T) = \sigma_{ess}(T) \cup \sigma_d(T)$.

Proposición 2.6.12. $\sigma_{ess}(T)$ es cerrado.

Demostración. Sea $\lambda_n \xrightarrow{n} \lambda$ una sucesión de Cauchy con $\{\lambda_n\} \subseteq \sigma_{ess}(T)$. Como cualquier intervalo abierto $I_\varepsilon = (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ que contenga a λ , contiene algún $\lambda_n \in \sigma_{ess}(T)$, se tiene que

$$P_{I_\varepsilon} = P_{(\lambda_n - \delta, \lambda_n + \delta)} + P_{I_\varepsilon \setminus (\lambda_n - \delta, \lambda_n + \delta)}$$

también es infinito dimensional para todo $\varepsilon > 0$, luego $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$. ■

Teorema 2.6.13. $\lambda \in \sigma_d(T)$ si y sólo si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- a) λ es un punto aislado de $\sigma(T)$;
- b) λ es un valor propio de multiplicidad finita; es decir, el subespacio $\{\phi | A\phi = \lambda\phi\}$ es de dimensión finita.

Demostración. Supongamos que $\lambda \in \sigma_d(T)$, entonces $Ran P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}$ es de dimensión finita para algún $\varepsilon > 0$. Definamos $a_n = \dim(Ran P_{(\lambda-\varepsilon/n, \lambda+\varepsilon/n)})$. Cada intervalo $I_n = (\lambda - \varepsilon/n, \lambda + \varepsilon/n)$ lo descomponemos en tres intervalos

$$\begin{aligned} I_1^n &= (\lambda - \varepsilon/n, \lambda - \varepsilon/(n+1)], \\ I_2^n &= (\lambda - \varepsilon/(n+1), \lambda + \varepsilon/(n+1)), \\ I_3^n &= [\lambda + \varepsilon/(n+1), \lambda + \varepsilon/n), \end{aligned}$$

de forma que $I_n = I_1^n \cup I_2^n \cup I_3^n$. Como los intervalos son disjuntos, de la propiedad d) de las proyecciones espectrales, y teniendo en cuenta que las proyecciones espectrales son proyectores ortogonales, se deduce que $\{P_{I_j^n}\}_j$ proyectan un vector en tres subespacios ortogonales; es decir, que los rangos de las proyecciones son ortogonales; además, se tiene que

$$P_{I_n} = P_{I_1^n} + P_{I_2^n} + P_{I_3^n}.$$

De esto se deduce que

$$a_{n+1} = \dim(Ran P_{I_{n+1}}) \leq \dim(Ran P_{I_n}) = a_n,$$

luego $\{a_n\}$ es una sucesión monótona no creciente no enteros no negativos; por tanto existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_N = a_{N+1} = a_{N+2} = \dots$$

Veamos que λ es un punto aislado. Supongamos que existe un $\lambda' \in (\lambda - \varepsilon/N, \lambda + \varepsilon/N)$ tal que $\lambda \neq \lambda'$ y $\lambda' \in \sigma(T)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda > \lambda'$. Sea $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\lambda - \varepsilon/N < \lambda' + \varepsilon_1 < \lambda$, y $n > N$ suficientemente grande para que $\lambda' + \varepsilon_1 < \lambda - \varepsilon/n$. Así, $(\lambda - \varepsilon/N, \lambda + \varepsilon/N)$ y $(\lambda' - \varepsilon_1, \lambda' + \varepsilon_1)$ son intervalos disjuntos, luego $Ran(P_{(\lambda-\varepsilon/n, \lambda+\varepsilon/n)})$ y $Ran(P_{(\lambda'-\varepsilon_1, \lambda'+\varepsilon_1)})$ son ortogonales y $\dim(Ran(P_{(\lambda-\varepsilon/n, \lambda+\varepsilon/n)})) = a_n = a_N = \dim(Ran(P_{(\lambda-\varepsilon/N, \lambda+\varepsilon/N)}))$. De esto se deduce que $\dim(Ran(P_{(\lambda'-\varepsilon_1, \lambda'+\varepsilon_1)})) = 0$; es decir $P_{(\lambda'-\varepsilon_1, \lambda'+\varepsilon_1)} = 0$, por tanto, $\lambda' \notin \sigma(T)$ y en consecuencia λ es un punto aislado de $\sigma(T)$.

Como $\lambda \in \sigma(T) \cap (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$, se tiene que $\{\psi \mid T\psi = \lambda\psi\} = \text{Ran}(P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)})$, y como la dimensión de este último subespacio es finita, también lo es la de $\{\psi \mid T\psi = \lambda\psi\}$. ■

Como el espectro esencial es el complementario del espectro discreto respecto del espectro, es trivial el siguiente corolario.

Corolario 2.6.14. $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ si y sólo si se verifica alguna de las siguientes afirmaciones:

- a) λ es un punto límite de $\sigma_{pp}(T)$;
- b) $\lambda \in \sigma_{cont}(T) = \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_{sc}(T)$;
- c) λ es un valor propio de multiplicidad infinita.

Teorema 2.6.15. (Criterio de Weyl) Si T es un operador autoadjunto, entonces $\lambda \in \sigma(T)$ si y sólo si existe una sucesión $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\|\psi_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_n \|(T - \lambda)\psi_n\| = 0$. Además, $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ si y sólo si además, los vectores de $\{\psi_n\}$ pueden elegirse ortogonales.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $\lambda \in \sigma_d(T)$, es un valor propio; luego una sucesión formada por vectores propios normalizados satisface trivialmente la condición que se da. Si $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_d(T) = \sigma_{ess}(T)$, veamos que podemos tomar una sucesión ortonormal que verifique la propiedad. En este caso $P_{(\lambda-1/n, \lambda+1/n)}$ es infinito dimensional para todo n ; por tanto, para cada n podemos tomar un $\psi_n \in \text{Ran} P_{(\lambda-1/n, \lambda+1/n)}$ de forma que ψ_n sea una sucesión ortonormal. Si $\psi_n \in \text{Ran} P_{(\lambda-1/n, \lambda+1/n)}$, existe un $u_n \in \mathcal{H}$ tal que $\psi_n = P_{(\lambda-1/n, \lambda+1/n)} u_n$, y por ser $P_{(\lambda-1/n, \lambda+1/n)}$ una proyección, $\psi_n = P_{(\lambda-1/n, \lambda+1/n)} u_n = P_{(\lambda-1/n, \lambda+1/n)}^2 u_n = P_{(\lambda-1/n, \lambda+1/n)} \psi_n$. Por la propiedad de isometría del cálculo funcional continuo y la continuidad del cálculo funcional boreliano, se tiene que si $f(x) = x - \lambda$, entonces

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda)\psi_n\| &= \|f(A)\psi_n\| = \|f(A)P_{(\lambda-1/n, \lambda+1/n)}\psi_n\| = \|(f \cdot \chi_{(\lambda-1/n, \lambda+1/n)})(A)\psi_n\| \\ &\leq \|(f \cdot \chi_{(\lambda-1/n, \lambda+1/n)})(A)\| \|\psi_n\| = \sup_{x \in (\lambda-1/n, \lambda+1/n) \cap \sigma(T)} \{|x - \lambda|\} \leq \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

luego

$$\|(T - \lambda)\psi_n\| \xrightarrow{n} 0.$$

($\Leftarrow$) Si existiera una sucesión como la que dice el enunciado del teorema y λ no estuviera en $\sigma(T)$, $(T - \lambda)^{-1}$ estaría bien definido y sería continuo, luego $(T - \lambda)^{-1}(T - \lambda)\psi_n = \psi_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto, $\lim_n \psi_n = \lim_n (T - \lambda)^{-1}(T - \lambda)\psi_n \neq 0$ en norma, ya que $\|\psi_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, $(T - \lambda)^{-1}$ es continuo, luego si $\lim_n (T - \lambda)\psi_n = 0$ en norma, también $\lim_n (T - \lambda)^{-1}(T - \lambda)\psi_n = 0$ en norma, lo cual es contradictorio.

Supongamos ahora que, además, la sucesión es ortonormal y que $\lambda \in \sigma_d(T)$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que el rango de $P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}$ es finito dimensional; por tanto $P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}$ es compacto. Como $\{\psi_n\}$ es una sucesión ortogonal; converge débilmente a 0, luego por ser $P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}$ compacto, se tiene

$$\lim_n \|P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}\psi_n\| = 0.$$

Teniendo en cuenta que $T - \lambda$ es continuo y que $P_{\mathbb{R}} = I$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda)P_{\mathbb{R} \setminus (\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}\psi_n\| &= \|(T - \lambda)P_{\mathbb{R} \setminus (\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}\psi_n + (T - \lambda)P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}\psi_n \\ &\quad - (T - \lambda)P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}\psi_n\| \\ &\leq \|(T - \lambda)P_{\mathbb{R}}\psi_n\| + \|(T - \lambda)P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}\psi_n\| \\ &= \|(T - \lambda)\psi_n\| + \|(T - \lambda)P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}\psi_n\| \xrightarrow{n} 0. \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

El espectro de $T|_{\text{Ran}P_{\mathbb{R} \setminus (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)}}$ está contenido en $\Omega = \mathbb{R} \setminus (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$, luego el operador $(T - \lambda)|_{\text{Ran}P_\Omega}$ es invertible con inverso continuo, además $((T - \lambda)|_{\text{Ran}P_\Omega})^{-1} = |(T - \lambda)^{-1}|_{\text{Ran}P_\Omega}$. Usando las propiedades del cálculo funcional boreliano y de las proyecciones espectrales se tiene que

$$\begin{aligned} \|((T - \lambda)|_{\text{Ran}P_\Omega})^{-1}\| &= \|(T - \lambda)^{-1}|_{\text{Ran}P_\Omega}\| = \|(T - \lambda)^{-1}P_\Omega\| \\ &= \|[(x - \lambda)^{-1} \cdot \chi_\Omega](A)\| \\ &\leq \sup_{x \in \sigma(T) \cap \Omega} \{|x - \lambda|^{-1}\} = \frac{1}{\varepsilon}; \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \|P_\Omega \psi_n\| &= \|((T - \lambda)|_{\text{Ran}P_\Omega})^{-1}((T - \lambda)|_{\text{Ran}P_\Omega})P_\Omega \psi_n\| \\ &\leq \|((T - \lambda)|_{\text{Ran}P_\Omega})^{-1}\| \|(T - \lambda)P_\Omega \psi_n\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|(T - \lambda)P_\Omega \psi_n\|, \end{aligned}$$

y por (2.6.2), tenemos

$$\lim_n P_\Omega \psi_n = 0.$$

Juntando esto con que

$$\lim_n P_{(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)} \psi_n = 0,$$

deducimos que

$$\lim_n \psi_n = \lim_n P_{(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)} \psi_n + \lim_n P_{\mathbb{R} \setminus (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)} \psi_n = 0,$$

pero teníamos que $\|\psi_n\| = 1$, luego hay una contradicción; y por tanto $\lambda \in \sigma_{ess} = \sigma(T) \setminus \sigma_d(T)$. ■

Como corolario de este criterio tenemos una de las afirmaciones del cálculo funcional continuo que quedaba por probar.

Corolario 2.6.16. *Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es autoadjunto y $f \in C(\sigma(T))$, entonces*

$$\sigma(f(T)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Demostración. Si $\lambda \notin \text{Ran}f$, la función $g = (f - \lambda)^{-1}$ es continua donde lo sea f . Por las propiedades algebraicas del cálculo funcional continuo, se prueba que $g(T) = (f(T) - \lambda)^{-1}$, que además es un operador acotado. Esto implica que $\lambda \notin \sigma(f(T))$, luego hemos probado que $\sigma(\phi(f)) \subseteq \text{Ran}f$. Veamos el otro contenido; sea $\lambda \in \text{Ran}f$ y tomemos $\varepsilon > 0$, existe algún un polinomio p tal que $\|f - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$, y para algún valor μ del rango de p , se verifica que $|\mu - \lambda| < \frac{\varepsilon}{3}$. Como el resultado que queremos probar lo hemos probado ya para polinomios, tenemos que $\mu \in \sigma(p(T))$, luego existe un $\psi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\psi\| = 1$ y que verifica $\|p(T) - \mu\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \|(f(T) - \lambda)\psi\| &\leq \|(f(T) - p(T) + p(T) - \mu + \mu - \lambda)\psi\| \\ &\leq \|(f(T) - p(T))\psi\| + \|(p(T) - \mu)\psi\| + \|(\mu - \lambda)\psi\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.6.17. *(Teorema de Weyl de perturbaciones compactas) Sean T y S dos operadores autoadjuntos, entonces, si $T - S$ es un operador compacto, se tiene que*

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(S).$$

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$, entonces, por el criterio de Weyl, existe una sucesión ortonormal $\{\psi_n\}$ tal que $\|(T - \lambda)\psi_n\| \xrightarrow{n} 0$. Ahora, consideremos $\|(S - \lambda)\psi_n\|$, sumando y restando T , tenemos

$$\|(S - \lambda)\psi_n\| = \|(S - \lambda + T - T)\psi_n\| \leq \|(T - \lambda)\psi_n\| + \|(T - S)\psi_n\|.$$

Por la elección de $\{\psi_n\}$, se verifica $\|(T - \lambda)\psi_n\| \xrightarrow{n} 0$. Por otra parte, $T - S$ es un operador compacto, luego transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma, y como $\{\psi_n\}$ es una sucesión ortonormal, y por tanto débilmente convergente a 0; se tiene que $\|(T - S)\psi_n\| \xrightarrow{n} 0$. Hemos encontrado por tanto una sucesión $\{\psi_n\}$ ortonormal tal que $\|(S - \lambda)\psi_n\| \xrightarrow{n} 0$, luego $\lambda \in \sigma_{ess}(S)$ y por tanto $\sigma_{ess}(T) \subseteq \sigma_{ess}(S)$, análogamente se obtiene el otro contenido y se prueba la igualdad. ■

3. Teoría de polinomios ortogonales

3.1. Sucesiones de polinomios ortogonales

En esta sección vamos a introducir los elementos y resultados básicos de la teoría de polinomios ortogonales sobre la recta real. Los teoremas más importantes de esta sección son el que establece la relación de recurrencia a tres términos y el teorema de Favard, que es un recíproco del teorema que establece la relación de recurrencia. Esta relación de recurrencia es una relación de recurrencia a tres términos, siendo éste un hecho clave que une la teoría de polinomios ortogonales con la teoría de operadores, a través las llamadas matrices de Jacobi, que son matrices infinitas, tridiagonales y simétricas. La importancia de estas matrices radica en que son las matrices coordenadas de los operadores de multiplicación simples

$$\begin{aligned} A : L_\mu^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L_\mu^2(\mathbb{R}) \\ f(x) &\mapsto xf(x) \end{aligned}$$

respecto de una base ortonormal que sea una SPON, cuando μ es una medida de soporte compacto; de esta forma, permiten establecer un vínculo entre la teoría de polinomios ortogonales y la teoría de operadores. Estas matrices serán estudiadas en la tercera sección.

De aquí en adelante, trabajaremos en los espacios de Hilbert $L_\mu^2(\mathbb{R})$, siendo μ una medida de Borel regular de soporte compacto. Por ser regular y de soporte compacto, los momentos

$$m_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x)$$

serán finitos para todo $n \in \mathbb{N}$.

En el espacio de $L_\mu^2(\mathbb{R})$ tenemos el producto escalar

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} d\mu(x),$$

que define la norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Con ésto ya podemos definir el concepto de sucesión de polinomios ortogonales.

Definición 3.1.1. Se dice que $\{p_n\}_{n=0}^\infty \subseteq L_\mu^2(\mathbb{R})$ es una **sucesión de polinomios ortogonales (SPO)** (sobre la recta real) si:

- i) $p_n(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales;
 ii) se tiene la condición de ortogonalidad

$$(p_n, p_m) = K_n \delta_{mn},$$

siendo $K_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y δ_{nm} la delta de Kronecker

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

En el caso en que $K_n = \|p_n\|^2 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, decimos que $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ es una **sucesión de polinomios ortonormales (SPON)**.

Observación 3.1.2. Una SPON $\{p_n\}$ es SPON en un determinado espacio $L_\mu^2(\mathbb{R})$, si cambiamos la medida μ , las condiciones de ortonormalidad de la definición de SPON pueden no verificarse.

Observación 3.1.3. ¿Cómo se obtiene una SPON? Podemos aplicar algoritmo el de Gram-Schmidt para ortonormalizar la sucesión $\{x^n\}_{n=0}^\infty$, de modo que obtenemos una SPON, puesto que al aplicar Gram-Schmidt a la sucesión $\{x^n\}_{n=0}^\infty$, se conservan los grados de los polinomios; es decir, que obtenemos una sucesión $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ de polinomios ortogonales tales que cada $p_n(x)$ tiene grado n .

De la definición de SPON, queda claro que todo SPON es un sistema ortonormal del espacio $L_\mu^2(\mathbb{R})$, y como los polinomios son densos en $L_\mu^2(\mathbb{R})$, se deduce que una SPON es un **sistema ortonormal completo**.

La siguiente proposición da un criterio para saber si una sucesión de polinomios arbitraria es una SPO.

Proposición 3.1.4. Sea $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) $\{P_n\}$ es una SPO;
 b) $(\pi, P_n) = 0$ si π es un polinomio de grado m con $m < n$ y $(\pi, P_n) \neq 0$ si el grado de π es n ;
 c) $(x^m, P_n) = 0$ si $m < n$ y $(x^n, P_n) \neq 0$.

Demostración. Supongamos que $\{P_n\}$ es una SPO, entonces, dado un polinomio π de grado m , existen coeficientes c_k tales que

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^m c_k P_k(x), \quad (c_m \neq 0).$$

De esto se deduce que

$$(\pi, P_n) = \sum_{k=0}^m c_k (P_k, P_n) = \begin{cases} 0 & m < n \\ c_m (P_m, P_m) & m = n \end{cases}$$

y queda probado $a) \Rightarrow b)$. Es obvio que $b) \Rightarrow c) \Rightarrow a)$. ■

3.2. Relación de recurrencia

Teorema 3.2.1. Sea $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ una SPON, entonces existen sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty \subseteq \mathbb{R}$, con $a_n > 0$, tales que

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_{n-1} p_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (3.2.1)$$

$$xp_0(x) = a_0 p_1(x) + b_0 p_0(x). \quad (3.2.2)$$

Más aún, si μ es una medida de soporte de compacto, entonces las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son acotadas.

Demostración. El grado del polinomio $xp_n(x)$ es $n+1$, luego podemos escribirlo como combinación lineal de $\{p_0(x), \dots, p_{n+1}(x)\}$,

$$xp_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k} p_k(x). \quad (3.2.3)$$

Como $\{p_k\}_{k=0}^{n+1}$ es una base ortonormal del espacio de polinomios de grado menor o igual que $n+1$, los coeficientes $c_{n,k}$ son

$$c_{n,k} = (p_k, xp_n) = \int_{\mathbb{R}} p_k(x) xp_n(x) d\mu(x) = (xp_k, p_n).$$

Si $xp_k(x)$ es de grado $k+1$, $c_{n,k} = (xp_k, p_n) = 0$ si $k+1 < n$ por la proposición anterior y, por tanto; la expresión (3.2.3) queda reducida a

$$xp_n(x) = \sum_{k=n-1}^{n+1} c_{n,k} p_k(x) = c_{n,n-1} p_{n-1}(x) + c_{n,n} p_n(x) + c_{n,n+1} p_{n+1}(x).$$

Con esto tenemos que $b_n = c_{n,n} = \int_{\mathbb{R}} x(p_n(x))^2 d\mu(x)$. Por otra parte, $c_{n,n-1} = (xp_n, p_{n-1})$ y $c_{n,n+1} = (xp_n, p_{n+1})$, luego si definimos

$$\begin{aligned} a_n &= c_{n,n+1} \\ a_{n-1} &= c_{n,n-1} = c_{n-1,n}, \end{aligned}$$

obtenemos la fórmula

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_{n-1} p_{n-1}(x),$$

que es válida si $n \geq 1$. En el caso $n = 0$, la ecuación (3.2.3) es

$$xp_0(x) = c_{0,1} p_1(x) + c_{0,0} p_0(x),$$

y con los a_n y b_n que hemos definido, nos queda

$$xp_0(x) = a_0 p_1(x) + b_0 p_0(x).$$

Si μ es una medida de soporte compacto, entonces

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \int_{\mathbb{R}} xp_n p_{n+1} d\mu(x) \right| \leq \sup_{x \in S_\mu} |x| \int_{\mathbb{R}} |p_n(x)| |p_{n+1}(x)| d\mu(x) \\ &\leq \sup_{x \in \text{sop} \mu} |x| \|p_n\| \|p_{n+1}\|. \end{aligned}$$

Hemos empleado que $\|p_n\| = 1$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz. De forma similar probamos la acotación de $\{b_n\}$:

$$|b_n| \leq \sup_{x \in \text{sop} \mu} |x| \|p_n\|^2 = \sup_{x \in \text{sop} \mu} |x|.$$

■

Observación 3.2.2. Una vez fijado el polinomio $p_0(x)$, las relaciones (3.2.1) y (3.2.2) determinan la sucesión de polinomios. Este teorema admite un recíproco en el sentido de que dada una sucesión de polinomios que satisfagan una relación de recurrencia como (3.2.1) y (3.2.2), entonces la sucesión de polinomios que se obtiene es ortonormal.

Ejemplo 3.2.3. Polinomios de Chebychev. Vamos a introducir una SPON clásica que nos permitirá deducir ciertos resultados teóricos más adelante. Es bien conocido que la sucesión de funciones

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \theta, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2\theta, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 3\theta, \dots \right\},$$

verifica la propiedad de ortonormalidad

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \delta_{nm}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots; \quad mn \neq 0. \quad (3.2.4)$$

Haciendo el cambio de variable $x = \cos \theta$, (3.2.4) se transforma en

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \delta_{nm}, \quad (3.2.5)$$

donde $T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \cos^{-1} x)$, con $-1 \leq x \leq 1$. Las funciones $\{T_n(x)\}$ son los llamados **polinomios de Chebychev de primera especie**, y forman una SPON, luego tendrán asociada una relación de recurrencia. Ya hemos visto que $\{T_n(x)\}$ forman un sistema ortonormal, falta ver que cada $T_n(x)$ es realmente un polinomio de grado n ; para ver ésto, vamos a deducir una relación de recurrencia como (3.2.1), y entonces bastará probar que las dos primeras funciones, T_0 y T_1 , son polinomios de grado 0 y 1 respectivamente, pues el resto de funciones se deducen de la relación de recurrencia, y por la forma que tiene, cada T_n será un polinomio de grado n .

Si ya supiéramos que $\{T_n(x)\}$ es una SPON —y de hecho, puede hallarse una fórmula explícita para los $T_n(x)$ sin usar esto que vamos a hacer—, la relación de recurrencia podríamos obtenerla siguiendo los pasos del teorema 3.2.1; sin embargo, podemos aprovechar las propiedades de las funciones trigonométricas para deducirla de una forma más directa. Recordamos la siguiente identidad trigonométrica,

$$2 \cos m\theta \cos n\theta = \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta. \quad (3.2.6)$$

Si en (3.2.6) tomamos $m = 1$, tenemos

$$2 \cos \theta \cos n\theta = \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta,$$

y haciendo el cambio $x = \cos \theta$ como antes, obtenemos

$$2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x),$$

que puesto como en (3.2.1), queda

$$xT_n(x) = \frac{1}{2}T_{n+1}(x) + \frac{1}{2}T_{n-1}(x).$$

Además, es evidente que $T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ y $T_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x$, luego T_0 y T_1 son polinomios de grado 0 y 1 respectivamente; y $xT_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}T_1(x)$. En resumen, las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de la relación de recurrencia son

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_n = \frac{1}{2} \quad (n \geq 1), \quad (3.2.7)$$

$$b_n = 0 \quad (n \geq 0). \quad (3.2.8)$$

3.3. Teorema de Favard

Teorema 3.3.1. (*J. Favard, J. Shohat, I. Natanson, 1935*) Sean $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ sucesiones arbitrarias de números reales tales que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces; dada la relación de recurrencia

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_{n-1} p_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (3.3.1)$$

$$xp_0(x) = a_0 p_1(x) + b_0 p_0(x), \quad (3.3.2)$$

existe un único funcional lineal Λ positivo sobre los polinomios tal que si $p_0(x) = 1$, entonces

$$\Lambda(p_n^2) = 1, \quad \Lambda(p_n p_m) = 0, \quad \text{si } m \neq n, \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

Demostración. Vamos a definir el funcional Λ imponiendo que sea lineal, que $\Lambda(p_0) = 1$ y que $\Lambda(p_n) = 0$ para todo $n \geq 1$;

$$\Lambda(1) = 1, \quad \Lambda(p_n) = 0, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

De la relación (3.3.2) obtenemos

$$p_1(x) = a_0^{-1}(xp_0(x) - b_0),$$

imponiendo la condición $\Lambda(p_1) = 0$, se obtiene que

$$0 = \Lambda(p_1) = \Lambda(a_0^{-1}(xp_0(x) - b_0)) = a_0^{-1}\Lambda(xp_0(x) - b_0) = a_0^{-1}(\mu_1 - b_0),$$

como $a_0 > 0$, tenemos $\mu_1 = b_0$. De la relación (3.3.1), despejando $p_{n+1}(x)$,

$$p_{n+1}(x) = \frac{1}{a_n} (xp_n(x) - b_n p_n(x) - a_{n-1} p_{n-1}(x)) \quad (n \geq 1);$$

el siguiente momento, μ_2 lo hallamos imponiendo $0 = \Lambda(p_2)$, que calculando $p_2(x)$ mediante la relación de recurrencia es equivalente a

$$0 = a_1^{-1}((\mu_2 - \mu_1 b_0 - b_1 \mu_1 + b_0 b_1) a_0^{-1} - a_0),$$

ecuación de la que podemos despejar μ_2 . De esta forma se obtienen todos los coeficientes μ_n , ya que de cada condición $\Lambda(p_n) = 0$ podemos despejar un μ_n por ser $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De la relación de recurrencia obtenemos que

$$\Lambda(xp_n) = 0 \quad \text{si } n \geq 2;$$

usando ésto y multiplicando la relación de recurrencia por x , tenemos que

$$\Lambda(x^2 p_n) = 0 \quad \text{si } n \geq 3;$$

de lo que se deduce fácilmente que

$$\Lambda(x^k p_n) = 0, \quad 0 \leq k < n. \quad (3.3.3)$$

Además, usando (3.3.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \Lambda(x^n p_n) &= \Lambda(a_n x^{n-1} p_{n+1} + b_n x^{n-1} p_n + a_{n-1} x^{n-1} p_{n-1}) = a_{n-1} \Lambda(x^{n-1} p_{n-1}) \\ &= a_{n-1} a_{n-2} \Lambda(x^{n-2} p_{n-2}) = a_{n-1} a_{n-2} \Lambda(x^{n-2} p_{n-2}) \\ &= a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_0 > 0 \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Ahora, por la proposición 3.1.4, las condiciones (3.3.3) y (3.3.4) son equivalentes a que $\{p_n\}$ sea una SPO. Veamos que además es una SPON; si tomamos un polinomio p_n de la sucesión, tenemos que $p_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^k$, luego

$$\Lambda(p_n^2) = \Lambda(p_n \sum_{k=1}^n c_k x^k) = \sum_{k=1}^n c_k \Lambda(x^k p_n),$$

como $\{p_n\}$ es una SPO, se tiene que $\Lambda(x^k p_n) = 0$ si $k < n$, luego

$$\Lambda(p_n^2) = c_n \Lambda(x^n p_n),$$

por (3.3.4), se tiene que

$$\Lambda(p_n^2) = c_n a_{n-1} \cdots a_0.$$

De la relación de recurrencia deducimos que $p_1(x) = a_0^{-1}(x - b_0)$, luego el coeficiente director de p_1 es $c_1 = a_0^{-1}$. En general, la relación de recurrencia nos permite expresar un polinomio que verifique la relación de recurrencia a 3 términos en función de los dos polinomios anteriores de la sucesión:

$$p_{n+1}(x) = a_n^{-1} ((x - b_n)p_n(x) + a_{n-1}p_{n-1}(x)),$$

fórmula de la que se deduce —por inducción— de manera sencilla que el coeficiente director c_n de un polinomio p_n cualquiera de la sucesión $\{p_n\}$ verifica

$$c_n = (a_{n-1} \cdots a_0)^{-1} \text{ para todo } n \geq 1;$$

con lo que finalmente obtenemos que

$$\Lambda(p_n^2) = 1 \text{ para todo } n \geq 0.$$

Por los teoremas 3.3 y 3.4 de [3]; por ser los a_n positivos para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que Λ es definido positivo. ■

Está claro que si el funcional fuera de la forma

$$\Lambda(x^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x),$$

el teorema de Favard establecería una relación biunívoca entre pares de sucesiones reales $(\{a_n\}, \{b_n\})$ ($a_n > 0$) y medidas positivas. Este funcional está definido sólo para los polinomios, pero si aplicamos un colorario (Corolario III.3 [1]) del teorema de Hahn-Banach, podemos extender el funcional a las funciones continuas. Aquí nos va a interesar extender el funcional a las funciones continuas sobre un compacto $K \subseteq \mathbb{R}$; luego, por el teorema de Riesz-Markov (ver teorema 1.1.3), existe una medida de Borel regular tal que

$$\Lambda f = \int_K f d\mu \quad \forall f \in C(K).$$

Podemos reenunciar el teorema de Favard de la siguiente forma:

Teorema 3.3.2. Sean $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ y $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ sucesiones arbitrarias de números reales tales que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces; dada la relación de recurrencia

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_{n-1} p_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (3.3.5)$$

$$xp_0(x) = a_0 p_1(x) + b_0 p_0(x); \quad (3.3.6)$$

si $p_0(x) = 1$ entonces existe una única medida de Borel regular de soporte compacto μ de manera que $\{p_n\}$ es una SPON en el espacio $L_\mu^2(\mathbb{R})$.

Observación 3.3.3. La condición $p_0(x) = 1$ que se ha impuesto en el teorema implica que $1 = \int_{\mathbb{R}} |p_0(x)|^2 d\mu(x) = \mu(\mathbb{R})$, luego la medida μ es de probabilidad. Si no imponemos $p_0(x) = 1$, ésto afecta a la medida en una constante de proporcionalidad. Una situación en la que $p_0(x) \neq 1$ es precisamente el caso de los polinomios de Chebychev de primera especie que hemos mostrado antes.

Observación 3.3.4. Con este teorema hemos establecido una relación biunívoca entre sucesiones de polinomios ortonormales y la medida del espacio $L^2_{\mu}(\mathbb{R})$ en el que las sucesiones de polinomios son efectivamente ortonormales; por ello, a la medida μ la llamamos **medida de ortogonalidad**. En adelante, trataremos de buscar información sobre la medida de ortogonalidad a través de los coeficientes de la relación de recurrencia.

4. Operadores de multiplicación y matrices de Jacobi

4.1. Introducción

En la primera sección hemos introducido el marco abstracto de la teoría de operadores acotados en espacios de Hilbert, llegando a enunciar el teorema espectral, que afirma que desde el punto de vista de la equivalencia unitaria, todos los operadores autoadjuntos son operadores de multiplicación en espacios $\bigoplus_{n=1}^N L^2_{\mu_n}(\mathbb{R})$, y lo que diferencia a cada operador es el espacio $\bigoplus_{n=1}^N L^2_{\mu_n}(\mathbb{R})$ que nos da el teorema espectral, o equivalentemente, las medidas μ_n subyacentes. En esta sección vamos a estudiar operadores de multiplicación simples; es decir, operadores de la forma

$$\begin{aligned} T : L^2_{\mu}(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2_{\mu}(\mathbb{R}) \\ f(x) &\mapsto xf(x). \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Igual que en capítulo anterior, supondremos que la medida μ tiene soporte compacto, lo cual tiene como primera consecuencia la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1. *Si μ es una medida con soporte compacto, el operador de multiplicación (4.1.1) es acotado.*

Demostración. Si μ tiene soporte compacto, entonces la función $g(x) = x^2$ alcanza un máximo en $\text{sop}(\mu)$ y por tanto se tiene que

$$\|Tf\|^2 = \int_{\text{sop}\mu} x^2 |f(x)|^2 d\mu(x) \leq \max_{x \in \text{sop}\mu} \{x^2\} \int_{\text{sop}\mu} |f(x)|^2 d\mu(x) = C \|f\|^2.$$

■

Como el operador (4.1.1) ya es de la forma canónica que dice el teorema espectral, la medida μ es la medida espectral del operador. En este caso, por la proposición 2.5.11, tenemos que $\sigma(T) = \text{sop}(\mu)$.

4.2. Matrices de Jacobi

Dada una SPON $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, hemos visto que existen unas sucesiones de números reales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, con $a_n > 0$ para todo n , tales que se verifica la relación de recurrencia

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_{n-1} p_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{4.2.1}$$

$$xp_0(x) = a_0 p_1(x) + b_0 p_0(x). \tag{4.2.2}$$

Esta relación de recurrencia sugiere la siguiente representación matricial para el operador de multiplicación (4.1.1) definido sobre los polinomios:

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ a_0 & b_1 & a_1 & & \\ & a_1 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.2.3)$$

Una matriz de esta forma —imponiendo solamente que los a_n sean positivos— se dice que es una **matriz de Jacobi**; y define un operador $J : l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ que está definido, en principio, para vectores de l^2 con un número finito de términos no nulos. Más adelante veremos que cuando las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ están acotadas, entonces J está bien definido y además es un operador acotado. Como la SPON $\{p_n\}$ es una base ortonormal de $L^2_\mu(\mathbb{R})$, existe un operador unitario

$$L : \begin{aligned} l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}) &\rightarrow L^2_\mu(\mathbb{R}) \\ \{c_n\}_{n=0}^\infty &\mapsto \sum_{n=0}^\infty c_n p_n. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

que nos va a permitir definir en $L^2_\mu(\mathbb{R})$ un operador —el operador LJL^{-1} , que será el operador de Jacobi asociado a la relación de recurrencia de la SPON— unitariamente equivalente al operador de multiplicación simple (4.1.1). Como de momento el operador matricial (4.2.3) está definido solamente para sucesiones con un número finito de elementos no nulos, el operador LJL^{-1} está definido solamente para las clases de funciones polinómicas de $L^2_\mu(\mathbb{R})$.

Veamos por qué cada operador de multiplicación simple sobre $L^2_\mu(\mathbb{R})$ se relaciona con un operador de Jacobi (4.2.3). Vamos a trabajar formalmente, el lema 4.2.2 justificará que lo que ahora vamos a hacer es correcto. Supongamos que existe $c = (c_1, \dots, c_n, \dots) \in l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ tal que TLc y LJc están definidos —veremos que efectivamente existe un tal vector. Entonces

$$\begin{aligned} TLc &= T\left(\sum_{n=0}^\infty c_n p_n\right) = x \sum_{n=0}^\infty c_n p_n = \sum_{n=0}^\infty c_n x p_n \\ &= c_0(a_0 p_1 + b_0 p_0) + \sum_{n=1}^\infty c_n(a_n p_{n+1} + b_n p_n + a_{n-1} p_{n-1}). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} LJc &= L \begin{pmatrix} c_0 b_0 + a_0 c_1 \\ a_0 c_0 + b_1 c_1 + a_1 c_2 \\ a_1 c_1 + b_2 c_2 + a_2 c_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = p_0(c_0 b_0 + a_0 c_1) + \sum_{n=1}^\infty (a_{n-1} c_{n-1} + b_n c_n + a_n c_{n+1}) p_n \\ &= c_0(p_0 b_0) + c_1(a_0 p_0 + b_1 p_1 + a_1 p_2) + \dots \\ &= c_0(b_0 p_0 + a_0 p_1) + \sum_{n=1}^\infty c_n(a_{n-1} p_{n-1} + b_n p_n + a_n p_{n+1}), \end{aligned}$$

luego $TL = LJ$ cuando ambos operadores estén bien definidos, o lo que es lo mismo, $T = LJL^{-1}$.

En resumen, dada una matriz como (4.2.3), tenemos asociado a ella un operador de multiplicación (4.1.1) en $L^2_\mu(\mathbb{R})$; pero lo que realmente caracteriza a ese operador de multiplicación es la medida μ , que es la medida espectral del operador de Jacobi y que coincide con la medida de ortogonalidad de la SPON $\{p_n\}$. La cuestión ahora es la siguiente, dada una matriz de Jacobi, ¿qué podemos decir de la medida espectral del operador de multiplicación asociado? Aquí vamos a preocuparnos de estudiar cuál es el soporte de la medida y daremos algunas respuestas para el problema de localizar los puntos de acumulación del soporte.

Lo importante de todo ésto es que tenemos un nexo entre la medida de ortogonalidad de una SPON, que es la medida espectral del operador de multiplicación (4.1.1), y la relación de recurrencia de la SPON, gracias a la matriz de Jacobi, que es un operador unitariamente equivalente a un operador de multiplicación simple.

Observación 4.2.1. Hemos visto que las matrices de Jacobi están en biyección —más aún, cada pareja de operadores que está en biyección forma un par de operadores unitariamente equivalentes— con los operador de multiplicación simples, pero ya antes hemos visto que los operadores de multiplicación simples están en biyección —también forman pares de operadores unitariamente equivalentes— con los operadores acotados autoadjuntos con un vector cíclico; luego las matrices de Jacobi pueden servir para dar una forma canónica matricial de operadores acotados autoadjuntos.

La primera tarea es averiguar qué propiedades de un operador de Jacobi (continuidad, compacidad, ser autoadjunto) podemos deducir a partir de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

Lema 4.2.2. *Un operador de Jacobi J es acotado si y sólo si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ están acotadas. En particular, si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones acotadas, el operador J está bien definido sobre todo $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$.*

Demostración. Sea $v \in l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ tal que $\|v\| = 1$, entonces

$$\|Jv\|^2 = |v_0|^2|b_0|^2 + a_0^2|v_1|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k-1}v_{k-1} + b_kv_k + a_{k+1}v_{k+1}|^2$$

Si llamamos $A = \sup_k |a_k|$ y $B = \sup_k |b_k|$, desarrollando cada sumando obtenemos

$$\begin{aligned} & |a_{k-1}v_{k-1}|^2 + |b_kv_k|^2 + |a_{k+1}v_{k+1}|^2 + 2|a_{k-1}b_kv_{k-1}v_k| + 2|a_{k-1}a_{k+1}v_{k-1}v_{k+1}| + 2|b_ka_{k+1}v_kv_{k+1}| \\ & \leq A^2|v_{k-1}|^2 + B^2|v_k|^2 + A^2|v_{k+1}|^2 + 2AB|v_{k-1}v_k| + 2A^2|v_{k-1}v_{k+1}| + 2AB|v_kv_{k+1}|. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|Jv\|^2 & \leq 2A^2 + B^2 + 2AB \sum |v_{k-1}v_k| + 2A^2 \sum |v_{k-1}v_{k+1}| + 2AB \sum |v_kv_{k+1}| \\ & \leq 2A^2 + B^2 + 2AB \sum |v_{k-1}|^2 \sum |v_k|^2 + 2A^2 \sum |v_{k-1}|^2 \sum |v_{k+1}|^2 \\ & \quad + 2AB \sum |v_k|^2 \sum |v_{k+1}|^2 \\ & \leq 2A^2 + B^2 + 2AB + 2AB; \end{aligned}$$

luego J está acotado.

Recíprocamente, si J está acotado, entonces, dados los vectores canónicos $\{e_n\}$, se tiene que

$$|(Je_k, e_l)| \leq \|J\| \|e_k\| \|e_l\| = \|J\|.$$

Si tomamos $k = l$, tenemos que $|b_k| = |(Je_k, e_k)|$, luego la sucesión $\{b_k\}$ está acotada. La acotación de $\{a_k\}$ se obtiene tomando $l = k + 1$. ■

Una vez caracterizados los operadores de Jacobi acotados en función de los coeficientes a_n y b_n . Notemos que un operador de Jacobi es autoadjunto, como cabe esperar debido a la simetría de las matrices de Jacobi; ésto es sencillo de probar. Sean $\phi, \psi \in l^2$ y J un operador de Jacobi. Dado el operador de multiplicación 4.1.1, que es autoadjunto; y el operador 4.2.4, que es unitario, se tiene que $J = LTL^{-1}$, por tanto

$$\begin{aligned} (J\phi, \psi) & = (LTL^{-1}\phi, \psi) = (TL^{-1}\phi, L^{-1}\psi) = (L^{-1}\phi, TL^{-1}\psi) \\ & = (\phi, LTL^{-1}\psi) = (\phi, J\psi) \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Compacidad

Estudiemos ahora la compacidad de un operador de Jacobi. Para ello, hay que ver primero qué sucede con los operadores diagonales; ya que los operadores de Jacobi pueden expresarse como suma de operadores diagonales compuestos con operadores de desplazamiento.

Si tenemos un operador diagonal compacto

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.2.5)$$

transformará sucesiones débilmente convergente en sucesiones convergentes en norma. Así, si tomamos la sucesión $\{e_n\}_{n=0}^\infty \subseteq l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ formada por los vectores de la base canónica, tendremos que $\|Ae_n\| = |\lambda_n|$; y como $\{e_n\}$ es un sistema ortonormal, es una sucesión débilmente convergente a 0, luego $\{Ae_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión que converge a 0 en norma; lo que se traduce en que $\lambda_n \xrightarrow{n} 0$. Por tanto, que los elementos de la diagonal tiendan a 0 es una condición necesaria para que un operador diagonal sea compacto, pero ¿es una condición suficiente? Sí, también lo es.

Lema 4.2.3. *El operador diagonal (4.2.5) es compacto si y sólo si $\lambda_n \xrightarrow{n} 0$.*

Demostración. Que la condición dada es necesaria, ya lo hemos visto, veamos la suficiencia. Supongamos que la sucesión $\{\lambda_n\}$ tiende a 0. Vamos a aproximar el operador A por una sucesión de matrices $\{A_n\}$ tales que:

$$A_n = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.2.6)$$

de forma que cada operador A_n es un operador compacto por ser de rango finito. Veamos que la sucesión $\{A_n\}$ converge al operador A en norma de operadores.

$$\begin{aligned} \|A_n x - Ax\|^2 &= \left\| \sum_{k=0}^n (x, e_k) \lambda_k e_k - \sum_{k=0}^\infty (x, e_k) \lambda_k e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^\infty (x, e_k) \lambda_k e_k \right\|^2 \\ &= \sum_{k=n+1}^\infty |(x, e_k)|^2 \lambda_k^2; \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

como $\lambda_n \xrightarrow{n} 0$, dado un $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe un $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\sum_{k=n+1}^\infty |(x, e_k)|^2 \lambda_k^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{k=n+1}^\infty |(x, e_k)|^2 \leq \varepsilon^2 \|x\|^2;$$

por tanto

$$\|A_n - A\| < \varepsilon.$$

Con esto hemos probado que $\|A_n - A\| \xrightarrow{n} 0$. Por el teorema (2.3.5), el operador A es compacto. ■

Las condiciones para la compacidad de los operadores diagonales nos permiten deducir condiciones para la compacidad de operadores dados por matrices banda. Si tenemos un operador banda,

podemos descomponerlo en la suma de operadores que sólo tienen elementos no nulos en una única diagonal. Dado un $k \in \mathbb{Z}$ denotaremos por D_k una matriz que sólo tiene elementos no nulos en la k -ésima diagonal, siendo la diagonal indicada por el 0 la diagonal principal. Indicaremos con un k positivo a las diagonales que están por encima de la diagonal principal y con un k negativo las que estén por debajo.

Así, si $k = 0$, ya sabemos que D_0 es compacto si y sólo si la diagonal tiende a 0. Si $k > 0$, un operador D_k puede factorizarse como $D_k = R^k D_0$, siendo R el operador desplazamiento a la derecha

$$\begin{aligned} R : l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}) &\rightarrow l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \\ \{a_n\}_{n=0}^{\infty} &\mapsto \{a_{n-1}\}_{n=0}^{\infty} \quad (\text{con } a_{-1} = 0); \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

y D_0 un operador diagonal formado por los elementos de la diagonal de D_k . En esta situación, si los elementos de D_k tienden a 0, los elementos de D_0 también tienden a 0. Por el lema anterior, esto significa que D_0 es un operador compacto, y por el teorema 2.3.6 $D_k = R^k D_0$ también es un operador compacto. En el caso $k < 0$, se prueba de forma análoga que D_k es compacto si la diagonal tiende a 0; sólo hay que cambiar el operador desplazamiento a la derecha $R : a_n \mapsto a_{n-1}$ por el operador desplazamiento a la izquierda $L : a_n \mapsto a_{n+1}$, y factorizar D_k como $D_k = L^k D_0$.

Una matriz banda A con m bandas puede descomponerse como

$$A = A_1 + \dots + A_m,$$

siendo cada una de las matrices A_k una matriz que sólo tiene elementos no nulos en una única diagonal; por tanto, si los elementos de cada diagonal de la matriz A tienden a 0, cada matriz A_k ($1 \leq k \leq m$) es compacta, como ya hemos visto; y por el teorema 2.3.6, la suma de operadores compactos, también es compacto; por tanto, A es compacto.

Recíprocamente, supongamos ahora que A es una matriz banda con N bandas y que dicha matriz representa un operador compacto. Como A es una matriz banda, cada columna tiene como máximo N elementos no nulos; la matriz A tiene la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,0} & \ddots & & & & \\ \ddots & \ddots & a_{1,k-1} & & & \\ & \ddots & \ddots & a_{1,k} & & \\ & & a_{N,k-1} & \ddots & a_{1,k+1} & \\ & & & a_{N,k} & \ddots & \ddots \\ & & & & a_{N,k+1} & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Si hacemos actuar la matriz A sobre cada uno de los vectores de la base canónica $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ de l^2 , obtenemos

$$Ae_n = (0, \dots, 0, a_{1,n}, \dots, a_{N,n}, 0, \dots)^t, \text{ luego } \|Ae_n\| = \sqrt{a_{1,n}^2 + \dots + a_{N,n}^2}.$$

Ahora bien, $\{e_n\}$ es una sucesión que converge débilmente a 0, y A hemos supuesto que es compacto, luego la sucesión $\{Ae_n\}$ converge a 0 en norma; es decir, $\sqrt{a_{1,n}^2 + \dots + a_{N,n}^2} \xrightarrow{n} 0$; por tanto, cada diagonal $\{a_{j,n}\}$ tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

Resumimos ésto en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.4. *Un operador dado por una matriz banda $A = (a_{ij})$ infinita es compacta si y sólo si $\lim_n a_{n+j,n} = 0$ para cada j ; es decir, si cada diagonal forma una sucesión que tiende a 0.*

En particular, tenemos una caracterización de los operadores de Jacobi compactos.

Corolario 4.2.5. *El operador de Jacobi inducido por la matriz (4.2.3) es compacto si y sólo si tanto $\{a_n\}$ como $\{b_n\}$ convergen a 0.*

¿Cómo podemos caracterizar de un modo sencillo el espectro discreto y esencial de un operador de Jacobi? Como todo operador de Jacobi es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación simple como (4.1.1); luego las propiedades espectrales del operador de Jacobi son las mismas que las de ese operador de multiplicación. En un operador de multiplicación simple, todo valor propio es simple, luego no existen valores propios de multiplicidad infinita. Por la proposición 2.5.15, si λ es un punto aislado del espectro del operador, será un valor propio, y como tendrá un subespacio invariante asociado de dimensión finita, del teorema 2.6.13 se deduce que λ está en el espectro discreto. Así, no puede haber puntos aislados en el espectro esencial, pues la única posibilidad es que fueran valores propios de dimensión infinita, pero en operadores simples esta posibilidad queda descartada, luego el espectro esencial está formado por los puntos de acumulación del espectro. En resumen;

Proposición 4.2.6. *Sea A una matriz de Jacobi acotada, entonces, dado $\lambda \in \sigma(A)$, se tiene que*

- $\lambda \in \sigma_d(A) \Leftrightarrow \lambda$ es un punto aislado de $\sigma(A)$;
- $\lambda \in \sigma_{ess}(A) \Leftrightarrow \lambda$ es un punto de acumulación de $\sigma(A)$.

4.3. Soporte de la medida de ortogonalidad

Una técnica muy útil para el estudio del espectro de operadores es la teoría de las perturbaciones, que da una serie de resultados que permiten, a partir de casos particulares bien conocidos, obtener información de otros casos más complicados a través de pequeñas modificaciones del caso particular. Un resultado básico de esta teoría es el teorema de Weyl para perturbaciones compactas que hemos enunciado en la primera sección. Vamos a utilizar este teorema junto con lo que hemos visto en esta sección para obtener información sobre el espectro de operadores de Jacobi.

Supongamos que tenemos dos operadores de Jacobi acotados A y A' con sucesiones $(\{a_n\}, \{b_n\})$ y $(\{a'_n\}, \{b'_n\})$ respectivamente. ¿Qué podemos decir del espectro de estos operadores? Si se verifica que

$$a_n - a'_n \xrightarrow{n} 0, \quad b_n - b'_n \xrightarrow{n} 0;$$

entonces, por lo que hemos visto, está claro que $A - A'$ es un operador compacto, luego

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A').$$

Así, si hubiéramos conocido el espectro esencial de alguno de estos operadores, automáticamente habríamos conocido el espectro esencial del otro operador. Vamos a emplear esta idea para abordar el siguiente problema:

Problema 4.3.1. *Dada la matriz de Jacobi*

$$A = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ a_0 & b_1 & a_1 & & \\ & a_1 & b_2 & a_2 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

si $b_n \xrightarrow{n} b$ y $a_n \xrightarrow{n} a \geq 0$, ¿qué podemos decir del espectro esencial de A ?

- Caso $b = a = 0$. En este caso, el operador es compacto y entonces sabemos que $\sigma_{ess}(A) = \{0\}$. En términos de la medida de ortogonalidad de la SPON asociada a la relación de recurrencia

con sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$; lo que tenemos es que si $a_n \xrightarrow{n} 0$ y $b_n \xrightarrow{n} 0$, entonces el 0 es el único punto de acumulación del soporte de la medida de ortogonalidad; luego la medida de ortogonalidad está compuesta por puntos aislados —menos quizás el 0— que se acumulan en el 0; así la medida es una combinación lineal de deltas de Dirac con soportes que se acumulan en el 0.

- Caso $b \neq 0$ y $a = 0$. Si tomamos el operador diagonal

$$A' = \begin{pmatrix} b_0 & & & \\ & b_1 & & \\ & & b_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

entonces, por el corolario 4.2.5, el operador $A - A'$ es compacto; y por el teorema de perturbaciones compactas de Weyl, obtenemos que $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A') = \{b\}$. De la misma forma que antes, podemos decir que en este caso, el único punto de acumulación del soporte de la medida de ortogonalidad asociada a la matriz, es el punto b , y también igual que antes, la medida es una combinación lineal de deltas de Dirac con soportes que se acumulan en b .

- Caso en que $a = 0$ pero $\{b_n\}$ no converge. En esta situación, se tiene también que $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A')$. Como A' es diagonal, está claro que el espectro de A' está formado por los elementos de la sucesión $\{b_n\}$ —que son valores propios— junto con los puntos de acumulación de $\{b_n\}$, ya que el espectro de un operador es cerrado. En consecuencia, el conjunto de puntos de acumulación de $\sigma(A')$ —es decir, el espectro esencial— está formado por los puntos de acumulación de la sucesión $\{b_n\}$, que en el caso en que sea convergente, es un único punto. Ahora, el soporte de la medida de ortogonalidad puede tener varios —quizás infinitos— puntos de acumulación. En el caso en que hubiera un número finito de puntos de acumulación en la sucesión $\{b_n\}$, el soporte de la medida de ortogonalidad tendría un número finito de puntos de acumulación; en esta situación, el soporte consiste en puntos aislados que se aproximan a los puntos de acumulación de $\{b_n\}$; luego la medida de ortogonalidad sería una combinación lineal de deltas de Dirac con soportes que acumulan en los límites de oscilación de la sucesión $\{b_n\}$.
- Caso $b \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. En el caso anterior, hemos perturbado la diagonal de la matriz A ; y precisamente por ser una perturbación diagonal, ha sido sencillo obtener el espectro esencial de A . Ahora vamos a perturbar la matriz A de otra forma; y vamos a emplear para ello los polinomios de Chebychev de primera especie.

Según (3.2.7) y (3.2.8), la matriz de Jacobi asociada los polinomios de Chebychev es

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.3.1)$$

y la medida de ortogonalidad asociada es

$$d\mu = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

cuyo soporte es el intervalo $[-1, 1]$, luego todo el soporte está formado por puntos de acumulación y en consecuencia $\sigma_{ess}(C) = [-1, 1]$.

Si tuviéramos que $a = \frac{1}{2}$ y $b = 0$, entonces $A - C$ sería un operador compacto, luego $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(C) = [-1, 1]$. Evidentemente, este es un caso muy concreto, pero podemos hacer modificaciones en la medida de ortogonalidad de los polinomios de Chebychev para obtener matrices de Jacobi con sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ constantes; de forma que tendremos una familia de matrices cuya medida de ortogonalidad conoceremos y por tanto, el soporte de dicha medida.

Proposición 4.3.2. Si T es el operador dado por la matriz

$$T = \begin{pmatrix} b & \sqrt{2}a & & & \\ \sqrt{2}a & b & a & & \\ & a & b & a & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.3.2)$$

entonces

$$\sigma_{ess}(T) = [b - 2a, b + 2a].$$

Demostración. Consideremos la SPON $\{p_n\}$ respecto de la medida de ortogonalidad

$$d\mu(x) = \left(1 - \left(\frac{x-b}{2a}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Esta medida tiene como soporte al conjunto $[b + 2a, b - 2a]$, luego

$$\begin{aligned} (p_n, p_m) &= \int_{b-2a}^{b+2a} p_n(x) p_m(x) \left(1 - \left(\frac{x-b}{2a}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\begin{matrix} x = 2at + b \\ dx = 2adt \end{matrix} \right] \\ &= \int_{-1}^1 p_n(2at + b) p_m(2at + b) (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} 2adt. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Como $\{p_n\}$ es una SPON, se tiene que $(p_n, p_m) = \delta_{nm}$; pero comparando (4.3.3) con (3.2.5), y teniendo en cuenta que dada una medida μ , sólo existe una única SPON asociada a esa medida; se tiene que

$$T_n(t) = \sqrt{2a} p_n(2at + b) \Leftrightarrow T_n\left(\frac{x-b}{2a}\right) = \sqrt{2a} p_n(x) \quad (n \geq 0). \quad (4.3.4)$$

En la sección 3.1 hemos deducido la relación de recurrencia de los polinomios de Chebychev, que es

$$\begin{aligned} tT_n(t) &= \frac{1}{2}T_{n+1}(t) + \frac{1}{2}T_{n-1}(t) \quad (n \geq 1), \\ tT_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}T_1(t). \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $t = \frac{x-b}{2a}$ en esta relación, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{x-b}{2a} T_n\left(\frac{x-b}{2a}\right) &= \frac{1}{2}T_{n+1}\left(\frac{x-b}{2a}\right) + \frac{1}{2}T_{n-1}\left(\frac{x-b}{2a}\right) \quad (n \geq 1), \\ \frac{x-b}{2a} T_0\left(\frac{x-b}{2a}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}T_1\left(\frac{x-b}{2a}\right); \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (4.3.4), esta relación se transforma en

$$\begin{aligned} xp_n(x) &= ap_{n+1}(x) + bp_n(x) + ap_{n-1}(x) \quad (n \geq 1), \\ xp_0(x) &= \sqrt{2a}p_1(x) + bp_0(x). \end{aligned}$$

En consecuencia, la matriz de Jacobi asociada a los polinomios $\{p_n\}$ es la matriz T del enunciado. Como $\sigma_{ess}(T)$ es el conjunto de puntos de acumulación del soporte de la medida μ que hemos tomado; y este conjunto es precisamente $[b - 2a, b + 2a]$, tenemos que

$$\sigma_{ess}(T) = [b - 2a, b + 2a].$$

■

Esta proposición nos permite responder al cuarto caso del problema planteado. Si tenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ a_0 & b_1 & a_1 & & \\ & a_1 & b_2 & a_2 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

con $a_n \xrightarrow{n} a > 0$ y $b_n \xrightarrow{n} b \in \mathbb{R}$, y T es la matriz (4.3.2), entonces $A - T$ es un operador compacto, luego

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(T) = [b - 2a, b + 2a].$$

Corolario 4.3.3. Si $\{p_n\}$ es una SPON cuyas sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de la relación de recurrencia verifican

$$a_n \xrightarrow{n} a \text{ y } b_n \xrightarrow{n} b,$$

entonces el conjunto de puntos de acumulación del soporte de la medida de ortogonalidad es el intervalo $[b - 2a, b + 2a]$.

4.4. Teorema de Krein

En esta parte final del trabajo, vamos a enunciar y demostrar unos resultados que demostró Krein, que permiten caracterizar el espectro esencial de un operador de Jacobi en función de ciertas modificaciones del operador que resulten en un operador compacto. Un primer resultado en este sentido es la siguiente proposición.

Proposición 4.4.1. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto, entonces

$$\sigma_{ess}(T) \subseteq \{0\} \Leftrightarrow T \text{ es compacto.}$$

Demostración. Por el teorema de Riesz-Schauder, $\sigma(T)$ tiene como único posible punto de acumulación el 0, y el resto del espectro son valores propios aislados de multiplicidad finita, luego $\sigma_{ess}(T) \subseteq \{0\}$; queda probar el recíproco. Si $\sigma_{ess}(T) \subseteq \{0\}$, en el caso en que $\sigma_{ess}(T)$ sea vacío, $\sigma(T)$ no podrá tener puntos de acumulación, luego el espectro estará formado por un número finito de puntos aislados, que serán valores propios con multiplicidad necesariamente finita, luego el rango del operador será de dimensión finita y por tanto T será un operador compacto. En caso de que el operador tenga rango de dimensión infinita; por el teorema 2.6.13, o bien el 0 no es un punto aislado o bien es un punto aislado de multiplicidad infinita. En el caso en que 0 sea punto de acumulación de $\sigma(T)$ —además será el único punto de acumulación—, el resto del espectro estará formado por valores propios aislados de multiplicidad finita que se acumulan en el 0. En el caso en que 0 tenga multiplicidad infinita, igualmente el resto de puntos del espectro serán puntos aislados de dimensión finita; luego igualmente tendremos un conjunto de valores propios —aunque en este caso pueden ser una cantidad finita; y por tanto, pueden no acumularse en el 0— distintos del 0 y el valor propio 0, que tiene dimensión infinita, que puede ser o no ser punto de acumulación del espectro. En cualquier caso, podemos representar $\sigma(T)$ como una familia $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$, con $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Por el teorema 2.6.8, podemos representar el operador como $T = \int_{\sigma(T)} \lambda dP_\lambda$, y como $\sigma(T) = \{\lambda_n\}_{n=1}^N$, la representación del operador nos queda

$$T = \sum_{n=1}^N \lambda_n P_{\{\lambda_n\}},$$

siendo $P_{\{\lambda\}}$ la proyección ortogonal de un vector de $\mathcal{H}$ en el subespacio invariante asociado a λ . Con esta representación, tal y como hemos hecho en el lema 4.2.5, se prueba que T es compacto, pues lo

estamos aproximando en norma de operadores con los proyectores $\{P_{\{\lambda_n\}}\}$, que son de rango finito y por tanto compactos. ■

Proposición 4.4.2. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto, entonces

$$\sigma_{ess}(T) \subseteq \{\lambda\} \Leftrightarrow T - \lambda \text{ es compacto.}$$

Demostración. Por la propiedad (e) del teorema 2.5.3, se tiene que $\sigma(T - \lambda) = \{\mu - \lambda \mid \mu \in \sigma(T)\}$; es decir, el efecto de restar un operador λI a un operador T , consiste en desplazar una distancia $-\lambda$ cada punto de $\sigma(T)$, además, se comprueba que se conservan las multiplicidades de los valores propios. Se deduce por tanto que $\sigma_{ess}(T) = \{\lambda\}$ si y sólo si $\sigma_{ess}(T - \lambda) = \{0\}$ si y sólo si $T - \lambda$ es compacto. ■

Teorema 4.4.3. (Teorema de Krein) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto, entonces

$$\sigma_{ess}(T) \subseteq \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \Leftrightarrow (T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_n) \text{ es un operador compacto.}$$

Además,

$$\sigma_{ess}(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

si $(T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_k)$ no es compacto para cada $1 \leq k \leq n - 1$.

Demostración. Dado $p(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$, supongamos que $p(T)$ es un operador compacto. Sabemos que $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$, luego si $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$, o bien λ es punto de acumulación de $\sigma(T)$ o bien el subespacio invariante asociado a λ es de dimensión infinita. En el caso que λ sea punto de acumulación de T , existe una sucesión $\{\lambda_n\} \subseteq \sigma(T)$ tal que $\lambda_n \xrightarrow{n} \lambda$, además $\{p(\lambda_n)\} \subseteq p(\sigma(T))$. Como $p(x)$ es una función continua, $p(\lambda_n) \xrightarrow{n} p(\lambda) \in \sigma(T)$. ¿Es por tanto $p(\lambda)$ un punto de acumulación de $\{p(\lambda_n)\}$? Para ello hay que ver que la sucesión $\{p(\lambda_n)\}$ tiene infinitos términos distintos. Si hubiera un número finito de distintos valores en la sucesión, tendría que existir una subsucesión $\{\lambda_{n_k}\}$ con infinitos λ_{n_k} distintos tales que para algún α se tuviera $\alpha = p(\lambda_{n_k})$, pero entonces $p - \alpha$ sería un polinomio con infinitos ceros, lo que es imposible ya que $p - \alpha$ no es idénticamente nulo. En consecuencia $p(\lambda)$ es punto de acumulación del espectro y por tanto $p(\lambda) \in \sigma_{ess}(p(T))$. Por hipótesis, $p(T)$ es compacto, entonces $\sigma_{ess}(p(T)) = \{0\}$ y necesariamente $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$; de esto concluimos que $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Si λ es valor propio de dimensión infinita, existe una sucesión $\{\psi_n\}$ de valores propios linealmente independientes; por el cálculo funcional continuo, sabemos que si $T\psi_n = \lambda\psi_n$, entonces $p(T)\psi_n = p(\lambda)\psi_n$, luego los $\{\psi_n\}$ son también una sucesión de vectores propios de $p(T)$ linealmente independientes; y por tanto $p(\lambda) \in \sigma_{ess}(p(T))$; igual que en el otro caso se deduce que $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Supongamos ahora que $\sigma_{ess}(T) \subseteq \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Sea $s \in \sigma_{ess}(p(T))$, entonces en el caso de que s sea punto de acumulación del espectro, existe una sucesión $\{s_n\} \subseteq \sigma(p(T))$ tal que $s_n \xrightarrow{n} s$. Igual que antes, $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$, luego existen una sucesión $\{u_n\} \subseteq \sigma(T)$ y un $u \in \sigma(T)$ tales que $p(u_n) = s_n$ y $p(u) = s$. Como $\{u_n\} \subseteq \sigma(T)$ y el espectro es compacto, la sucesión $\{u_n\}$ tendrá algún punto de acumulación β , que tendrá que estar por tanto en $\sigma_{ess}(T)$. Este punto β verifica $p(\beta) = p(u)$, y como $\beta \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, tenemos $s = p(u) = p(\beta) = 0$, por tanto $\sigma_{ess}(p(T)) = \{0\}$ y $p(T)$ es compacto. Si s es valor propio de $p(T)$ de dimensión infinita, existe una sucesión $\{\psi_n\}$ de vectores propios de $p(T)$ linealmente independientes; además, habrá una cantidad finita de valores $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \in \sigma(T)$ tales que $s = p(\alpha_1) = \dots = p(\alpha_l)$. ¿Puede ser que el subespacio invariante asociado a alguno de esos α_j sea de dimensión finita? Por la representación del operador T que da el teorema 2.6.8, se tiene que

$$T = \sum_{j=1}^l \alpha_j P_{\{\alpha_j\}} + \int_{\sigma(T) \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}} \alpha dP_\alpha$$

y que

$$p(T) = s \sum_{j=1}^l P_{\{\alpha_j\}} + \int_{\sigma(T) \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}} p(\mu) dP_\alpha.$$

Como s es un valor propio de dimensión infinita, el rango del operador $\sum_{j=1}^l P_{\alpha_j}$ —que es suma de las proyecciones espectrales— es de dimensión infinita, y como es una suma finita de operadores, alguna de las proyecciones P_{α_j} será infinito dimensional, luego algún α_j será valor propio con subespacio invariante asociado de dimensión infinita, y por tanto, algún α_j estará en el espectro esencial; de forma que para algún $1 \leq k \leq n$, se tendrá que $\alpha_j = \lambda_k$ y por tanto $s = p(\alpha_j) = p(\lambda_k) = 0$, en consecuencia $\sigma_{ess}(p(T)) \subseteq 0$ y $p(T) = (T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_n)$ es un operador compacto. ■

Mediante aproximación uniforme por polinomios, podemos probar la siguiente proposición, que está probada en [3] para el caso particular de operadores de Jacobi.

Proposición 4.4.4. *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto y $f \in C(\sigma(T))$, entonces $\sigma_{ess}(T)$ está contenido en el conjunto de ceros de f si y sólo si $f(T)$ es un operador compacto.*

Ejemplo 4.4.5. Vamos a estudiar un ejemplo de cómo podemos emplear el teorema 4.4.3 para obtener condiciones necesarias y suficientes para que el espectro esencial de una matriz de Jacobi esté formado por dos únicos puntos; o lo que es lo mismo, para que el soporte la medida de ortogonalidad de los polinomios ortogonales asociados a dicha matriz tenga dos únicos puntos de acumulación. Sea A un operador de Jacobi dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ a_0 & b_1 & a_1 & & \\ & a_1 & b_2 & a_2 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

si queremos estudiar cuándo $\sigma_{ess}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, siendo λ_1 y λ_2 distintos, hay que estudiar la compacidad de los operadores $A - \lambda_1$, $A - \lambda_2$ y $(A - \lambda_1)(A - \lambda_2)$. Empecemos por estudiar la compacidad de $(A - \lambda_1)(A - \lambda_2)$. Sabemos que para que sea compacto, las distintas diagonales deben converger a 0. Si multiplicamos dos matrices tridiagonales simétricas J y J' con sucesiones $(\{a_n\}, \{c_n\})$ y $(\{a'_n\}, \{c'_n\})$, tenemos

$$\begin{aligned} AA' &= \begin{pmatrix} c_0 & a_0 & & & \\ a_0 & c_1 & a_1 & & \\ & a_1 & c_2 & a_2 & \\ & & a_2 & c_3 & a_3 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_0 & a_0 & & & \\ a_0 & c'_1 & a_1 & & \\ & a_1 & c'_2 & a_2 & \\ & & a_2 & c'_3 & a_3 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_0 c'_0 + a_0^2 & c_0 a_0 + a_0 c'_1 & a_0 a_1 & 0 & \\ a_0 c'_0 + c_1 a_0 & a_0^2 + c_1 c'_1 + a_1^2 & c_1 a_1 + a_1 c'_2 & a_1 a_2 & \\ a_1 a_0 & a_1 c'_1 + c_2 a_1 & a_1^2 + c_2 c'_2 + a_2^2 & \ddots & \ddots \\ 0 & a_1 a_2 & a_2 c'_2 + c_3 a_2 & \ddots & \ddots \\ & 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por el teorema 4.2.4, las condiciones necesarias y suficientes para que el operador JJ' sea compacto son

- a) $a_n a_{n+1} \xrightarrow{n} 0$,
- b) $a_n (c_n + c'_{n+1}) \xrightarrow{n} 0$,

$$c) \ a_n^2 + c_{n+1}c'_{n+1} + a_{n+1}^2 \xrightarrow{n} 0,$$

$$d) \ a_n(c'_n + c_{n+1}) \xrightarrow{n} 0.$$

Para el caso que nos interesa, tenemos que sustituir las c_n y c'_n por $b_n - \lambda_1$ y $b_n - \lambda_2$ respectivamente; situación en la que las condiciones b) y d) son equivalentes. Desde el punto de vista de la medida de ortogonalidad de una SPON podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 4.4.6. *Dada una SPON $\{p_n\}$ con coeficientes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ en la relación de recurrencia 3.2.2, el soporte de la medida de ortogonalidad asociada a los $\{p_n\}$ tiene dos únicos puntos de acumulación λ_1 y λ_2 si y sólo si se verifican las siguientes condiciones*

$$a) \ a_n a_{n+1} \xrightarrow{n} 0,$$

$$b) \ a_n(b_n - \lambda_1 + b_{n+1} - \lambda_2) \xrightarrow{n} 0,$$

$$c) \ a_n^2 + (b_{n+1} - \lambda_1)(b_{n+1} - \lambda_2) + a_{n+1}^2 \xrightarrow{n} 0,$$

Observación 4.4.7. En el enunciado del teorema de Krein hemos afirmado que no solamente debe verificarse que $(T - \lambda_1)(T - \lambda_2)$ sea compacto, sino que además, ni $(T - \lambda_1)$ ni $(T - \lambda_2)$ pueden ser compactos. El operador $T - \lambda_j$ es compacto si y sólo si $a_n \xrightarrow{n} 0$ y $b_n \xrightarrow{n} \lambda_j$, pero si $a_n \xrightarrow{n} 0$, veremos en el siguiente ejemplo que no puede verificarse simultáneamente que $(T - \lambda_1)(T - \lambda_2)$ sea compacto y que $b_n \xrightarrow{n} \lambda_j$ ($j \in \{1, 2\}$); y por tanto, no hay que añadir ninguna condición a la ya descritas.

Ejemplo 4.4.8. El caso más sencillo que podemos imaginar en el que el soporte de la medida de ortogonalidad tenga dos únicos puntos de acumulación se tiene cuando $a_n \xrightarrow{n} 0$; en ese caso, la condición b) se verifica sin imponer ninguna condición adicional sobre la sucesión $\{b_n\}$, aparte de que esté acotada, lo cual se verifica porque estamos trabajando con operadores acotados. El único requisito que habría que imponer sobre $\{b_n\}$ para que se verifique la condición c), es

$$(b_n - \lambda_1)(b_n - \lambda_2) \xrightarrow{n} 0,$$

lo cual es equivalente a que la sucesión $\{b_n\}$ tenga dos únicos puntos de acumulación, y que estos puntos de acumulación sean precisamente λ_1 y λ_2 .

Ejemplo 4.4.9. Aunque el caso más evidente en el que el soporte de la medida posee dos únicos puntos de acumulación se tiene cuando $a_n \xrightarrow{n} 0$, no es una condición necesaria. Tomemos las sucesiones

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2) - 4 - 4\lambda_1\lambda_2}}{2} + c_n & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2) - 4 - 4\lambda_1\lambda_2}}{2} + c_n & \text{si } n \text{ es impar;} \end{cases}$$

siendo c_n una sucesión de números reales cualquiera que converge a 0.

Trivialmente, se verifica la condición a) del corolario, ya que $|a_n a_{n+1}| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$. Veamos qué sucede con la condición b). Si n es impar, entonces

$$\begin{aligned} a_n(b_n - \lambda_1 + b_{n+1} - \lambda_2) &= \frac{1}{n} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2) - 4 - 4\lambda_1\lambda_2}}{2} + c_n - \lambda_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2) - 4 - 4\lambda_1\lambda_2}}{2} + c_{n+1} - \lambda_2 \right) \\ &= \frac{1}{n} (c_n + c_{n+1}). \end{aligned}$$

Si n es par, entonces

$$\begin{aligned} a_n(b_n - \lambda_1 + b_{n+1} - \lambda_2) &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2) - 4 - 4\lambda_1\lambda_2}}{2} + c_n - \lambda_1 \\ &\quad + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2) - 4 - 4\lambda_1\lambda_2}}{2} + c_{n+1} - \lambda_2 \\ &= c_n + c_{n+1}; \end{aligned}$$

en conclusión

$$a_n(b_n - \lambda_1 + b_{n+1} - \lambda_2) \xrightarrow{n} 0.$$

Comprobemos que la tercera condición se verifica. Si n es par, tenemos que

$$\begin{aligned} &a_n^2 + (b_{n+1} - \lambda_1)(b_{n+1} - \lambda_2) + a_{n+1}^2 \\ &= 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\quad + \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2) - 4 - 4\lambda_1\lambda_2}}{2} + c_{n+1} - \lambda_1 \right) \\ &\quad \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2) - 4 - 4\lambda_1\lambda_2}}{2} + c_{n+1} - \lambda_2 \right); \end{aligned}$$

que converge a 0 si y sólo si

$$1 + \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2) - 4 - 4\lambda_1\lambda_2}}{2} - \lambda_1 \right) \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2) - 4 - 4\lambda_1\lambda_2}}{2} - \lambda_2 \right)$$

converge a 0, lo cual es trivial porque —se comprueba fácilmente— es precisamente una constante que se anula. El caso en que n es impar se comprueba de la misma forma; luego como las sucesiones de términos pares e impares convergen a 0, se concluye que

$$a_n^2 + (b_{n+1} - \lambda_1)(b_{n+1} - \lambda_2) + a_{n+1}^2 \xrightarrow{n} 0.$$

Se verifican así las 3 condiciones del corolario; por tanto, dada una SPON con una relación de recurrencia con los coeficientes $(\{a_n\}, \{b_n\})$ dados, verifica que el conjunto de puntos de acumulación del soporte de la medida de ortogonalidad asociada es $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Referencias

- [1] REED, M. y SIMON, B. (1972) *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. I: Functional Analysis*. London: Academic Press.
- [2] BACHMAN, G. y NARICI, L. (1966), *Functional Analysis*. New York: Academic Press.
- [3] CHIHARA, T.S. (1978) *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. New York: Gordon and Breach.
- [4] NIKISHIN, E.M. y SOROKIN, V.N. (1988), *Rational Approximations and Orthogonality*. Translations of the American Mathematical Society. Rhode Island: American Mathematical Society.
- [5] KOELINK, E. (2001) *Spectral Theory and Special Functions*. arXiv:math/0107036v1.
- [6] FOLLAND, G. (1999) *Real Analysis: modern techniques and their applications. Second Edition*. New York: John Wiley and Sons.
- [7] RUDIN, W. Real and Complex analysis. Third Edition. New York: McGraw-Hill.
- [8] TESCHL, G. (1999) *Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices*. American Mathematical Society.
- [9] SIMON, B. (2004) *Orthogonal polynomials on the unit circle. Part 1: Classical Theory*. Colloquium Publications. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
- [10] SIMON, B. (2005) *OPUC on one foot*, Bull. (New Series) of the AMS, Vol. **42**, Number 4, pp. 431-460. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
- [11] VAN ASSCHE, W. (2008) *Compact Jacobi matrices: from Stieltjes to Krein and $M(a,b)$* , Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, no. special Stieltjes, pp. 195-215.
- [12] KREIN, M.G. (1938) *Concerning a special class of entire and meromorphic functions*, O nekotorykh voprosakh teorii momentov'(N. Akhiezer, M.G. Krein), Nauchno-Tekhnicheskoe Izdatelstvo Ukrainy, Kharkov. Traducido al inglés en *Some questions in the theory of moments*, de N. I. Ahiezer y M.G. Krein (1962), Translations of Mathematical Monographs. Vol. **2**, pp. 241-265. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.