Facultad de Ciencias

Departamento de Física de la Materia Condensada

Trabajo de Fin de Grado:

Apéndice: Estudio de los efectos de la propagación de enfermedades contagiosas en la movilidad de individuos

Realizado por Juan Viguera Diez

Dirigido por:
Dr. Jesús Gómez Gardeñes y David Soriano Paños

Índice

1. Formalismo sin lazos **4**

1.1. Estimación del umbral epidémico 4

2. Políticas de prevención: Material adicional **6**

2.1. Formalismo Markoviano 6

2.2. Cálculo del umbral epidémico 6

2.3. Validación del formalismo y de la estimación del umbral epidémico 8

1. Formalismo sin lazos

El conjunto de ecuaciones que describen la dinámica del sistema si no se tienen en cuenta lazos son:

$$\rho_i(t+1) = (1-\mu)\rho_i(t) + (1-\rho_i(t))\Pi_i(t) \tag{1}$$

$$\Pi_i(t) = (1-p_d)P_i(t) + p_d \sum_{j=1}^{N} \frac{W_{ij}}{\sum_{l=1}^{N} W_{il}} P_j(t) \tag{2}$$

Donde definimos:

$$R_{ij} = \frac{W_{ij}}{\sum_{l=1}^{N} W_{il}}$$

$$P_i(t) = 1 - \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \lambda \rho_{eff_{j\to i}}(t)\right)^{n_{j\to i}} \tag{3}$$

Donde $\rho_{eff_{j\to i}}$ si $i \neq j$ es:

$$\rho_{eff_{j\to i}}(t) = \frac{\rho_j(t)\alpha}{1-\rho_j(t)(1-\alpha)}$$

Y si i=j:

$$\rho_{eff_{i\to j}}(t) = \frac{\rho_i(t)\left[1-p_d\alpha\right]}{1-p_d\left[1-\rho_i(t)(1-\alpha)\right]}$$

Y por último:

$$n_{j\to i} = \delta_{ij}\left[1-p_d(1-\rho_i(t)(1-\alpha))\right] n_i + p_d\left[1-\rho_j(t)(1-\alpha)\right] R_{ji}\, n_j \tag{4}$$

1.1. Estimación del umbral epidémico

El desarrollo será muy similar al realizado en el texto principal. La condición de régimen estacionario se traduce en este caso en:

$$\rho_i^* = (1-\mu)\rho_i^* + (1-\rho_i^*)\Pi_i^*$$

$$\mu\rho_i^* = (1-\rho_i^*)\Pi_i^* \ . \tag{5}$$

De aquí en adelante se omitirá el superíndice *, pero debe sobreentenderse. Expandiendo a primer orden la expresión de Π_i se obtiene

$$\begin{aligned}
\Pi_i \ \approx\ & (1-p_d)\left[0 + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial\rho_k}\left[1-\prod_{l=1}^{N}(1-\lambda\rho_{eff_{l\to i}})\right]^{n_{l\to i}}_{\vec{\rho}=0}\epsilon_k\right)\right] \\
& + p_d\sum_{j=1}^{N} R_{ij}\left[0 + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial\rho_k}\left[1-\prod_{l=1}^{N}\left(1-\lambda\rho_{eff_{l\to j}}\right)\right]^{n_{l\to j}}_{\vec{\rho}=0}\epsilon_k\right)\right] = \\
= \ & (1-p_d)\sum_{k=1}^{N} T_{ki}\epsilon_k + p_d\sum_{j=1}^{N} R_{ij}\sum_{k=1}^{N} T_{kj}\epsilon_k
\end{aligned} \tag{6}$$

donde se denomina T_{ki} a la componente k del primer término del desarrollo de Taylor de P_i y $\vec{\rho} = (\rho_1, \rho_2 ... \rho_N) = (0, 0, ..., 0)$.
Es importante notar que $\rho_{eff_{l\to i}}$ y $n_{l\to i}$ solo dependen de ρ_l, haciendo las derivadas mucho más

sencillas que si hubiera dependencias mixtas. Se desarrolla el término T_{ki} a continuación:

$$\begin{aligned}
T_{ki} &= \frac{\partial}{\partial\rho_k}\left[1-\prod_{l=1}^{N}(1-\lambda\rho_{eff_{l\to i}})\right]^{n_{l\to i}}_{\vec{\rho}=0} = \\
&= -(1-\lambda\rho_{eff_{1\to i}})^{n_{1\to i}}...\frac{\partial}{\partial\rho_k}\left[(1-\lambda\rho_{eff_{k\to i}})^{n_{k\to i}}\right]...(1-\lambda\rho_{eff_{N\to i}})^{n_{N\to i}}|_{\vec{\rho}=0} = \\
&= \frac{\partial}{\partial\rho_k}\left[(1-\lambda\rho_{eff_{k\to i}})^{n_{k\to i}}\right]_{\vec{\rho}=0} \qquad (7)
\end{aligned}$$

Debido a que tanto $\rho_{eff_{k\to i}}$ como $n_{k\to i}$ dependen de ρ_k, para poder calcularla se recuerda una sencilla regla matemática:
Sea $y(x)=f(x)^{g(x)} \to ln(y)=g(x)ln\left(f(x)\right)$ por lo que

$$y'(x)=y(x)\left[g'(x)ln\,(f(x)[+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

Aplicando la expresión anterior a la Ec. (7) se obtiene:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial\rho_k}(1-\lambda\rho_{eff_{k\to i}})^{n_{k\to i}}|_{\vec{\rho}=0} &= (1-\lambda\cancel{\rho_{eff_{k\to i}}})|_{\vec{\rho}=0}\left[\frac{\partial n_{k\to i}}{\partial\rho_k}ln(1-\lambda\cancel{\rho_{eff_{k\to i}}})+n_{k\to i}\frac{\frac{\partial(1-\lambda\rho_{eff_{k\to i}})}{\partial\rho_k}}{(1-\lambda\rho_{eff_{k\to i}})}\right]_{\vec{\rho}=0} = \\
&= -\lambda n_{k\to i}(\rho_k=0)\frac{\partial\rho_{eff_{k\to i}}}{\partial\rho_k}(\rho_k=0)\ , \qquad (8)
\end{aligned}$$

por lo que hay que calcular estos dos últimos términos. El primer término, $n_{k\to i}(\rho_k=0)$, se obtiene utilizando la Ec. (4):

$$n_{k\to i}(\rho_k=0)=\delta_{ik}(1-p_d)n_i+p_dR_{ki}n_k\ ,$$

y para el segundo, $\frac{\partial\rho_{eff_{k\to i}}}{\partial\rho_k}(\rho_k=0)$, se debe diferenciar el caso de $i\neq k$ y el de $i=k$:

$$\frac{\partial\rho_{eff_{k\to i}}}{\partial\rho_k}(\rho_k=0)=\begin{cases}\alpha & \text{para } i\neq k\ . \\ \\ \frac{1-p_d\alpha}{1-p_d} & \text{para } i=k\ .\end{cases} \qquad (9)$$

Por otro lado, recordando la Ec. 7, se puede expresar T_{ki} como:

$$T_{ki}=-\frac{\partial}{\partial\rho_k}(1-\lambda\rho_{eff_{k\to i}})^{n_{k\to i}}|_{\vec{\rho}=0}=-n_{eff_{k\to i}}\lambda\epsilon_k$$

Evaluando el valor de la derivada calculada en la Ec. (9) se obtiene:

$$T_{ki}=\begin{cases}\lambda p_d\alpha R_{ki}n_k & \text{para } i\neq k \\ \\ \lambda\left[1-p_d\alpha\right]n_i & \text{para } i=k\ ,\end{cases}$$

por lo que $n_{eff_{k\to i}}\epsilon_k$ resulta ser el número efectivo de agentes infectados que se mueven de k a i:

$$n_{eff_{k\to i}}=\delta_{ik}(1-p_d\alpha)n_i+p_d\alpha R_{ki}n_k\ . \qquad (10)$$

La misma ecuación obtenida para el formalismo completo en el texto principal (Ec.(16)). Este resultado era razonable, pues el hecho de que $n_{eff_{k\to i}}$ no dependa de R_{ii} elimina toda dependencia del umbral con los lazos. El resto del cálculo es idéntico y tiene como solución:

$$\boxed{\lambda_c = \frac{\mu}{\Lambda_{max}(\mathbf{M})}} \tag{11}$$

Por lo que el problema de obtener la λ_c queda de nuevo simplificado a obtener el autovalor máximo de la matriz $\mathbf{M}$ definida como:

$$\boxed{M_{ij} = (1-p_d)(1-p_d\alpha)n_i\delta_{ij} + (1-p_d)p_d\alpha R_{ji}n_j + p_d(1-p_d\alpha)R_{ij}n_j + p_d^2\alpha(R\cdot R^{\dagger})_{ij}n_j} \tag{12}$$

2. Políticas de prevención: Material adicional

2.1. Formalismo Markoviano

El conjunto de ecuaciones Markovianas que describen la dinámica del sistema son:

$$\rho_i(t+1) = (1-\mu)\rho_i(t) + (1-\rho_i(t))\Pi_i(t) \tag{13}$$

$$\Pi_i(t) = (1-p_d)P_i(t) + p_d\sum_{j=1}^{N}\bar{R}_{ij}P_j(t) \tag{14}$$

Con:

$$\bar{R}_{ij} = \frac{R_{ij}e^{-\beta\rho_j(t)n_j}}{\sum_l R_{il}e^{-\beta\rho_l(t)n_l}}$$

$$P_i(t) = 1 - \prod_{j=1}^{N}\left(1-\lambda\rho_{eff_{j\to i}}(t)\right)^{n_{j\to i}} \tag{15}$$

Con:

$$\rho_{eff_{j\to i}}(t) = \begin{cases} \frac{\rho_j(t)\alpha}{1-\rho_j(t)(1-\alpha)} \\ \\ \frac{\rho_i(t)\left[1-p_d\alpha(1-\bar{R}_{ii})\right]}{(1-\rho_i(t))[1-p_d(1-\bar{R}_{ii})]+\rho_i(t)[1-p_d\alpha(1-\bar{R}_{ii})]} \end{cases} \tag{16}$$

Y por último:

$$n_{j\to i} = \delta_{ij}\left[1-p_d(1-\rho_i(t)(1-\alpha))\right]n_i + p_d\left[1-\rho_j(t)(1-\alpha)\right]\bar{R}_{ji}\,n_j \tag{17}$$

2.2. Cálculo del umbral epidémico

El desarrollo será muy similar al realizado en el texto principal. La condición de régimen estacionario se traduce en este caso en:

$$\rho_i^* = (1-\mu)\rho_i^* + (1-\rho_i^*)\Pi_i^*$$

$$\mu\rho_i^* = (1-\rho_i^*)\Pi_i^*\ . \tag{18}$$

De aquí en adelante se omitirá el superíndice * pero debe sobreentenderse. Expandiendo a primer orden la expresión de Π_i se obtiene

$$\begin{aligned}
\Pi_i &\approx (1-p_d)\left[0+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial P_i}{\partial \rho_k}\right)\right]+p_d\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial \rho_k}\Big|_{\vec{\rho}=0}\cancel{P_i\Big|_{\vec{\rho}=0}}+\bar{R}_{ij}\Big|_{\vec{\rho}=0}\frac{\partial P_j}{\rho_k}\Big|_{\vec{\rho}=0}\right]= \\
&= (1-p_d)\left[0+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial P_i}{\partial \rho_k}\Big|_{\vec{\rho}=0}\epsilon_k\right)\right]+p_d\sum_{j=1}^{N}R_{ij}\left[0+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial P_j}{\partial \rho_k}\Big|_{\vec{\rho}=0}\epsilon_k\right)\right]= \\
&= (1-p_d)\sum_{k=1}^{N}T_{ki}\epsilon_k+p_d\sum_{j=1}^{N}R_{ij}\sum_{k=1}^{N}T_{kj}\epsilon_k
\end{aligned} \tag{19}$$

donde se denomina T_{ki} a las componentes del primer término del desarrollo de Taylor de P_i y $\vec{\rho}=(\rho_1,\rho_2...\rho_N)=(0,0,...,0)$.
La principal diferencia de este formalismo con los anteriores, en cuanto a la realización de este cálculo, es que ahora $\rho_{eff_{k\to i}}$ depende de todas las ρ_j con $j=1,...,N$. Se desarrolla el término $\frac{\partial P_i}{\partial \rho_k}\Big|_{\vec{\rho}=0}$ a continuación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \rho_k}P_i\Big|_{\vec{\rho}=0} &= 0-\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial}{\partial \rho_k}\left(1-\lambda\rho_{eff_{m\to i}}\right)^{n_{m\to i}}\Big|_{\vec{\rho}=0}\prod_{l\neq m}\left(1-\lambda\rho_{eff_{l\to i}}\right)^{n_{l\to i}}\Big|_{\vec{\rho}=0}= \\
&= -\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial}{\partial \rho_k}\left(1-\lambda\rho_{eff_{m\to i}}\right)^{n_{m\to i}}\Big|_{\vec{\rho}=0}
\end{aligned} \tag{20}$$

De nuevo se utiliza la regla matemática:
Sea $y(x)=f(x)^{g(x)}\to ln(y)=g(x)ln\left(f(x)\right)$ por lo que

$$y'(x)=y(x)\left[g'(x)ln\left(f(x)[+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

Aplicando la expresión anterior a la Ec. 20 y operando la se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_k}\left(1-\lambda\rho_{eff_{m\to i}}\right)^{n_{m\to i}}\Big|_{\vec{\rho}=0}=-\lambda n_{m\to i}\frac{\partial \rho_{eff_{m\to i}}}{\partial \rho_k}\Big|_{\vec{\rho}=0}\ , \tag{21}$$

por lo que hay que calcular estos dos últimos términos. El primer término, $n_{m\to i}(\rho_k=0)$, se obtiene utilizando la Ec. (4):

$$n_{m\to i}\Big|_{\vec{\rho}=0}=\delta_{im}(1-p_d)n_i+p_dR_{mi}n_m\ ,$$

y para el segundo, $\frac{\partial \rho_{eff_{k\to i}}}{\partial \rho_k}(\rho_k=0)$, se deben diferenciar los siguientes casos:

$$\frac{\partial \rho_{eff_{k\to i}}}{\partial \rho_k}\Big|_{\vec{\rho}=0}=\begin{cases}\alpha & \text{para } m=k\neq i\ . \\ \frac{1-p_d\alpha(1-R_{ii})}{1-p_d(1-R_{ii})} & \text{para } \ m=k=i\ . \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.}\end{cases} \tag{22}$$

Por lo que, sustituyendo la Ec. 20 y definiendo $n_{eff_{k \to i}}$ como:

$$T_{ki} = -\frac{\partial}{\partial \rho_k}(1 - \lambda \rho_{eff_{k\to i}})^{n_{k\to i}}|_{\vec{\rho}=0} = -n_{eff_{k\to i}} \lambda \epsilon_k \ ,$$

se obtiene:

$$n_{eff_{k\to i}} = \delta_{ik}(1 - p_d \alpha) n_i + p_d \alpha R_{ki} n_k \ . \tag{23}$$

La misma ecuación obtenida para el formalismo completo en el texto principal (Ec.(16)). El resto del cálculo es idéntico y tiene como solución:

$$\boxed{\lambda_c = \frac{\mu}{\Lambda_{max}(\mathbf{M})}} \tag{24}$$

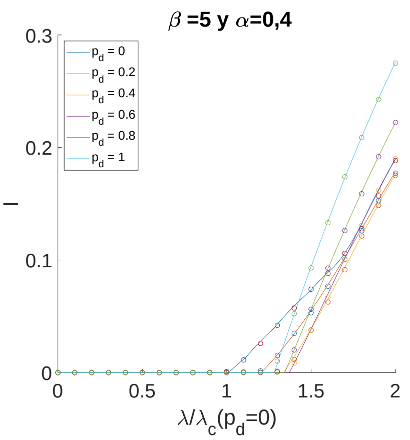
Por lo que el problema de obtener la λ_c queda una vez más simplificado a obtener el autovalor máximo de la matriz $\mathbf{M}$ definida como:

$$\boxed{M_{ij} = (1-p_d)(1-p_d\alpha)n_i\delta_{ij} + (1-p_d)p_d\alpha R_{ji} n_j + p_d(1-p_d\alpha)R_{ij}n_j + p_d^2\alpha(R \cdot R^{\dagger})_{ij} n_j} \tag{25}$$

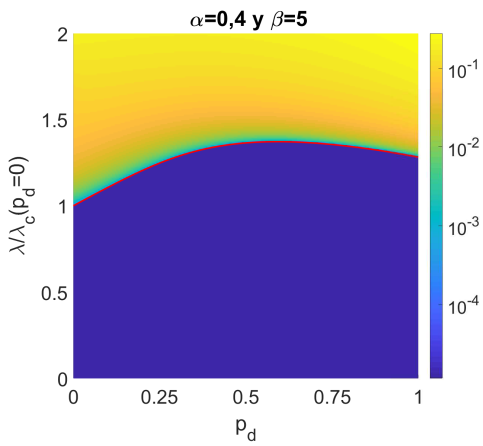
2.3. Validación del formalismo y de la estimación del umbral epidémico

De forma análoga a lo realizado con el modelo presentado en el texto principal, comprobamos la calidad del modelo Markoviano propuesto y de la estimación calculada para el umbral epidémico.

Se observa una total correspondencia entre los resultados obtenidos por las simulaciones de Monte Carlo y los valores obtenidos por iteración de las cadenas de Markov en la Fig. 1a. También se observa en la Fig. 1b una coincidencia total entre el valor de λ para el cual las ecuaciones de Markov predicen la transición a la fase epidémica y el calculado utilizando la Ec. 24.



(a)



(b)

Figura 1: Fracción de infectados como función de la infectividad λ, normalizada a la umbral en el caso de $p_d = 0$, para la red de movilidad de Cali para diferentes valores de p_d y para $\beta = 5$ y $\alpha = 0,4$ (a). Los puntos representan resultados obtenidos por simulaciones Monte Carlo y las líneas son los valores obtenidos por iteración de las ecuaciones de Markov. Fracción total de infectados (color) en función de p_d y la infectividad λ, normalizada a la umbral en el caso de $p_d = 0$, para la red de movilidad de Cali (b). La línea roja representa el cálculo de λ_c mediante la Ec. 11.