Universidad Zaragoza

1542

Trabajo de Fin de Grado:

Teorías Cuánticas con Altas Derivadas

Grado en Física

Autoría:

Alejandro Sáez Gonzalvo

Dirección:

Manuel Asorey Carballeira

Facultad de Ciencias

2018/2019

Resumen

En este trabajo se busca realizar un modelo cuántico físicamente viable de una teoría en altas derivadas. Para ello debemos obtener un Hamiltoniano acotado inferiormente que genere evolución unitaria, con normas de los estados positivas. La motivación principal de tal investigación es la posibilidad de implementar dicho modelo a una formulación cuántica de Gravedad que permita su renormalización en el marco de la Teoría Cuática de Campos.

Índice

1. Introducción **1**

2. Teorema de Ostrogradski **2**

3. Teoría de Pais-Uhlenbeck **4**

4. Cuantización Canónica de la teoría de Pais-Uhlenbeck **5**

5. Cuantización modificada de la teoría de Pais-Uhlenbeck **10**

5.1. Espectro de Energías 11

5.2. Estados de Norma Negativa o *Fantasmas* 12

5.3. Producto escalar modificado 15

5.4. Comportamiento bajo perturbaciones 18

6. Conclusiones **22**

1. Introducción

Actualmente, todos los modelos teóricos físicos fundamentales, tanto en el marco clásico como en el cuántico, se basan en teorías de campos que solo involucran primeras derivadas temporales de las variables dinámicas.

Una explicación de por qué la naturaleza está regida únicamente por teorías de este tipo y no por otras que involucren derivadas temporales de cualquier orden, fue dada por el físico y matemático ruso Ostrogradski ya en el siglo XIX [15], [23], quien elaboró lo que se conoce como Teorema de Ostrogradski. En este se demuestra cómo una teoría con derivadas temporales de orden 2 o superior de las variables dinámicas tendría la llamada *inestabilidad de Ostrogradski*, la cual consiste en que el Hamiltoniano de dichas teorías no está acotado inferiormente, pudiendo tomar entonces la energía valores arbitrariamente pequeños y negativos sin encontrar una posición de mínima energía. Dado que observamos que todos los sistemas físicos tienen un estado estable o de mínima energía, modelos que contengan la inestabilidad de Ostrogradski no pueden describir el mundo físico de manera consistente.

Sin embargo, en el último medio siglo, las teorías llamadas de *altas derivadas*, es decir, aquellas descritas por Lagrangianos con derivadas de orden 2 o superior de los grados de libertad, han recobrado cierto interés. Esto se debe a que al estudiar la Gravitación Cuántica en el marco de la Teoría Cuántica de Campos, en el cual se basa el Modelo Estándar de Partículas, la primera no encaja de forma consistente, debido a que no es *renormalizable*. El interés suscitado en teorías de altas derivadas se debe a la creencia de que estas facilitan la renormalización de las divergencias ultravioletas de la Gravitación Cuántica, en contraste con lo que ocurre en la teoría de la Gravitación Cuántica basada en la teoría General de la Relatividad de Einstein, que solo posee derivadas temporales de orden inferior [2], [3], [9], [10], [13], [14], [18], [19], [22].

Sin embargo, como ya hemos dicho, a nivel clásico dichas teorías contienen la inestabilidad de Ostrogradski. Igualmente, a nivel cuántico, esto puede traducirse en dos fenómenos: o bien el Hamiltoniano, tal y como ocurre a nivel clásico, no es acotado inferiormente; o bien sí que lo es pero aparecen estados del espacio de Hilbert con norma negativa: los llamados *fantasmas*. El primero de los casos es patológico ya que no existiría un estado de vacío y cualquier perturbación desestabilizaría la teoría, cayendo los estados a niveles de energía menor sin llegar a alcanzar nunca un estado de mínima energía, fenómeno que no se observa en la naturaleza. Por otro lado, tampoco podemos permitir la existencia de estados de norma negativa, ya que las normas se interpretan en la mecánica cuántica como probabilidades y la existencia de probabilidades negativas supondría la pérdida de unitariedad. Todo esto ha llevado muchas veces a desechar estas teorías directamente como no-físicas [21], [22], [23].

El objetivo de este trabajo es investigar si existe alguna forma de implementar una teoría cuántica con altas derivadas temporales sin que aparezcan fantasmas ni espectros de energía no acotados inferiormente. Si hubiese una forma adecuada de realizar esto, encontraríamos una posible teoría de la Gravedad Cuantica, motivación principal de esta investigación, esperando que la teoría correcta fuese una variación de la Relatividad de Einstein que introdujese estas altas derivadas, lo que podría solucionar el problema de la renormalización en el marco de la Teoría Cuántica de Campos. A partir de aquí, lo que vamos a hacer es restringirnos a un *toy model*. Para simplificar los cálculos y no tener que trabajar con tensores, vamos a estudiar el caso concreto de una Teoría Cuántica de Campos con altas derivadas en (0+1) dimensiones, es decir, nos mantenemos en el marco de la Mecánica Cuántica. En concreto, vamos a estudiar la teoría de Pais-Uhlenbeck. Esta teoría tiene relación directa con la acción propuesta por Mannheim de *Conformal Gravity*. Dicho modelo, al involucrar derivadas de orden 2 en el Lagrangiano, favorecería la renormalización de la teoría, pero además, se ha mostrado que es autoconsistente con las observaciones de materia y energía oscuras [10], es decir, explica estas observaciones perfectamente sin la necesidad de incluir estos fenómenos a mano. Además, también permite evitar una singularidad cosmológica al inicio del Universo, como sería el Big Bang.

La estructura de la investigación es la siguiente: primero, revisitaremos el Teorema de Ostrogradski, un resultado clásico general, y veremos cómo el caso particular del Hamiltoniano de Pais-Uhlenbeck efectivamente posee la inestabilidad que nos predice el Teorema. Tras esto, cuantizaremos el Hamiltoniano, para lo cual veremos que efectivamente tenemos dos posibilidades: una *cuantización canónica*, donde todos los estados tienen norma positiva pero, sin embargo, no hay estado de vacío, por lo que el Hamiltoniano no está acotado inferiormente; o una *cuantización modificada* donde sí exista un estado de vacío, con un Hamiltoniano acotado inferiormente, pero con estados de norma negativa o fantasmas. Mostraremos, siguiendo el trabajo de Bender, Mannheim y Davidson [7], [8], [12], cómo podemos tratar estos fantasmas y cómo podemos, de hecho, eliminarlos. Por ultimo, veremos cómo la inclusión de una pequeña perturbación cuártica en el Hamiltoniano modifica la acotación inferior de las energías en la cuantización modificada, destruyendo así su viabilidad.

Durante todo el trabajo utilizamos unidades naturales $\hbar = c = 1$.

2. Teorema de Ostrogradski

El Teorema de Ostrogradski es un famoso resultado obtenido en el siglo XIX por el físico y matemático del mismo nombre [15]. El Teorema nos dice que un Lagrangiano que contenga derivadas temporales de orden superior a 1 en las variables dinámicas contendrá una inestabilidad lineal en su Hamiltoniano, haciendo que este sea no acotado inferiormente. Veámoslo:

Sea un Lagrangiano genérico $L(z, \dot{z}, ..., z^{(N)})$, función de las N primeras derivadas temporales de $z(t)$. La ecuación generalizada de Euler-Lagrange para un Lagrangiano con estas derivadas es [15], [21], [23]:

$$\sum_{i=0}^{N} \left(-\frac{d}{dt}\right)^{i} \frac{\partial L}{\partial z^{(i)}} = 0 \tag{2.1}$$

Ahora, debemos tomar 2N coordenadas generalizadas, que para el caso de un Lagrangiano con derivadas hasta orden N serán [15], [21], [23]:

$$Z_i = \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} z \equiv z^{(i-1)} \tag{2.2}$$

$$p_i = \sum_{j=i}^{N} \left(-\frac{d}{dt}\right)^{j-i} \frac{\partial L}{\partial z^{(j)}} \tag{2.3}$$

Vemos que en el caso $N = 1$ tanto las coordenadas generalizadas como la ecuación de Euler-Lagrange se reducen a la formulación Lagrangiana usual.

Ahora, supuesto que podemos expresar $z^{(N)}$ como función de p_N y las Z_i (esto se llama no-degeneración del Lagrangiano), tal que $z^{(N)} = F(Z_1, ..., Z_N, p_N)$, el Hamiltoniano queda:

$$H = \sum_{i=1}^{N} p_i z^{(i)} - L = p_1 Z_2 + p_2 Z_3 + ... + p_{N-1} Z_N + p_N F - L \tag{2.4}$$

Dependiendo de la forma de la función F, el Hamiltoniano puede quedar acotado en p_N, pero vemos que inevitablemente es lineal en el resto de momentos generalizados, por lo que, como estos pueden ser arbitrariamente pequeños y negativos, también lo podrá ser el Hamiltoniano. Esta es la llamada *inestabilidad de Ostrogradski*. A nivel clásico, esto haría que no hubiese un punto fijo o estable en las trayectorias de una partícula, mientras que a nivel cuántico, el significado de que un Hamiltoniano no esté acotado inferiormente es que no hay un estado de vacío o mínima energía, por lo que el sistema entraría en una "caida libre", de forma que estaría desexcitándose continuamente, ya que siempre hay un nivel de energía menor. Así, cada desexcitación del sistema (campo) supondría la creación espontánea de partículas con energía negativa. Esto ciertamente no se observa en la naturaleza, por lo que es improbable que una teoría con un Hamiltoniano no acotado inferiormente pueda describir la realidad física.

A partir de aquí, vamos a ver el caso concreto de una teoría con derivadas temporales de orden 2: la teoría de Pais-Uhlenbeck. Veremos cómo aparece la inestabilidad de Ostrogradski a nivel clásico, que a nivel cuántico puede dar lugar o bien a fantasmas o a un Hamiltoniano no acotado inferiormente, y cómo podemos tratar de solucionar estos dos problemas.

3. Teoría de Pais-Uhlenbeck

La teoría de Pais-Uhlenbeck está descrita por un Lagrangiano con altas derivadas, incluyendo derivadas segundas en el tiempo de la variable dinámica z. Este fue introducido por primera vez por los físicos A. Pais y G. E. Uhlenbeck en el año 1950 [16], como una posible generalización de las teorías de campos existentes a otras de altas derivadas, precisamente para tratar de mejorar la renormalización de las primeras. Desde que fue propuesto, ha sido objeto de constantes investigaciones para tratar de describir con él un sistema cuántico satisfactoriamente. La forma de este Lagrangiano es la siguiente:

$$L = \frac{\gamma}{2}[\ddot{z}^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\dot{z}^2 + \omega_1^2\omega_2^2 z^2] \tag{3.1}$$

La ecuación de Euler-Lagrange, en el formalismo de Ostrogradski que ya hemos visto (2.1), queda:

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{z}} = 0$$

i.e.

$$\left[\frac{d^4}{dt^4} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\frac{d^2}{dt^2} + \omega_1^2\omega_2^2\right] z = 0 \tag{3.2}$$

La solución general de esta ecuación diferencial para la variable z es:

$$z(t) = a_1 e^{-i\omega_1 t} + a_1^* e^{+i\omega_1 t} + a_2 e^{-i\omega_2 t} + a_2^* e^{+i\omega_2 t} \tag{3.3}$$

Veamos ahora cuáles son las coordenadas y momentos generalizados para esta teoría, siguiendo el esquema del apartado 1:

$$Z_1 \equiv Z = z^{(0)} = z \qquad Z_2 \equiv X = \dot{z} \tag{3.4}$$

$$p_Z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{z}} = -\gamma(\omega_1^2 + \omega_2^2)X - \gamma\ddot{X} \tag{3.5}$$

$$p_X = \frac{\partial L}{\partial \ddot{z}} = \gamma\dot{X} \tag{3.6}$$

lo que implica

$$p_Z = -\gamma(\omega_1^2 + \omega_2^2)X - \dot{p_X} \tag{3.7}$$

Donde es importante resaltar que Z y X son ahora dos grados de libertad independientes. Así, introduciendo la solución (3.3) a las expresiones anteriores, nos queda:

$$Z(t) = a_1 e^{-i\omega_1 t} + a_1^* e^{+i\omega_1 t} + a_2 e^{-i\omega_2 t} + a_2^* e^{+i\omega_2 t} \tag{3.8}$$

$$X(t) = -i\omega_1 a_1 e^{-i\omega_1 t} + i\omega_1 a_1^* e^{+i\omega_1 t} - i\omega_2 a_2 e^{-i\omega_2 t} + i\omega_2 a_2^* e^{+i\omega_2 t} \tag{3.9}$$

$$p_X(t) = -\gamma(\omega_1^2 a_1 e^{-i\omega_1 t} + \omega_1^2 a_1^* e^{+i\omega_1 t} + \omega_2^2 a_2 e^{-i\omega_2 t} + \omega_2^2 a_2^* e^{+i\omega_2 t}) \tag{3.10}$$

$$p_Z(t) = i\gamma(\omega_1\omega_2^2 a_1 e^{-i\omega_1 t} - \omega_1\omega_2^2 a_1^* e^{+i\omega_1 t} + \omega_1^2\omega_2 a_2 e^{-i\omega_2 t} - \omega_1^2\omega_2 a_2^* e^{+i\omega_2 t}) \tag{3.11}$$

El Hamiltoniado quedará, en función de las coordenadas y momentos generalizados:

$$\begin{aligned} H &= p_Z\dot{Z} + p_X\dot{X} - L && (3.12)\\ &= \frac{p_X^2}{\gamma} + p_Z X - \frac{\gamma}{2}\frac{p_X^2}{\gamma^2} + \frac{\gamma}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)X^2 - \frac{\gamma}{2}\omega_1^2\omega_2^2 Z^2 && (3.13)\\ &= \frac{p_X^2}{2\gamma} + p_Z X + \frac{\gamma}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)X^2 - \frac{\gamma}{2}\omega_1^2\omega_2^2 Z^2 && (3.14) \end{aligned}$$

Este resultado coincide con el Hamiltoniano obtenido por Bender y Mannheim [7], [12]. Vemos que, efectivamente, hay un término lineal en el momento p_Z, el cual hace que el Hamiltoniano sea no acotado inferiormente. Igualmente, el último término, aunque depende de Z cuadráticamente, tiene signo negativo, lo que de nuevo hace que el Hamiltoniano pueda tomar valores arbitrariamente pequeños para valores arbitrariamente grandes de Z. Esto indica que a nivel clásico la teoría ya es inestable, no habiendo una posición de mínima energía para las variables Z, X, y por tanto las trayectorias no tendrán un punto fijo.

Veamos ahora qué pasa cuando cuantizamos la teoría.

4. Cuantización Canónica de la teoría de Pais-Uhlenbeck

Para pasar al marco cuántico, las variables Z, X, p_Z, p_X deben promoverse a operadores, por lo que ahora los coeficientes a_1, a_2 no serán escalares sino operadores, y en lugar de a_1^*, a_2^* tendremos los adjuntos $a_1^\dagger, a_2^\dagger$.

Para ver la expresión del Hamiltoniano en función de los operadores $a's$, simplemente sustituimos las expresiones de los operadores Z, X, p_Z, p_X. Además, como el Lagrangiano no contiene dependencia explícita del tiempo, el Hamiltoniano será una cantidad conservada (la energía), por lo que para ahorrarnos cálculos podemos tomar $t = 0$ en las expresiones de Z, X, p_Z, p_X:

$$Z(0) = a_1 + a_1^\dagger + a_2 + a_2^\dagger \tag{4.1}$$

$$X(0) = -i\omega_1 a_1 + i\omega_1 a_1^\dagger - i\omega_2 a_2 + i\omega_2 a_2^\dagger \tag{4.2}$$

$$p_Z(0) = i\gamma(\omega_1\omega_2^2 a_1 - \omega_1\omega_2^2 a_1^\dagger + \omega_1^2\omega_2 a_2 - \omega_1^2\omega_2 a_2^\dagger) \tag{4.3}$$

$$p_X(0) = -\gamma(\omega_1^2 a_1 + \omega_1^2 a_1^\dagger + \omega_2^2 a_2 + \omega_2^2 a_2^\dagger) \tag{4.4}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3.14), obtenemos:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2\gamma}\gamma^2[\omega_1^2(a_1+a_1^\dagger) + \omega_2^2(a_2+a_2^\dagger)]^2 + \frac{\gamma}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)[i\omega_1(a_1-a_1^\dagger) + i\omega_2(a_2-a_2^\dagger)]^2 \\
&- \frac{\gamma}{2}\omega_1^2\omega_2^2[(a_1+a_1^\dagger)+(a_2+a_2^\dagger)]^2 + \gamma[\omega_1(a_1-a_1^\dagger)+\omega_2(a_2-a_2^\dagger)][\omega_1\omega_2^2(a_1-a_1^\dagger) \\
&+ \omega_1^2\omega_2(a_2-a_2^\dagger)] \\
&= \frac{\gamma}{2}[\omega_1^4(a_1+a_1^\dagger)^2 + \omega_2^4(a_2+a_2^\dagger)^2] - \frac{\gamma}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)[\omega_1^2(a_1-a_1^\dagger)^2 + \omega_2^2(a_2-a_2^\dagger)^2] \\
&- \frac{\gamma}{2}\omega_1^2\omega_2^2[(a_1+a_1^\dagger)^2 + (a_2+a_2^\dagger)^2] + \gamma\omega_1^2\omega_2^2[(a_1-a_1^\dagger)^2 + (a_2-a_2^\dagger)^2] \\
&= \frac{\gamma}{2}[\omega_1^4(a_1a_1^\dagger + a_1^\dagger a_1) + \omega_2^4(a_2a_2^\dagger + a_2^\dagger a_2)] - \frac{\gamma}{2}[\omega_1^4(-a_1a_1^\dagger - a_1^\dagger a_1) + \omega_2^4(-a_2a_2^\dagger + a_2^\dagger a_2)] \\
&- \frac{\gamma}{2}\omega_1^2\omega_2^2[(a_1-a_1^\dagger)^2 + (a_2-a_2^\dagger)^2 + (a_1+a_1^\dagger)^2 + (a_2+a_2^\dagger)^2 - 2(a_1-a_1^\dagger)^2 - 2(a_2-a_2^\dagger)^2] \\
&= \gamma[\omega_1^4(2a_1^\dagger a_1 + [a_1,a_1^\dagger]) + \omega_2^4(2a_2^\dagger a_2 + [a_2,a_2^\dagger])] - \gamma\omega_1^2\omega_2^2(2a_1^\dagger a_1 + [a_1,a_1^\dagger] + 2a_2^\dagger a_2 \\
&+ [a_2,a_2^\dagger]) \\
&= 2\gamma[(\omega_1^4 - \omega_1^2\omega_2^2)a_1^\dagger a_1 + (\omega_2^4 - \omega_1^2\omega_2^2)a_2^\dagger a_2] + \gamma[(\omega_1^4 - \omega_1^2\omega_2^2)[a_1,a_1^\dagger] + (\omega_2^4 - \omega_1^2\omega_2^2)[a_2,a_2^\dagger]]
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$H = 2\gamma(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 a_1^\dagger a_1 - \omega_2^2 a_2^\dagger a_2) + \gamma(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2[a_1,a_1^\dagger] - \omega_2^2[a_2,a_2^\dagger]) \tag{4.5}$$

En este desarrollo, en el paso de la primera a la segunda igualdad, hemos aplicado $[a_1, a_2] = [a_1^\dagger, a_2^\dagger] = 0$, lo cual veremos a continuación de dónde proviene; en el paso de la tercera a la cuarta simplemente hemos sustituido $a_1a_1^\dagger + a_1^\dagger a_1 = 2a_1^\dagger a_1 + [a_1, a_1^\dagger]$ y $a_2a_2^\dagger + a_2^\dagger a_2 = 2a_2^\dagger a_2 + [a_2, a_2^\dagger]$; y en el quinto y sexto paso solo hemos reagrupado los términos.

Para ver cuáles son las relaciones de conmutación de los operadores $a's$ imponemos las reglas usuales para los grados de libertad:

$$[X, Z] = [p_X, p_Z] = 0\ ,\ [Z, p_Z] = i\ ,\ [X, p_X] = i \tag{4.6}$$

Ahora, conociendo la expresión de estas variables en función de los operadores escalera, podemos calcular las conmutadores de estos últimos, llegando a:

$$[a_1, a_2] = [a_1^\dagger, a_2^\dagger] = 0 \tag{4.7}$$

$$[a_1, a_1^\dagger] = \frac{1}{2\gamma\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \ , \ [a_2, a_2^\dagger] = -\frac{1}{2\gamma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \tag{4.8}$$

Vemos que, si tomamos $\omega_1 > \omega_2$, el conmutador $[a_1, a_1^\dagger]$ es positivo, pero el $[a_2, a_2^\dagger]$ es *negativo*. Este signo negativo es precisamente la fuente de nuestros problemas, pues es el que va a causar la existencia o bien de energías negativas o de fantasmas. Por tanto, antes de continuar, hagamos el cálculo explicito de este conmutador, dada la relevancia de su signo:

De las ecuaciones (4.1)-(4.4) podemos obtener la expresión de los operadores $a's$ en función de los grados de libertad Z, X y de sus respectivos momentos:

$$a_2 + a_2^\dagger = \frac{1}{\gamma(\omega_1^2 - \omega_2^2)}(p_X + \gamma\omega_1^2 Z) \qquad a_2 - a_2^\dagger = \frac{-i}{\gamma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}(p_Z + \gamma\omega_2^2 X) \tag{4.9}$$

Lo que nos permite despejar a_2 y $a_2^\dagger$:

$$a_2 = \frac{1}{2\gamma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}(\omega_2 p_X + \gamma\omega_1^2\omega_2 Z - ip_Z - i\gamma\omega_2^2 X) \tag{4.10}$$

$$a_2^\dagger = \frac{1}{2\gamma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}(\omega_2 p_X + \gamma\omega_1^2\omega_2 Z + ip_Z + i\gamma\omega_2^2 X) \tag{4.11}$$

Igualmente, despejando a_1 y $a_1^\dagger$:

$$a_1 = \frac{1}{2\gamma\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}(-\omega_1 p_X - \gamma\omega_2^2\omega_1 Z + ip_Z + i\gamma\omega_1^2 X) \tag{4.12}$$

$$a_1^\dagger = \frac{1}{2\gamma\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}(-\omega_1 p_X - \gamma\omega_2^2\omega_1 Z - ip_Z - i\gamma\omega_1^2 X) \tag{4.13}$$

Ahora que conocemos la expresión para estos operadores, podemos calcular sus conmutadores:

$$\begin{aligned}
[2\gamma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)]^2[a_2, a_2^\dagger] &= [(\omega_2 p_X + \gamma\omega_1^2\omega_2 Z) - i(p_Z + \gamma\omega_2^2 X)][(\omega_2 p_X + \gamma\omega_1^2\omega_2 Z) + i(p_Z + \gamma\omega_2^2 X)] \\
&- [(\omega_2 p_X + \gamma\omega_1^2\omega_2 Z) + i(p_Z + \gamma\omega_2^2 X)][(\omega_2 p_X + \gamma\omega_1^2\omega_2 Z) - i(p_Z + \gamma\omega_2^2 X)] \\
&= 2i[(\omega_2 p_X + \gamma\omega_1^2\omega_2 Z)(p_Z + \gamma\omega_2^2 X) - (p_Z + \gamma\omega_2^2 X)(\omega_2 p_X + \gamma\omega_1^2\omega_2 Z)] \\
&= 2i\gamma\omega_2(\omega_2^2 p_X X + \omega_1^2 Z p_Z - \omega_1^2 p_Z Z - \omega_2^2 X p_X) \\
&= 2i\gamma\omega_2(\omega_1^2[Z, p_Z] - \omega_2^2[X, p_X]) \\
&= -2\gamma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2).
\end{aligned}$$

Donde hemos usado las relaciones de conmutación usuales:

$$[Z, p_Z] = [X, p_X] = i$$

y de lo que se deduce que

$$[a_2, a_2^\dagger] = -\frac{1}{2\gamma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}. \tag{4.14}$$

Siguiendo este procedimiento, obtenemos el resto de conmutadores de (4.7) y (4.8), cuya expresión coincide con la obtenida por Bender y Mannheim [7], [12]. Efectivamente vemos que obtenemos un conmutador negativo para a_2 y $a_2^\dagger$, supuesto $\omega_1 > \omega_2$. Si esta desigualdad fuese al revés, tendríamos este conmutador positivo, pero $[a_1, a_1^\dagger]$ sería ahora negativo, por lo que uno de los dos siempre lo es.

Ahora que conocemos cómo conmutan los operadores $a's$, obtengamos la forma final del Hamiltoniano, verificando la expresión dada en [7], [12]:

$$\begin{aligned} H &= 2\gamma(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 a_1^\dagger a_1 - \omega_2^2 a_2^\dagger a_2) + \gamma(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2[a_1, a_1^\dagger] - \omega_2^2[a_2, a_2^\dagger]) = \\ &= H = 2\gamma(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 a_1^\dagger a_1 - \omega_2^2 a_2^\dagger a_2) + \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Para terminar de definir nuestra teoría, hay que especificar cuáles son los estados del espacio de Hilbert y cómo actúan los operadores $a's$ sobre ellos. Para ello, podemos seguir dos caminos: una *cuantización canónica*, con normas positivas pero un Hamiltoniano no acotado inferiormente; o una *cuantización modificada* donde sí exista un estado de vacío, con un Hamiltoniano acotado, pero en cuyo caso nos aparecerán estados con norma negativa.

Veamos primero la cuantización canónica. En esta tendremos que todos los estados tienen norma positiva pero que, a costa de esto, aparecen estados de energía negativa arbitrariamente pequeña, es decir, que el Hamiltoniano no es acotado inferiormente, al igual que ocurría a nivel clásico con la inestabilidad de Ostrogradski. Para que todos los estados tengan norma positiva, construimos el espacio de Fock a partir de un estado $\mid \Omega >$ tal que:

$$a_1 \mid \Omega >= 0 \ , \ a_2^\dagger \mid \Omega >= 0 \tag{4.16}$$

Por tanto, los estados excitados se construyen al aplicar sobre el estado $\mid \Omega >$ los operadores $a_1^\dagger$ y a_2. Veamos ahora cuál es el espectro de energías correspondiente del Hamiltoniano (4.15). Para esto, calculemos primero la energía de los excitados en ω_1:

$$\mid n, 0 > \equiv (a_1^\dagger)^n \mid \Omega > \tag{4.17}$$

$$
\begin{aligned}
H \mid n,0> &= \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \mid n,0> +2\gamma(\omega_1^2-\omega_2^2)\left(\omega_1^2 a_1^\dagger a_1 (a_1^\dagger)^n \ - \omega_2^2 a_2^\dagger a_2 (a_1^\dagger)^n\right) \mid \Omega > \\
&= \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \mid n,0> -2\gamma(\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_2^2(a_2 a_2^\dagger - [a_2,a_2^\dagger])(a_1^\dagger)^n \mid \Omega > \\
&+ \ 2\gamma(\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_1^2 a_1^\dagger(a_1^\dagger a_1 + [a_1,a_1^\dagger])(a_1^\dagger)^{n-1} \mid \Omega > \\
&= \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \mid n,0> +(\omega_1-\omega_2) \mid n,0> +2\gamma\omega_1^2(\omega_1^2-\omega_2^2)(a_1^\dagger)^2 a_1 (a_1^\dagger)^{n-1} \mid \Omega > \\
&= \frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2) \mid n,0> +n\omega_1 \mid n,0> +2\gamma\omega_1^2(\omega_1^2-\omega_2^2)(a_1^\dagger)^{n+1} a_1 \mid \Omega >
\end{aligned}
$$

Dando como resultado final

$$
H \mid n,0 >= \left[\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2) + n\omega_1\right] \mid n,0 > \qquad (4.18)
$$

Para pasar de la segunda a la tercera igualdad hemos utilizado que $[a_2^\dagger, a_1^\dagger] = 0$ y $a_2^\dagger \mid \Omega >= 0$, y por tanto, $a_2^\dagger (a_1^\dagger)^n \mid \Omega >= (a_1^\dagger)^n a_2^\dagger \mid \Omega >= 0$. Además, hemos sustituido el valor de los conmutadores $[a_1, a_1^\dagger]$ y $[a_2, a_2^\dagger]$, y hemos vuelto a sustituir $\mid n,0> = (a_1^\dagger)^n \mid \Omega >$. Tras esto, hemos iterado este mismo cálculo n veces, conmutando el operador a_1 por uno de los $a_1^\dagger$ hasta dejarlo a la derecha de todos ellos, aplicando entonces la hipótesis de partida (4.16).

Ahora tenemos que ver cómo actúa el Hamiltoniano sobre los excitados en ω_2. Siguiendo el mismo procedimiento de arriba:

$$
\mid 0,n > \equiv a_2^n \mid \Omega > \qquad (4.19)
$$

$$
\begin{aligned}
H \mid 0,n > &= \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \mid 0,n > -2\gamma(\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_2^2 a_2^\dagger a_2 a_2^n \mid \Omega >= \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \mid 0,n > \\
&- \ 2\gamma(\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_2^2(a_2 a_2^\dagger - [a_2,a_2^\dagger])a_2^n \mid \Omega >= \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \mid 0,n > \\
&- \ \omega_2 \mid 0,n > -2\gamma\omega_2^2(\omega_1^2-\omega_2^2) a_2 a_2^\dagger a_2^n \mid \Omega > \\
&= \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \mid 0,n > -(n+1)\omega_2 \mid 0,n > -2\gamma\omega_2^2(\omega_1^2-\omega_2^2) a_2^{n+1} a_2^\dagger \mid \Omega >,
\end{aligned}
$$

de donde se deduce que

$$
H \mid 0,n >= \left[\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2) - n\omega_2\right] \mid 0,n > \qquad (4.20)
$$

De nuevo hemos usado que $[a_1, a_2] = 0$, por lo que el sumando $-\omega_2^2 a_1^\dagger a_1 a_2^n \mid \Omega >$ del Hamiltoniano se anula, pues por (4.16) $a_1 \mid \Omega >= 0$.

Ahora, es inmediato generalizar a:

$$H \mid n,m> = (E_0 + n\omega_1 - m\omega_2)\mid n,m> \tag{4.21}$$

Donde $E_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$.

Vemos como, para $n = 0$ y m arbitrariamente grande, la energía tendería a $(-\infty)$, por lo que el Hamiltoniano, como ya habíamos adelantado, es no acotado inferiormente. Por tanto, el estado $\mid \Omega >$ no es un estado de vacío, al no haber energía mínima.

Aún así, es inmediato ver como la norma de los estados es perfectamente positiva. Para el caso de los excitados con a_2:

$$< \Omega \mid a_2^\dagger a_2 \mid \Omega > =< \Omega \mid \left(\frac{1}{2\gamma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} + a_2 a_2^\dagger \right) \mid \Omega > = \frac{1}{2\gamma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} < \Omega \mid \Omega > \tag{4.22}$$

Y para los excitados con $a_1^\dagger$:

$$< \Omega \mid a_1 a_1^\dagger \mid \Omega > =< \Omega \mid \left(\frac{1}{2\gamma\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)} + a_1^\dagger a_1 \right) \mid \Omega > = \frac{1}{2\gamma\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)} < \Omega \mid \Omega > \tag{4.23}$$

Esto es efectivamente positivo. Por tanto, como habíamos adelantado, en esta cuantización tenemos normas positivas pero energías negativas arbitrariamente pequeñas, sin un estado de vacío, lo que hace la teoría inviable.

Veamos pues un modo distinto de proceder: impongamos desde el principio una cuantización con un estado de vacío, de forma que el Hamiltoniano esté acotado inferiormente, tal y como se ha hecho en [7], [12].

5. Cuantización modificada de la teoría de Pais-Uhlenbeck

Hemos visto cómo, si cuantizamos la teoría de forma que las normas queden todas positivas, obtenemos un espectro de energías no acotado inferiormente, manifestándose así el resultado que veíamos a nivel clásico de la inestabilidad de Ostrogradski. Veamos pues cómo cambian las cosas suponiendo que sí que hay un vacío, un estado con energía mínima, siguiendo así [7], [12]. Para ello, el espacio de Fock se construye como:

$$a_1 \mid \Omega > = 0 \ , \ a_2 \mid \Omega > = 0 \tag{5.1}$$

Efectivamente, como veremos a continuación, de esta forma todos los estados tienen energía positiva, y $\mid \Omega >$ tiene energía mínima, por lo que es el estado de vacío. Sin embargo, ciertos excitados tendrán norma negativa, los llamados *fantasmas*.

5.1. Espectro de Energías

Veamos en esta nueva cuantización la energía de los excitados en ω_1:

$$| n,0 > \equiv (a_1^\dagger)^n \mid \Omega >$$

$$\begin{aligned}
H \mid n,0> &= \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \mid n,0> + 2\gamma(\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_1^2 a_1^\dagger a_1 (a_1^\dagger)^n \mid \Omega > \\
&= \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \mid n,0> + 2\gamma(\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_1^2 a_1^\dagger (a_1^\dagger a_1 + [a_1, a_1^\dagger])(a_1^\dagger)^{n-1} \mid \Omega > \\
&= \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \mid n,0> + \omega_1 \mid n,0> + 2\gamma\omega_1^2(\omega_1^2-\omega_2^2)(a_1^\dagger)^2 a_1 (a_1^\dagger)^{n-1} \mid \Omega > \\
&= \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \mid n,0> + n\omega_1 \mid n,0> + 2\gamma\omega_1^2(\omega_1^2-\omega_2^2)(a_1^\dagger)^{n+1} a_1 \mid \Omega >
\end{aligned}$$

Donde hemos procedido de manera análoga a como lo hicimos en la sección anterior, obteniendo finalmente que

$$H \mid n,0 >= (E_0 + n\omega_1) \mid n,0 > \tag{5.2}$$

Además, ahora $E_0 = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$

Veamos ahora la energía de los estados construidos al aplicar el operador escalera $a_2^\dagger$:

$$| 0,n > \equiv (a_2^\dagger)^n \mid \Omega > \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
H \mid 0,n > &= E_0 \mid 0,n > -2\gamma(\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_2^2 a_2^\dagger a_2 (a_2^\dagger)^n \mid \Omega >= E_0 \mid 0,n > \\
&- 2\gamma(\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_2^2 a_2^\dagger (a_2^\dagger a_2 + [a_2, a_2^\dagger])(a_2^\dagger)^{n-1} \mid \Omega > \\
&= E_0 \mid 0,n > + \omega_2 \mid 0,n > -2\gamma\omega_2^2(\omega_1^2-\omega_2^2)(a_2^\dagger)^2 a_2 (a_2^\dagger)^{n-1} \mid \Omega > \\
&= E_0 \mid 0,n > + n\omega_2 \mid 0,n > -2\gamma\omega_2^2(\omega_1^2-\omega_2^2)(a_2^\dagger)^{n+1} a_2 \mid \Omega >
\end{aligned}$$

$$= H \mid 0,n >= (E_0 + n\omega_2) \mid 0,n > \tag{5.4}$$

Ahora vemos por qué el Hamiltoniano es definido positivo, ya que aunque uno de sus sumandos tiene signo negativo, el conmutador $[a_2, a_2^\dagger]$ también lo tiene, quedando así finalmente un signo positivo en el término proporcional a ω_2 al pasar de la primera igualdad a la segunda. Esto quiere decir que no tenemos energías negativas.

A partir de los resultados para las energías (autovalores del Hamiltoniano) de los estados $\mid n,0 >$ y $\mid 0,n >$ es inmediato generalizar que un estado construido como:

$$| n,m > \equiv (a_1^\dagger)^n (a_2^\dagger)^m \mid \Omega > \tag{5.5}$$

Tiene energía $(E_0 + n\omega_1 + m\omega_2)$:

$$H \mid n,m >= (E_0 + n\omega_1 + m\omega_2) \mid n,m > \tag{5.6}$$

Efectivamente, este Hamiltoniano tiene un estado de mínima energía positiva E_0, es decir, es acotado inferiormente. Además, inmediatamente nos damos cuenta de que este espectro es el mismo que el de dos osciladores armónicos cuánticos independientes, uno con frecuencia ω_1 y otro ω_2. Pero el sistema descrito por la teoría de Pais-Uhlenbeck no es equivalente al de dos osciladores independientes, debido a que, tal y como adelantamos al principio, los estados excitados con $a_2^\dagger$ tienen norma negativa. Veamos de dónde sale este resultado y cómo tratar el problema de los fantasmas que aquí aparecen.

5.2. Estados de Norma Negativa o *Fantasmas*

Calculemos la norma del primer excitado en ω_2 en esta cuantización: $\mid 0,1 > = a_2^\dagger \mid \Omega >$:

$$< 0,1 \mid 0,1 > = < \Omega \mid a_2 a_2^\dagger \mid \Omega > = < \Omega \mid (a_2^\dagger a_2 + [a_2, a_2^\dagger]) \mid \Omega >= -\frac{1}{2\gamma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} < \Omega \mid \Omega >$$

Donde hemos sustituido el conmutador $[a_2, a_2^\dagger]$ por su valor y aplicado la hipótesis (5.1). Vemos como efectivamente esta norma es negativa, y decimos que el estado es un *fantasma.*

Ante esta situación, parece natural preguntarnos si existe realmente un estado de vacío que verifique (5.1), ya que podríamos pensar que el problema de los fantasmas surge de haber partido de una hipotesis errónea. Sin embargo, este no es el caso, ya que, tomando el vacío adecuadamente, la hipótesis (5.1) efectivamente es cierta. El vacío que la cumple viene descrito por la función de ondas:

$$\Omega(z,x) = < z,x \mid \Omega >= e^{\frac{\gamma}{2}(\omega_1+\omega_2)\omega_1\omega_2 z^2 + i\gamma\omega_1\omega_2 zx - \frac{\gamma}{2}(\omega_1+\omega_2)x^2}$$

Pero este vacío es manifiestamente no normalizable, al diverger la función de ondas para $z \to +\infty$. Para hacer este vacío normalizable, seguimos el procedimiento utilizado por Mannheim y Bender [7], [8]. Para ello, realizamos una rotación de la forma:

$$z = iy \Rightarrow p_z = -iq \tag{5.7}$$

El conmutador de estas nuevas variables sigue teniendo la forma adecuada:

$$i = [z, p_z] = [iy, -iq] = i(-i)[y,q] = +[y,q] \Rightarrow [y,q] = i$$

De esta forma, la función de ondas del vacío queda

$$< y,x \mid \Omega > \equiv \ \Omega^R(x,y) = e^{-\frac{\gamma}{2}(\omega_1+\omega_2)\omega_1\omega_2 y^2 - \gamma\omega_1\omega_2 yx - \frac{\gamma}{2}(\omega_1+\omega_2)x^2}$$

La cual es una función real en (x,y) reales. Hemos introducido el superíndice R para distinguir entre $< y, x \mid \Omega > \equiv \Omega^R(x,y)$ y $< \Omega \mid x, y > \equiv \Omega^L(x,y)$, funciones que no están relacionadas por simple conjugación compleja. Para ver esto, hay que ver cómo quedan los operadores escalera en las nuevas variables $(x, y, p_x \equiv p, q)$:

$$a_2 = \frac{1}{2\gamma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}(\omega_2 p + i\gamma\omega_1^2\omega_2 y - q - i\gamma\omega_2^2 x) \tag{5.8}$$

$$a_2^\dagger = \frac{1}{2\gamma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}(\omega_2 p + i\gamma\omega_1^2\omega_2 y + q + i\gamma\omega_2^2 x) \tag{5.9}$$

$$a_1 = \frac{1}{2\gamma\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}(-\omega_1 p - i\gamma\omega_2^2\omega_1 y + q + i\gamma\omega_1^2 x) \tag{5.10}$$

$$a_1^\dagger = \frac{1}{2\gamma\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}(-\omega_1 p - i\gamma\omega_2^2\omega_1 y - q - i\gamma\omega_1^2 x) \tag{5.11}$$

La hipótesis (5.1) dice:

$$a_1\Omega^R(x,y) = a_2\Omega^R(x,y) = 0 \tag{5.12}$$

Sustituyendo

$$p = -i\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ q = -i\frac{\partial}{\partial y} \tag{5.13}$$

Obtenemos:

$$a_2\Omega^R(x,y) = \frac{1}{2\gamma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}(-i\omega_2\frac{\partial}{\partial x} + i\gamma\omega_1^2\omega_2 y + i\frac{\partial}{\partial y} - i\gamma\omega_2^2 x)\ \Omega^R(x,y) = 0 \tag{5.14}$$

$$a_1\Omega^R(x,y) = \frac{1}{2\gamma\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}(+i\omega_1\frac{\partial}{\partial x} - i\gamma\omega_2^2\omega_1 y - i\frac{\partial}{\partial y} + i\gamma\omega_1^2 x)\ \Omega^R(x,y) = 0 \tag{5.15}$$

Si ahora queremos ver la representación de $< \Omega \mid$, en lugar de (5.1), tenemos que imponer la expresión conjugada de esta:

$$< \Omega\ | a_1^\dagger =< \Omega\ | a_2^\dagger = 0 \tag{5.16}$$

con

$$p = +i\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ q = +i\frac{\partial}{\partial y} \tag{5.17}$$

por estar operando a la izquierda. Así, las condiciones (5.16) quedan:

$$\Omega^L(x,y)a_1^\dagger = \frac{1}{2\gamma\omega_1(\omega_1^2-\omega_2^2)}(-i\omega_1\frac{\partial}{\partial x} - i\gamma\omega_2^2\omega_1 y - i\frac{\partial}{\partial y} - i\gamma\omega_1^2 x)\ \Omega^L(x,y) = 0 \qquad (5.18)$$

$$\Omega^L(x,y)a_2^\dagger = \frac{1}{2\gamma\omega_2(\omega_1^2-\omega_2^2)}(i\omega_2\frac{\partial}{\partial x} + i\gamma\omega_1^2\omega_2 y + i\frac{\partial}{\partial y} + i\gamma\omega_2^2 x)\ \Omega^L(x,y) = 0 \qquad (5.19)$$

Comparando (5.18) con (5.15), vemos que el operador que actúa sobre la función de ondas es el mismo salvo el cambio $x \to -x$ en (5.18). Al comparar (5.19) y (5.14) vemos lo mismo. Por tanto, para que las igualdades (5.18) y (5.19) se cumplan, supuesto que (5.14) y (5.15) sí que lo hacen (lo cual ya ha sido verificado), es inmediato ver que

$$\Omega^L(x,y) = [\Omega^R(-x,y)]^* \qquad (5.20)$$

Lo cual es distinto a lo que estamos acostumbrados, ya que $\Omega^L(x,y)$ no se obtiene únicamente por conjugación compleja (lo cual nos dejaría con la misma función, ya que el vacío que hemos obtenido es real), si no por cambio de Paridad en la variable x además de la conjugación compleja usual.

Ahora, este vacío sí es normalizable:

$$\begin{aligned} <\Omega \mid \Omega> &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega^L(x,y)\Omega^R(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma(\omega_1+\omega_2)\omega_1\omega_2 y^2 - \gamma(\omega_1+\omega_2)x^2} dxdy \\ &= \frac{\pi}{\gamma(\omega_1+\omega_2)(\omega_1\omega_2)^{1/2}} \ > 0 \end{aligned}$$

Veamos ahora directamente la expresión de los primeros excitados de la teoría:

$$a_1^\dagger\Omega^R(x,y) \equiv \Psi^R_{1,0}(x,y) = \frac{-i}{\omega_1-\omega_2}(x+\omega_2 y)\Omega^R(x,y) \qquad (5.21)$$

$$\Omega^L(x,y)a_1 \equiv \Psi^L_{1,0}(x,y) = \frac{i}{\omega_1-\omega_2}(x-\omega_2 y)[\Omega^R(-x,y)]^* \qquad (5.22)$$

$$<1,0|1,0> = \frac{\pi}{2\gamma^2(\omega_1-\omega_2)(\omega_1+\omega_2)^2\omega_1^{3/2}\omega_2^{1/2}} \ > 0 \qquad (5.23)$$

$$a_2^\dagger\Omega^R(x,y) \equiv \Psi^R_{0,1}(x,y) = \frac{-i}{\omega_1-\omega_2}(x+\omega_1 y)\Omega^R(x,y) \qquad (5.24)$$

$$\Omega^L(x,y)a_2 \equiv \Psi^L_{0,1}(x,y) = \frac{i}{\omega_1-\omega_2}(x-\omega_1 y)[\Omega^R(-x,y)]^* \qquad (5.25)$$

$$<0,1|0,1> = -\frac{\pi}{2\gamma^2(\omega_1-\omega_2)(\omega_1+\omega_2)^2\omega_2^{3/2}\omega_1^{1/2}} \ < 0 \qquad (5.26)$$

Vemos de nuevo que $\Psi^L_{i,j}(x,y)$ no es simplemente el complejo conjugado de $\Psi^R_{i,j}(x,y)$, por lo que el producto escalar no es necesariamente definido positivo. Esto hace posible matemáticamente que nos aparezcan normas negativas, lo cual hemos comprobado con un cálculo explícito (aunque ya lo habíamos visto al aplicar conmutadores). De hecho, los estados con norma negativa seran los n-ésimos excitados en ω_2 con n impar.

Veamos ahora como atajar el problema de los fantasmas, una vez que hemos visto que realmente existen. Para esto, seguimos el trabajo de Bender y Mannheim [7], [8].

5.3. Producto escalar modificado

Recordemos que al cuantizar la teoría partiendo de las condiciones (5.1), obtuvimos un vacío no normalizable, para lo cual hicimos la rotación:

$$z = iy \ , \ p_z = -iq$$

Tras lo cual obtuvimos un vacío sí normalizable, y excitados con norma negativa. Veamos cómo ha afectado esta rotación a la expresión del Hamiltoniano (3.14):

$$H = \frac{p^2}{2\gamma} - iqX + \frac{\gamma}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)X^2 + \frac{\gamma}{2}\omega_1^2\omega_2^2Y^2 \tag{5.27}$$

Donde recordamos que hemos sustituido $p_X \equiv p$ para suavizar la notación. Este Hamiltoniano es manifiestamente *no Hermítico*, ya que $H^\dagger \neq H$, lo cual en un primer momento nos preocupa, pues el formalismo de Dirac y nuestro entendimiento de la Mecánica Cuántica está construido sobre la exigencia de que el Hamiltoniano *sí* sea Hermítico. Sin embargo, Bender ha mostrado que si se cumplen una serie de condiciones, un Hamiltoniano no Hermítico puede describir un sistema físico perfectamente válido, con un espectro estrictamente real [4], [5], [6]. Estas condiciones son lo que se conoce como *simetría PT*.

P es el operador *Paridad*, y T la inversión temporal. Si tomamos, al igual que han mostrado Bender y Mannheim [7], que las variables (x,p,y,q) transforman bajo la acción de estos dos operadores de la forma:

$$\begin{aligned} &P\,x = -x \qquad T\,x = +x \qquad P\,y = +y \qquad T\,y = -y \\ &P\,p = -p \qquad T\,p = -p \qquad P\,q = +q \qquad T\,q = +q \end{aligned} \tag{5.28}$$

Ahora es inmediato ver cómo cambian estas variables bajo la acción conjunta de PT:

$$\begin{aligned} &PT\,x = -x \qquad PT\,y = -y \\ &PT\,p = +p \qquad PT\,q = +q \end{aligned} \tag{5.29}$$

Con este comportamiento de (x, p, y, q) bajo PT, podemos ver que el Hamiltoniano (5.27) queda invariante bajo la acción de este mismo operador, y esto precisamente es lo que se conoce como *simetría* PT del Hamiltoniano:

$$PT\,H = H \tag{5.30}$$

Bender concluyó que un Hamiltoniano no Hermítico pero simétrico bajo PT es un Hamiltoniano perfectamente válido para describir un sistema cuántico. Para ello, demostró [4], [5], [6] que si el Hamiltoniano posee simetría PT, existe siempre un operador Q, que es una función real en las variables dinámicas (x, p, y, q) y Hermítico, a partir del cual podemos construir un segundo operador $C = e^{-Q}P$ que cumple:

$$C^2 = 1\ ,\ [C, PT\,] = 0\ ,\ [C, H] = 0 \tag{5.31}$$

Una vez que tenemos el operador Q, mediante la transformación de similaridad

$$\widetilde{H} \equiv e^{-Q/2}He^{Q/2}\ ,\ |\,\widetilde{\Psi} > \equiv e^{-Q/2}|\,\Psi > \tag{5.32}$$

obtendríamos un nuevo Hamiltoniano $\widetilde{H}$ sí Hermítico, y que mantiene el mismo espectro real de energía que H, por lo que la física que describen tanto el Hamiltoniano original no Hermítico como el nuevo $\widetilde{H}$ sí Hermítico es la misma. Ver que el espectro de energías es el mismo es inmediato:

$$\widetilde{H}\,|\,\widetilde{\Psi} > = \widetilde{E}|\,\widetilde{\Psi} > \tag{5.33}$$

Y también:

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}\,|\,\widetilde{\Psi} > \quad &= \quad e^{-Q/2}He^{Q/2}\,e^{-Q/2}|\,\Psi > = e^{-Q/2}H|\,\Psi > \\
&= \quad e^{-Q/2}E|\,\Psi >= Ee^{-Q/2}|\,\Psi >= E|\,\widetilde{\Psi} > .
\end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\widetilde{E} = E \tag{5.34}$$

Apliquemos ahora este resultado general, obtenido por Bender, a nuestro Hamiltoniano particular no Hermítico. Con el Hamiltoniano (5.27), Bender y Mannheim encontraron [7] que Q debía ser de la forma:

$$Q = \alpha pq + \beta xy \tag{5.35}$$

para cumplir con las propiedades enunciadas anteriormente, donde α y β son de la forma:

$$\beta = (\gamma\omega_1\omega_2)^2\alpha \ , \ \sinh(\sqrt{\alpha\beta}) = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \tag{5.36}$$

Con este Q, las variables (x, p, y, q) transforman [7]:

$$\begin{aligned}
e^{-Q/2}xe^{Q/2} &= x \ \cosh(\sqrt{\alpha\beta/4}\,) + i\sqrt{\alpha/\beta}\, q \ \sinh(\sqrt{\alpha\beta/4}\,) && (5.37)\\
e^{-Q/2}pe^{Q/2} &= p \ \cosh(\sqrt{\alpha\beta/4}\,) - i\sqrt{\alpha/\beta}\, y \ \sinh(\sqrt{\alpha\beta/4}\,) && (5.38)\\
e^{-Q/2}ye^{Q/2} &= y \ \cosh(\sqrt{\alpha\beta/4}\,) + i\sqrt{\alpha/\beta}\, p \ \sinh(\sqrt{\alpha\beta/4}\,) && (5.39)\\
e^{-Q/2}qe^{Q/2} &= q \ \cosh(\sqrt{\alpha\beta/4}\,) - i\sqrt{\alpha/\beta}\, x \ \sinh(\sqrt{\alpha\beta/4}\,) && (5.40)
\end{aligned}$$

Si lo que queremos es transformar el cuadrado de una de estas variables, el resultado simplemente es el cuadrado de la transformada de la variable. Veámoslo explícitamente para x, siendo el resto análogo:

$$e^{-Q/2}x^2e^{Q/2} = e^{-Q/2}x\mathbb{I}xe^{Q/2} = e^{-Q/2}xe^{Q/2}\, e^{-Q/2}xe^{Q/2} = (e^{-Q/2}xe^{Q/2})^2 \tag{5.41}$$

Ahora que sabemos cómo transforman tanto las variables dinámicas por separado como sus cuadrados, podemos calcular el nuevo Hamiltoniano, cuyo resultado final es:

$$\widetilde{H} = e^{-Q/2}He^{Q/2} = \frac{p^2}{2\gamma} + \frac{\gamma}{2}\omega_1^2X^2 + \frac{q^2}{2\gamma\omega_1^2} + \frac{\gamma\omega_1^2}{2}\omega_2^2Y^2 \tag{5.42}$$

tal y como han mostrado Bender y Mannheim [7]. Este Hamiltoniano ya es Hermítico, tal y como esperabamos, y además describe dos osciladores armónicos independientes, uno en la variable x con masa γ y frecuencia ω_1, y otro en la variable y con masa $\gamma\omega_1^2$ y frecuencia ω_2. Además, vemos como efectivamente el espectro de energías de este nuevo Hamiltoniano coincide con el original, $E = E_0 + n\omega_1 + m\omega_2$, con $E_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$, ya que el original ya era el mismo espectro que el de dos osciladores independientes, uno con frecuencia ω_1 y otro con ω_2. Es evidente que los autoestados $\mid \widetilde{\Psi} >$ del nuevo Hamiltoniano $\widetilde{H}$ son los de un oscilador doble. Por tanto, al aplicar el operador $e^{-Q/2}$ sobre los estados de la teoría original $\mid \Psi >$, obtendremos las funciones de ondas de un oscilador doble.

Estamos a un paso de eliminar los fantasmas. Para ello, vemos que el nuevo Hamiltoniano no tiene estados de norma negativa, ya que es el sistema del doble oscilador, en el cual podemos ortonormalizar las funciones de onda sin ningún problema:

$$< \widetilde{\Psi} \mid \widetilde{\Psi} > = < \Psi \, | e^{-Q/2} \, e^{-Q/2} | \, \Psi > \, = \, < \Psi \, | e^{-Q} | \, \Psi > \, = 1 \tag{5.43}$$

Asi, definiendo los nuevos *bras*

$$< \Phi \, | e^{-Q} \tag{5.44}$$

Y con la nueva norma

$$< \Phi \, | e^{-Q} | \, \Psi > \tag{5.45}$$

nos deshacemos de los estados de norma negativa y, por tanto, hemos construido una teoría cuántica perfectamente válida y unitaria (sin estados de norma negativa y con un Hamiltoniano acotado inferiormente) partiendo de un Lagrangiano con altas derivadas, aunque con un Hamiltoniano no Hermítico.

Ahora, con teoría de perturbaciones, vamos a hacer algo genuinamente nuevo: vamos a preguntarnos si la introducción de una perturbación en el Hamiltoniano podría destruir la viabilidad de la teoría haciendo que apareciesen energías negativas arbitrariamente pequeñas, y por tanto, un espectro perturbado no acotado inferiormente, o si por el contrario, la teoría es estable bajo perturbaciones y mantiene un estado de mínima energía.

5.4. Comportamiento bajo perturbaciones

En primer lugar vamos a tomar unas nuevas variables Q_1, Q_2, P_1, P_2 antes de introducir la perturbación, que nos permitirán reescribir el Hamiltoniano de una forma adecuada para buscar un sentido físico a la forma de la perturbación que vamos a introducir. Estas nuevas variables las definimos cómo:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2\gamma\omega_1}}(\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1) \qquad P_1 = i\sqrt{\frac{\gamma\omega_1}{2}}(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1) \tag{5.46}$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2\gamma\omega_2}}(\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2) \qquad P_2 = i\sqrt{\frac{\gamma\omega_2}{2}}(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2) \tag{5.47}$$

$$\hat{a}_1 = \sqrt{2\gamma\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\; a_1 \qquad \hat{a}_1^\dagger = \sqrt{2\gamma\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\; a_1^\dagger \tag{5.48}$$

$$\hat{a}_2 = \sqrt{2\gamma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\; a_2 \qquad \hat{a}_2^\dagger = \sqrt{2\gamma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\; a_2^\dagger \tag{5.49}$$

Estas son las definiciones usuales para las variables dinámicas del oscilador armónico cuántico, y además hemos reescalado los operadores escalera para que sus conmutadores se simplifiquen, quedando:

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = 1 \qquad [\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] = -1 \tag{5.50}$$

Y el resto de conmutadores nulos. Si ahora calculamos los conmutadores de los operadores Q_1, P_1, Q_2, P_2 a partir de las definiciones (5.46)-(5.47), utilizando (5.50), obtenemos:

$$[Q_1, P_1] = i \qquad [Q_2, P_2] = -i \tag{5.51}$$

Donde el primero es el usual, mientras que el segundo tiene el signo cambiado, debido a que el conmutador $[\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger]$ tambien es negativo. Los conmutadores restantes se anulan todos.

El Hamiltoniano (4.15) expresado como función de los nuevos operadores escalera queda:

$$H = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) + (\omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) \tag{5.52}$$

Si despejamos los operadores escalera en función de las nuevas variables, al igual que en el caso del oscilador cuántico, encontramos:

$$\hat{a}_1^\dagger = \sqrt{\frac{\gamma\omega_1}{2}} Q_1 - i\frac{1}{\sqrt{2\gamma\omega_1}} P_1 \qquad \hat{a}_1 = \sqrt{\frac{\gamma\omega_1}{2}} Q_1 + i\frac{1}{\sqrt{2\gamma\omega_1}} P_1 \tag{5.53}$$

$$\hat{a}_2^\dagger = \sqrt{\frac{\gamma\omega_2}{2}} Q_2 - i\frac{1}{\sqrt{2\gamma\omega_2}} P_2 \qquad \hat{a}_2 = \sqrt{\frac{\gamma\omega_2}{2}} Q_2 + i\frac{1}{\sqrt{2\gamma\omega_2}} P_2 \tag{5.54}$$

Si ahora sustituimos en (5.52), obtenemos:

$$H = \frac{1}{2\gamma} P_1^2 + \frac{\gamma}{2}\omega_1^2 Q_1^2 - \frac{1}{2\gamma} P_2^2 - \frac{\gamma}{2}\omega_2^2 Q_2^2 \tag{5.55}$$

Vemos así que en las nuevas variables tenemos el problema de dos osciladores, pero en el Hamiltoniano uno de ellos va con un signo global negativo, debido a que los operadores escalera asociados a ese oscilador también tienen un signo negativo en el conmutador.

Una vez vista la nueva forma del Hamiltoniano como dos osciladores, ya podemos ver qué sentido tiene la perturbación que vamos a introducir: una perturbación cuártica al sistema de dos osciladores, ejemplo paradigmático de teoría de perturbaciones en la mecánica cuántica.

$$W_\pm = \lambda(Q_1^2 \pm Q_2^2)^2 = \lambda(Q_1^4 + Q_2^4 \pm 2Q_1^2 Q_2^2) \tag{5.56}$$

Quedando el nuevo Hamiltoniano perturbado:

$$H' = H_0 + \lambda\, W_\pm \tag{5.57}$$

En la cuantización modificada ya vimos (5.6) que el espectro sin perturbar era:

$$E^{(0)}_{n,m} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) + n\omega_1 + m\omega_2$$

El cual es estrictamente positivo. Ahora, al introducir la perturbación (5.57), queremos ver si bajo alguna condición este espectro puede tener energías negativas, o incluso volverse no acotado inferiormente. Para ello, buscaremos por tanto contribuciones negativas a la energía perturbada. Estas contribuciones solo pueden venir de los estados de norma negativa, ya que la energía perturbada para un oscilador armónico usual (cuyos estados son de norma positiva) es un resultado bien conocido, cuyas contribuciones perturbativas son siempre positivas. Por tanto, vamos a tomar el n-ésimo excitado en ω_2 y ver cuál es su energía perturbada a primer orden, viendo si esta puede ser negativa. En esta ocasión, redefinimos el estado de la forma:

$$\mid 0, n > \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}(a_2^\dagger)^n \mid 0 > \tag{5.58}$$

Los operadores escalera actúan sobre este estado como (basta con aplicar conmutadores):

$$\begin{aligned} a_2 \mid 0, n > &= -\sqrt{n} \mid 0, n-1 > \qquad & a_2^\dagger \mid 0, n > &= \sqrt{n+1} \mid 0, n+1 > \\ a_1 \mid 0, n > &= 0 & a_1^\dagger \mid 0, n > &= \mid 1, n > \end{aligned} \tag{5.59}$$

Y su norma es:

$$< 0, n \mid 0, n > = (-1)^n \tag{5.60}$$

Todo esto es el resultado ya conocido para el oscilador armónico cuántico, salvo por el signo negativo de la primera ecuación en (5.59) y por el de la norma, que surgen de nuevo del signo negativo del conmutador $[a_2, a_2^\dagger]$.

Para calcular la energía perturbada a primer orden, simplemente tenemos que usar:

$$E' = E^{(0)} + \lambda < 0, n | W_\pm \mid 0, n >= E^{(0)} + \lambda < 0, n | Q_1^4 + Q_2^4 \pm 2Q_1^2 Q_2^2 \mid 0, n > \tag{5.61}$$

Ahora, expresemos la perturbación $W_\pm$ en función de los operadores escalera:

$$Q_i^4 = \frac{1}{4\gamma^2\omega_i^2}(a_i + a_i^\dagger)^4 = \frac{1}{4\gamma^2\omega_i^2}(a_i a_i^\dagger a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i a_i^\dagger a_i + a_i^2 a_i^{\dagger 2} + a_i^{\dagger 2} a_i^2 + a_i a_i^{\dagger 2} a_i + a_i^\dagger a_i^2 a_i^\dagger)$$

Donde ya solo hemos escrito las combinaciones que tengan el mismo número de operadores destrucción que de operadores creación, ya que si no, al calcular el valor medio de Q_i^4 sobre un estado, obtendremos valor nulo.

Por último:

$$Q_1^2 Q_2^2 = \frac{1}{4\gamma^2\omega_1\omega_2}(a_1+a_1^\dagger)^2(a_2+a_2^\dagger)^2 = \frac{1}{4\gamma^2\omega_1\omega_2}(a_1^2+a_1^{\dagger 2}+a_1a_1^\dagger+a_1^\dagger a_1)(a_2^2+a_2^{\dagger^2}+a_2a_2^\dagger+a_2^\dagger a_2)$$

Ya que conocemos (5.59) cómo actúan los operadores escalera sobre el estado $\mid 0, n >$, solo tenemos que operar hasta obtener:

$$< 0, n|Q_1^4|\, 0, n > = \frac{1}{4\gamma^2\omega_1^2} < 0, n|\; a_1a_1^\dagger a_1a_1^\dagger + a_1^2 a_1^{\dagger 2}|\, 0, n > = (-1)^n \frac{3}{4\gamma^2\omega_1^2}$$

$$\begin{aligned} < 0, n|Q_2^4|\, 0, n > \;&=\; \frac{1}{4\gamma^2\omega_2^2} < 0, n|\; a_2a_2^\dagger a_2a_2^\dagger + a_2^2 a_2^{\dagger 2} + a_2^\dagger a_2 a_2^\dagger a_2 \\ &+\; a_2^{\dagger 2}a_2^2 + a_2a_2^{\dagger 2}a_2 + a_2^\dagger a_2^2 a_2^\dagger|\, 0, n > = (-1)^n \frac{6}{4\gamma^2\omega_2^2}(n^2+n+1/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < 0, n|Q_1^2Q_2^2|\, 0, n > \;&=\; \frac{1}{4\gamma^2\omega_1\omega_2} < 0, n|(a_1^2+a_1^{\dagger 2}+a_1a_1^\dagger+a_1^\dagger a_1)(a_2^2+a_2^{\dagger 2}+a_2a_2^\dagger+a_2^\dagger a_2)|\, 0, n > \\ &=\; \frac{1}{4\gamma^2\omega_1\omega_2} < 0, n|a_1a_1^\dagger a_2a_2^\dagger + a_1a_1^\dagger a_2^\dagger a_2|\, 0, n > = -(-1)^n \frac{(2n+1)}{4\gamma^2\omega_1\omega_2} \end{aligned}$$

Donde los factores $(-1)^n$ provienen de (5.60). Ahora, sustituyendo en (5.61), obtenemos:

$$E'_{0,n} = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) + n\omega_2 + \frac{\lambda}{4\gamma^2}(-1)^n \left[\frac{3}{\omega_1^2} + \frac{6(n^2+n+1/2)}{\omega_2^2} \mp \frac{2(2n+1)}{\omega_1\omega_2}\right] \qquad (5.62)$$

Así, vemos que para n par, la contribución aún así es siempre positiva, por lo que la energía perturbada sigue siéndolo. Sin embargo, para n impar y muy grande, con ω_2 y ω_1 pequeños, como hay un sumando en la perturbación que depende de $(n/\omega_2)^2$ con signo negativo, este dominará a los términos n/ω_2^2 , $n\omega_2$ y $n/(\omega_2\omega_1)$, que tienen signo positivo, por lo que la energía tenderá a $(-\infty)$. Por tanto, bajo perturbaciones, el Hamiltoniano se vuelve no acotado inferiormente, encontrándonos con un nuevo obstáculo aunque hayamos solucionado el problema de los fantasmas. Esto vuelve a nuestro modelo inviable físicamente, no habiendo encontrado por tanto una manera adecuada de solucionar las patologías que presenta.

6. Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado uno de los ejemplos más famosos de teoría cuántica en altas derivadas: la teoría de Pais-Uhlenbeck.

La motivación principal ha sido en todo momento buscar una realización físicamente viable de una teoría en altas derivadas, con la esperanza de que pueda aplicarse a la obtención de nuevos modelos de Gravitación Cuántica. Para ello hemos visto, primero en el marco de la física clásica, cómo una teoría con altas derivadas temporales posee la inestabilidad de Ostrogradski, y en particular también la de Pais-Uhlenbeck. Hemos cuantizado el Hamiltoniano de Pais-Uhlenbeck, para lo cual hemos visto dos prescripciones posibles: una cuantización que hemos llamado canónica, y otra cuantización modificada con un vacío definido. La primera y más conservadora opción nos ha llevado a un espacio de Hilbert con normas positivas para todos los estados y por tanto unitario, pero con un Hamiltoniano, al igual que nos predecía Ostrogradski en el marco clásico, no acotado inferiormente. En la segunda de las opciones, forzábamos la existencia de un estado de vacío y por tanto una energía mínima, acotando inferiormente el Hamiltoniano. Sin embargo, el coste de evitar de esta forma la inestabilidad de Ostrogradski ha sido la aparición de estados de norma negativa o fantasmas.

Siguiendo el trabajo de Bender y Mannheim, hemos visto cómo, tras una serie de manipulaciones, hemos llegado a un Hamiltoniano no Hermítico pero con simetría PT, y una nueva norma que sí es positiva para todo el espacio de Hilbert.

De esta forma, parecía que ya teniamos una teoría valida, con estados de norma positiva, adecuadamente definida, y un Hamiltoniano acotado inferiormente. Que el Hamiltoniano sea no Hermítico no nos ha supuesto ningún problema, pues se ha visto que, gracias a su simetría PT, tiene un espectro real y positivo, y cómo se puede, mediante una transformación de similaridad, llegar hasta un Hamiltoniano sí Hermítico.

A pesar de todo esto, hemos visto que la teoría es inviable, ya que bajo perturbaciones simples del Hamiltoniano, el espectro de energías, antes acotado inferiormente y siempre positivo, ahora sufre correcciones perturbativas que ya a primer orden muestran que muchos estados excitados adquieren energías negativas. De hecho estos valores negativos de la energía de los estados excitados puede alcanzar valores tan grandes (en valor absoluto) como se quiera. En resumen, el Hamiltoniano modificado resulta ser inestable bajo perturbaciones, teniendo por tanto, finalmente, un Hamiltoniano no acotado inferiormente. Hemos mostrado por tanto cómo la teoría propuesta por Bender y Mannheim de una posible realización de *Conformal Gravity* no es realmente viable.

Por último, podemos intentar buscar soluciones al problema en la cuantización canónica. Ahí teníamos normas convencionales perfectamente positivas pero un Hamiltoniano no acotado inferiormente. Sin embargo, no es la primera vez que aparece un Hamiltoniano de esta forma en la Teoría Cuántica de Campos o en la Mecánica Cuántica: la ecuación de Dirac también predice un Hamiltoniano no acotado inferiormente, con infinidad de estados de energía negativa. En este caso, lo que propuso Dirac fue pensar en el vacío como un estado (*mar de Dirac*) en el cual todos los estados de energía negativa ya estarían ocupados. Como la teoría de fermiones relativistas de Dirac describe partículas fermiónicas, no puede haber dos partículas en el mismo estado, por lo que si todos los estados de energía negativa están ocupados, el campo solo puede generar estados excitados de energía positiva. Sin embargo, este no es el mismo caso que la teoría que aquí nos ocupa, ya que buscamos una teoría para el *gravitón*, la excitación del campo gravitatorio y portador de la fuerza gravitatoria, el cual es un bosón y no un fermión, por lo que no podremos proceder de la misma manera.

Concluimos así que la realización de una teoría cuántica en altas derivadas no es en ningún caso trivial, no existiendo hasta este momento una forma clara de cómo solucionar las patologías que contienen estas formulaciones.

Paralelamente, hay muchos otros enfoques que tratan de obtener una teoría de Gravedad Cuántica consistente, como la Teoría de Cuerdas, la Teoría de Supercuerdas, teorías con *Seguridad Asintótica* o la teoría de *Loop Quantum Gravity*, entre otras. Sin embargo, hasta la fecha todas ellas han resultado ser infructíferas.

En definitiva, no parece que el final este cerca en la búsqueda de una teoría viable para describir la Gravedad Cuántica. Sigue quedando mucho por hacer en el area teórica, aunque futuras observaciones de efectos cuánticos cosmológicos podrían arrojar algo de luz sobre qué camino seguir de aquí en adelante.

Referencias

[1] M Asorey. A concise introduction to quantum field theory. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys*, 2017.

[2] M Asorey, JL Lopez, and IL Shapiro. Some remarks on high derivative quantum gravity. *International Journal of Modern Physics A*, 12(32):5711–5734, 1997.

[3] Manuel Asorey, Lesław Rachwał, and Ilya Shapiro. Unitarity Issues in Higher Derivative Field Theories, 2018.

[4] Carl M. Bender. Introduction to PT-Symmetric Quantum Theory. 2005.

[5] Carl M. Bender. Making Sense of Non-Hermitian Hamiltonians. 2007.

[6] Carl M. Bender, Dorje C. Brody, and Hugh F. Jones. Must a Hamiltonian be Hermitian? 2003.

[7] Carl M. Bender and Philip D. Mannheim. No-ghost theorem for the fourth-order derivative Pais-Uhlenbeck oscillator model. 2007.

[8] Carl M. Bender and Philip D. Mannheim. Exactly solvable PT-symmetric Hamiltonian having no Hermitian counterpart. 2008.

[9] Philip D. Mannheim. Conformal Gravity Challenges String Theory, 2007.

[10] Philip D. Mannheim. Making the case for Conformal Gravity. 2011.

[11] Philip D. Mannheim. Unitarity of loop diagrams for the ghost-like $1/(k^2-m_1^2)-1/(k^2-m_2^2)$ propagator. 2018.

[12] Philip D. Mannheim and Aharon Davidson. Dirac Quantization of the Pais-Uhlenbeck Fourth Order Oscillator. 2004.

[13] Leonardo Modesto. Super-renormalizable or Finite Lee-Wick Quantum Gravity. 2016.

[14] Leonardo Modesto and Ilya L. Shapiro. Superrenormalizable quantum gravity with complex ghosts. 2015.

[15] M. Ostrogradsky. Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. *Mem. Acad. St. Petersbourg*, 6(4):385–517, 1850.

[16] A Pais and GE Uhlenbeck. On field theories with non-localized action. *Physical Review*, 79(1):145, 1950.

[17] Michael E Peskin and Daniel V Schroeder. An Introduction to Quantum Field Theory (boulder, co, 1995.

[18] K. S. Stelle. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 16:953–969, Aug 1977.

[19] KS Stelle. Classical gravity with higher derivatives. *General Relativity and Gravitation*, 9(4):353–371, 1978.

[20] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields*, volume 2. Cambridge university press, 1995.

[21] R. P. Woodard. Avoiding Dark Energy with 1/R Modifications of Gravity. 2006.

[22] R. P. Woodard. How far are we from the Quantum Theory of Gravity? 2009.

[23] R. P. Woodard. The Theorem of Ostrogradsky, 2015.