



Universidad
Zaragoza

Trabajo de Fin de Grado en Física

Cuerdas cósmicas de materia oscura axiónica

Autor

Jorge Orgaz Martín

Director

Javier Redondo Martín

Departamento de Física Teórica. Facultad de Ciencias.
2019

Abstract

El axión como resultado de una ruptura espontánea de la simetría PQ tiene profundas implicaciones cosmológicas. Una de ellas son la aparición de defectos topológicos, como redes de cuerdas y paredes de dominio, asociados a este tipo de transiciones de fase que tienen lugar en el Universo temprano. Aunque pueden servir para explicar la abundancia de materia oscura y la formación de estructuras por inhomogeneidades, pueden suponer un desastre cosmológico, en especial las paredes de dominio. La evolución de estas redes de defectos topológicos se pueden simular y está caracterizada por tiempos característicos que se pueden estimar analíticamente. La evolución de la red de cuerdas y paredes de dominio, así como su destino y desaparición depende del número de mínimos degenerados, N_{DW} , que tenga el potencial QCD. Si $N_{QCD} > 1$ se puede introducir un término de bias que favorezca que el campo tienda a uno de los mínimos al cabo de un tiempo característico, suponiendo una solución al problema de las paredes de dominio.

Palabras clave: Axiones, cuerdas cósmicas, paredes de dominio, física del Universo temprano, materia oscura, QCD.

Índice

1. Introducción	1
2. El Universo temprano	1
3. Defectos topológicos	4
3.1. Paredes de dominio	5
3.1.1. Ejemplo: modelo ruptura de simetría discreta \mathbb{Z}_2	5
3.1.2. Papel en cosmología y astrofísica	7
3.2. Cuerdas	7
3.2.1. Ejemplo: modelo de Higgs abeliano con ruptura de simetría gauge $U(1)$	7
3.2.2. Papel en cosmología y astrofísica	12
4. El axi3n como candidato a materia oscura	13
4.1. El axi3n y el <i>Strong-CP problem</i>	13
4.2. La soluci3n de Peccei-Quinn	14
4.3. Cosmolog3a del axi3n	15
5. Evoluci3n de los defectos topol3gicos axi3nicos	17
5.1. Simulaci3n	17
5.2. Formaci3n, 3poca de amortiguamiento y <i>scaling</i> de cuerdas c3smicas	18
5.3. Formaci3n de paredes de dominio	19
5.4. Destino de la red de cuerdas y paredes de dominio	21
5.5. Breves conclusiones	24
A. Aproximaci3n de gas ideal	25
B. Mecanismo de Kibble	25
C. Simulaciones del campo del axi3n	27
D. Deducci3n de ecuaciones del movimiento a partir del Lagrangiano	30

1. Introducción

La física de partículas ha proporcionado muchas respuestas a diversas preguntas en el ámbito de la cosmología, o por lo menos ha establecido un marco desde donde abordar los problemas. La cosmología, a cambio, ha sido y sigue siendo clave para poner cotas a parámetros de las teorías de física de partículas a partir de datos observacionales y ha restringido la validez de algunas propuestas más allá del modelo estándar. Los avances de las últimas décadas en estos dos campos de la ciencia no ha hecho más que estrechar su relación, hasta el punto de que en la actualidad es impensable que se haga algún progreso sin aprovechar esta sinergia o preocuparse de las implicaciones que tendría en el otro.

Sin embargo, la física de partículas no es la única relación de la cosmología con otras disciplinas. Aunque pueda parecer sorprendente, la física de la materia condensada también nos ha brindado herramientas para tratar algunos problemas del Universo temprano. En particular, la aparición de estructuras topológicas como consecuencia de una transición de fase cosmológica no es muy diferente a la formación de dominios y estructuras en un material ferromagnético isótropo cuando se enfría por debajo de la temperatura de Curie: la magnetización adquiere un valor no nulo pero su dirección es arbitraria, determinada por cualquier pequeño campo magnético externo o, en su ausencia, por fluctuaciones térmicas aleatorias.

Uno podría temer a primera vista que todo lo relacionado con el momento en el que tienen lugar las transiciones de fase y rupturas espontáneas de simetrías supone una audaz extrapolación de las teorías en cuyos resultados confiamos. Sin embargo, si se asume el dogma de la libertad asintótica evitando que haya demasiados fermiones, entonces a las temperaturas que se manejan todas las interacciones son efectivamente débiles, de forma que la teoría perturbativa a bajo orden es una buena guía. Además, en este contexto no tenemos el problema del confinamiento en QCD con energías alcanzables en laboratorio, pues a las densidades del universo temprano los quarks se pueden separar lo suficiente como para formar entidades individuales.

La estructura de esta memoria es la siguiente: en la sección 2 se hace un repaso del Universo temprano, el contexto en el que tienen lugar las transiciones de fase que se van a tratar; la sección 3 se centra en el estudio de los defectos topológicos que aparecen en estas transiciones de fase, destacando las paredes de dominio y las cuerdas cósmicas con modelos sencillos y razonando sus implicaciones en cosmología y astrofísica, aunque hay más tipos de defectos, como monopolos o defectos híbridos más exóticos en los que no se pondrán tanta atención de momento; en la sección 4 se introduce el axión como candidato a materia oscura y en la sección 5 se tratan los defectos topológico asociados al campo del axión, estimando escalas de tiempo características de su dinámica acompañadas de resultados de simulaciones numéricas.

2. El Universo temprano

Hagamos un fugaz repaso de la historia del Universo y el estado de la Cosmología estándar. El modelo *hot Big Bang* parte de la asunción de que poco después del tiempo de Planck (10^{-44} s) el Universo estaba en un estado de equilibrio térmico a una temperatura no muy inferior a la temperatura que define la masa de Planck (10^{28} eV). Por qué las regiones que no estaban en contacto causal estaban a la misma temperatura es un misterio, aunque propuestas como la inflación proporcionan explicaciones satisfactorias. Estudiar momentos anteriores al tiempo de Planck está fuera de nuestras posibilidades debido al dominio de efectos de gravedad cuántica,

por lo que es un terreno en el que únicamente hay margen para la especulación. No obstante, este hecho no nos va a preocupar porque las transiciones que se van a estudiar están lo suficientemente alejadas, a temperaturas muy inferiores ($\sim 10^{11}$ GeV).

En todo momento se va a suponer que el espacio-tiempo está descrito por la relatividad general y que a escalas suficientemente grandes el Universo es isótropo y homogéneo. Esta última suposición, confirmada por las observaciones del fondo cósmico de microondas (CMB), se conoce como Principio Cosmológico y es uno de los pilares de la cosmología moderna. Una métrica compatible con esta hipótesis es la métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), definida como:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\varphi^2) \right] , \quad (1)$$

donde $R(t)$ es el factor de escala del Universo y $k = 0, \pm 1$ es el factor de curvatura. Utilizando la ecuación de campo de Einstein, que relaciona la curvatura del espacio-tiempo con el tensor energía-momento, se llega a la ecuación de Friedmann, que muestra la dependencia del ritmo de expansión con la densidad de energía.

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{R^2} + \Lambda , \quad (2)$$

donde ρ es la densidad de energía y Λ es la constante cosmológica. El cociente que marca el ritmo de expansión $\dot{R}/R = H$ recibe el nombre de parámetro de Hubble, rebautizado recientemente como parámetro de Hubble-Lemaître para hacer más justicia a su descubrimiento. De momento, vamos a tomar que la constante cosmológica no tiene un papel relevante en la expansión del Universo en tiempos tan tempranos, aunque un estudio más riguroso de su efecto en las transiciones de fase y defectos topológicos se puede encontrar en [Kibble, 1980]. Reescribir la ecuación (2) en forma de ecuación de conservación de la energía de una partícula en la superficie de la esfera comóvil en un universo dominado por materia puede arrojar información que ayude a su interpretación:

$$\frac{1}{2} \dot{R}^2 - \frac{G\rho(4\pi R^3/3)}{R} = -\frac{1}{2} k . \quad (3)$$

El parámetro $k > 0$ corresponde a una órbita cerrada, cuyo significado físico es un Universo cerrado que se expande y que finalmente revertirá esta expansión y colapsará en una nueva singularidad. $k \leq 0$ corresponde a un Universo abierto que se expandirá eternamente. En el caso de dominio de radiación esta interpretación cambia pero las conclusiones son las mismas, mientras que si se añade una constante cosmológica el argumento deja de tener sentido. En cualquier caso, en el Universo temprano la planitud ($k = 0$) es una buena aproximación, ya que aunque el término de curvatura aumenta cuando $R \rightarrow 0$, no lo hace tan rápido como $\rho \propto R^{-4}$ cuando $R \rightarrow 0$, así que la expansión queda dominada por ρ .

Vamos a suponer que el Universo se encontraba en equilibrio térmico a una temperatura mucho mayor que las masas de las partículas². Bajo estas condiciones vamos tratar la materia como un gas ideal relativista sometido a una expansión adiabática. La densidad de energía dominante será la de radiación, por lo que incorporando la predicción de la potencia cuarta de la temperatura de Stefan-Boltzmann se tiene la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 , \quad (4)$$

²Se ignoran escenarios alternativos con un espectro de masas creciente exponencialmente [Hagedorn, 1970]

donde g_* es el número efectivo de grados de libertad, que cambia en importantes eventos de la historia térmica del Universo que se mencionarán posteriormente. Con todo esto, la ecuación de Friedman (2) nos lleva a la importante relación $R \propto T^{-1} \propto t^{1/2}$.

Una magnitud de interés a la que se referencia en muchas ocasiones en cosmología debido a su utilidad es la masa de Planck, definida como $m_P = 1/G^{1/2} = 1,22 \cdot 10^{28}$ eV, en términos de la cual la relación entre tiempo y temperatura queda

$$tT^2 \approx \frac{0,3}{\sqrt{\mathcal{N}}} m_P . \quad (5)$$

El número g_* empieza siendo de orden 10^2 en los modelos más sencillos de gran unificación $SU(5)$. En el apéndice A se da una justificación algo burda de por qué podemos considerar el plasma en este momento como un gas ideal.

A continuación, repasemos los principales eventos en la evolución del Universo así como su efecto en el número efectivo de grados de libertad ateniéndose a un modelo de gran unificación lo más sencillo posible.

El número de grados de libertad efectivo decrece cada vez que la temperatura baja a una escala de energía inferior a la masa umbral de aniquilación de alguna partícula-antipartícula. Podemos destacar dos transiciones de fase. La primera consiste en $G \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ y ocurre en $T = T_{GU} \sim 10^{15}$ GeV, antes de la cual todas las partículas contribuyen a g_* , mientras que después hay que excluir las partículas que adquieren masas del orden de T_{GU} , que ya no estarán presentes de forma significativa. La desintegración de estas partículas podría explicar la asimetría del número de bariones.

Después de la transición de fase de Weinberg-Salam, que hace que la fuerza débil y la electromagnética sean aparentemente distintas, en $T = T_{WS} \sim 10^2$ GeV, g_* vuelve a disminuir una vez más. Ahora solo se tiene en cuenta los quarks y gluones asociados a $SU(3)$, los leptones y el fotón. Esto marca el inicio de la era hadrónica, de la que no sabemos tanto. En ella el mecanismo de confinamiento debe adquirir relevancia ya que pasamos de una sopa de quark-gluon a un sistema de hadrones separados. Cuando la temperatura baja de 150 MeV los pares de nucleones se aniquilan, sobreviviendo solo un pequeño número de bariones. Esto no corresponde a una transición de fase directa sino a una transición fase suave, un crossover. Cuando se llega a los 100 MeV las únicas partículas que contribuyen a g_* son los leptones y los fotones. Finalmente, cuando los pares de electrones y muones desaparecen solo quedan los neutrinos y el fotón, con un valor $g_* = 7,25$, aunque efectivamente este número es menor porque los neutrinos salen del equilibrio antes que los fotones.

El número de neutrinos tiene cierta relevancia a la hora de determinar el ritmo de expansión del Universo durante esta época, afectando a la temperatura a la que la densidad de neutrones y protones se desvía del equilibrio controlado por la interacción débil, congelándose en un ratio cuyo valor, de acuerdo a la distribución de Boltzmann, es proporcional a $\exp(-\Delta m)/T \sim 1/3$ debido a la diferencia de sus masas. Más neutrinos implica un ritmo de expansión mayor, que se manifiesta en un mayor número de neutrones que sobreviven y que durante la época de nucleosíntesis acabarían en helio-4. La nucleosíntesis es la etapa más temprana en cuyos resultados tenemos más confianza gracias al asombroso acuerdo entre predicción teórica y observaciones experimentales que se han visto reforzadas con medidas de abundancias de elementos ligeros y de parámetros a partir del CMB³. En astrofísica hay suficiente confianza en la validez de los

³No obstante, sigue sin haber una solución al problema del Litio-7, cuya abundancia no es la que predice el

modelos de producción de helio primordial como para asegurar que no puede haber más de tres familias de neutrinos ligeros, tal y como fue comprobado posteriormente por el experimento LEP del CERN a partir de la anchura de desintegración del bosón Z^0 .

La última época importante en el Universo temprano es la de la recombinación, cuando la temperatura baja lo suficiente como para que los electrones queden ligados a núcleos, dando lugar a materia eléctricamente neutra. Esto permite que los fotones puedan viajar con mayor libertad, pasando de un Universo opaco a uno transparente. Esta luz llega a nosotros en forma de la radiación de fondo. La radiación de fondo cósmico de microondas, además de ser una de las imágenes más espectaculares de la cosmología, encierra muchos secretos e información relevante para el desarrollo de este campo. La isotropía y homogeneidad de esta radiación de 3K proporciona importantes restricciones para cualquier modelo de generación de inhomogeneidades, como será el caso de los defectos topológicos que se tratarán en este trabajo, aunque por otra parte son un mal necesario para explicar la formación de las primeras galaxias por la condensación gravitatoria de estas inhomogeneidades. A partir de este punto, cuando el Universo ya tiene millones de años, empieza la formación de estructuras galácticas, en las cuales los defectos topológicos que se van a introducir pueden adquirir un importante papel como semillas, en especial las cuerdas cósmicas.

3. Defectos topológicos

Las rupturas espontáneas de simetrías son una parte fundamental de la física de partículas. Cuando la temperatura del Universo es suficientemente alta, superando la escala de energías de una simetría rota, típicamente dicha simetría se debe recuperar. Ahora bien, ¿Cómo podemos saber que el Universo pasó por alguna de estas transiciones de fase? Una posibilidad de comprobar que estos eventos ocurrieron es buscar algunos de los defectos topológicos que son consecuencia de que dichas transiciones de fase no fueron perfectas, quedando el campo atrapado fuera del mínimo por defectos topológicos tales como cuerdas, paredes de dominio, monopolos o estructuras híbridas más exóticas. Algunos análisis sobre la producción cosmológica de defectos topológicos con cierto peso histórico y que han constituido las bases de todo el desarrollo posterior que se va a introducir en esta memoria se pueden encontrar en [Vilenkin, 1985], [Kibble, 1976] y [Preskill, 1984].

La estabilidad de estas estructuras que aparecen en el Universo temprano se explican con consideraciones topológicas y son predichas por muchos modelos de ruptura de simetrías gauge. Estos objetos son inherentemente no-perturbativos y no se pueden generar en experimentos de altas energías con la tecnología actual, por lo que únicamente se pueden buscar pruebas de su existencia en las pistas que quedaron grabadas en el cosmos, restos del Universo temprano. Estas estructuras han sido ampliamente estudiadas en las últimas décadas, desde que las transiciones de fase y rupturas espontáneas de simetrías asumieron un rol tan destacado en la evolución del Universo temprano. Los textos más completos en los que basar la introducción, y a los que todos referencian, son [Vilenkin and Shellard, 2000], donde se expone de forma rigurosa gran parte del conocimiento construido acerca de defectos topológicos y su papel en la cosmología moderna, y [Kolb and Turner, 1990], que dedica un capítulo al estudio de las transiciones de fase.

modelo estándar de nucleosíntesis.

3.1. Paredes de dominio

3.1.1. Ejemplo: modelo ruptura de simetría discreta \mathcal{Z}_2

Vamos a analizar un problema lo más sencillo posible para ilustrar la aparición de paredes de dominio, de forma que nos permita extender todas las conclusiones posibles al caso particular del campo del axión. Comencemos con un campo escalar real que pasa por una ruptura espontánea de la simetría con un lagrangiano que se puede escribir como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{4}\lambda(\phi^2 - \sigma^2)^2 . \quad (6)$$

La simetría de reflexión del lagrangiano \mathcal{Z}_2 , que se manifiesta a través de la invarianza bajo la transformación $\phi \rightarrow -\phi$ se rompe espontáneamente cuando ϕ adquiere un valor esperado de vacío $\langle\phi\rangle = \pm\sigma$. No todos los puntos del espacio estarán en el mismo estado fundamental ya que a distancias mayores que la distancia de correlación del campo ϕ (finita), el campo es independiente y la elección de este estado de vacío será aleatoria. En una región el estado fundamental estará en $\langle\phi\rangle = +\sigma$ y en otros estará en $\langle\phi\rangle = -\sigma$. Antes de estudiar la dinámica de una transición de fase, estudiemos con detenimiento una solución estacionaria que nos ayudará a comprender posteriormente la dinámica.

Consideremos un muro infinito en el plano $x-y$ en $z = 0$ y supongamos que $\phi(z \rightarrow -\infty) = -\sigma$ y $\phi(z \rightarrow \infty) = +\sigma$. El campo ϕ debe tener una transición suave entre las dos regiones, por lo que en algún punto debe pasar por $\langle\phi\rangle = 0$, una región que no es vacío. En tal caso, la ecuación de ϕ es

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \lambda\phi(\phi^2 - \sigma^2) = 0 ,$$

cuya solución imponiendo las condiciones de contorno mencionadas antes es

$$\phi_W = \sigma \tanh(z/\Delta) ,$$

donde $\Delta = \sqrt{2/\lambda}\sigma^{-1}$ es un estimador de la anchura de la pared. Se puede interpretar esta anchura finita de la pared de dominio de una manera muy intuitiva: los términos que contribuyen de forma aditiva a la densidad superficial de energía consisten en un gradiente proporcional a $\Delta \times (\nabla\phi)^2 \sim \sigma^2/\Delta$ y un término de energía potencial proporcional a $\Delta \times V(\phi) \sim \Delta\lambda\sigma^4$. El término del gradiente se minimiza haciendo Δ lo más grande posible, mientras que el término potencial sufre el efecto contrario, es decir, se minimiza haciendo Δ lo más pequeño posible. Hay que encontrar un compromiso entre estos dos efectos, llegando a que $\Delta \sim \lambda^{1/2}\sigma^{-1}$.

Sustituyendo la solución del campo en la expresión general del tensor energía momento de un campo escalar, se obtiene

$$T_\nu^\mu = \frac{\lambda}{2}\sigma^4 \cosh^{-4}(z/\Delta)\text{diag}(1, 1, 1, 0) .$$

La tensión superficial de la pared de dominio, es

$$\eta = \int T_0^0 dz = \frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda^{1/2}\sigma^3 = \int T_i^i dz .$$

Las componentes en $x-y$ de la presión son iguales a la densidad de energía en la superficie con signo opuesto. Así pues, la tensión que sufre la superficie es igual a su densidad de energía, por lo que estos muros son inherentemente relativistas y sus efectos gravitatorios son no-Newtonianos.

Para un tensor energía-momento de la forma $T_\nu^\mu = \text{diag}(\rho, -p_1, -p_2, -p_3)$ el límite Newtoniano de la ecuación de Einstein es la ecuación de Poisson $\nabla^2\phi = 4\pi G(\rho + p_1 + p_2 + p_3)$. Entonces, para el caso anterior $\nabla^2\phi = -4\pi G\rho$. Notese que el signo hace que las partículas sean repelidas gravitatoriamente por la pared de dominio y dos paredes de dominio se repelan entre sí. Sin embargo, esto es un artefacto consecuencia de que las paredes sean infinitas. A grandes distancias una pared esférica de radio R se comporta como una partícula de masa $m \sim 4\pi R^2\eta$.

La separación típica de las paredes de dominio vendrá dada por la longitud de correlación del campo, ξ , y esta misma distancia también determina el radio de curvatura de estos defectos en la red estocástica que se forma en la transición de fase.

De la misma manera que una membrana sometida a una tensión superficial tiende a minimizar el área de su superficie, una pared de dominio imita este comportamiento. La evolución de una pared de dominio se puede obtener resolviendo las ecuaciones de movimiento de la manera convencional. Sin embargo, hay otra alternativa: las ecuaciones que describen las minimización del área de la superficie de una pared ideal delgada se pueden derivar de un principio variacional. La acción cuya minimización proporciona las ecuaciones de movimiento es:

$$S_{Wall} = -\eta \int dV = -\eta \int \sqrt{-\gamma} d^3\sigma \quad , \quad (7)$$

donde dV es el volumen espacio-temporal invariante del mundo que barre la pared de dominio y $\sigma^i = (\tau, \sigma^1, \sigma^2)$ las coordenadas en el muro, siendo la primera de tipo tiempo y las dos últimas de tipo espacio. $\gamma = \det(\gamma_{\mu\nu})$, donde $\gamma_{\mu\nu} = \partial_\mu x^\alpha \partial_\nu x^\beta g_{\alpha\beta}$. Resolver estas ecuaciones del movimiento es algo farragoso, pero vamos a estudiar algunas propiedades vagamente considerando que las paredes de dominio siguen la dinámica de una gas ideal que se mueve con velocidad v en un volumen $V \gg \xi$, en el que hay atrapados N paredes de dominio infinitos en el plano $x - y$. Al tensor energía momento total contribuirán todos las paredes de dominio, que se encuentran centradas en puntos $z = z^i$. El tensor energía-momento promediado será

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{\int dz T_{\mu\nu}(z)}{\int dz} = \frac{\int dz \int dz' f(z') T_{\mu\nu}^W(z - z')}{\int dz} \quad ,$$

donde $f(z) \sim \langle L \rangle^{-1}$ es el promedio de número de paredes de dominio entre z' y $z' + dz'$ normalizado a N , siendo $\langle L \rangle$ el promedio de la distancia de separación entre las paredes, y $T_{\mu\nu}^W(z - z')$ es el tensor energía-momento en la posición z de una pared de dominio situada en z' . Entonces

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle \approx \frac{1}{\langle L \rangle} \int T_{\mu\nu}^W(z) dz = \frac{1}{\langle L \rangle} W_{\mu\nu} \quad . \quad (8)$$

El tensor $W_{\mu\nu}$ recibe el nombre de densidad superficial de energía-momento, con $W_0^0 = \eta$, por lo que $\rho_W = \langle T_0^0 \rangle = \eta / \langle L \rangle$. Si los muros se mueven con una velocidad promedio v en dirección $+\hat{z}$ con respecto a un observador en reposo en la caja, aplicando la transformación de Lorentz correspondiente al $W_{\mu\nu}$ resulta:

$$W_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^2\eta & 0 & 0 & \gamma^2\eta v \\ 0 & -\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta & 0 \\ \gamma^2\eta v & 0 & 0 & \gamma^2\eta \end{pmatrix} \quad , \quad (9)$$

donde $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. Las paredes de dominio que se mueven en dirección $-\hat{z}$ tienen el mismo pero cambiando $v \rightarrow -v$. Entonces, los elementos fuera de la diagonal se anulan al sumar.

Repetiendo el proceso para velocidades en las direcciones $\pm\hat{x}$ y $\pm\hat{y}$ se obtiene el siguiente tensor energía-momento promedio para un gas perfecto de paredes de dominio:

$$\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle = \frac{\eta}{3\langle L \rangle} \begin{pmatrix} 3\gamma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (v^2\gamma^2 - 2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (v^2\gamma^2 - 2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (v^2\gamma^2 - 2) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Con la convencional definición de densidad de energía $\rho_W = \langle T_0^0 \rangle$ y presión $p_W = -\langle T_i^i \rangle$ la ecuación de estado para el gas de paredes de dominio es:

$$p_W = (v^2 - 2/3)\rho_W \quad (11)$$

Recordemos ahora un resultado general de la cosmología. Si se puede expresar la ecuación de estado como $p = \omega p$, entonces la densidad de energía evoluciona como $\rho \propto R^{-3(1+\omega)}$ y el factor de escala $R(t) \propto t^{2/3(1+\omega)}$. Se concluye entonces que la evolución del sistema depende de la velocidad media.

El resultado para velocidades no relativistas ($v = 0$) es $\rho_W \propto R^{-1}$ y $R \propto t^2$. Esto es un resultado que intuitivamente se puede razonar de la siguiente forma: en este límite el gas de paredes de dominio se estira conformemente aumentando como R , el área crece como R^2 y la densidad de número de paredes de dominio decrece como R^{-3} . Como la masa de la pared de dominio es proporcional a su área y la densidad de energía es proporcional al producto de la masa por la densidad de número de barreras de dominio, ésta decrece como R^{-1} .

Es de esperar un rápido corrimiento al rojo de las velocidades de las paredes de dominio tras su formación en el Universo temprano, y si la densidad es suficiente, estos defectos topológicos dominarán a radiación ($\rho_R \propto R^{-4}$) y materia ($\rho_M \propto R^{-3}$), alterando drásticamente la cosmología estándar, lo cual supone un grave problema.

3.1.2. Papel en cosmología y astrofísica

La existencia de paredes de dominio en el Universo actual queda descartada debido a que su contribución a la densidad de masa total es mucho mayor que cualquier límite aceptable. Por ejemplo, una pared de dominio de tamaño $H_0^{-1} \sim 10^{28}h^{-1}$ cm tendría una masa del orden de $\eta H_0^{-2} \sim 4 \cdot 10^{65} \lambda^{1/2} (\sigma/100\text{GeV})^3$ gramos, es decir, $10^{10} \lambda^{1/2} (\sigma/100\text{GeV})^3$ veces la masa que hay en el presente contenida en el volumen de Hubble.

Este no es el único problema, ya que una anisotropía tan colosal causaría fluctuaciones térmicas en el CMB que están por encima de las observaciones a no ser que σ sea demasiado pequeño. Una estimación de estas fluctuaciones es $\delta T/T \sim G\eta H_0^{-1} \sim 10^{10} \lambda^{1/2} (\sigma/100\text{GeV})^3$.

La conclusión es que los muros de dominio son un desastre cosmológico a no ser que la constante de acoplo sea muy pequeña [Zel'dovich et al., 1974]. Aunque sean un defecto inevitable de las transiciones de fase, existen alternativas y trucos para evitarlos, tal y como se comentará más adelante en el caso particular del axión [Sikivie, 2008].

3.2. Cuerdas

3.2.1. Ejemplo: modelo de Higgs abeliano con ruptura de simetría gauge $U(1)$

Esta sección tiene la misma filosofía que la anterior y en muchas ocasiones los razonamientos van a ser parecidos, por lo que no los voy a volver a exponer detalladamente. Vamos a empezar

estudiando la aparición de cuerdas en un sencillo modelo de Higgs abeliano con una simetría gauge $U(1)$ rota espontáneamente. El lagrangiano del modelo contiene un campo gauge $U(1)$, A_μ , y un campo de Higgs complejo, Φ , que lleva la carga e ,

$$\mathcal{L} = D_\mu \Phi D^\mu \Phi^\dagger - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2, \quad (12)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ D_\mu \Phi &= \partial_\mu \Phi - ie A_\mu \Phi \end{aligned} \quad (13)$$

La teoría tiene una ruptura espontánea de la simetría cuando el potencial se minimiza para $\langle |\Phi| \rangle^2 = \sigma^2/2$. De acuerdo con la teoría de Goldstone los estados físicos tras esta ruptura de la simetría son un bosón escalar de masa $m_s^2 = 2\lambda\sigma^2$ y un bosón vectorial de masa $m_v^2 = e^2\sigma^2$. El campo complejo de Higgs se puede escribir en función de dos campos escalares reales: $\Phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$. Si el valor esperado de vacío se elige en la dirección real el potencial pasa a ser el conocido $V(\phi) = (\lambda/4)(\phi^2 - \sigma^2)^2$, y $\langle |\Phi| \rangle = \langle \phi \rangle / \sqrt{2}$. La energía no determina la fase del campo, ya que su energía únicamente depende de su modulo, siendo consecuencia de la simetría $U(1)$ del gauge. Definamos $\langle \Phi \rangle = (\sigma/\sqrt{2}) \exp(i\theta)$, donde θ puede depender de la posición. Φ debe ser una función monovaluada, por lo que el cambio de θ , $\Delta\theta$, alrededor de cualquier curva cerrada debe ser un múltiplo entero de 2π . Ahora bien, si $\Delta\theta = 2\pi$, encogiendo el camino a un punto (sin singularidades) no se puede transformar continuamente de forma que $\Delta\theta$ pase de 2π a 0. Por tanto, debe haber un punto en el que la fase no está definida, por lo que $\langle \Phi \rangle = 0$. Esta región de falso vacío en el interior del camino es una parte de un tubo de falso vacío cuya dimensión transversa es mucho menor que su longitud, así que nos referimos a ellos como defectos unidimensionales llamados cuerdas. Estas estructuras deben ser infinitas o cerradas, ya que si no habría una forma de deformar el camino de forma continua y encogerlo hasta un punto sin pasar por el tubo.

Las cuerdas y sus ecuaciones de movimiento aparecieron por primera vez en la solución de [Nielsen and Olesen, 1973]. En puntos alejados de una cuerda infinita que tiene dirección en el eje z la solución es

$$\begin{aligned} \Phi &\longrightarrow (\sigma/\sqrt{2}) \exp(iN\theta) \\ A_\mu &\longrightarrow -ie^{-1} \partial_\mu [\ln(\sqrt{2}\Phi/\sigma)] \end{aligned}, \quad (14)$$

donde θ es el ángulo polar en el plano $x - y$ y N es el *winding number* de la cuerda. Esta solución es de energía finita, ya que a largas distancias $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$ y $D_\mu \Phi \rightarrow 0$ (se cancelan contribuciones de ∂_μ con las de A_μ). El gauge A_μ no se puede rotar en todos los puntos al vacío por una transformación de gauge regular cuando $n \neq 0$. Esto se puede ver aplicando el teorema de Stokes a un camino cerrado:

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{2\pi n}{e}, \quad (15)$$

que se interpreta como un flujo magnético Φ_B fluyendo a lo largo de la cuerda al igual que las líneas de flujo cuantizadas de los superconductores [Abrikosov, 1957]. Las configuraciones de cuerdas menos energéticas tienen *winding number* $N = \pm 1$.

La anchura de las cuerdas está determinada por las longitudes de onda Compton de los bosones del Higgs y gauge: $\delta_\phi \sim m_s^{-1}$ y $\delta_A \sim m_v^{-1}$. Si $m_v > m_s$ la cuerda tiene un núcleo interno

de falso vacío de densidad de masa lineal $\mu_\phi \sim \lambda\eta^4\delta_\phi^2 \sim \eta^2$ y un tubo de flujo magnético de radio menor, δ_A , con una densidad de masa $\mu_A \sim B^2\delta_A^2 \sim \eta^2$. Entonces, se puede dar una estimación de la masa por unidad de longitud de la cuerda como $\mu \sim \eta^2$. Cabe mencionar que aunque no existe una solución general para las ecuaciones de Φ y A_μ acopladas, se puede obtener una solución aproximada de las cuerdas tal y como se muestra en [Kolb and Turner, 1990], pudiéndose calcular μ de forma más rigurosa a partir del Hamiltoniano.

El tensor energía momento, de acuerdo con [Förster, 1974] es

$$T_\nu^\mu = \mu\delta(x)\delta(y)\text{diag}(1, 0, 0, 1) , \quad (16)$$

donde μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda. Para obtener esta forma diagonal Vilekin impuso la condición de conservación $T_{,\nu}^{\mu\nu} = 0$. Se puede observar que la presión es negativa, actuando como una tensión para la cuerda, con el mismo valor que la densidad de energía pero signo opuesto. Esto quiere decir que, al igual que las paredes de dominio, las cuerdas son objetos intrínsecamente relativistas. Otra característica que comparten con las paredes de dominio es que hay efectos gravitacionales no Newtonianos asociados a ellas. En este caso la ecuación de Poisson es $\nabla^2\phi = 0$, lo cual sugiere que el espacio es plano fuera de una cuerda infinita recta. Si nos alejamos lo suficiente un loop de cuerda de radio R tiene el mismo efecto gravitatorio que una masa $M_{string} = 2\pi R\mu$.

Cuando se rompe una simetría $U(1)$ se formará una red estocástica de cuerdas. Dicha red inicial está constituida por cuerdas infinitas (alrededor del 80 % en masa), entendidas como cuerdas que se escapan del horizonte, y cuerdas cerradas en loops (alrededor del 20 % en masa), hecho comprobado a partir de simulaciones numéricas llevadas a cabo por distintos autores que han estudiado su formación y evolución. Una vez formada la red de cuerdas será estirada conformemente por la expansión del Universo. Además, debido a la tensión de la cuerda tenderán a enderezarse. A escalas mayores que H^{-1} domina el estiramiento conforme, mientras que a escalas menores que H^{-1} domina la tensión de la cuerda.

Para hacernos una idea superficial del comportamiento y evolución de estas cuerdas, siguiendo el mismo razonamiento que en la sección de las paredes de dominio, vamos a suponer que se comporta como un gas ideal y veamos a dónde nos lleva. Si se mueven con una velocidad media v , el tensor energía-momento promedio es

$$\langle T_\nu^\mu \rangle = \frac{\mu}{3\langle L \rangle^2} \begin{pmatrix} 3\gamma^2 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (v^2\gamma^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (v^2\gamma^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (v^2\gamma^2 - 1) \end{pmatrix} , \quad (17)$$

lo cual nos lleva a la ecuación de estado

$$p_s = (2v^2/3 - 1/3)\rho_s . \quad (18)$$

Teniendo en cuenta lo mencionado en la sección anterior acerca la relación entre la evolución del factor de escala y las ecuaciones de estado de esta forma, se concluye entonces que al igual que en el caso de los muros de dominio, la evolución de densidad de cuerdas depende de su velocidad media. Si $v \approx 0$ (no relativistas), entonces $\rho_s \propto R^{-2}$ y $R(t) \propto t$.

De la misma forma, tenderían a dominar rápidamente la densidad de masa del Universo, por lo que resultarían ser otros desastres para la cosmología estándar. Ahora bien, la aproximación

de gas ideal para las cuerdas es demasiado burda, ya que en su evolución hay que incluir dos importantes efectos que se pierden en un sistema sin interacciones como es el gas ideal. Estos efectos son la intercomunicación de segmentos de cuerdas que se intersectan, que hace que las cuerdas grandes se vayan fragmentando en loops más pequeños, y la desintegración de los pequeños loops por la emisión de axiones y ondas gravitacionales.

Para seguir la evolución de la red rigurosamente uno necesitaría sacar sus ecuaciones del movimiento a partir de los campos ϕ y A_μ . Sin embargo, para una cuerda ideal fina se pueden obtener a través de un principio variacional con la acción de Nambu:

$$S_{string} = -\mu \int dA = -m\mu \int \sqrt{-\gamma} d^2\sigma \ , \quad (19)$$

donde dA es el área invariante del *world sheet* que barre el movimiento de la cuerda y $\sigma^i = (\tau, \sigma)$ son las coordenadas en el mundo de la cuerda, siendo τ de tipo tiempo y σ de tipo espacio. Las coordenadas espacio-temporales son funciones de estas coordenadas, $x^\mu(\sigma, \tau)$, y $\gamma = \det(\gamma_{\mu\nu})$ con $\gamma_{\mu\nu} = \partial_\mu x^\alpha \partial_\nu x^\beta g_{\alpha\beta}$. La interpretación física detrás de todo esto es intuitiva: una cuerda evoluciona para minimizar su longitud, y con ello el área de su *world sheet*.

Con una buena elección de coordenadas las ecuaciones del movimiento tienen una forma muy simple:

$$\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{x}'' = 0 \ , \quad (20)$$

con $\dot{\mathbf{x}}^2 + \mathbf{x}'^2$ y $\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}' = 0$. El punto denota derivada temporal y la prima respecto a σ , proporcional a la posición en la cuerda.

Esta ecuación del movimiento manifiesta la naturaleza oscilatoria de la solución. La tensión de la cuerda provoca que un loop de radio R oscile relativistamente con un periodo $\tau \sim R$. Esta oscilación hace que aparezca un momento cuadrupolar que varía en el tiempo, $Q \sim \mu R^3$, por lo cual se emiten ondas gravitacionales. La potencia de esta radiación es aproximadamente $P_{GW} \approx G(\ddot{Q})^2 \approx \gamma_{GW} G \mu^2$, con γ_{GW} una constante numérica de orden 100 según [Vachaspati and Vilenkin, 1985]. Entonces, en un tiempo característico τ_{GW} el loop habrá radiado toda su energía en forma de ondas gravitacionales, se encogerá y desaparecerá.

$$\tau_{GR} \sim \mu R / P_{GW} \sim (\gamma_{GW} G \mu)^{-1} R \ . \quad (21)$$

Se concluye que al cabo de $10^{-2}(G\mu)^{-1}$ oscilaciones el loop desaparecerá. Otra pieza crucial en la comprensión de la evolución de la red de cuerdas, como se ha dicho antes, es la intercomunicación. Este fenómeno consiste en el intercambio de partes de cuerdas cuando se intersectan, en lugar de atravesarse simplemente. De acuerdo con las simulaciones numéricas, la probabilidad de que esto ocurra es cercana a la unidad, por lo que no se debe ignorar. En el proceso de intercomunicación cuerdas largas se pueden cortar y formar loops más pequeños. Esto constituye un mecanismo de regulación de la energía en la red, ya que la densidad de energía de una cuerda lenta decrece con R^{-2} , mientras que la densidad de energía de un loop decrece con R^{-3} hasta que se evapora en forma de ondas gravitacionales.

En los experimentos numéricos también se observa que después de que se produzca la red de cuerdas pasa rápidamente a una solución de escala. Si el Universo está dominado por radiación

$$\rho_S \sim 30\mu/t^2 \ , \quad (22)$$

de modo que $\rho_S \propto R^{-4}$ y el ratio entre densidad de energía de las cuerdas y radiación permanece fijo en

$$\frac{\rho_S}{\rho_R} \approx 30 \frac{32\pi}{3} G\mu . \quad (23)$$

La mayor parte de esta energía está almacenada en unas pocas hebras infinitas por volumen del horizonte, con el resto almacenada en una distribución invariante de escala de loops. La densidad de número de loops en un instante t con energía entre E y $E + dE$ es:

$$n_{loop}(E, t)dE \approx 0,3 \left(\frac{\mu t}{E} \right)^{3/2} \frac{dE}{Et^3} , \quad (24)$$

teniendo en cuenta que el valor eficaz del radio de un loop de energía E es $R = E/2\pi\mu$. El tamaño de estos loops varía desde el tamaño del horizonte hasta el correspondiente a la energía mínima de una cuerda, ya que se producen por el cruce de cuerdas más grandes.

De forma inocente, se puede estimar la densidad de energía total de los loops como

$$\rho_{loop} = \int_{E_{min}}^{\mu t} E n_{loop} dE \approx 0,6 \mu^{3/2} t^{-3/2} E_{min}^{-1/2} . \quad (25)$$

De aquí se concluye que $\rho_{loop} \propto t^{-3/2} \propto R^{-3}$ y que diverge con $E_{min}^{-1/2}$. De acuerdo con esto las cuerdas cósmicas, al igual que las paredes de dominio, serían una catástrofe cosmológica ya que dominarían rápidamente la densidad del Universo. Sin embargo, la verdad es más sutil. Un loop lleva a cabo oscilaciones del orden de $(\gamma_{GW}G\mu)^{-1}$ radiando su energía en forma de ondas gravitacionales. Esto implica que a tiempo t el loop más pequeño tiene una longitud característica $R_{min} \sim \gamma_{GW}G\mu t$, a la que corresponde una energía $E_{min} \sim \gamma_{GW}G\mu^2 t$. Teniendo esto en cuenta la densidad de energía en los loops es

$$\rho_{loop} \sim (\gamma_{GW}G\mu)^{-1/2} \mu/t^2 , \quad (26)$$

que escala de la misma manera que la densidad de energía en cuerdas largas.

Todo lo que hemos discutido hasta ahora es válido para una ruptura de simetría $U(1)$ local. Sin embargo, el campo del axión sufre una ruptura de la simetría $U(1)$ global. Muchas de las ideas que se han expuesto hasta ahora se pueden extender a este último caso, pero hay que tener en cuenta unas cuantas sutilezas. Por ejemplo, para este tipo de cuerdas el campo gauge no compensa la variación de fase a grandes distancias, por lo que la energía por unidad de longitud es divergente. Para una cuerda con $N = 1$ se tiene

$$\mu \sim \eta^2 + \int_{\delta}^R \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]^2 2\pi r dr \approx 2\pi \eta^2 \ln \left(\frac{R}{\delta} \right) , \quad (27)$$

donde δ es la anchura del núcleo de la cuerda y R es un límite de corte que, dependiendo de la situación física en la que nos encontremos, puede ser un radio de curvatura de la cuerda o la distancia a las cuerdas más próximas. El factor logarítmico refleja un acoplo al bosón de Goldstone del campo, que implica interacciones de largo alcance en la cuerda con una fuerza $F \sim \eta^2/R$. Se puede encontrar un representante de este caso en los vórtices de un superfluido, conocidos y ampliamente estudiados en física de la materia condensada.

3.2.2. Papel en cosmología y astrofísica

Las cuerdas cósmicas, a diferencia de las paredes de dominio, son estructuras seguras en el sentido cosmológico siempre y cuando no excedan unos límites acotados por medidas observacionales. En esta sección vamos a repasar algunas manifestaciones astrofísicas y cosmológicas así como los límites que imponen.

Muchas de los fenómenos asociados a las cuerdas cósmicas son consecuencia de la naturaleza cónica de su solución. Se puede resolver las ecuaciones de Einstein para la métrica en las afueras de una cuerda cósmica en el límite $G\mu \ll 1$ con coordenadas cónicas [Vilenkin, 1981]. En tal caso la métrica es

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - dr^2 - (1 - 4G\mu)^2 r^2 d\theta^2 . \quad (28)$$

Aquí θ es el ángulo polar, pero r no es el radio usual de las coordenadas cilíndricas. Con una transformación polar $\theta \rightarrow (1 - 4G\mu)\theta$ la métrica pasa a ser la de un espacio plano de Minkowski con una singularidad cónica, pues el ángulo polar solo está definido en $0 \leq \theta \leq 2\pi(1 - 4G\mu)$. Conviene introducir el término $G\mu \approx \pi(\sigma/m_P)^2 \approx 10^{-6}(\sigma/10^{16}\text{GeV})^2$, que va a ser un factor recurrente en los efectos gravitacionales de las cuerdas. Uno de los efectos que tiene la naturaleza cónica de las cuerdas es que pueden funcionar como lentes gravitacionales, duplicando la imagen de lo que tienen detrás.

$$\delta\alpha \approx \delta\theta \frac{l}{d+l} = 8\pi G\mu \frac{l}{l+d} , \quad (29)$$

donde $\delta\alpha$ es la distancia angular entre las dos imágenes desde la tierra, $\Delta\theta$ es la distancia angular de las imágenes desde la cuerda, d es la distancia Tierra-cuerda y l distancia cuerda-objeto real.

Esto puede proporcionar una herramienta para detectar una cuerda cósmica que haya sobrevivido hasta nuestros tiempos a partir de observaciones astronómicas de fuentes emisoras de luz duplicadas.

Otra consecuencia de la naturaleza cónica de las cuerdas son discontinuidades en la temperatura del CMB. Supongamos un emisor en la superficie de última dispersión de la radiación de fondo. Un observador en reposo respecto a la cuerda verá la fuente duplicada con una separación $\delta\alpha \approx \Delta\theta$ ($d \ll l$). Si el observador no está en reposo sino que se mueve con velocidad v perpendicular a la línea de visión habrá un pequeño corrimiento Doppler de la temperatura de radiación del orden de

$$\frac{\delta T}{T} \approx 8\pi G\mu v . \quad (30)$$

Con esto se puede poner una cota al parámetro $G\mu \leq 10^{-5}$ a partir de las medidas de anisotropía del CMB.

Tal y como se ha mencionado anteriormente los loops de cuerdas cósmicas pierden su energía radiando ondas gravitacionales. El resultado es un espectro de ondas gravitacionales que pueden llegar hasta hoy. La cota superior al número de neutrinos ligeros que impone la nucleosíntesis primordial pone un límite al valor del cociente entre densidad de energía de las ondas gravitacionales y radiación, que se manifiesta en un límite de $G\mu \leq 4 \cdot 10^{-5}$ [Davis, 1985], aunque hay otras cotas que dependen de otro tipo de modelos [Vilenkin and Shellard, 2000] (en particular de gran unificación). Por otra parte, también se puede encontrar una cota inferior para $G\mu$ a partir de las medidas de púlsares que obligan a que $\mu > 10^{-6}$.

Las cuerdas cósmicas pueden ser semillas en la formación de estructuras debido a la estructura cónica del espacio-tiempo. Cuando una cuerda se mueve por el Universo con una velocidad v las

partículas cercanas que tienen una velocidad de dispersión pequeña (como materia oscura fría o bariones tras el desacoplo) adquieren una velocidad transversa a la dirección de movimiento de la cuerda $v_W \approx 4\pi G\mu v$. Entonces, la materia se mueve hacia el plano definido por el movimiento de la cuerda, pudiendo ser esto un mecanismo de acumulación de materia [Charlton, 1987]. Esta no es la única manera con la que las cuerdas cósmicas pueden jugar un papel crucial en la formación de estructuras. En [Witten, 1985] se discute que con una extensión del modelo de Higgs no Abelian con $G\mu \approx 10^{-6}$ una cuerda puede ser superconductora, con corrientes de bosones o fermiones altas, y que la desintegración electromagnética explosiva de loops de este tipo de cuerdas también podrían ser semillas para las estructuras astrofísicas. Por último, cabe destacar estudios recientes sobre el papel de las estructuras de cuerdas y muros de dominio axiónicos sobre la estructura a pequeña escala de pequeños cúmulos de materia oscura en un escenario post-inflación como [Vaquero et al., 2019].

4. El axión como candidato a materia oscura

Muchas de las especulaciones teóricas sobre física más allá del modelo estándar involucran escalas de energía imposibles de alcanzar en los experimentos de laboratorio actuales. Afortunadamente, para superar este frustrante impedimento en ocasiones es suficiente con alzar la vista al firmamento para recuperar la esperanza, al Laboratorio Celestial. Así pues, por ejemplo, el Universo temprano y algunos objetos astrofísicos son claves para la búsqueda de candidatos a materia oscura como el axión.

El axión es una partícula predicha por la solución al *Strong-CP problem* de QCD: la simetría de Peccei-Quinn. En este contexto la masa del axión es un parámetro libre en un rango que comprende varios órdenes de magnitud desde 10^{-12} eV hasta 1MeV, aunque experimentalmente en astrofísica ha sido posible excluir unos 7 de estos órdenes de magnitud y otros tanto cosmológicamente dependientes de modelo, quedando un número reducido de ventanas. Además, si el axión existe tiene notorias consecuencias cosmológicas y astrofísicas a partir de las cuales se podría adivinar su existencia de forma indirecta.

Un interesante y exhaustivo repaso de la necesidad del axión, los problemas que soluciona y varios efectos cosmológicos se puede encontrar en [Wantz and Shellard, 2010], algunas de cuyas discusiones se han incorporado a lo largo de esta memoria. Para una lectura más amena y relajada se recomienda la lectura de una divertida analogía entre una mesa de billar y el axión para entender su papel en física de partículas y la cosmología [Sikivie, 1995].

4.1. El axión y el *Strong-CP problem*

La cromodinámica cuántica está aceptada por la comunidad científica como la teoría que describe la interacción fuerte, pero tiene un serio inconveniente que ha sido bautizado como *Strong-CP problem* [t Hooft, 1976]. Este problema tiene su origen en que los efectos no perturbativos de QCD violan las simetrías discretas CP, T y P; y a no ser que se supriman darían lugar a un momento dipolar magnético del neutrón que está varios órdenes de magnitud por encima del valor real medido en el laboratorio.

Las teorías de gauge no Abelianas tienen complejas estructuras de vacío debido a la existencia de configuraciones gauge de vacío no triviales caracterizadas por distintas clases de homotopía, de forma que no se pueden deformar continuamente para pasar de unas a otras. Un parámetro

que recoge este hecho es el llamado *winding number*.

Podemos expresar un estado θ de vacío como:

$$|\theta\rangle = \sum_n \exp(-in\theta) |n\rangle . \quad (31)$$

El lagrangiano de QCD tiene la forma:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{pert} + \frac{g^2}{32\pi^2} \bar{\theta} G^{a\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu} ; \quad \bar{\theta} = \theta + \text{Arg}[\det(\mathcal{M})] , \quad (32)$$

donde $G^{a\mu\nu}$ es el tensor del campo de gluones, $\tilde{G}^{a\mu\nu}$ es su tensor dual y \mathcal{M} es la matriz de masa de los quarks. Se ha separado el lagrangiano en una parte perturbativa y otra no perturbativa, a la que ahora en adelante me referiré como $G\tilde{G}$. Es este último término el que viola CP, P y T. Las precisas medidas del momento dipolar eléctrico del neutrón $d_n \leq 10^{-26} e \text{ cm}$, que es proporcional a $\bar{\theta}$, acota superiormente el posible valor de este último parámetro en $\bar{\theta} < 10^{-10}$ de acuerdo a las observaciones más recientes. Por qué $\bar{\theta}$ es tan pequeño, cercano al cero, es una cuestión intrigante, pues no hay ningún motivo aparentemente para que lo sea.

El término no perturbativo procede de dos efectos independientes: la estructura θ del vacío de QCD y los efectos de interacciones de Yukawa que involucran las masas de los quarks. Si una o más especies de quarks no tuviese masa los efectos electrodébiles no tendrían relevancia física y el término de θ se podría rotar mediante una rotación quirral de los campos de quarks deshaciendo el problema. Sin embargo, este no parece ser el caso, por lo que en el término efectivo $G\tilde{G}$ hay que tener en cuenta dos contribuciones independientes.

Uno podría estar tentado a ignorar esta intrigante contribución topológica con la esperanza de que los futuros avances teóricos fuesen capaces de explicar su ausencia, pero nos puede beneficiar de otras maneras. En ausencia de término $G\tilde{G}$ uno esperaría cuatro bosones de Nambu-Goldstone cuando la simetría global $U(2)_L \times U(2)_R$ que posee el lagrangiano de QCD con solo dos sectores de quarks (u,d) se rompe espontáneamente por efectos no perturbativos de QCD. Estos bosones resultantes no son otros que los mesones π y η' , siendo éste último el modo de Goldstone de la subsimetría global rota $U(1)_A$ con quarks u y d masivos. Esta teoría predice la desigualdad $m_{\eta'} \leq \sqrt{3}m_\pi$, hecho no observado en la realidad [Weinberg, 1975]. θ resuelve el problema $U(1)_A$ mediante las configuraciones topológicamente no triviales del vacío.

4.2. La solución de Peccei-Quinn

La idea es hacer $\bar{\theta}$ una variable dinámica que evoluciona a cero para minimizar su potencial. Esto se consigue introduciendo una simetría global adicional, la simetría de Peccei-Quinn (PQ), que se rompe espontáneamente en una escala energética f_{PQ} [Peccei and Quinn, 1977].

Weinberg y Wilczek sugirieron que como $U(1)_{PQ}$ es una simetría global rota, debe haber un bosón de Nambu-Goldstone asociado, que no es otro que el axiÓN ([Weinberg, 1978] y [Wilczek, 1978]). Esta partícula, siguiendo este razonamiento debería de no tener masa, pero debido a la anomalía quirral posee una pequeña masa $\sim \Lambda_{QCD}^2 / f_{PQ}$, donde Λ_{QCD} es la escala de energía de la transición de fase de QCD.

Incorporando esta idea al lagrangiano de QCD, queda:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \dots + N_{DW} \frac{a}{f_{PQ}} \frac{g^2}{32\pi} G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a , \quad (33)$$

donde ... es la expresión del lagrangiano (32). El sumando que se añade anula la parte perturbativa que viola las simetrías CP, P y T cuando el potencial del axión se minimiza en

$$\langle a \rangle = -\frac{\bar{\theta} f_{PQ}}{N_{DW}} . \quad (34)$$

Cabe destacar que aunque la simetría PQ es una simetría clásica del lagrangiano hay efectos cuánticos que rompen la simetría. El campo a es el campo del axión. Expandiendo el campo del axión en torno a su valor esperado en el vacío $\langle a \rangle$, ($a \rightarrow a - \bar{\theta} f_{PQ}/N_{DW}$):

$$\mathcal{L}_{axion} = \frac{1}{2} \partial^\mu a \partial_\mu a + N_{DW} \frac{a}{f_{PQ}} \frac{g^2}{32\pi^2} G^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a . \quad (35)$$

El parámetro $\bar{\theta}$ ha sido reemplazado efectivamente por el campo dinámico del axión, que adquiere masa debido a los efectos no perturbativos de $G\tilde{G}$.

Se puede concluir entonces que el precio de resolver el *Strong-CP problem* es la ruptura espontánea de una simetría global y la aparición de un pseudo-bosón de Goldstone: el axión.

4.3. Cosmología del axión

El axión y su resultado como una ruptura espontánea de la simetría PQ tienen profundas implicaciones cosmológicas, tal y como se trata en textos como [Sikivie, 2008], [Wantz and Shellard, 2010] o [Kolb and Turner, 1990]. Hagamos un repaso de algunas de ellas.

El axión se postula como un candidato de materia oscura capaz de explicar la abundancia de materia oscura en el Universo y los demás fenómenos astrofísicos. Consideremos un campo complejo Peccei-Quinn (PQ) $\phi = \phi_1 + i\phi_2$. Dicho campo se puede separar también en módulo y fase $|\phi|e^{i\theta}$. La fase se manifiesta como el campo del axión, definido como $\theta = a(x)/f_a$, donde f_a es la constante de desintegración de los axiones.

Las ecuaciones de la evolución del campo se obtienen minimizando la acción

$$S = \int d^3x dt \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) , \quad (36)$$

donde g es el determinante de la métrica FLRW $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -R^2, -R^2, -R^2)$. La densidad de energía potencial se puede expresar como $V(\phi) = V_{PQ}(|\phi|) + V_{QCD}(\theta)$. Tenemos libertad para elegir V_{PQ} , y para manifestar la ruptura de la simetría de manera sencilla se suele elegir el potencial tipo sombrero mejicano

$$V_{PQ}(|\theta|) = \frac{\lambda_\phi}{4} (|\phi|^2 - f_a^2)^2 , \quad (37)$$

con λ_ϕ una constante arbitraria. La fase de ruptura espontánea de la simetría vendrá dada por $|\phi| = f_a$. La expresión de $V_{QCD}(\theta)$ es un poco más compleja, pues tiene su origen en configuraciones topológicas no perturbativas y no triviales del campo de gluones llamadas instantones, siendo muy sensible a la temperatura. Aunque en principio se podría calcular a partir de estudios numéricos de QCD en el retículo, hay dificultades técnicas severas asociadas al *problema del signo*. Sin embargo, se conocen dos propiedades que debe tener este potencial: es periódico, en ausencia de otras fuentes de violación de CP tiene un mínimo en $\theta = 0$ (CP se conserva en $\theta = 0$). Afortunadamente, algunas propiedades como la susceptibilidad topológica $\chi = \partial^2 V / \partial \theta^2$ se han calculado en la red para $\theta = 0$ [Borsányi et al., 2016]. La relación entre la masa del axión

y la susceptibilidad topológica es $m_a^2(T) = \chi(T)/f_a$, que en las temperaturas a las que nos interesa puede ser parametrizada por

$$\chi = \chi_0 \left(\frac{T_c}{T} \right)^n \sim \chi_0 \left(\frac{R}{R_c} \right)^n \sim \chi_0 \left(\frac{t}{t_c} \right)^{n/2}, \quad (38)$$

con $\chi_0 = (75,6\text{MeV})^4$ y $n \sim 8,16$. Para $T < T_c = 157 \text{ MeV}$, $\chi = \chi_0$.

A temperaturas muy altas se puede realizar la aproximación de gas de instantones diluidos, con lo que el potencial es de la forma

$$V_{QCD}(\theta) = \chi(T)(1 - \cos(N_{DW}\theta)) \quad (39)$$

N_{DW} está relacionado con el número de vacíos equivalentes que aparecerá.

La historia cosmológica de los axiones empieza con la ruptura de la simetría PQ, que ocurre a una temperatura del orden de $T \sim f_a$, en la cual ϕ , que es portador de la carga PQ, pasa a tener un valor esperado no nulo en $|\phi| = f_a$, dejando su argumento como grado de libertad. Mientras la temperatura es muy alta ($T \gg \Lambda_{QCD}$) la susceptibilidad topológica es muy pequeña, por lo que el axión no tiene masa y la aportación de V_{QCD} es despreciable. Los efectos del potencial del axión comienzan a ser relevantes cuando el tiempo es del orden de $1/m_a$, lo cual sucede alrededor de Λ_{QCD} , aunque naturalmente depende de f_a .

Los axiones en la actualidad son partículas reliquias que han sobrevivido desde los tiempos del Universo temprano, por lo que su abundancia es una cuestión sensible a los mecanismos de generación de estas partículas. Aquí se van a discutir tres vías de producción:

- Generación térmica de axiones relativistas: siguiendo el convencional proceso de exclusión del equilibrio (*freeze-out*), cuando el ritmo de interacción de los procesos entre axiones relativistas y otras partículas es incapaz de seguir el ritmo de expansión del Universo, manifestándose en que los tiempos de estas reacciones pasan a ser mayores que la edad del Universo, quedándose congelada una población de axiones fuera del equilibrio de las demás partículas. Esto suele ocurrir a cierta temperatura.
- Producción por desalineación: proceso no térmico relacionado con la relajación del ángulo θ . Se puede demostrar a partir de la minimización de la acción que la evolución del ángulo θ es

$$\ddot{\theta} + 3H\dot{\theta} - \nabla^2\theta + \frac{1}{f_a^2}\partial_\theta V_{QCD} = 0, \quad (40)$$

Cuando la masa del axión comienza a ser relevante, θ se desplaza desde el ángulo inicial hasta el mínimo, oscilando como un oscilador armónico amortiguado. La expansión del Universo, H , actúa como un rozamiento. El momento en el que θ comienza a desplazarse hacia el mínimo está determinado por una temperatura T_1 definida como $H(T_1) = m_a(T_1)$, es decir, el momento en el que la masa del axión crece lo suficiente como para superar el rozamiento de la expansión. Estas oscilaciones coherentes se manifiestan en forma de axiones, cuya población por unidad de volumen será un invariante en la expansión adiabática del Universo, llegando hasta nuestros tiempos. Nótese que no hay ninguna preferencia en la elección del ángulo inicial, pues la fase del campo PQ no tiene ninguna preferencia cuando adquiere un valor esperado de vacío no nulo al producirse la transición de fase. Las abundancias finales son sensibles a las condiciones iniciales.

- Desintegración de cuerdas axiónicas: para mantener una solución de escala las cuerdas se cortan y forman loops, que posteriormente se deintegran. La forma de desintegración primaria de las cuerdas axiónicas es la emisión de axiones, no la de ondas gravitacionales, por lo que su desintegración deja como resultado una población de axiones. Sin embargo, esto cambia cuando se forma una red de paredes de dominio cuando el axión adquiere masa.

Para una comprensión más profunda y cuantitativa de las poblaciones finales en cada uno de los procesos anteriores se puede consultar [Kolb and Turner, 1990].

5. Evolución de los defectos topológicos axiónicos

En la evolución de los defectos topológicos entran en juego distintas escalas de tiempo que caracterizan su comportamiento. En esta sección se procede a hacer un repaso por los más significativos, utilizando un programa de simulación del campo del axión para comprobar las ideas que se expondrán.

5.1. Simulación

El programa tiene por nombre *jaxi*⁴, su código numérico está basado en el paralelismo MPI/OpenMPI y está preparado para ejecutarse de manera eficiente en clusters de grandes ordenadores.

Se trata de un programa no comercial, por lo que gran parte del tiempo y el esfuerzo se ha dedicado, en primer lugar a conseguir compilarlo, y en segundo lugar, a manejarlo correctamente para ejecutarlo y extraer información posteriormente.

La compilación no fue una tarea sencilla. Primero fue necesario familiarizarse con el uso de la terminal de un sistema operativo de la distribución de Linux como es Ubuntu. Para compilar y ejecutar el programa es necesaria una gran cantidad de librerías, cada una de las cuales tuvo que ser instalada. Destacamos, entre estos programas y librerías, *gcc* (compilador de C), *cmake* (herramienta multiplataforma de generación y automatización de código diseñada para construir, probar y empaquetar software controlando procesos de compilación de ficheros), *python* (lenguaje de programación, con un editor como *jupyter notebook* para hacer programas), *hdf5* (diseñados para almacenar y organizar grandes cantidades de datos), *fftw3* (también conocido como *fastest Fourier transform in the West*, es una librería para calcular transformadas de Fourier discretas), *gsl* (librería científica para C y C++) y *Open MPI* (define sintaxis y semántica de una biblioteca de paso de mensajes para ser usada en programas que exploten la existencia de múltiples procesadores, como es el caso de los clusters de grandes ordenadores).

Tras esto, siguiendo unas metódicas instrucciones se compiló, generando el programa, los scripts y la librería de python específica *pyaxions*. Este proceso, así como durante su posterior ejecución, no estuvieron exentos de problemas, pero fueron superados y no merece la pena extenderse más con ellos.

Una vez con todas estas herramientas y el programa a mi disposición, fue necesario descubrir cómo controlarlo. Para ello fueron de gran utilidad unas notas que me proporcionó J.Redondo, uno de los notables desarrolladores y usuarios del código, así como algunos de sus

⁴Es público y se puede encontrar en <https://github.com/veintemillas/jaxions>

recientes trabajos de investigación donde explica su funcionamiento y algunas sutilezas físicas como [Vaquero et al., 2019], siendo también muy útil para familiarizarse con la notación.

En este trabajo no se han explotado todas las posibilidades del programa ni mucho menos. Básicamente se ha utilizado, como es natural, la evolución del campo del axión, algún visualizador de los defectos en la red y la evolución de la densidad de cuerdas y su energía con el tiempo conforme.

Para ejecutar una simulación se introducen los valores de los parámetros que interesan en el fichero *vax-ex.sh*. Los parámetros en los que se han centrado las simulaciones son N (número de puntos en cada eje de la red), m_{sa} (relacionado con la masa del saxion y por tanto con el radio del núcleo de la cuerda), L (controla el tamaño físico del sistema), n (exponente de la susceptibilidad topológica de potencial QCD), i_3 (factor multiplicativo de masa del axión $m_a^2 = i_3 \tau^n$, con τ el tiempo conforme en unidades ADM) y τ_c (timpo cuando masa del axión satura).

Las simulaciones devuelve unos ficheros. Para extraer información de ellos es necesario hacer un programa en python utilizando funciones específicas dedicadas a la gestión de esta información, disponibles en la librería *pyaxions*.

La simulación se ha utilizado como complemento para comprobar los conceptos teóricos que se han manejado. Para familiarizarse con su uso, una de las primeras cosas que se comprobaron fue, para $N_{DW} = 1$, cómo dependía la aniquilación de las cuerdas de la masa del axión, variando parámetros como i_3 o n . Por ejemplo, se comprobó que el momento en el que la densidad de cuerdas caía (como en el caso de la figura 1) se desplazaba hacia la izquierda si se aumentaba i_3 y se marchaba a infinito conforme $i_3 \rightarrow 0$. Esto se debe a que cuanto mayor es i_3 los efectos del potencial QCD se hacen notar antes, se forman antes las paredes de dominio y su tensión hace que colapsen las cuerdas en menor tiempo. Una de las mayores dificultades que se superaron fue la aparición de un pico asociado a la violación de la condición de Moore.

Para más información, es muy recomendable la lectura del apéndice C, donde se detallan cuestiones algo más técnicas y se definen las unidades ADM.

5.2. Formación, época de amortiguamiento y *scaling* de cuerdas cósmicas

La formación de defectos topológicos en las transiciones de fase que tienen lugar en el Universo temprano es inevitable de acuerdo con el mecanismo de Kibble ([Kibble, 1976] y [Kibble, 1980]), que se basa en que la distancia de correlación del campo del axión no puede ser mayor que la distancia del horizonte, por lo que en cada horizonte la elección de estado de vacío degenerado es independiente de los demás. Para más información, se puede consultar el apéndice B. Cuando la simetría de Peccei-Quinn global $U(1)$ se rompe dejando indeterminado el argumento del campo complejo de Peccei-Quinn, que no es otra cosa que el campo del axión, se generan los defectos topológicos de tipo vórtice a los que denominamos cuerdas. Estas cuerdas siguen la dinámica expuesta en la sección 3.2, pero detalleemos algunos aspectos de su evolución que han pasado por alto.

Hay un enorme intervalo de temperatura entre la transición PQ y la transición QCD, durante la cual la red de cuerdas evoluciona de maneras complicadas. Sin embargo, algunas características generales pueden ser abordadas con la termodinámica como aliada. Se sabe que la densidad de energía evoluciona a un régimen de escala en la que la densidad de energía de la cuerda

$$T = K + G + V \propto R^{-4} \quad , \quad (41)$$

donde K , G y V hacen referencia a las contribuciones a la energía total del término cinético, el gradiente y la energía potencial, respectivamente. Cuando se habla de régimen de escala se quiere decir que la densidad de energía de las cuerdas escala de la misma manera que la radiación, como se vio en la ecuación (23).

Para conseguir este régimen de escala es necesario que las cuerdas grandes se vayan fragmentando en loops, que más tarde se desintegran sin causar problemas cosmológicos graves. La energía que se almacena en el gradiente de θ es liberada cuando la longitud de los loops decrecen y colapsan.

Las cuerdas cósmicas, al ser propiamente el campo del axi3n, se desintegran con una eficiencia alta debido a su movimiento y oscilaciones. En t_1 , que se define como el tiempo en el que $H(T_1) = m_a(T_1)$ a partir del cual la masa del axi3n supera la fricci3n de la expansi3n y comienza a desplazarse al m3nimo del potencial QCD, casi todos los axiones son relativistas (solo los axiones del espectro con menor n3mero de onda k han adquirido masa) y contribuyen con m_a a la densidad de energ3a en el presente, por lo que es importante evaluar el n3mero de axiones que resultan de estos proceso. Se hace necesario entonces un riguroso estudio num3rico de las redes de defectos topol3gicos y sus consecuencias, destacando por ejemplo estudios como [Hiramatsu et al., 2013], [Klaer and Moore, 2017] o [Gorghetto et al., 2018].

Cuando se forman las cuerdas quedan atascadas por el plasma mientras son estiradas por la expansi3n del Universo. Manteniendo la suposici3n de que la expansi3n del Universo est3 dominada por la densidad de energ3a de radiaci3n en esta etapa, $R \propto \sqrt{t}$, por lo que la densidad de cuerdas no tarda en ser mayor que una por horizonte. Otro efecto de la expansi3n es que diluye el plasma, llegando un momento, a una temperatura T_* , en el que las cuerdas se liberan. Para $T < T_* = 2 \cdot 10^7 \text{ GeV} (f_a / 10^{12} \text{ GeV})^2$ [Sikivie, 2008] se tiene una red de cuerdas a velocidades relativistas.

En este escenario se puede calcular el n3mero de axiones radiados a partir de un sistema de ecuaciones en las que se tiene en cuenta los cambios en la densidad de energ3a de la cuerda que causa esta emisi3n de axiones [Sikivie, 2008].

5.3. Formaci3n de paredes de dominio

A partir de t_1 el campo del axi3n comienza a responder al potencial de QCD debido a que los efectos no perturbativos de los instantones empiezan a ser relevantes. A esto lo acompa3a una ruptura de la simetr3a discreta \mathcal{Z}_{NDW} , con \mathcal{Z}_{NDW} el subgrupo de $U_{PQ}(1)$ que no se rompe por los efectos no perturbativos de QCD. Esta ruptura se manifiesta en la aparici3n de N_{DW} vac3os degenerados y una red de paredes de dominio, tal y como se introdujo en la secci3n 3.1.1 para el caso part3icular \mathcal{Z}_2 .

En ese momento el t3rmino asociado al potencial de QCD es capaz de hacer frente a la fricci3n de la expansi3n y se desplaza al m3nimo. Entonces, por definici3n, este tiempo τ_1 es tal que $H(\tau_1) \sim m_a(\tau_1)$. La masa del axi3n en el programa se controla a trav3s de dos par3metros, i_3 y n , siendo n el exponente de la dependencia t3rmica de la susceptibilidad topol3gica del potencial de QCD, seg3n la relaci3n $m_a^2 = i_3 \tau^n$. En un Universo dominado por radiaci3n $H = 1/(2t) = H_1 \tau^{-2}$, donde $H_1 = H(\tau_1)$. Gracias a la normalizaci3n de estas unidades en el programa ($H_1 = 1$),

$$H^2(\tau_1) = m_a^2(\tau_1) \Rightarrow H_1^2 \tau_1^{-4} = H_1^2 i_3 \tau_1^n \Rightarrow \tau_1 \approx i_3^{\frac{-1}{n+4}}. \quad (42)$$

Ahora bien, en el estudio que vamos a realizar con i_3 solo controlaremos si el axi3n adquiere

masa ($i_3 = 1$) o si el axión es de masa nula y el término del potencial QCD está apagado ($i_3 = 0$). En el caso $i_3 = 1$, en estas convenientes unidades, $\tau_1 = 1$.

En ese momento, cada cuerda se convierte en el límite de N_{DW} paredes de dominio y el proceso de radiación de axiones tal y como lo hemos expuesto hasta ahora cambia. La formación de las paredes de domino no dificultan la llegada al régimen de escala [Ryden et al., 1990].

Recordemos, si las paredes de dominio son no-relativistas, aproximadamente $R \propto t^2$, que es una expansión muy rápida. Uno podría estar tentado a atribuir la expansión acelerada del Universo a los efectos de las paredes de dominio, pero ya vimos que también tendrían consecuencias desastrosas en la homogeneidad del Universo que excederían las medidas de anisotropía de CMB.

Así pues, las paredes de dominio suponen un grave problema para la cosmología, pero existen tres propuestas tentativas que buscan una solución en el contexto de la materia oscura axiónica [Sikivie, 2008] que se exponen a continuación:

i) Campo del axión homogeneizado por la inflación:

En este caso el Universo pasa por una época de inflación después de la transición de fase PQ . Esto homogeniza el campo, aumentando drásticamente su longitud de correlación y eliminando la variabilidad aleatoria de la fase en zonas conectadas causalmente, lo que supone dispersar los defectos topológicos fuera de nuestro Universo local.

ii) Imponer $N_{DW} = 1$:

Siempre que se ha discutido acerca de las paredes de dominio eran necesarios un conjunto discreto de vacíos degenerados. Sin embargo, los muros de dominio también aparecen cuando hay un único vacío, con la diferencia de que son inestables. En este caso ambos lados del muro están en el mismo vacío, pero el campo que los interpola da una vuelta alrededor del fondo del sombrero mejicano. No es evidente que este escenario cosmológico esté libre de dificultades, pues al fin y al cabo siguen estando presentes.

En T_1 cada cuerda de la red queda anclada por una pared de dominio. Las simulaciones muestran que no hay paredes extensas a las que no corta ninguna cuerda, ya que una pared extensa tiene una probabilidad alta de ser cortada por una cuerda cada vez que atraviesa un horizonte, donde como mínimo habrá una.

Los muros son transparentes a las partículas termalizadas de la sopa primordial, cuyos momentos son del orden de unos pocos GeV, pero tienen un alto coeficiente de reflexión para los axiones no relativistas que fueron producidos por realineamiento, desintegración o exclusión del equilibrio térmico. En tal caso el rozamiento es considerable, pero cesa una vez estas partículas son diluidas por la expansión.

iii) Añadir un pequeño término de ruptura de la simetría PQ:

Consiste en postular la existencia de un pequeño término que rompe explícitamente la simetría \mathcal{Z}_N , y por tanto, la simetría PQ. Este término debe romper la degeneración de vacíos, por ejemplo, elevando todos y dejando uno como mínimo absoluto. Además, hay que encontrar un compromiso entre que sea lo suficientemente grande como para que el verdadero vacío se imponga antes de que los muros hayan dominado el Universo y lo suficientemente pequeño como para que el mecanismo PQ siga funcionando sin más problemas. Esto deja muy poca libertad para los parámetros, pero no está descartado. Se

han propuesto términos de bias para conseguir esto, cuya interpretación se fundamenta en efectos de gravedad cuántica [Rai and Senjanović, 1994].

5.4. Destino de la red de cuerdas y paredes de dominio

La densidad de energía superficial de estas paredes depende de la masa del axión $\sigma_{wall} \approx 8m_a(t)f_a^2$, y por tanto depende del tiempo. Habrá un momento en el que la energía de las paredes de dominio iguale la de las cuerdas y la supere. A este momento se le denomina τ_2 . A partir de entonces la evolución del sistema quedará dominada por las tensión que ejercen las paredes de dominio sobre las cuerdas.

El tiempo τ_2 se puede estimar como el momento en que la energía en los muros y en las cuerdas se hace comparable, lo que se puede escribir como $E_s(\tau_2) = E_{DW}(\tau_2)$, siendo estas energías las energías en el volumen del horizonte, o equivalentemente como $8m_a(\tau_2)f_a^2t_2 = \mu_s$. Veamos a qué nos lleva:

$$8H_1\tau_2^{n/2}f_a^2\frac{\tau_2}{2H_1} = \mu_{st} \Rightarrow \tau_2^{\frac{n+4}{2}} = \frac{1}{4}\pi\frac{\mu_s}{\pi f_a^2} = \frac{\pi\kappa}{4} ; \tau_2 \approx \left(\frac{\pi\kappa}{4}\right)^{\frac{2}{n+4}} ; \kappa = \log\left(\frac{m_s}{H}\right). \quad (43)$$

En esta deducción se ha asumido scaling de muros, por lo que su área es $H^{-2} \propto t^2$, es decir, que en cada horizonte hay un muro de tamaño del horizonte.

En realidad el parámetro κ depende del tiempo a través de H , pero su efecto no es muy notable y se puede resolver τ_2 por recursividad con una convergencia rápida. Veamos cómo se puede poner κ en función de parámetros controlables con el programa.

$$\kappa = \log\left(\frac{m_s}{H}\right) = \log\left(\frac{m_{sa}N}{L'H_1\tau_2\tau_2^{-2}}\right) = \log\left(\frac{m_{sa}N}{L}\tau_2\right) \quad (44)$$

Aprovecho este momento para comentar un detalle técnico de los cálculos numéricos de la simulación. En esta deducción se ha utilizado el truco de Press-Ryden-Spergel, por el que $m_s \propto 1/\tau$ para que la anchura del núcleo de las cuerdas ($\propto m_s^{-1}$) se adapte a la expansión del Universo. Este detalle técnico y alguno más sobre la simulación se puede consultar en el apéndice (C), cuya lectura es recomendada para aclarar algunos conceptos.

Ahora bien, tal y como se ha discutido antes, el caso $N_{DW} = 1$ es especial, ya que aunque no haya más de un mínimo degenerado, aparecen barreras de dominio inestables. El destino de las cuerdas y las paredes de dominio es radicalmente distinto si $N_{DW} = 1$ o si $N_{DW} > 1$. En el caso de $N_{DW} = 1$ las cuerdas, debido a la tensión de los muros, se aniquilarán, desapareciendo en tiempos inferiores a $\sim 2\tau_2$ tal y como se muestra en la figura (1).

En cambio, si $N_{DW} > 1$ el dominio de la tensión de las barreras de dominio no causa la destrucción de las redes de cuerdas, ya que si no distinguen entre vacíos equivalentes solo pueden destruir las cuerdas de longitud menor que el horizonte (cada uno tiene un vacío distinto), estableciéndose de nuevo un régimen de escala, de forma que en $2\tau_2$ seguirá habiendo cuerdas, e incluso en infinito.

En tal caso, en un escenario cosmológico en el que la inflación no diluye los defectos topológicos, se hace necesario una forma alternativa de eliminar los muros de dominio. Tal y como se ha mencionado anteriormente una manera es introducir un término de bias que rompa la degeneración de los vacíos, favoreciendo uno sobre los demás, que se convertirán en falsos vacíos.

La introducción del término de bias hace que el sistema se tome un tiempo hasta que acaba en el verdadero mínimo. Obtengamos una estimación de este tiempo, τ_3 , que será cuando la

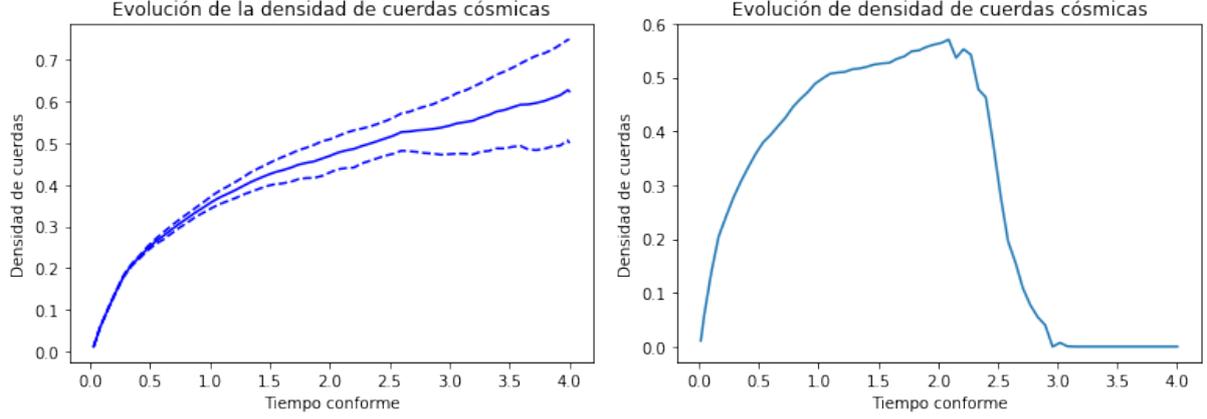


Figura 1: Dos simulaciones para $N_{DW} = 1$ con $N = 256$ y $L = 6$. A la izquierda se han utilizado los parámetros ($m_{sa} = 0,75$; $n = 4,0$; $i_3 = 0$), apreciándose el scaling debido a que no se forman paredes de dominio (término QCD desactivado). Las líneas discontinúas indican el error estadístico al promediar varias simulaciones. A la derecha se han utilizado ($m_{sa} = 1,5$; $n = 1,5$; $i_3 = 2$) para evitar el pico de Moore (se comentará a continuación) y, efectivamente, se interrumpe el scaling cuando se aniquilan las cuerdas alrededor de τ_2 .

presión que ejerce la diferencia energética que introduce el bias es comparable a la presión de los muros de dominio, lo que es aproximadamente equivalente a que las energías en el volumen de un horizonte del falso vacío y de los muros se hagan comparables.

$$E_b(\tau_3) = E_{DW}(\tau_3) \Rightarrow B_0 t_3^3 / 2 = 8m_a(\tau_3) f_a^2 t_3^2, \quad (45)$$

donde $\Delta V = B_0 = H_1^2 f_a^2 b_0$ es una parametrización cómoda, con b_0 un parámetro de control del bias que se introduce al programa. Se puede ver ΔV como la elevación de los falsos vacíos sobre el absoluto. Se ha vuelto a asumir que las paredes de dominio alcanzan un scaling, por lo que en cada horizonte hay una pared del tamaño de ese horizonte $H^{-1} \propto t$, así que el área escala con t^2 . Análogamente, el volumen del vacío, siguiendo el mismo razonamiento, escala con $\sim t^3$ y la mitad de un horizonte está en uno y la otra mitad en otro. La igualación de estas dos energías nos lleva a

$$B_0 t_3 = 16m_a(\tau_3) f_a^2 \Rightarrow b_0 H_1^2 f_a^2 \frac{\tau_3^2}{2H_1} = 16H_1 \tau^{n/2} f_a^2 \Rightarrow b_0 \tau_3^2 = 32\tau_3^{n/2} \Rightarrow \tau_3 \approx \left(\frac{b_0}{32} \right)^{\frac{2}{n-4}}. \quad (46)$$

Cabe mencionar que el factor que divide a b_0 se ha introducido de forma un poco arbitraria. En realidad esto es un poco más sutil que lo que se ha expuesto. La masa del axión satura a partir de un tiempo τ_c , hecho que hay que tener en cuenta a la hora de estimar τ_3 en algunas condiciones.

$$\begin{aligned} E/t^3|_{\Delta V} &\propto b_0 \\ E/t^3|_{\sigma} &\propto \tau^{n/2} t^{-1} = \tau^{\frac{n-4}{2}} = \begin{cases} \tau^{n/2-2} & \text{si } \tau < \tau_c \\ \tau_c^{n/2} (\tau/\tau_c)^{-2} & \text{si } \tau > \tau_c \end{cases} \end{aligned} \quad (47)$$

Ahora, igualando $E/t^3|_{\Delta V} = E/t^3|_{\sigma}$ se encuentran las soluciones de τ_3 . Tal y como se muestra en la gráfica (5.4) hay varias posibilidades.

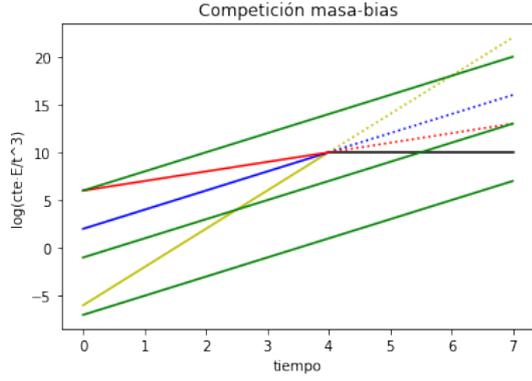


Figura 2: Gráfica para justificar cualitativamente el número de soluciones de τ_3 . Las curvas rojo-negro, azul-negro y amarillo-negro reproducen el término de masa del axión $\propto \tau^{n/2}$ (amarillo $n = 8$, azul $n = 4$, rojo $n = 2$). Las líneas discontinuas corresponden a no considerar saturación de masa (negro). Las rectas verdes corresponden a término de bias $\propto \tau^2$, por lo que tienen pendiente 2 y la altura a la que se encuentran depende de b_0 .

Se ve que existe una competición entre m_a y vacío $\propto \tau^2$. Se pueden distinguir distintos regímenes de evolución posibles dependiendo de qué energía domine. Si $n > 4$ con dos soluciones, empieza dominando la presión asociada al término de bias, se pasa a una etapa de dominación de presión del muro entre los dos cortes, y a partir del segundo corte vuelve a dominar el término de bias. Es necesario controlar τ_c , teniendo en cuenta la saturación de la masa del axión. Si $n > 4$ sin cortes, el dominio de la presión del bias es permanente, lo cual no ocurriría si no saturase la masa (la recta verde cortaría a alguna discontinua de color en algún punto). Por último, si $n < 4$ solo hay un corte y se intercambia la dominación de energía, acabando dominando siempre el término de bias. Nótese por ejemplo que para $n = 4$ podría no existir solución si no fuese por la saturación de la masa, ya que serían rectas paralelas. Nosotros vamos a centrar la región de estudio en un lugar donde nuestra estimación de τ_3 sea válida y no haya que considerar τ_c , por lo que $n < 4$. En ese caso $\tau_3 < \tau_c$.

Veamos cómo se comporta el sistema a través de los resultados de las simulaciones que se muestran en la imagen (3). Se puede observar que al principio todas las líneas siguen la misma evolución hacia el régimen de escala, que es frustrado cuando el término de energía del bias supera el dominio energético de las paredes de dominio en τ_3 (recordemos que estamos en $n < 4$ con un corte antes de τ_c). A partir de entonces el campo se va al mínimo verdadero y los defectos topológicos desaparecen. Cuanto mayor es b_0 más se favorece la evolución al verdadero mínimo, por lo que se aniquilan antes.

Por último, otro tiempo sumamente importante es el tiempo de Moore, determinado por la condición

$$\frac{m_a^2}{m_s^2} \leq \frac{1}{40} \quad (48)$$

Esto pone un límite a la validez de los resultados de las simulaciones a partir del tiempo τ_M . Cuando esta condición no se satisface el campo escalar que queda atrapado topológicamente en un muro de dominio $\theta = \pi$ puede pasar a $\theta = 0$ sin pasar por $\pm\pi/2$, saltando a través del fondo del sombrero mejicano. Como se puede ver en (5.4), en esta situación la creación de cuerdas a expensas de la energía de la pared se hace favorable energéticamente. Este escenario, aunque sea un mecanismo válido físicamente, no reproduce ni siquiera cualitativamente el límite $f_a \gg H_1$ que es interesante para el caso del axion y debe de ser evitado. Estimemos el tiempo de Moore a través de la condición:

$$\frac{i_3 \tau_M^n}{\frac{m_{sa}^2 N^2}{\tau^2 L^2}} = \frac{1}{40} \Rightarrow \tau_M = \left(\frac{m_{sa}^2 N^2}{i_3 40 L^2} \right)^{\frac{1}{n+2}} \quad (49)$$

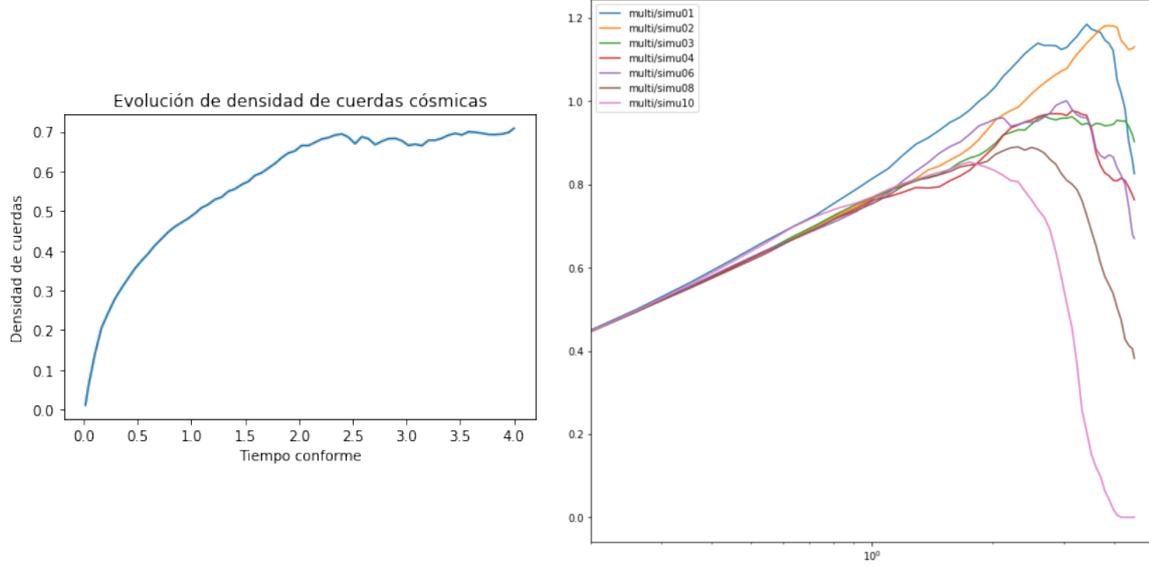


Figura 3: Representación gráfica de densidad de cuerdas ξ frente a tiempo para $N_{DW} = 2$. A la izquierda el caso particular sin bias $b_0 = 0$ para una simulación ($N = 256$; $m_{sa} = 1,5$; $L = 6$; $i_3 = 0,8$; $n = 1,4$), donde se puede apreciar de que se alcanza régimen de scaling aun por encima de τ_2 si los vacíos son idénticos. A la derecha los resultados de simulaciones ($N = 1024$; $m_{sa} = 1,5$; $L = 6$; $i_3 = 1$; $n = 2$) para distintos valores de b_0 . Eje x es τ en escala logrítica y el eje y es ξ . La leyenda de las curvas es $multi/simuXX$, donde XX no es otra cosa que $10b_0$

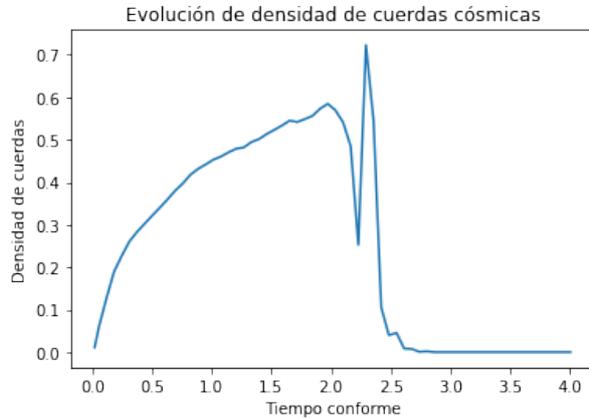


Figura 4: Simulación con parámetros ($N = 256$; $L = 6$; $m_{sa} = 1,2$; $n = 4$; $i_3 = 1,0$). Se aprecia el pico de Moore, que corresponde a un aumento en densidad de cuerdas y su posterior aniquilación, cuando se viola la condición de Moore, en este caso $\tau > \tau_M = 2,0$. Parece que encaja bien con la descripción analítica.

La elección de parámetros en la simulación deba ser tal que $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 \ll \tau_M$, espaciados de una forma razonable para poder estudiar la dinámica que nos interesa.

5.5. Breves conclusiones

En general, el estudio de estas escalas de tiempo ya ha sido estudiado en investigaciones como [Hiramatsu et al., 2013], por ejemplo, mostrando cierta fidelidad con las simulaciones numéricas. Se podría profundizar comparando los tiempos de desaparición de las cuerdas τ_3 en función de el término de bias para discutir la validez de su expresión analítica, que es quizá donde hay más terreno sin explorar, constituyendo una solución válida al problema de las paredes de dominio.

Apéndices

A. Aproximación de gas ideal

Para cualquier especie bosónica con la misma helicidad su densidad es la misma,

$$n_s = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 , \quad (50)$$

mientras que en el caso de que sean fermiones hay que añadir un factor $3/4$ extra. Esto nos ayuda a justificar la aproximación de gas ideal comparando el camino libre medio con la longitud de onda térmica. En una esfera de radio $1/T$ habrá por lo menos una partícula de cada especie. Dado que todas las secciones eficaces de interacciones Gauge son iguales (aunque no las de Yukawa),

$$\sigma \sim \frac{\alpha^2}{T^2} ; \quad \alpha = \frac{g^2}{4\pi} \approx 1/50 , \quad (51)$$

donde α se ha estimado a partir de cálculos de grupo de renormalización de la masa de gran unificación que muestran que las tres constantes de acoplo de $SU(3)$, $SU(2)$ y $U(1)$ coinciden en este valor [Buras et al., 1978].

El camino libre medio será

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \sim \frac{1}{\mathcal{N}\alpha^2 T} . \quad (52)$$

Como $\mathcal{N}\alpha^2 \approx 1/15$, λ es grande comparado con la longitud de onda térmica, justificando así la aproximación de gas ideal. Esto es una estimación poco rigurosa pero intuitiva que se pierde cuando $T \sim 1\text{GeV}$ y en la realidad las no idealidades del gas quedan recogidas en el parámetro g_* .

B. Mecanismo de Kibble

Una transición de fase cosmológica asociada a la ruptura espontánea de una simetría puede dar lugar a una red estocástica de defectos topológicos. Cuando la temperatura es inferior a la temperatura crítica a la que se produce dicha transición (T_c), el campo del axión adquiere un valor esperado $\langle\phi\rangle$ correspondiente a un punto de la variedad \mathcal{M} de los mínimos de potencial efectivo. Como todos los puntos son equivalentes, la elección está determinada por las fluctuaciones aleatorias, pudiendo cambiar en distintos puntos del espacio. Valores de $\langle\phi\rangle$ en dos regiones serán independientes si se encuentran a una distancia mayor que la distancia de correlación del campo, ξ . En el caso concreto de una transición de segundo orden en un modelo $U(1)$ como el del axión con un potencial de tipo sombrero mejicano, cuando $T < T_c$, ϕ pasa a tener un valor esperado de vacío no nulo $\langle\phi\rangle^2 = \eta^2(1 - T^2/T_c^2)$. Pero esto únicamente fija la magnitud del campo, no su dirección. Esta es una situación análoga a un material ferromagnético isótropo cuando se enfría por debajo de su temperatura de Curie: debe adquirir una magnetización no nula, pero su dirección es aleatoria, determinada en la práctica por la presencia de campos magnéticos externos débiles o las fluctuaciones térmicas. De la misma manera el Universo debe elegir una dirección del campo $\langle\phi\rangle$, es decir, un punto de la variedad \mathcal{M} de vacíos equivalentes.

Los defectos topológicos tales como las cuerdas, las paredes de dominio y los monopolos son topológicamente estables, pero no son configuraciones de mínima energía. A pesar de esto, su formación en las transiciones de fase cosmológicas son inevitables. Este hecho se explica por

medio del mecanismo de Kibble. Dicho mecanismo se basa en que durante una transición de fase topológica cualquier longitud de correlación está limitada por el horizonte de la partícula, es decir, la máxima distancia que puede recorrer una partícula sin masa desde quel Big Bang:

$$d_H = R(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} \quad (53)$$

La distancia de correlación del campo del axión está relacionada con la masa (dependiente de la temperatura):

$$\xi \sim m_a^{-1}(T)$$

La finitud de esta longitud de correlación en cosmología estándar implica que en el momento de la transición ($t = t_c, T = T_c$), el campo del axión estaba descorrelacionado a distancias mayores que ξ , con una cota superior en el horizonte en aquel instante: $\xi \leq d_H \sim H^{-1} \sim m_P/T^2$. No hay que perder de vista que la formación de defectos topológicos es un fenómeno de no-equilibrio, por lo que la densidad de defectos en equilibrio es exponencialmente suprimido cuando $T < T_c$. Sin embargo, pueden sobrevivir porque el campo ϕ no tiene tiempo suficiente para acomodarse al equilibrio a escalas mayores que $\xi(t)$. Como consecuencia, $\langle \phi \rangle$ tiende a la homogeneidad para minimizar la energía del campo a excepción de singularidades que quedan atrapadas.

La cota máxima que impone d_H no quiere decir que ξ esté muy cerca de este valor. De hecho, la longitud de correlación del campo puede ser mucho más pequeña. Existe cierta ambigüedad en cuándo se puede considerar que un defecto se ha formado. Esto se debe a que a temperaturas cercanas a T_c las fluctuaciones del campo ϕ que lo llevan de un mínimo a otro equivalente superando la barrera de potencial no son algo imposible y hace que la configuración no pare de cambiar, haciendo y deshaciendo algunas de estas singularidades. La temperatura a partir de la cual la configuración estocástica que resulta de una transición de fase cosmológica de segundo orden se congela se denomina temperatura de Ginzburg, T_G .

Esta temperatura de congelación es tal que la energía de necesaria para empujar el campo del axión ϕ en un volumen limitado por una esfera de radio ξ es del orden de la energía térmica:

$$\xi^3 \Delta f \sim T \quad ,$$

donde Δf es la diferencia de energía libre entre los dos estados.

A continuación, nos podemos detener brevemente a comentar con mayor atención la interpretación de la temperatura de Ginzburg. Hasta ahora hemos tomado como potencial efectivo del potencial el primer loop. Esto es una buena aproximación mientras ϕ se trate como un campo clásico homogéneo con fluctuaciones gaussianas pequeñas. Sin embargo, cerca de T_c as fluctuaciones en el campo son grandes, siendo necesaria unas correcciones al potencial efectivo de mayo orden. Este problema se manifiesta como una divergencia infrarroja de los diagramas de ordenes altos. La contribución dominante a orden $n > 3$ se puede demostrar que es proporcional a $[\lambda T/m(T)]^{n-3}$ cuando $T \rightarrow T_c$. La temperatura de Ginzburg marca cuándo la aproximación del primer loop del potencial efectivo es fiable, es decir:

$$m(T_G) \sim \lambda T_G$$

Por tanto, de alguna manera está asociada a la temperatura para las que las fluctuaciones térmicas de ϕ en la escala de distancias de $\xi \sim m^{-1}(T)$ es comparable al valor de $|\phi|$ en el equilibrio. Veamos esto:

$$\xi^3 m^2(T) |\phi \delta \phi| \sim T \Rightarrow \left| \frac{\delta \phi}{\phi(T)} \right| \sim \frac{\lambda T}{|m(T)|}, \quad (54)$$

donde $|\phi(T)|$ es el valor del campo que minimiza el potencial efectivo dependiente de la temperatura cuando $T < T_c$ en una transición de segundo orden como la que estamos suponiendo.

Una descripción de la transición de fase cuando $|T - T_c| \lesssim \lambda T_c$ requiere nueva física de teorías modernas de fenómenos críticos.

C. Simulaciones del campo del axión

Esta sección está dedicada a un breve comentario de las simulaciones del campo del axión utilizadas para obtener los resultados de esta memoria y que se utiliza a diario en investigaciones de alto nivel. Para entender con mayor profundidad algunas sutilezas y detalles técnicos referenciaré un trabajo de los autores del código como [Vaquero et al., 2019], artículo en el que se basa toda esta introducción.

La evolución del campo del axión en el Universo temprano es descrito por la ecuación de Klein-Gordon en un métrica FLRW

$$\ddot{\theta} + 3H\dot{\theta} - \frac{1}{R^2} \nabla^2 \theta + \frac{1}{f_a^2} \partial_\theta V_{QCD}(T, \theta) = 0, \quad (55)$$

donde T es la temperatura del Universo, $R(t)$ es el factor de escala y $H = \dot{R}/R$ la expansión de Hubble-Lemaître. En la aproximación de gas de instantones diluidos el potencial QCD se escribe $V_{QCD} \approx \chi(T)(1 - \cos \theta)$. La susceptibilidad topológica está relacionada con la masa del axión por $m_a^2 f_a^2 = \chi$. La susceptibilidad topológica ha sido calculada con QCD en el retículo [Borsányi et al., 2016]. La masa del axión aumenta muy abruptamente mientras el Universo se enfría y satura en un valor $\chi(0) = (75, 5 \text{ MeV})^4$ por debajo de T_c . Entonces, la masa del axión a temperatura cero es

$$m_a(T=0) = \frac{\sqrt{\chi_0}}{f_a} = 57 \mu\text{eV} \left(\frac{10^{11} \text{ GeV}}{f_a} \right). \quad (56)$$

Al principio el potencial del axión es irrelevante, por lo que sigue una simple ecuación de onda relativista. Ahora bien, cuando el la contribución del potencial comienza a ser relevante se desplazará hacia el mínimo, donde comenzará a oscilar. Este es el momento en el que se satisface $H(T_1) = m_a(T_1) \equiv H_1$.

Se supone dominación de radiación en esta época, por lo que

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_P^2} \left(\frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4 \right), \quad (57)$$

con m_P la masa de Planck y $g_*(T)$ el número efectivo de grados de libertad relativistas del

plasma. A partir de los resultados de [Borsányi et al., 2016] se obtiene:

$$\begin{aligned}
T_1 &\approx 1,694 \text{ GeV} \left(\frac{m_a}{50\mu\text{eV}} \right)^{0,1638} \\
H_1 &\approx 3,45 \cdot 10^{-3} \mu\text{eV} \left(\frac{m_a}{50\mu\text{eV}} \right)^{0,338} \\
1 + z_1 &\approx R_1^{-1} \approx 1,956 \cdot 10^{13} \text{ GeV} \left(\frac{m_a}{50\mu\text{eV}} \right)^{0,1712} \\
L_1 &\equiv (H_1 R_1)^{-1} \approx 1,116 \cdot 10^{17} \text{ cm} \left(\frac{50\mu\text{eV}}{m_a} \right)^{0,167} = 0,0362 \text{ pc} \left(\frac{50\mu\text{eV}}{m_a} \right)^{0,167}
\end{aligned} \tag{58}$$

Estos valores nos permitirán reescalar las magnitudes de interés. Por las ventajas que proporciona, utilizamos el tiempo comovil definido como $d\eta = dt/R$ normalizado con $\eta_1 = L_1$. Entonces:

$$\tau = \frac{\eta}{L_1} \quad \mathbf{x} = \frac{\bar{x}}{L_1} \quad \psi = \tau\theta \tag{59}$$

Las unidades así definidas reciben el nombre de ADM, y son de gran utilidad para transformar magnitudes en variables de orden uno que pueda manejar la simulación combinando potencias de L_1 y H_1 . En estas unidades y variables la ecuación del movimiento se reescribe como

$$\psi_{\tau\tau} - \nabla^2 \psi + \tau^{n+3} \sin\left(\frac{\psi}{\tau}\right) - \frac{R_{\tau\tau}}{R} \psi = 0, \tag{60}$$

donde los subíndices denotan derivada parcial respecto a esa variable. El término $R_{\tau\tau}/R$ es mucho menor que el resto y se desprecia, aunque sus efectos implícitos en $g_*(T)$ se tiene en cuenta.

En la simulación se asignarán valores aleatorios al campo del axi3n en regiones causalmente no conectadas para producir la red de cuerdas c3smicas. Se hace necesaria una completitud ultravioleta del modelo de axi3n. Es com3n utilizar un campo complejo $\phi = |\phi|e^{i\theta}$ con la densidad de lagrangiano definido como

$$\mathcal{L} = \int d^3x dt R^3 \left(\frac{1}{2} \left| \frac{d\phi}{dt} \right|^2 - \frac{1}{2R^2} |\nabla\phi|^2 - V(\phi) \right). \tag{61}$$

El potencial es

$$V(\phi) = V_{PQ}(|\phi|) + V_{QCD}(\theta) = \frac{\lambda_\phi}{8} (|\phi|^2 - f_a^2)^2 + \chi(T) \left(1 - \frac{\Re(\phi)}{f_a} \right) \tag{62}$$

El potencial de QCD reproduce la dependencia del coseno cuando $\lambda_\phi f_a^4 \gg \chi$ y el modo radial est3a en $|\phi| = f_a$. Al modo radial se le da el nombre de *saxion*, tal y como se llama en el contexto de la supersimetría, aunque aqu3a no se utilizar3a ninguna característica derivada de SUSY. Mas bien es el singlete que se introduce en los modelos de axiones de tipo KSVZ. La masa del saxion se puede expresar como $m_s = \sqrt{\lambda_\phi} f_a$.

En unidades ADM

$$\Phi = \tau \frac{\phi}{f_a}, \tag{63}$$

y la ecuaci3n del movimiento queda

$$\Phi_{\tau\tau} - \nabla^2 \Phi + \frac{\lambda}{2} \Phi (|\Phi|^2 - \tau^2) - \tau^{n+3} = 0, \tag{64}$$

teniendo únicamente un parámetro adimensional λ .

$$\lambda = \lambda_\phi \frac{f_a^2}{H_1^2} = \frac{m_s^2}{H_1^2} = \frac{m_s^2}{m_a^2(T_1)}. \quad (65)$$

Parámetros realistas como $f_a \sim 10^{11}$ GeV y $\lambda_\phi \lesssim 1$ requieren simulaciones con $\lambda \sim 10^{57}$, lo cual es inasumible. Esto se debe a que el campo del saxion regulariza la divergencia de la densidad de energía del gradiente del axi3n en el núcleo de las cuerdas a una distancia $\sim 1/m_s$, mientras que se necesitan simular distancias mucho mayores del orden de $\sim 1/H$. La memoria de los ordenadores limitan la jerarquía de escala m_s/H que se puede simular, siendo razonable $\lambda \sim 10^7$. La asunción es que este parámetro apenas afecta a la física del axi3n y su distribución espacial, hecho que parece ser verdad afortunadamente [Vaquero et al., 2019].

Cabe destacar un problema que surge en las simulaciones y su solución. Mientras el Universo se expande los núcleos de las cuerdas se mantienen con una longitud radial constante $\rho \sim 1/m_s$. Esto hace que hay un momento en el que la cuerda se cuela por las celdas de la red, que se expande con el Universo. Para evitarlo, se hace uso del truco Press-Ryden-Spergel (PRS), que consiste en ajustar la anchura de las cuerdas anclándolas al grid, para que su anchura se expanda con la red haciendo

$$\lambda \rightarrow \frac{\lambda_{PRS}}{\tau^2}, \quad (66)$$

con λ_{PRS} constante, de forma que $m_s \propto 1/\tau$ y el radio de la cuerda se mantiene constante en coordenadas comóviles durante la expansión del Universo.

Por último, me gustaría comentar qué métodos de identificación de defectos topológicos se siguen en esta clase de programas, pues al evolucionar el campo con la simulación es necesario sacar gran cantidad de información a partir de los datos. El método general es tomar una trayectoria en el espacio real y fijarse cómo cambia la fase en el espacio del campo a lo largo de ella.

Para detectar una cuerda se puede tomar una trayectoria cuadrada en el espacio real. Una cuerda atraviesa ese cuadrado si $\Delta\theta > \pi$ en el espacio del campo. Para estimar el punto por el que pasa se determinan las posiciones donde $\phi_1 = 0$ o $\phi_2 = 0$ efectuando una interpolación lineal del campo complejo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$. Si la cuerda penetra perfectamente el cuadrado habrá dos puntos con $\phi_1 = 0$ y otros dos con $\phi_2 = 0$. La cuerda estará centrada en el punto donde se cruzan las rectas que conectan cada uno de estos dos puntos. Este método supone un problema cuando atraviesa más de una cuerda el mismo cuadrado, pero son algo anecdótico en las simulaciones ($\sim 1\%$) [Hiramatsu et al., 2013].

Identificar las paredes de dominio es algo más sencillo. En primer lugar se separa la fase del campo complejo $0 \leq \theta < 2\pi$ en N_{DW} dominios. A cada punto del espacio se le asigna un número dependiendo de la región de la fase donde se encuentre. Si hay un cambio entre dos puntos contiguos quiere decir que entre ellos hay un muro de dominio. Además, donde se cruzan varios muros de dominio hay cuerdas.

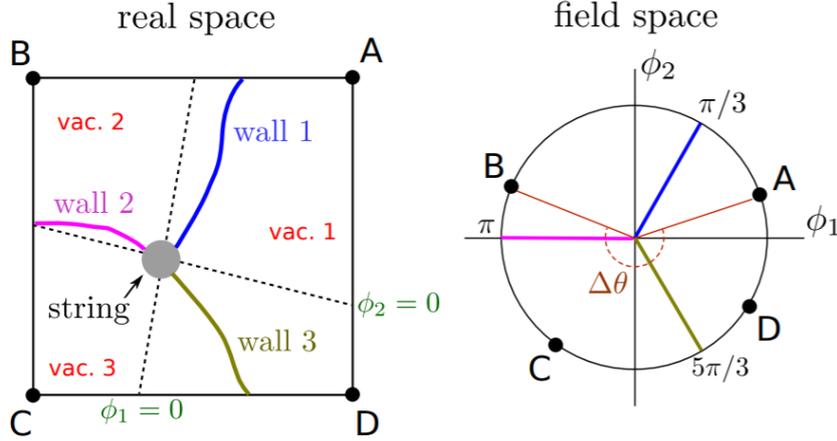


Figura 5: Ejemplo gráfico de identificación de defectos topológicos para visualizar la explicación anterior. *Fuente:*[Hiramatsu et al., 2013].

D. Deducción de ecuaciones del movimiento a partir del Lagrangiano

Esta sección se incluye únicamente como un ejercicio que consiste en tratar de reproducir las ecuaciones del movimiento que introducen [Hiramatsu et al., 2013] en su programa, siguiendo razonamientos de teoría de campos que son de gran relevancia en toda la física.

Se parte de la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad ; \quad V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - \eta^2)^2 + \frac{m^2 \eta^2}{N_{DW}^2} [1 - \cos(N_{DW} \theta)]$$

Sea $\phi = |\phi| e^{i\theta} = \phi_1 + \phi_2 i$ y tomamos una escala tal que $\eta = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} \text{tg}(\theta) &= \frac{\phi_2}{\phi_1} \Rightarrow \theta = \text{arc tg} \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right) \\ |\phi|^2 &= \phi^* \phi = (\phi_1 + \phi_2 i)(\phi_1 - \phi_2 i) = \phi_1^2 + \phi_2^2 \end{aligned}$$

El objetivo es obtener las ecuaciones de evolución del campo complejo ϕ minimizando la acción definida por el lagrangiano particular de este sistema a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

En realidad se va a utilizar el potencial

$$V(\theta) = \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - \eta^2)^2 + \frac{m^2 \eta^2}{N_{DW}^2} \left(1 - \frac{|\phi|}{\eta} \cos(N_{DW} \theta) \right)$$

porque el otro no está bien definido en $\phi = 0$, siendo ésta una alternativa para evitar la singularidad. Esta modificación no es importante en la región donde $|\phi| \sim \eta$ y no se observa un desvío cuantitativo en comportamientos como la evolución temporal del parámetro de escala de los defectos topológicos.

Se va a usar la métrica de un universo espacialmente plano FRW:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2]$$

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -R^2, -R^2, -R^2) \quad ; \quad g^{\mu\nu} = \text{diag}\left(1, -\frac{1}{R^2}, -\frac{1}{R^2}, \frac{1}{R^2}\right) \quad ; \quad g = \det(g_{\mu\nu}) = -R^6$$

La acción que se debe minimizar es:

$$I = \int dx^4 \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int dx^4 R^3(t) \mathcal{L}$$

La densidad lagrangiana en función de ϕ_1 y ϕ_2 no es otra cosa que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu (\phi_1 + \phi_2 i) \partial^\mu (\phi_1 - \phi_2 i) - \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1)^2 - \frac{m^2}{N_{DW}^2} \left(1 - \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} \cos \left[N_{DW} \arctg \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right) \right] \right)$$

Obtengamos las ecuaciones de la evolución del campo aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial(R^3 \mathcal{L})}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial(R^3 \mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} = 0$$

Calculemos estas derivadas sistemáticamente, paso a paso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_1} &= -\frac{2\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2) 2\phi_1 - \frac{m^2}{N_{DW}^2} \left(-\frac{2\phi_1}{2\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}} \cos \left[N_{DW} \arctg \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} \sin \left[N_{DW} \arctg \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right) \right] \frac{1}{1 + \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right)^2} \frac{-\phi_2}{\phi_1^2} \right) = \\ &= -\lambda \phi_1 (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1) - \frac{m^2}{N_{DW}^2} \left[-\frac{\phi_1}{\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}} \cos(N_{DW}\theta) - \frac{\phi_2}{\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}} \sin(N_{DW}\theta) \right] = \\ &= -\lambda \phi_1 (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1) + \frac{m^2}{N_{DW}^2} [\cos(\theta) \cos(N_{DW}\theta) + \sin(\theta) \sin(N_{DW}\theta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_2} &= -\frac{2\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2) 2\phi_2 - \frac{m^2}{N_{DW}^2} \left(-\frac{2\phi_2}{2\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}} \cos \left[N_{DW} \arctg \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} \sin \left[N_{DW} \arctg \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right) \right] \frac{1}{1 + \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right)^2} \frac{1}{\phi_1} \right) = \\ &= -\lambda \phi_2 (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1) - \frac{m^2}{N_{DW}^2} \left[-\frac{\phi_2}{\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}} \cos(N_{DW}\theta) + \frac{\phi_1}{\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}} \sin(N_{DW}\theta) \right] = \\ &= -\lambda \phi_2 (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1) + \frac{m^2}{N_{DW}^2} [\sin(\theta) \cos(N_{DW}\theta) - \cos(\theta) \sin(N_{DW}\theta)] , \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la definición de θ y que R no depende explícitamente de las componentes del campo, sino que lo hace únicamente de las coordenadas, así que se manifiesta únicamente como un R^3 que multiplica a las expresiones anteriores. $\partial(R^3 \phi_\alpha) = R^3 \partial \mathcal{L} / \partial \phi_\alpha$.

A continuación vamos a manipular la parte del lagrangiano que identificamos como parte cinética para que sea más cómodo derivar después:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi &= \partial_\mu (\phi_1 - i\phi_2) \partial^\mu (\phi_1 + i\phi_2) = \partial_\mu (\phi_1 - i\phi_2) g^{\mu\alpha} \partial_\alpha (\phi_1 + i\phi_2) = \\ &= \partial_0 (\phi_1 - i\phi_2) \partial_0 (\phi_1 + i\phi_2) - \frac{1}{R^2} \sum_j \partial_j (\phi_1 - i\phi_2) \partial_j (\phi_1 + i\phi_2) = \\ &= \partial_0 \phi_1 \partial_0 \phi_1 + \partial_0 \phi_2 \partial_0 \phi_2 - \frac{1}{R^2} \sum_j [\partial_j \phi_1 \partial_j \phi_1 - \partial_j \phi_2 \partial_j \phi_2] , \end{aligned}$$

donde se ha bajado índices a través de la contracción con la métrica FLRW anteriormente introducida.

Ahora, tengamos en cuenta que únicamente la parte cinética del lagrangiano depende de las derivadas parciales explícitamente, tal y como acabamos de mostrar, y que R es una función del tiempo.

$$\begin{aligned}\partial_\mu \frac{\partial(R^3 \mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} &= \partial_\mu \left[R^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} \right] = \partial_0(R^3 \partial_0 \phi_1) - \frac{1}{R^2} \sum_j \partial_j(R^3 \partial_j \phi_1) = \\ &= 3R^2 \dot{R} \partial_0 \phi_1 + R^3 \partial_0^2 \phi_1 - R^3 \frac{1}{R^2} \sum_j \partial_j^2 \phi_1 = \\ &= 3\dot{R}R^2 \partial_0 \phi_1 + R^3 \partial_0^2 \phi_1 - \frac{1}{R^2} R^3 \nabla^2 \phi_1 .\end{aligned}$$

De la misma forma, para la componente imaginaria ϕ_2 :

$$\partial_\mu \frac{\partial(R^3 \mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu \phi_2)} = 3R^2 \dot{R} \partial_0 \phi_2 + R^3 \partial_0^2 \phi_2 - \frac{1}{R^2} R^3 \nabla^2 \phi_2$$

Ahora, juntando todo en las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada campo:

$$\begin{aligned}3\dot{R}R^2 \partial_0 \phi_1 + R^3 \partial_0^2 \phi_1 - \frac{1}{R^2} R^3 \nabla^2 \phi_1 &= \\ = R^3 \{ -\lambda \phi_1 (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1) + \frac{m^2}{N_{DW}^2} [\cos(\theta) \cos(N_{DW}\theta) + \sin(\theta) \sin(N_{DW}\theta)] \} \\ 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) \partial_0 \phi_1 + \partial_0^2 \phi_1 - \frac{1}{R^2} \nabla^2 \phi_1 &= \\ = -\lambda \phi_1 (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1) + \frac{m^2}{N_{DW}^2} [\cos(\theta) \cos(N_{DW}\theta) + \sin(\theta) \sin(N_{DW}\theta)] .\end{aligned}$$

Haciendo lo mismo para el campo ϕ_2 :

$$\begin{aligned}3R^2 \dot{R} \partial_0 \phi_2 + R^3 \partial_0^2 \phi_2 - \frac{1}{R^2} R^3 \nabla^2 \phi_2 &= \\ = R^3 \{ -\lambda \phi_2 (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1) + \frac{m^2}{N_{DW}^2} [\sin(\theta) \cos(N_{DW}\theta) - \cos(\theta) \sin(N_{DW}\theta)] \} \\ 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) \partial_0 \phi_2 + \partial_0^2 \phi_2 - \frac{1}{R^2} \nabla^2 \phi_2 &= \\ = -\lambda \phi_2 (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1) + \frac{m^2}{N_{DW}^2} [\sin(\theta) \cos(N_{DW}\theta) - \cos(\theta) \sin(N_{DW}\theta)]\end{aligned}$$

Se concluye entonces que las ecuaciones de la evolución de este campo son:

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_1 + 3H\dot{\phi}_1 - \frac{1}{R^2} \nabla^2 \phi_1 &= \\ = -\lambda \phi_1 (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1) + \frac{m^2}{N_{DW}^2} [\cos(\theta) \cos(N_{DW}\theta) + \sin(\theta) \sin(N_{DW}\theta)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi}_2 + 3H\dot{\phi}_2 - \frac{1}{R^2}\nabla^2\phi_2 &= \\
&= -\lambda\phi_2(\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1) + \frac{m^2}{N_{DW}^2} [\sin(\theta)\cos(N_{DW}\theta) - \cos(\theta)\sin(N_{DW}\theta)] ,
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la definición del ritmo de expansión de Hubble-Lemaître $H = \dot{R}/R$.

Referencias

- [Abrikosov, 1957] Abrikosov, A. A. (1957). On the magnetic properties of superconductors of the second group. *Sov. Phys. JETP*, 5:1174–1182.
- [Borsányi et al., 2016] Borsányi, S., Fodor, Z., Guenther, J., Kampert, K.-H., Katz, S., Kawanai, T., Kovacs, T., Mages, S., Pasztor, A., Pittler, F., et al. (2016). Calculation of the axion mass based on high-temperature lattice quantum chromodynamics. *Nature*, 539(7627):69.
- [Buras et al., 1978] Buras, A. J., Ellis, J., Gaillard, M. K., and Nanopoulos, D. V. (1978). Aspects of the grand unification of strong, weak and electromagnetic interactions. *Nuclear Physics B*, 135(1):66–92.
- [Charlton, 1987] Charlton, J. C. (1987). Cosmic string wakes and large scale structure. *Astrophys. J.*, 325(FERMILAB-PUB-87-094-A):521–530.
- [Davis, 1985] Davis, R. L. (1985). Nucleosynthesis problems for string models of galaxy formation. *Physics Letters B*, 161(4-6):285–288.
- [Förster, 1974] Förster, D. (1974). Dynamics of relativistic vortex lines and their relation to dual theory. *Nuclear Physics B*, 81(1):84–92.
- [Gorghetto et al., 2018] Gorghetto, M., Hardy, E., and Villadoro, G. (2018). Axions from strings: the attractive solution. *Journal of High Energy Physics*, 2018(7):151.
- [Hagedorn, 1970] Hagedorn, R. (1970). Remarks on the thermodynamical model of strong interactions. *Nuclear Physics B*, 24(1):93–139.
- [Hiramatsu et al., 2013] Hiramatsu, T., Kawasaki, M., Saikawa, K., and Sekiguchi, T. (2013). Axion cosmology with long-lived domain walls. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013(01):001.
- [Kibble, 1976] Kibble, T. W. (1976). Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 9(8):1387.
- [Kibble, 1980] Kibble, T. W. (1980). Some implications of a cosmological phase transition. *Physics Reports*, 67(1):183–199.
- [Klaer and Moore, 2017] Klaer, V. B. and Moore, G. D. (2017). How to simulate global cosmic strings with large string tension. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(10):043.
- [Kolb and Turner, 1990] Kolb, E. W. and Turner, M. S. (1990). The early universe. *Front. Phys.*, 69:1–547.
- [Nielsen and Olesen, 1973] Nielsen, H. B. and Olesen, P. (1973). Vortex-line models for dual strings. *Nuclear Physics B*, 61:45–61.
- [Peccei and Quinn, 1977] Peccei, R. D. and Quinn, H. R. (1977). C_p conservation in the presence of instantons. *Phys. Rev. Lett.*, 38(1977-05-24):1440–1443.
- [Preskill, 1984] Preskill, J. (1984). Magnetic monopoles. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 34(1):461–530.
- [Rai and Senjanović, 1994] Rai, B. and Senjanović, G. (1994). Gravity and the domain-wall problem. *Physical Review D*, 49(6):2729.
- [Ryden et al., 1990] Ryden, B. S., Press, W. H., and Spergel, D. N. (1990). The evolution of networks of domain walls and cosmic strings. *The Astrophysical Journal*, 357:293–300.
- [Sikivie, 1995] Sikivie, P. (1995). The pooltable analogy to axion physics. *arXiv preprint hep-ph/9506229*.
- [Sikivie, 2008] Sikivie, P. (2008). Axion cosmology. In *Axions*, pages 19–50. Springer.
- [t Hooft, 1976] t Hooft, G. (1976). Symmetry breaking through bell-jackiw anomalies. *Phys. Rev. Lett.*, 37:8–11.
- [Vachaspati and Vilenkin, 1985] Vachaspati, T. and Vilenkin, A. (1985). Gravitational radiation from cosmic strings. *Physical Review D*, 31(12):3052.
- [Vaquero et al., 2019] Vaquero, A., Redondo, J., and Stadler, J. (2019). Early seeds of axion miniclusters. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(04):012.
- [Vilenkin, 1981] Vilenkin, A. (1981). Gravitational field of vacuum domain walls and strings. *Physical Review D*, 23(4):852.
- [Vilenkin, 1985] Vilenkin, A. (1985). Cosmic strings and domain walls. *Physics reports*, 121(5):263–315.
- [Vilenkin and Shellard, 2000] Vilenkin, A. and Shellard, E. P. S. (2000). *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge University Press.
- [Wantz and Shellard, 2010] Wantz, O. and Shellard, E. (2010). Axion cosmology revisited. *Physical Review D*, 82(12):123508.
- [Weinberg, 1975] Weinberg, S. (1975). The $u(1)$ problem. *Physical Review D*, 11(12):3583.
- [Weinberg, 1978] Weinberg, S. (1978). A new light boson? *Physical Review Letters*, 40(4):223.
- [Wilczek, 1978] Wilczek, F. (1978). Problem of strong p and t invariance in the presence of instantons. *Physical Review Letters*, 40(5):279.
- [Witten, 1985] Witten, E. (1985). Superconducting strings. *Nuclear Physics B*, 249(4):557–592.
- [Zel’dovich et al., 1974] Zel’dovich, Y. B., Kobzarev, I. Y., and Okun, L. B. (1974). Cosmological consequences of spontaneous violation of discrete symmetry. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 40:3–11.