



Departamento de Física Teórica.

Trabajo de Fin de Grado:

**Tiempos de vida en modelos dinámicos de haces
de fibras con transferencia de carga local y "hazard
rate" exponencial**

Autor:

David Motis Juvero

Directores:

Amalio Fernández-Pacheco Pérez

Javier Gómez Jiménez

Año:

2019

Índice

1. Introducción	1
2. Tabla de símbolos	6
3. Tiempos de vida para el modelo ELS	8
3.1. Cálculo discreto	8
3.2. Cálculo continuo	8
4. Modelo LLS	11
4.1. Método Radiactivo	12
4.2. Reparto de cargas	13
4.3. Algoritmo	14
5. Cálculos de Monte Carlo LLS para 1D: Comparativa entre las reglas de rotura potencial y exponencial	15
6. Cálculos LLS en 2 dimensiones para la regla de rotura exponencial	17
7. Conclusiones	23
Referencias	

1. Introducción

Este trabajo se enmarca dentro de los modelos de fractura denominados modelos de haces de fibras [1]. De todas las modalidades que existen de los modelos de haces de fibras (y que serán comentadas más adelante), aquí usamos los modelos dinámicos con transferencia local de carga y una regla de rotura exponencial. Nuestro objetivo es conocer el tiempo de vida de sistemas progresivamente más grandes para ver si en el límite termodinámico su tiempo de vida es finito o cero.

El interés de este trabajo reside en que el problema de la fractura, además de asociarse a numerosas disciplinas tales como la ciencia de materiales, la ingeniería, la mecánica de rocas, la sismología, etc. [1], es uno de los problemas mecánicos más complejos y difíciles de formular cuantitativamente. Como acabamos de decir, modelizaremos dicho problema a través de los denominados **modelos de haces de fibras** (FBM: fiber bundle models), cuyo nombre indica que originalmente dichos modelos fueron concebidos para describir la resistencia (experimentos de tracción) o el tiempo de vida (experimentos de fatiga) de haces de fibras textiles [2, 3] y que, posteriormente, fueron extendidos a otros fenómenos físicos y geofísicos [1].

Podemos dividir los modelos de haces de fibras en dos grupos fundamentales: modelos estáticos y modelos dinámicos, en función de que el objetivo sea conocer la resistencia de un sistema o su tiempo de vida.

- En los **modelos estáticos** se estudia fundamentalmente la resistencia de un conjunto de N elementos, es decir, la carga que el sistema puede soportar antes de colapsar. Las simulaciones consisten en incrementar gradualmente la carga hasta que se produce la rotura completa del sistema. En estos modelos el tiempo no interviene.
- En los **modelos dinámicos** (o dependientes del tiempo) la variable de interés es el tiempo final de rotura y la carga sobre el sistema se suele mantener constante. Los elementos se van rompiendo uno a uno a la vez que la carga se redistribuye entre los supervivientes. Las simulaciones consisten en dejar evolucionar el sistema, cuyos elementos se rompen por fatiga, hasta alcanzar la rotura total de aquel.

En el presente trabajo se utilizan los modelos dinámicos, de modo que el interés se va a centrar en computar el tiempo de rotura de un haz de fibras de N elementos, cuando N tiende a infinito.

Todos los modelos de haces de fibras constan de un conjunto de elementos, colocados sobre un retículo, que pueden romperse de forma correlacionada. Se pueden elegir distintos tipos de retículos, unidimensionales, en 2D (cuadrados, hexagonales), en 3D, etc. La correlación entre estos elementos se implementa admitiendo que si un

elemento falla, la carga¹ que soportaba se transfiere de acuerdo a una regla prefijada a otros elementos del retículo en lo que se conoce como la regla de transferencia de carga, que define la manera en la que la carga de un elemento roto se reparte entre el resto de elementos sanos.

Existen diversas maneras en que la carga que un elemento soporta se redistribuya entre los elementos sanos una vez el elemento en cuestión se rompe. Las dos modalidades extremas son el reparto de carga equitativo (también llamado global o democrático) y el reparto de carga local, aunque también se han diseñado modalidades de transferencia de carga intermedias entre estos dos casos extremos. Resumimos a continuación las características principales de cada tipo de reparto de carga.

Reparto equitativo de cargas (ELS, *Equal Load Sharing*): los elementos intactos soportan la carga por igual y los rotos soportan una carga nula. Los modelos estáticos fueron inicialmente estudiados por Daniles [3]. No obstante, Phoenix [4] y McCartney-Smith [5] fueron quienes obtuvieron la solución analítica para el límite termodinámico. Estos autores hallaron una expresión que permitía calcular la probabilidad de rotura de un haz infinito. Respecto a las versiones dinámicas, fueron estudiadas por primera vez por Coleman [2] aunque quién desarrolló una teoría general de la dinámica de un haz de fibras tipo ELS fue Phoenix [4]. Para los modelos ELS se conoce el comportamiento de haces con un número infinito de fibras, tanto para los modelos estáticos como los dinámicos.

Reparto local de carga (LLS, *Local Load Sharing*): Aquí el peso que soportaban los elementos que se han roto se transfiere únicamente a los vecinos sanos más cercanos. Los primeros trabajos que trataron con los modelos LLS estáticos fueron los de Scop y Argon [6], Harlow y Phoenix [7] y Smith [8]. Phoenix y Newman [9] se centraron en los modelos dependientes del tiempo, siendo Phoenix [4] quien proporciona, para el caso unidimensional, expresiones analíticas que muestran como disminuye el tiempo de rotura del sistema conforme su tamaño aumenta (el tiempo de rotura tiende a cero cuando N tiende a infinito), tanto para el caso estático como para el dinámico.

En estos modelos se simetrizan las cargas, es decir, todos los elementos que limitan una misma grieta soportan cargas iguales. La importancia de la simetrización radica en que de esta forma el estado de carga del sistema antes de la rotura i -ésima no depende de la historia de roturas (desde la rotura $i = 0$ hasta la $i = i - 1$) sino solo de la configuración del sistema tras la rotura $(i - 1)$ -ésima. Se dice que los procesos no tienen *dependencia histórica*. Además de hacer el proceso de rotura independiente de

¹Cuando hablamos de carga estamos hablando de "fuerza dividida por la superficie que abarca cada elemento", es decir, si cada elemento soporta inicialmente una carga de 1 y hay N elementos en el sistema, el sistema está sometido a una presión externa $P = N$. Dicho de otra forma, la carga σ_j es el resultado de dividir la presión total sobre el sistema, P , entre el número de elementos, N , $\sigma_j = P/N$.

su historia, la simetrización de cargas también consigue hacer la transferencia local más realista desde el punto de vista físico, ya que se sabe que en una grieta circular los esfuerzos son iguales en todo su perímetro.

Fijémonos en el ejemplo sin simetrizar de la *Figura 1*. Observando el proceso $i = 2$ sabemos, por la distribución de cargas, que se ha roto primero el elemento $n = 2$ y después el $n = 3$. Para el caso sin simetrizar la carga del elemento roto se divide en dos y se suma a los vecinos más cercanos. Aparece *dependencia histórica*.

Ahora bien, si nos fijamos en el caso simetrizado, somos incapaces de saber que elemento se ha roto primero observando únicamente el proceso $i = 2$.

n	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
$i=0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$i=1$	1	$3/2$	0	$3/2$	1	1	$3/2$	0	$3/2$	0
$i=2$	1	$9/4$	0	0	$7/4$	1	2	0	0	2
	Sin simetrización					Con simetrización				

Figura 1: Comparativa entre dos haces unidimensionales de tamaño $N = 5$. En uno de ellos se aplica la simetrización de cargas (derecha) y en el otro no (izquierda). Se muestran las distribuciones de carga para los tres primeros pasos del proceso de rotura.

Otra ventaja de la simetrización de las cargas, además de la independencia entre los procesos de rotura, es que somos capaces de asignar la carga de todos los elementos observando el retículo en cualquier momento, contabilizando, como se explicará posteriormente, el tamaño y el perímetro de las grietas que aparecen.

Modalidades de reparto de carga intermedias: Se han propuesto muchas reglas de transferencia de cargas que no son ni tan locales como la transferencia local ni tan globales como la transferencia equitativa. Su utilidad depende de cada sistema particular y aquí solo vamos a comentar brevemente dos de las más utilizadas: el reparto jerárquico y el reparto de alcance variable.

- **Reparto jerárquico de cargas (HLS, *hierarchical load-sharing*):** la carga del elemento roto se transfiere siguiendo las ramas de un árbol fractal con un índice de coordinación fijo. Estos modelos fueron introducidos por primera vez en la literatura sismológica por Smalley, Trucotte y Solla [10]. Posteriormente Gómez, Vazquez-Prada, Moreno y Pacheco [11] probaron que el tiempo de rotura en los modelos HLS dinámicos no tiende a cero al tratar con sistemas de tamaño infinito, a diferencia de los modelos estáticos que si cumplieran esta propiedad.

- **Reparto de alcance variable (Modelo γ):** Hidalgo *et al.* [12] propusieron un modelo donde la carga que soportaba el elemento roto se distribuye entre los elementos sanos de siguiendo una ley potencial:

$$\sigma_{add} \propto \frac{1}{r_{ij}^\gamma} \quad (1.1)$$

r_{ij} es la distancia entre la fibra i que se rompe y la fibra j a la que se le añade la carga adicional. γ se trata como un parámetro.

Otro elemento fundamental en los modelos de haces de fibras es la regla de rotura o tasa de fallo. Para explicar el importante significado que tiene la regla de rotura, imaginemos un conjunto N de fibras sometidas a una misma historia de carga, pero soportando la carga por separado, de manera que cuando una fibra se rompe su carga simplemente se pierde (es decir, las fibras no forman parte de un haz en el que hay transferencias de cargas). Debido a variaciones estadísticas en las propiedades mecánicas de las fibras no todas ellas se romperán al mismo tiempo sino que lo harán con una distribución de tiempos de vida cuya media $\langle T_f \rangle$ la podemos considerar como el tiempo de vida del conjunto.

Pasado un tiempo t quedarán sanas $n(t)$ fibras, habiéndose roto las restantes $N - n(t)$. En el límite de muchas fibras, podemos escribir la siguiente ecuación diferencial para el ritmo al que se rompen las fibras:

$$\frac{dn}{dt} = -n\gamma[f(t)], \quad (1.2)$$

donde $f(t)$ es la historia de carga y $\gamma(f)$ es una función que solo depende de la carga sobre las fibras, pero que no depende explícitamente ni del tiempo ni del número de fibras que se han roto. Esta función es la denominada tasa de fallo o regla de rotura.

La ecuación anterior nos dice que si $f(t)$ es constante, $f(t) = K$, $\gamma(f)$ también lo será y en ese caso el número de fibras que se rompe en un pequeño intervalo de tiempo dt es simplemente proporcional al número de fibras sanas y al tamaño del intervalo dt .

Si ahora cambiamos el valor de la carga constante K y repetimos el experimento con N nuevas fibras, observaremos que el tiempo medio de vida $\langle T_f \rangle$ del conjunto también cambia, acortándose si aumentamos la carga K . Es decir, la tasa de fallo $\gamma(K)$ debe ser una función creciente de K .

Existen dos tipos de reglas de rotura en la literatura: exponencial y potencial.

- La regla de rotura **exponencial** fue introducida por Coleman [13] ya que se ajustaba muy bien a los experimentos sobre tiempos de vida en fibras textiles realizados entre los años 20 y 50 del siglo XX. Posteriormente, Phoenix y Tierney [14] dan una justificación teórica basándose en la mecánica estadística de por qué la regla exponencial describe correctamente la rotura en tensión de un material.

$$\gamma(\sigma) = e^\sigma \tag{1.3}$$

- La regla de rotura **potencial** apareció a medida que se desarrollaban los modelos ya que esta facilitaba la resolución analítica de dichos modelos.

$$\gamma(\sigma) = \sigma^\rho, \tag{1.4}$$

donde ρ es un exponente positivo.

En resumen, para la construcción de un modelo dinámico de haces de fibras se debe escoger la **red subyacente** que se va a utlizar, la **regla de transferencia de carga** y la **regla de rotura**. En la *Tabla 1* se muestran las opciones mas utilizadas en la literatura para estos cuatro aspectos fundamentales del modelo.

Red subyacente
1D 2D (cuadrada, hexagonal) 3D (cúbica) >3D (hipercúbica) Scale-free
Regla de transferencia de cargas
ELS LLS HLS Modelo γ
Regla de rotura
Exponencial Potencial

Tabla 1: Opciones mas utilizadas para los elementos principales que componen un modelo de haces de fibras.

En el presente trabajo se estudian los modelos **dinámicos LLS** en **2D** (sobre una red cuadrada) con la **regla de rotura exponencial**. También se utilizará la versión unidimensional de estos modelos, que es para la única que se conocen datos analíticos del tiempo medio de vida de un haz, para comprobar que su tiempo de vida tiende efectivamente a cero conforme el tamaño del haz tiende a infinito. Esto es importante para luego estudiar los modelos 2D y ver si se mantiene el mismo comportamiento.

Se sabe, sin embargo, que los modelos 2D LLS con la regla de rotura potencial, al menos para ciertos valores del parámetro ρ , tienen un tiempo de vida no nulo cuando el tamaño del haz tiende a infinito [15].

En la literatura de haces de fibras, los modelos que tienen un tiempo de vida nulo en el límite termodinámico se dice que no presentan un punto crítico, mientras que los modelos que tienen un tiempo de vida no nulo en el límite termodinámico se dice que presentan un punto crítico. Esta terminología se entiende si atendemos a la forma de la distribución de probabilidad $P(t < T_f)$ de los tiempos de vida de haces de fibras: conforme el número de elementos en el haz aumenta la distribución de probabilidad se va "localizando" (su desviación estándar disminuye) y tiende a convertirse en una función escalón que pasa de $P(t) = 0$ para $t < T_f$ a $P(t) = 1$ para $t > T_f$. Cuando este escalón se sitúa en $T_f = 0$ se dice que el sistema no tiene punto crítico y cuando se sitúa en $T_f > 0$ se dice que el sistema tiene un punto crítico.

Se desconoce si el tiempo de vida de un haz de fibras 2D con la regla de rotura exponencial tiende a cero o no conforme el tamaño del sistema aumenta.

Con lo visto hasta ahora podemos ya señalar los objetivos del presente trabajo en los siguientes dos:

- Verificar que para el modelo LLS dinámico en 1D no existe punto crítico para ambas reglas de rotura.
- Estudiar el comportamiento para el modelo LLS dinámico en 2D con regla de rotura exponencial. Investigar si presenta comportamiento asintótico no nulo.

2. Tabla de símbolos

En la *Tabla 2* se definen todos los símbolos usados en esta memoria. En el resto de apartados se hará referencia a esta tabla cuando aparezca cada nuevo símbolo, de manera que se tenga claro en todo momento el significado de cada uno de ellos.

Símbolo	Significado
N	Número de fibras en cada dimensión. Para los modelos 1D N coincide con el número total de fibras del haz. En los modelos 2D el número total de fibras es N^2
i	Indica la etapa de fractura en la que la fibra i ésima va a romperse tras haberlo hecho la $i-1$, toma valores entre $1 \leq i \leq N$.
n_i	Número total de fibras sanas en la etapa i , toma el valor $n_i = N - (i - 1)$.
j	Índice de las fibras sanas en la etapa i , toma valores entre $1 \leq j \leq n_i$. En los modelos 1D se utiliza para etiquetar todas las fibras del haz. En los modelos 2D se utiliza para indexar las filas de el retículo cuadrado.
l	Índice para etiquetar las columnas del retículo cuadrado en el caso 2D.

m_k	Área de la grieta k .
λ_k	Perímetro de la grieta k .
χ	Conjunto de elementos que pertenecen al retículo, $\forall (j, l) \in \chi$.
$\zeta_{j,l}$	Entorno del elemento (j, l) en las simulaciones Monte Carlo.
σ_j	Carga que soporta la fibra j . Esta magnitud tiene dimensiones de presión, es decir, fuerza dividido por unidad de superficie. Las σ_j deben considerarse adimensionalmente de la forma $\frac{\sigma}{\sigma_0}$, donde $\sigma_0 = 1$ es la carga inicial de todas las fibras.
	Regla de fractura de la fibra j . Se emplean dos modalidades, la ley de potencias:
	$\gamma_j = \gamma_0 \cdot \left(\frac{\sigma_j}{\sigma_0} \right)^\rho$
γ_j	y la ley exponencial:
	$\gamma_j = \gamma_0 \cdot e^{\frac{\sigma_j}{\sigma_0}}$
	A γ_j también le llamaremos "anchura de fractura de la fibra j ". Tiene dimensiones de tiempo a la inversa debido al factor γ_0 . Cuando se realizan cálculos adimensionales se supone $\gamma_0 = 1$ adimensional.
Γ_i	Anchura total de fractura de la etapa i . Se calcula como: $\Gamma_i = \sum_{j \subset i} \gamma_j$. El término anchura de fractura se usa con el mismo significado que el de "anchura de desintegración" en los problemas de radiactividad. Esta equivalencia se puede hacer porque la ecuación diferencial resultante de resolver el modelo de haz de fibras en el caso ELS (ver Apartado 3.2) tiene la misma forma que la de desintegración radiactiva pero con una "constante de desintegración" que no es constante sino que depende de la carga que cada fibra del haz soporta en cada momento.
δ_i	Tiempo que tarda la fibra i en romperse, tras hacerlo la $i-1$. Se calcula como $\delta_i = \frac{1}{\Gamma_i}$.
$p_{j \subset i}$	Probabilidad de que se rompa el elemento j en la etapa i . Se calcula como $p_{j \subset i} = \frac{\gamma_j}{\Gamma_i}$.
T_f	Tiempo de vida del haz de fibras, se calcula como $T_f = \sum_{i=1}^N \delta_i$.

Tabla 2: Tabla de símbolos.

3. Tiempos de vida para el modelo ELS

En esta sección se calcula el tiempo medio de vida de un haz de fibras aplicando las dos reglas de rotura, potencial y exponencial. Se utilizará el reparto equitativo de cargas (ELS), ya que es el único que permite una solución analítica. Empezaremos realizando los cálculos en un espacio discreto de N fibras para compararlos posteriormente con sus equivalentes en un espacio continuo, cuando el número N de fibras tiende a infinito y podemos plantear una ecuación diferencial.

3.1. Cálculo discreto

Al encontrarnos en un modelo ELS, en cada etapa i , la carga σ_j de todas las fibras sanas es la misma. Calculamos la carga de cualquier elemento j en la etapa i como:

$$\sigma_i = \frac{N}{n_i} = \frac{N}{N - i + 1}, \quad (3.1)$$

por lo tanto, la anchura total de fractura de la etapa i (véase la *Tabla 2*), utilizando la regla de rotura potencial, es

$$\Gamma_i = (N - i + 1) \left(\frac{N}{N - i + 1} \right)^\rho \quad (3.2)$$

y si utilizamos la regla de rotura exponencial obtenemos

$$\Gamma_i = (N - i + 1) \cdot e^{\frac{N}{N-i+1}}. \quad (3.3)$$

Como se menciona en la *Tabla 2* el tiempo que debe transcurrir hasta la rotura de la siguiente fibra del haz es

$$\delta_i = \frac{1}{\Gamma_i}. \quad (3.4)$$

Así pues, el tiempo de vida del haz de fibras viene dado por:

$$T_f = \sum_{i=1}^N \delta_i. \quad (3.5)$$

3.2. Cálculo continuo

Para realizar nuestros cálculos en el continuo debemos tratar nuestro índice n (número de elementos sanos) como una variable continua

$$0 \leq n \leq N. \quad (3.6)$$

Dado el reparto equitativo de cargas podemos formular una ecuación diferencial en esta variable frente al tiempo, como se ha explicado en la introducción. Particularizando la ecuación (1.2) a la regla de rotura potencial obtenemos

$$dn = -n \left(\frac{N}{n} \right)^\rho dt, \quad (3.7)$$

y, para el caso exponencial

$$dn = -n \cdot e^{\frac{N}{n}} dt. \quad (3.8)$$

Es importante resaltar aquí el parecido de estas ecuaciones con la de la radiactividad.

$$dN = -N\lambda dt.$$

La ecuación diferencial (3.8) para los modelos dinámicos de fibras con transferencia de carga de tipo ELS y regla de rotura exponencial fue la primera forma en la que Coleman [2] empezó su trabajo sobre los modelos dinámicos de fibras. Para ambas reglas de rotura se puede calcular analíticamente el valor del tiempo de vida medio del haz.

En (3.7), pasando la variable n a la izquierda tenemos

$$\frac{n^{\rho-1}}{N} dn = -dt \quad (3.9)$$

e integrando el tiempo desde 0 hasta T y el número de fibras desde N hasta 0, el resultado es:

$$T = \frac{1}{\rho}. \quad (3.10)$$

Ahora integramos (3.8):

$$\frac{dn}{n \cdot e^{\frac{N}{n}}} = -dt, \quad (3.11)$$

$$\int_N^0 \frac{dn}{n \cdot e^{\frac{N}{n}}} = - \int_0^T dt. \quad (3.12)$$

Para el cálculo de (3.12) realizamos el cambio de variable $\frac{N}{n} = x$. Con ese cambio de variable los nuevos límites de integración vienen dados por:

$$\begin{aligned} \text{Si } n = N &\rightarrow x = 1, \\ \text{Si } n = 0 &\rightarrow x = \infty \end{aligned}$$

y el nuevo diferencial queda como

$$\frac{dn}{n} = \frac{N}{\frac{N}{x}} \left(-\frac{dx}{x^2} \right) = -\frac{dx}{x}.$$

Así, (3.12) se convierte en:

$$T = \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \equiv -Ei(-1) = 0.21938. \quad (3.13)$$

Esta función se conoce con el nombre de Integral Exponencial, aquí valorada en el punto $x = -1$.

Como se observa en la *Figura 2* hasta $\rho = 5$, el tiempo de vida resultante de la ley exponencial está por debajo de los que se obtienen usando la ley potencial, para $\rho = 5$ los tiempo de vida son iguales y para $\rho > 5$ el tiempo de vida de un haz de fibras con la regla de rotura pote ncial es menor con la regla de rotura exponencial.

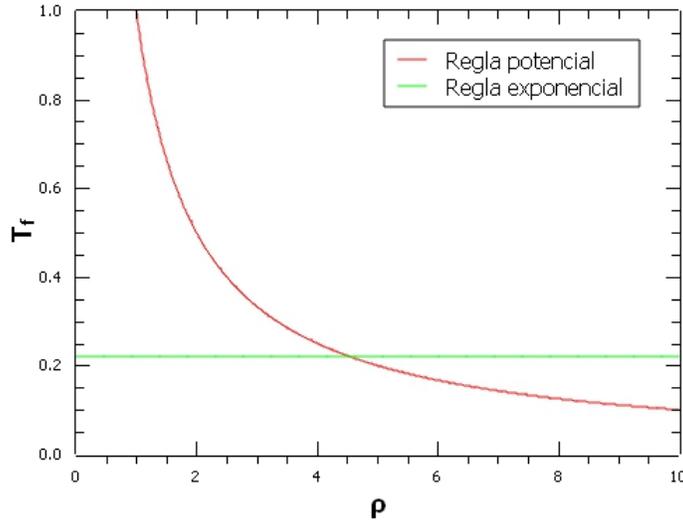


Figura 2: Comparativa entre los tiempos de vida para ambas reglas de rotura

En la *Tabla 3* se aprecia, para valores progresivamente mayores de N , la convergencia de la estrategia discreta a los valores obtenidos en el continuo.

	T_f		
	<i>Ley Potencial</i>		<i>Ley Exponencial</i>
	$\rho = 2$	$\rho = 5$	
<i>Formulación continua</i>	0.5	0.2	0.21938

<i>Formulación discreta</i>	T_f		
	<i>Ley Potencial</i>		<i>Ley Exponencial</i>
N	$\rho = 2$	$\rho = 5$	
10	0.650000	0.399730	0.274368
10^2	0.515000	0.215439	0.224902
10^3	0.501500	0.201504	0.219936
10^4	0.500150	0.200015	0.219439
10^5	0.500015	0.200015	0.219389

Tabla 3: Comparativa entre los resultados obtenidos en la formulación discreta frente a los resultantes de considerar la continua. Se observa una clara convergencia de los tiempos medios de vida en el espacio discreto conforme el valor de N aumenta.

4. Modelo LLS

Así como los modelos dinámicos de fibras se pueden resolver analíticamente en el caso de la transferencia de carga equitativa (ELS), el resto de modalidades de transferencia de carga no lo permiten y hay que recurrir a diversos tipos de aproximaciones [14, 16]

En esta sección se explica el algoritmo utilizado para la obtención de los resultados que se mostrarán en las secciones posteriores. El objetivo es describir someramente las funciones principales así como profundizar en las partes clave.

En el modelo se utiliza un retículo, ya sea una línea de elementos en una dimensión o bien una matriz $N \times N$ en el caso bidimensional. Todos los elementos del retículo empiezan con una carga $\sigma_0 = 1$. A medida que avanza la simulación y se van produciendo roturas por fatiga, la carga de las fibras sanas próximas a fibras rotas se incrementa (puesto que la carga total se conserva), lo que hace que sus tiempos de vida se acorten. Se han utilizado condiciones de contorno periódicas, es decir $\sigma_N = \sigma_0$ (en esta última expresión el subíndice 0 indica la posición del elemento, no la carga inicial).

4.1. Método Radiactivo

En el método estándar de resolución por Monte Carlo de los modelos de haces de fibras [17, 18] la aleatoriedad se incorpora al comienzo de la simulación en la distribución de los tiempos de vida nominales de las fibras del haz, de manera que a partir de ese momento la simulación es completamente determinista, regida por la definición del entorno de una fibra, por la regla de transferencia de carga y por la regla de rotura. Por el contrario, en el método radiactivo de resolución [19, 20] no se definen al comienzo tiempos de vida nominales y la aleatoriedad se introduce durante la simulación a través de la regla de rotura, como se explica en este apartado. Usando la terminología de la mecánica estadística y la termodinámica, la aleatoriedad en el método estándar de Monte Carlo produce un desorden de tipo *quenched*, mientras que en el método radiactivo genera un desorden de tipo *annealed*.

La componente aleatoria (*annealed disorder*) se introduce al lanzar un número al azar en el intervalo $[0,1)$ que nos indica el elemento que se va a romper. Como se especifica en la *Tabla 2* podemos calcular la anchura de fractura de cada fibra como

$$\gamma_j = \sigma_j^\rho \quad (4.1)$$

para el caso potencial, o bien

$$\gamma_j = e^{\sigma_j} \quad (4.2)$$

para el caso exponencial. Calculamos también la anchura total de fractura para la etapa i y la probabilidad de ruptura de cada elemento:

$$\Gamma_i = \sum_{j \subset i} \gamma_j, \quad (4.3)$$

$$p_{j \subset i} = \frac{\gamma_j}{\Gamma_i}. \quad (4.4)$$

Y calculamos el tiempo de vida de la configuración como:

$$\delta_i = \frac{1}{\Gamma_i}. \quad (4.5)$$

Hechos estos calculos elegimos el elemento que se va a romper. Como las probabilidades están normalizadas ($\sum_{j \subset i} p_j = 1$), colocamos los p_j en el intervalo $[0,1)$, de modo que, a cada fibra j le corresponde una anchura igual a su probabilidad de rotura. Lanzamos un número aleatorio en dicho intervalo escogiendo así el elemento que se va a romper, como muestra la *Figura 3*.

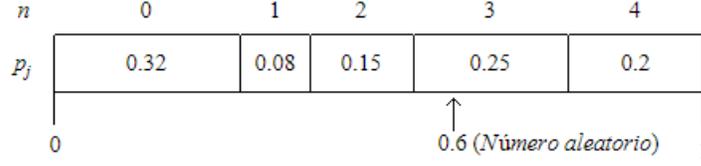


Figura 3: Ejemplo de elección del elemento a romper, vemos como en este caso se rompería el elemento $n=3$.

4.2. Reparto de cargas

En esta sección se explica como se reparten las cargas una vez se rompe un elemento. Como ya se ha dicho anteriormente, en la modalidad LLS el reparto de cargas es local así que transferencia de carga solo afecta a los vecinos sanos mas próximos.

Introducimos en esta sección la *matriz de etiquetas* (o línea en el caso 1D). Esta matriz nos servirá para para ir almacenando las grietas que se irán formando en nuestro material.

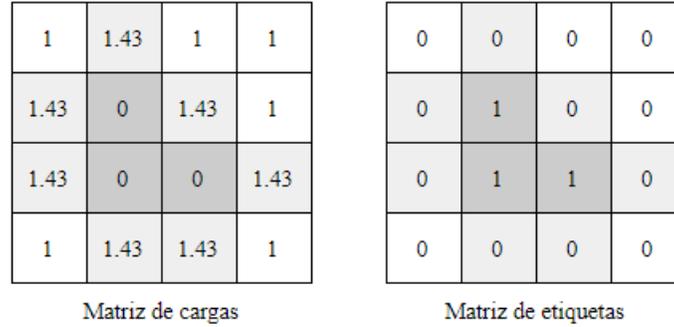


Figura 4: Ejemplo de *matriz de cargas* y *matriz de etiquetas* para un sistema 4×4 , considerando que los vecinos mas proximos son el superior, el inferior, el izquierdo y el derecho. El tamaño de la grieta es $m_1 = 3$ así como su perímetro $\lambda_1 = 7$.

Pasamos a explicar el método utilizado. Supongamos que tenemos un sistema que ya ha sufrido varias roturas, es decir, la *matriz de etiquetas* contiene cierta información (*Figura 4*). Lo primero que debemos hacer es escanear dicha matriz. Debemos contar el tamaño m_k y el perímetro λ_k para cada grieta k . Una vez tenemos estos datos, calculamos la carga de cada elemento por medio de la siguiente expresión:

$$\sigma_j = 1 + \sum_k \frac{m_k}{\lambda_k}, \quad (4.6)$$

donde el sumatorio en k se extiende a los vecinos mas próximos considerados. Debemos revisar para cada elemento j del retículo sus vecinos mas próximos distinguiendo dos casos: elementos sano o elemento roto.

- **Elemento sano:** Si el vecino es un elemento sano no aporta carga adicional al elemento j .
- **Elemento roto:** Si el vecino es un elemento roto, debemos sumar al elemento j la carga adicional ponderada con el tamaño y perímetro de la grieta a la cual el vecino roto pertenece. Si varios vecinos pertenecen a una misma grieta la carga adicional solo se suma una vez.

4.3. Algoritmo

Por último en este apartado se esquematiza la estructura del código, que consta de los siguientes pasos:

1. Dada una configuración de cargas en un instante cualquiera de la simulación, mediante (4.1), (4.2) y (4.3) calculamos las magnitudes necesarias. Obtenemos a través de (4.5) el tiempo de vida δ_i de la configuración.
2. A partir de las probabilidades de rotura calculadas mediante (4.4) obtenemos el elemento a romper.
3. Se rompe el elemento indicado.
4. Se añade el elemento roto a la *matriz de etiquetas* recalculando el tamaño y perímetro para cada grieta.
5. Se redistribuyen las cargas según (4.6).
6. Se vuelve al paso 1 si todavía queda algún elemento sano. Si no, se calcula el tiempo de vida del sistema sumando los δ_i de todas las configuraciones previas:

$$T_f = \sum_{i=1}^N \delta_i.$$

Se ha implementado un código en C para la obtención de los resultados, cuyo listado aparece en el *Anexo I*.

5. Cálculos de Monte Carlo LLS para 1D: Comparativa entre las reglas de rotura potencial y exponencial

En este apartado se comparan las reglas de rotura (4.1) y (4.2) en el caso unidimensional. Se utiliza el método de resolución explicado en el apartado anterior, realizando simulaciones para distintos tamaños del retículo. El objetivo de este apartado es confirmar los resultados obtenidos por otros autores para el comportamiento asintótico del tiempo de vida de estos modelos de haces de fibras [14, 17], que indican que el tiempo de vida del haz tiende a cero conforme el tamaño del haz tiende a infinito, aunque de forma muy lenta. Casi todos los resultados que se conocen se han obtenido con la regla de rotura potencial [17], mientras que para la regla de rotura exponencial los resultados son muy escasos [21].

La *Figura 5* muestra los resultados obtenidos para el tiempo de vida T_f de sistemas LLS unidimensionales con las reglas de rotura potencial (para dos valores del exponente ρ) y la regla de rotura exponencial. Nótese que las escalas de ambos ejes son logarítmicas.

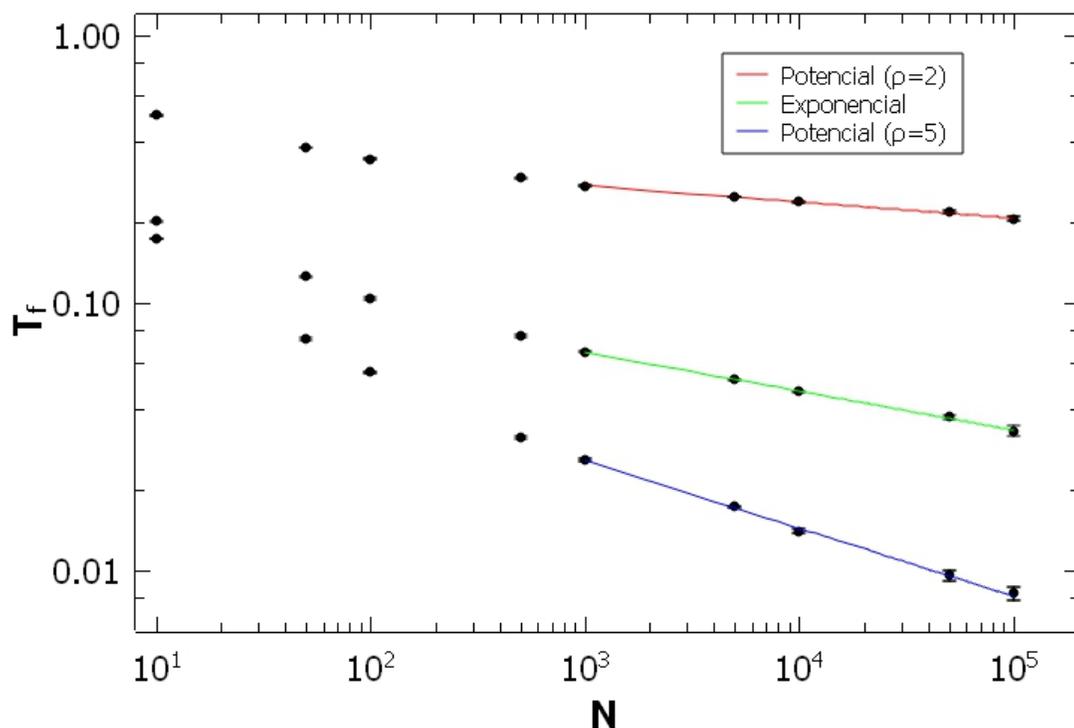


Figura 5: Resultados de las simulaciones para T_f en un modelo LLS para las reglas de rotura potencial (caso $\rho = 2$ y $\rho = 5$) y exponencial. Solo se ajustan los datos a partir de $N = 10^3$ ya que para tamaños inferiores el valor de T_f decrece muy rápidamente. Los datos representados en esta figura se adjuntan en el *Anexo II*.

Se encuentra una clara dependencia de T_f con el tamaño N del retículo. Los datos obtenidos se ajustan con precisión a la expresión

$$T_f = aN^{-b}, \quad (5.1)$$

donde el exponente b depende fuertemente tanto de la regla de rotura como del valor de ρ en el caso de la regla de rotura potencial. Esta expresión es válida para ambas reglas de rotura.

Estos resultados recuerdan los datos teóricos de los modelos ELS expuestos en el *Apartado 3*, donde hasta $\rho = 5$ los tiempos de vida para la regla exponencial se encuentran por debajo de los obtenidos para la regla potencial.

Se puede deducir de (5.1) que, aunque la tendencia sea lenta, los tiempos de rotura tienden a 0 cuando $N \rightarrow \infty$. Es decir, el sistema **no presenta punto crítico**.

	$\rho = 2$	$\rho = 5$	Exponencial
b	0.06	0.25	0.15

Tabla 4: Valores del parámetro b para los distintos ajustes realizados en la *Figura 5*.

En el caso de la regla de rotura exponencial el valor de b puede compararse con el obtenido por Zhang [21]. Para poder comparar más resultados hemos realizado simulaciones con la regla de rotura potencial y valores de $\rho = 10$ y $\rho = 20$. Ajustando estos datos a (5.1) hemos obtenido, en concordancia con los resultados de Zhang [21], los valores de b que se muestran a continuación:

	$\rho = 10$	$\rho = 20$
b	0.49	0.86

Tabla 5: Valores del parámetro b para la regla de rotura potencial con $\rho = 10$ y $\rho = 20$.

6. Cálculos LLS en 2 dimensiones para la regla de rotura exponencial

En este último apartado presentamos los resultados de las simulaciones realizadas en un retículo cuadrado ($N \times N$) utilizando la regla de rotura exponencial. Se etiquetan los elementos del retículo mediante los índices (j, l) . El objetivo de estas simulaciones es analizar y describir como se comporta el sistema conforme el tamaño del retículo aumenta, especialmente cuando N tiende a infinito. Se utilizaran dos entornos distintos [22]: el entorno de Moore y el entorno de Von Neumann. Los entornos nos indican cuales son los vecinos mas próximos dado un elemento (j, l) del retículo.

Definimos χ como el conjunto de elementos que pertenecen al retículo, $\forall (j, l) \in \chi$. Por último, denotamos el entorno del elemento como $\zeta_{j,l}$. Los dos tipos de entornos (*Figura 6*) se definen del siguiente modo:

- **Entorno de Von Neumann:**

$$\zeta_{j,l} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \chi \mid |\alpha - j| + |\beta - l| \leq 1 \right\}. \quad (6.1)$$

- **Entorno de Moore:**

$$\zeta_{j,l} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \chi \mid |\alpha - j| \leq 1 \text{ y } |\beta - l| \leq 1 \right\}. \quad (6.2)$$

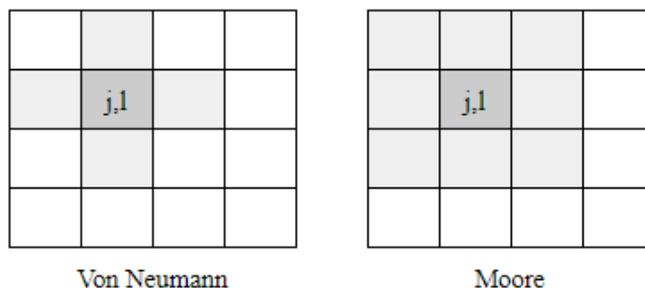


Figura 6: Representación de los entornos de Von Newman y Moore.

Hemos realizado simulaciones para sistemas de tamaño (longitud del lado) $N = 20$ (400 elementos) hasta $N = 200$ (40,000 elementos), con los entornos de von Neumann y Moore. Los resultados del tiempo de vida promedio en función de N se muestran en la *Figura 7* (círculos negros con barras de error), junto con dos ajustes a los datos de las simulaciones (líneas continuas de color verde y rojo). Las barras de error en los tiempos de vida expresan la desviación estándar de la media calculada a partir de un número de repeticiones de Monte Carlo suficiente para que dicho error sea, en todos los casos, menor de un 0.1 %.

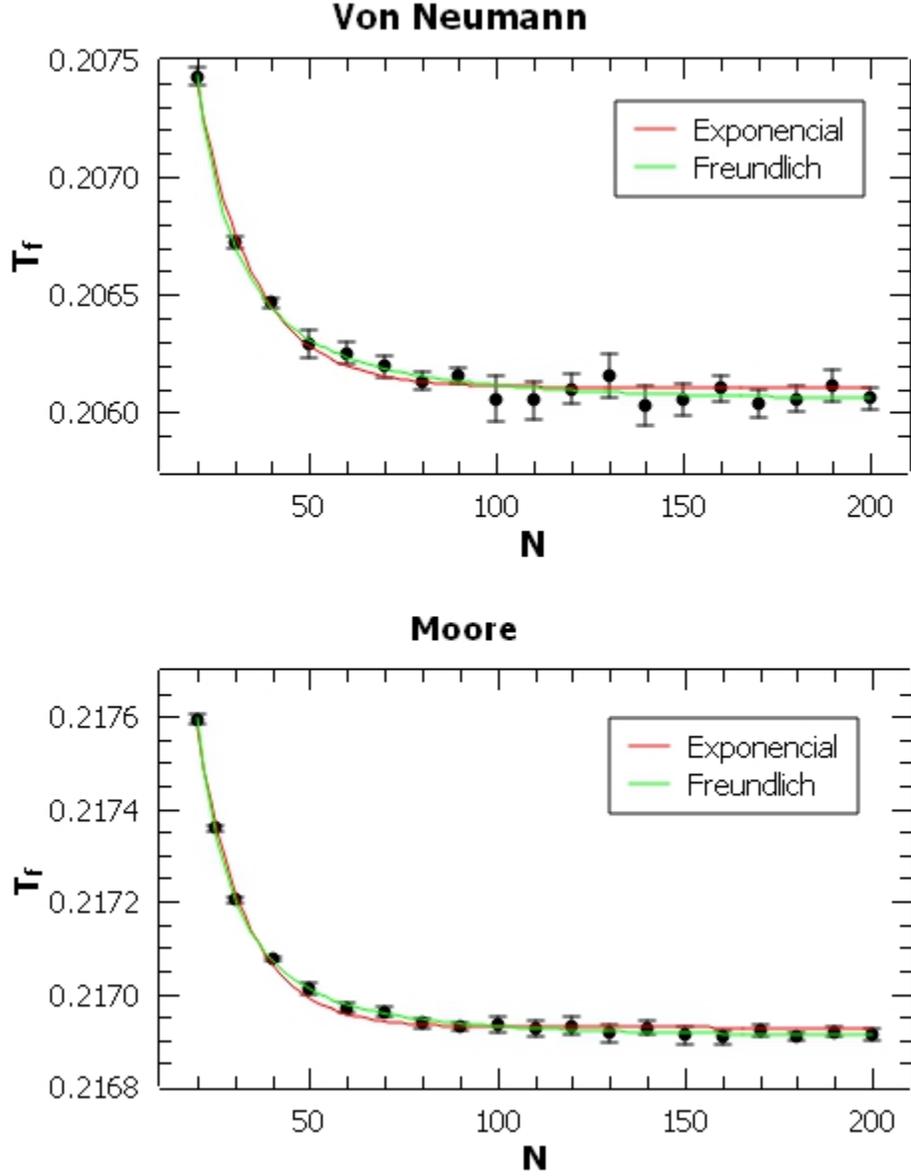


Figura 7: Tiempos de rotura en función del tamaño del retículo para ambos entornos. Se han simulado datos desde $N=20$ hasta $N=200$. Los datos representados en esta figura se adjuntan en el *Anexo III*

El gráfico superior de la *Figura 7* muestra los resultados con el entorno de Von Neumann (cuatro vecinos más cercanos) y el inferior por el entorno de Moore (ocho vecinos más cercanos). En ambos casos se observa cómo el valor del tiempo de vida varía rápidamente para tamaños pequeños del sistema pero tiende, en apariencia al menos, a un valor constante al aumentar N , de modo que por encima de $N = 100$ el tiempo de vida parece haberse estabilizado. Para confirmar de una manera más

cuantitativa estas observaciones, se han realizado dos ajustes a los datos de tiempos de vida.

Nuestra primera opción para describir los datos de la *Figura 7* (línea roja continua) ha sido una exponencial negativa del tipo

$$T_f = a + be^{-cN}, \quad (6.3)$$

donde a , b y c son los tres parámetros del ajuste. Estamos particularmente interesados en el valor de a , que es la estimación que buscamos del valor asintótico del tiempo de vida del haz de fibras, $a = T_{f,\infty}$.

El ajuste a esta función nos muestra la **aparición de un punto crítico**, el tiempo de rotura de un sistema infinito no es cero a diferencia del caso unidimensional.

Con objeto de confirmar el valor del tiempo de vida asintótico, hemos usado una segunda función de ajuste, también de tres parámetros pero esta vez de tipo potencial:

$$T_f = aN^{bN^{-c}}. \quad (6.4)$$

Esta función también presenta una asíntota en $T_f = a$ cuando $N \rightarrow \infty$. Aplicando logaritmos en la expresión (6.4) podemos convertir la función de ajuste en una recta de pendiente b cuyo corte con el *eje Y* toma el valor de $\ln(a)$:

$$\underbrace{\ln(T_f)}_y = \ln(a) + \underbrace{bN^{-c}\ln(N)}_x. \quad (6.5)$$

Por tanto, si tomamos como eje horizontal $N^c \ln(N)$ y como eje vertical $\ln(T_f)$ los datos de las simulaciones deben ajustarse a una línea recta. Esta representación se muestra en la *Figura 8* para los entornos de von Neumann (gráfico del a izquierda) y de Moore (gráfico de la derecha).

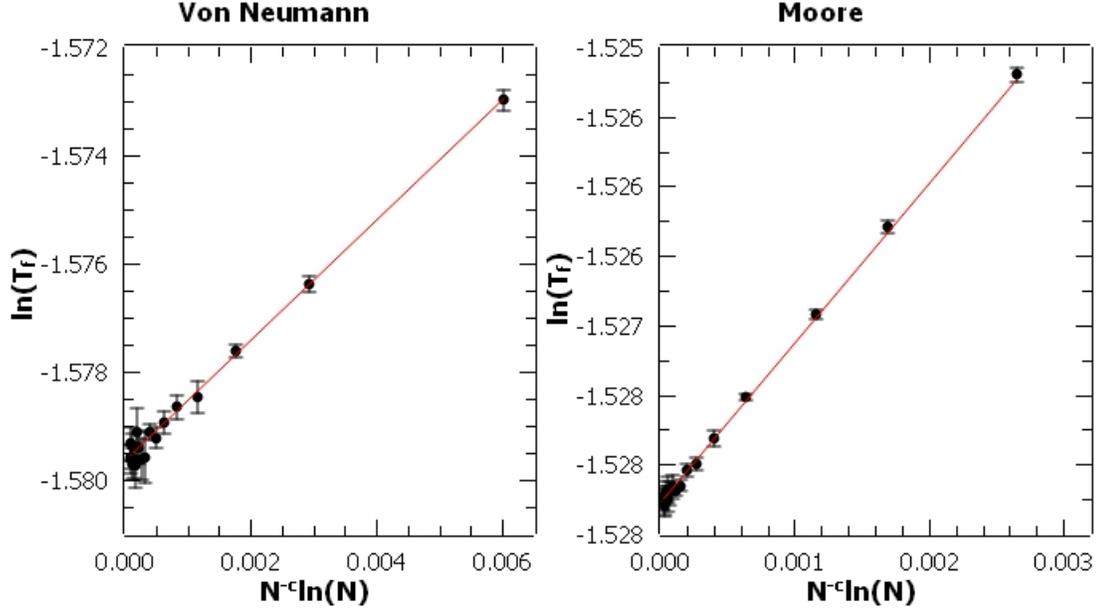


Figura 8: Ajustes para la función de Freundlich tanto para el entorno de Von Neumann como el de Moore.

En la *Tabla 6* se recogen los valores de los parámetros obtenidos con los ajustes en cada uno de los dos entornos. El ajuste resultante es bueno tanto para la función exponencial como para la potencial y, lo que es más importante, ambos ajustes predicen un valor muy similar para el tiempo de vida asintótico (parámetro de ajuste a), lo que refuerza la existencia de un punto crítico en estos modelos 2D con la regla de rotura exponencial.

Von Newman	a	Δa	$\chi^2_{reducido}$	$\chi^2_{ajustado}$
Exponencial	0.2061	$1.4 \cdot 10^{-5}$	0.830	0.988
Freundlich	0.2060	$1.2 \cdot 10^{-5}$	0.280	0.996
Moore	a	Δa	$\chi^2_{reducido}$	$\chi^2_{ajustado}$
Exponencial	0.2169	$4.9 \cdot 10^{-6}$	2.096	0.994
Freundlich	0.2169	2.810^{-6}	0.416	0.999

Tabla 6: Valores obtenidos para los ajustes en las simulaciones 2D. Los valores de a se corresponden con el valor asintótico de T_f .

Podemos concluir que para ambos casos **existe un valor asintótico de T_f distinto de cero** (valores de a en la *Tabla 6*) **para tamaños infinitos de la red.**

Se aprecia una diferencia significativa entre el valor asintótico de T_f para los distintos entornos siendo el valor del tiempo de vida algo menor para el entorno de

von Neumann. Podemos asociar esta diferencia a que, en el entorno de Moore, la carga se redistribuye entre mas vecinos que en el de Von Newman (8 vecinos para el entorno de Moore y 4 en el de Von Neumann). Cada vez que se rompe un elemento la carga que se transfiere a los vecinos mas cercanos es consiguientemente menor, como se muestra en la *Figura 9* y se explica en el pie de figura. Al ser la carga menor la anchura de fractura asociada a estos elementos, dada por la expresión (4.2), es menor para el entorno de Moore que para el de Von Neumann. Consecuentemente al disminuir γ_j también lo hace Γ_i por lo que el tiempo de rotura (Γ_i^{-1}) es mayor.

Resulta interesante recordar aquí que el tiempo de vida de un sistema infinito en la modalidad de transferencia de carga equitativa ELS (ver *Apartado 3.2* y ecuación (3.13)) es 0.2194, que está muy cercano al valor asintótico estimado para el modelo 2D-LLS con el entorno de Moore. Esto es lógico ya que, al repartirse la carga entre un número mayor de elementos, el resultado es más similar al caso límite ELS en el que la carga se reparte entre todos los elementos sanos del sistema.

1	1.25	1	1
1.25	0	1.25	1
1	1.25	1	1
1	1	1	1

Von Neumann

1.125	1.125	1.125	1
1.125	0	1.125	1
1.125	1.125	1.125	1
1	1	1	1

Moore

Figura 9: Matrices de carga para el caso bidimensional 4×4 , tanto para el entorno de Von Neumann como para el de Moore. Se muestra la primera iteración del proceso total de rotura. Mediante (4.2) y (4.3) podemos calcular la anchura total de cada configuración. Realizando los calculos se obtiene $\Gamma_i^{Neumann} = 43.86$ y $\Gamma_i^{Moore} = 43.67$. Finalmente, a través de (4.5) obtenemos los tiempos de rotura de la configuración $\delta_i^{Neumann} = 0.0227$ y $\delta_i^{Moore} = 0.0228$.

Otra diferencia interesante es la forma de las distribuciones de los tiempos de vida, $p(T_f)$, en las simulaciones con el entorno de Von Neumann y de Moore. Como se muestra en la *Figura 10* para el entorno de Moore la distribución es más estrecha de modo que el error en el cálculo de la vida media (*Figuras 8 y 9*) es menor.

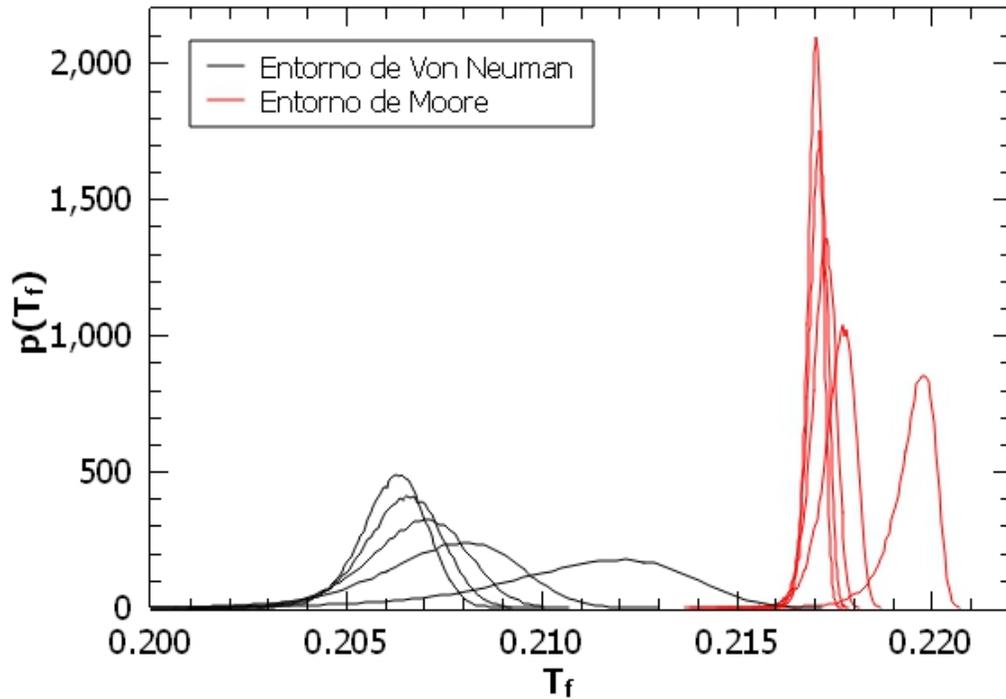


Figura 10: Distribución de probabilidad de los tiempos de vida en las simulaciones con el entorno de von Neumann (curvas en negro) y el de Moore (curvas en rojo). Se muestran resultados para tamaños de $N=M=10, 20, 30, 40$ y 50 . Las curvas corresponden a sistemas cada vez más grandes conforme el máximo de la curva se desplaza hacia la izquierda.

7. Conclusiones

Las *figuras 5 y 7* resumen los resultados principales de este trabajo. Detrás de ellas hay más de 500 horas de tiempo de computación y, gracias al método radiactivo de Monte Carlo, que reduce mucho la desviación estándar en el cómputo del tiempo medio de vida, nos ha permitido obtener un conjunto de resultados de alta precisión, con los que hemos podido estimar el comportamiento asintótico de los modelos de haces de fibras LLS con la regla de rotura exponencial.

Queda comprobado que los resultados obtenidos en las simulaciones 1D para el modelo LLS con la regla de rotura exponencial concuerdan con los escasos resultados previos de que se dispone [21], ya que la mayor parte de ellos han sido obtenidos para la regla de rotura potencial, bien resumidos por Newman y Phoenix [17]. La conclusión principal es que el tiempo de rotura en el modelo dinámico LLS unidimensional, con regla de rotura exponencial, tiende a 0 para una cadena infinita.

Por otro lado, se ha mostrado por primera vez que en el modelo dinámico LLS en 2D con regla de rotura exponencial el tiempo de rotura tiende a un valor no nulo para retículos infinitos, el modelo presenta un punto crítico. Estos resultados recuerdan a los obtenidos para los modelos estáticos, dónde, a excepción del caso unidimensional, los modelos también presentan comportamientos asintóticos no nulos.

Se ha observado además una fuerte dependencia del valor asintótico con el entorno utilizado como se explica en el apartado anterior. Los valores asintóticos para el entorno de Moore son superiores que para el entorno de Von Neumann. Podemos concluir que cuanto mayor es el número de vecinos entre los que se reparte la carga mayor es el valor asintótico de T_f .

Referencias

- [1] Herrmann H.J. and S Roux. Statistical modelos for the fracture of disordered systems. 1990. North Holland, 368 págs.
- [2] Coleman B.D. Statistics and time dependence of mechanical breakdown in fibers. *Journal of Applied Physics*, 29(968), 1958. <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jap/29/6?ver=pdfcov> .
- [3] Daniels H. E. The statistical theory of the strenght of bundles of threads. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Phisical and Engineering Sciences*, 183: 405-435, june 1954.
- [4] Phoenix SL. Stochastic strength and fatigue of fiber bundles. *International Journal of Fracture*, 14: 153-187, 1978.
- [5] McCartney LN and Smith RL. Statical theory of the strength of fiber bundles. *J. Appl. Mech*, 50: 601-608, 1983.
- [6] Scop PM y Argon AS. Statistical theory of strength of laminated composites. *J. Composite Mat*, 3: 30-47, 1969.
- [7] Harlow D.G. y Phoenix S.L. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39: 173-200, 1991.
- [8] Smith RL. A probability model for fibrous composites with local load sharing. *Proc. R. Soc.*, 372: 539-553, 1980.
- [9] Phoenix S.L. y Newman W.I. Time-dependent fiber bundles with local load sharing ii, general weibull fibers. *Physical Review E*, 80, 06611, 2009.
- [10] Smalley JR Turcotte DL and Solla SA. Collapse of loaded fractal trees. *Nature*, 313: 671-672, 1985.
- [11] Gómez J. Vazquez-Prada M. Moreno Y. and Pacheco A. F. Bounds for the time to failure of hierarchical systems of fracture. *Physical Review E*, 59: R1297-R1290, 1999.
- [12] Hidalgo RC. Kun F. and Hermann HJ. Fracture model with variable range of interaction. *Physical Review E*, 65, 046148, 2002.
- [13] Coleman B.D. Time dependence of mechanical breakdown phenomena. *Journal of Applied Physics*, 27: 862-866, 1956.
- [14] Phoenix S.L. and Tierney L.J. A statistical model for the time dependent failure of unidirectional composite materials under local elastic load-sharing among fiber. *Engineering Fracture Mechanics*, 18: 193-215, 1983.

- [15] Clemente M.A. Gómez J.B. and Pacheco A.F. Time to failure of dynamic local load-sharing fiber bundle models in 1 to 3 dimensions. *Physica D*, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2018.10.003>.
- [16] Phoenix S.L. and Kuo C.C. Recursions and limit theorems for the strength and lifetime distributions of a fibrous composite. *Journal of Applied Probability*, 24(1): 137-159, 1987.
- [17] Newman W.I. and Phoenix S.L. Time-dependent fiber bundles with local load sharing. *Physical Review E*, 63(2), 021507, 2001.
- [18] Gómez J.B. and Pacheco A.F. Monte carlo results in time-dependent hierarchical fiber-bundle models of fracture. *Physical Review E*, 73(4), 047104, 2006.
- [19] Moreno Y. Gómez J.B. and Pacheco A.F. Probabilistic approach to time-dependent load-transfer models of fracture. *Physical Review E*, 58(2), 1528, 1998.
- [20] Moreno Y. Gómez J.B., Vazquez-Prada M. and Pacheco A.F. Bounds for the time to failure of hierarchical systems of fracture. *Physical Review E*, 59(2), R1287, 1999.
- [21] Zhang S.D. Scaling in the time-dependent failure of fiber bundle with local load sharing. *Physical review E*, 59: 1589-1592, 1999.
- [22] Jorg Weimar. *Simulation with Cellular Automata*. 1998.