El teorema de Müntz-Szász y algunas de sus extensiones en Análisis Matemático

Juan Condado Peñaranda
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores:
Luciano Abadías Ullod
Pedro José Miana Sanz

2019

Summary

At the beginning of the nineteenth century, functions were thought of as explicit mathematical formulas. However, as the century progressed the mathematical community started to describe sets of functions by means of the properties they satisfied (for instance, the set of continuous functions on the interval $[0,1]$). This new approach showed that the concept of function that had been used up until then was insufficient and needed to be widened; indeed, not all continuous functions on $[0,1]$ can be described in an explicit manner.

Approximation theory, the area of mathematics concerned with approximating functions (of which one may have limited knowledge) with simpler ones, naturally arose from this kind of considerations. The first important result was proven by Weierstrass in 1885 and is today known as the Weierstrass approximation theorem. It states that any continuous function on a compact interval can be uniformly approximated by polynomials as much as desired:

Weierstrass approximation theorem. *Let $a, b \in \mathbb{R}$ with $a < b$ and assume that f is a continuous function defined on $[a,b]$. Then, for any $\varepsilon > 0$, there exists a polynomial p such that $|f(t) - p(t)| < \varepsilon$ for all $t \in [a,b]$. In other words, the set of polynomials on $[a,b]$ is dense in the set of continous functions on $[a,b]$.*

This theorem constituted the starting point of a fruitful theory, and the fact that it was proven many more times, using very diverse techniques, by mathematicians as remarkable as Picard, Féjer, Landau, De la Vallée Poussin, Runge, Lebesgue, Volterra and Bernstein gives an idea of its enormous impact. At the International Congress of Mathematicians held in Cambridge in 1912, Bernstein proposed the following generalisation problem:

Bernstein's problem. *Determine the conditions that a set $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of positive numbers must verify so that the set of finite linear combinations of the functions $1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_n}, \ldots$ is dense in $C([0,1])$.*

Bernstein himself had achieved some partial results and correctly conjectured that the harmonic series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ played a prominent role in the problem. Two years later, in 1914, Polish mathematician Chaim Müntz proved what is today known as the classical Müntz-Szász theorem, thus confirming Bernstein's conjecture:

Classical Müntz-Szász theorem. *Let $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ be a strictly increasing sequence of positive numbers. Then the set of the finite linear combinations of the functions $1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_n}, \ldots$ is be dense in $C([0,1])$ if and only if $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = +\infty$.*

In 1916, Austro-Hungarian mathematician Otto Szász published an improved version of Müntz's proof. Müntz's proof employed real-variable methods to estimate the distance between an arbitrary continous function and certain subspaces of polynomials and see that it can be made as small as desired, whereas Szász's proof was based on complex-variable arguments and relied heavily on previous functional analysis results.

The aim of this work is to present Szász's proof of the Müntz-Sszász theorem in full detail, as well as analogous theorems for L^p spaces and some extensions of these results where the sequence of exponents

is not assumed to be monotonic. Our main reference for Szász's proof is Walter Rudin's book *Real and Complex Analysis* [6], whereas the rest of the paper is based on Borwein and Erdélyi's article *The Full Müntz Theorem* [2].

In the first chapter we will briefly review the preliminary concepts and theorems required for the proof. In particular, we will recall the notion of Banach space and its most important examples, namely L^p spaces, the spaces of continuous functions and dual spaces. After that, we will define complex measures and their associated total variations (which are finite positive measures), and examine the procedure that allows to construct complex measures from positive measures. It turns out that every complex measure can be obtained from its total variation and a function of constant modulus 1 by this procedure, and this fact is essential to defining integration with respect to complex measures. This new integration satisfies all the usual properties of integration and provides a precise description of the dual spaces of the spaces of continuous functions and L^p spaces (Riesz representation theorems). And as a consequence of these results, one can obtain Bishop's theorem, a generalisation of the Weierstrass approximation theorem to abstract spaces of continuous functions. We will only need to use the latter, though.

We will then move on to recalling several well-known theorems from complex analysis, such as Morera's theorem, Cauchy's theorem and Cauchy's formula. We will also give a sufficient condition for a bounded holomorphic function on the unit disk to be identically zero usually known as Blaschke's theorem. And finally, we will define infinite products, prove the elementary proposition relating them to infinite series and study the conditions under which an infinite product defines a holomorphic function. Since the material in this chapter is not the main goal of this work, few proofs have been included, although we indicate where they can be found.

The second chapter is devoted to the classical Müntz-Szász theorem, whose proof is grounded on the following corollary to the deep Hahn-Banach theorem about extensions of continuous linear functionals:

Corollary to Hahn-Banach theorem. *Let M be a vector subspace of a normed space E over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Given $x_0 \in E$, one has $x_0 \in \overline{M}$ if and only if every continuous linear functional in E^* vanishing on M vanishes at x_0 too.*

Thus, we will have to check that only under the assumption that the series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ converges there exists a non-zero continuous linear functional defined on $C([0,1])$ that vanishes on the vector subspace spanned by 1 and the t^{λ_i}. To do so, we will make use of the excellent properties of the zeros of holomorphic functions and of the Riesz representation theorem, which tells us what those functionals actually look like. We also prove a version of the Müntz-Szász theorem for L^p spaces, which follows easily from the classical theorem for $C([0,1])$.

In the third and last chapter, we will extend the classical Müntz-Szász theorem to the general setting of arbitrary sequences of exponents, as well as its versions for $L^2([0,1])$ and $L^1([0,1])$. The ideas in this chapter are similar to those in chapter 2, but technical complications appear and some additional results, such as Newman's inequality, are needed. We have not included the proof of Newman's inequality because it is too long, but again we provide a reference for it.

We shall finish this summary by mentioning further extensions of the theorem not proven in this paper:

Full Müntz-Szász theorem in $C([a,b])$. *Let $a,b \in \mathbb{R}$ with $0 < a < b$ and let $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of distinct real numbers. Then the set formed by the finite linear combinations of the functions $1, t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_n}, \dots$ if and only if $\sum_{\lambda_n \neq 0} 1/|\lambda_n| = +\infty$.*

Full Müntz-Szász theorem in $L^p([0,1])$. *Let $p \in [1, +\infty]$ and assume $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of distinct real numbers with $\lambda_n > -1/p$ for all $n \in \mathbb{N}$. Then the set formed by the finite linear combinations of the functions $1, t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_n}, \dots$ is dense in $L^p([0,1])$ if and only if*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n + 1/p}{(\lambda_n + 1/p)^2 + 1} = +\infty.$$

Full Müntz-Szász theorem in $L^p([a,b])$. *Let $p \in [1,+\infty)$ and let $a, b \in \mathbb{R}$ with $0 < a < b$. Assume that $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of distinct real numbers. Then the set formed by the finite linear combinations of the functions $1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_n}, \ldots$ is dense in $L^p([a,b])$ if and only if $\sum_{\lambda_n \neq 0} 1/|\lambda_n| = +\infty$.*

Resumen

A principios del siglo XIX, el concepto de función se identificaba con el de fórmula matemática explícita. Sin embargo, pronto la comunidad matemática empezó a describir conjuntos de funciones a través de las propiedades satisfechas por éstas (por ejemplo, el conjunto de las funciones continuas en $[0,1]$). Este nuevo enfoque puso de manifiesto que la idea de función con la que se había trabajado hasta entonces era insuficiente (no toda función continua en $[0,1]$ se puede dar mediante una fórmula explícita) y que era preciso ampliarla.

La teoría de la aproximación, rama de las matemáticas que estudia cómo aproximar funciones (de las que puede tenerse un conocimiento bastante limitado) por otras más simples, surgió de modo natural a partir de esta clase de consideraciones. El primer resultado importante fue demostrado por Weierstrass en 1885 y se conoce hoy como teorema de aproximación de Weierstrass. Afirma que toda función continua en un intervalo compacto se puede aproximar uniformemente por polinomios tanto como se desee:

Teorema de aproximación de Weierstrass. *Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y supongamos que f es una función continua definida en $[a,b]$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, hay algún polinomio p tal que $|f(t) - p(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [a,b]$. En otras palabras, el conjunto de los polinomios definidos en $[a,b]$ es denso en el de las funciones continuas con ese mismo dominio.*

Este teorema fue el comienzo de una fructífera teoría. Fue demostrado muchas más veces, usando técnicas muy diversas, por matemáticos tan conspicuos como Picard, Féjer, Landau, De la Vallée Poussin, Runge, Lebesgue, Volterra y Bernstein, lo que da idea del gran impacto que causó. En el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Cambridge en 1912, Bernstein propuso el siguiente problema de generalización:

Problema de Bernstein. *Determinar las condiciones que debe verificar un conjunto $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números positivos para que el conjunto de las combinaciones lineales finitas de las funciones $1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_n}, \ldots$ sea denso en $C([0,1])$.*

El propio Bernstein había llegado a algunos resultados parciales y había conjeturado acertadamente que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ desempeñaba un papel crucial en el problema. Dos años más tarde, en 1914, el matemático polaco Chaim Müntz demostró lo que hoy se conoce como teorema de Müntz-Szász clásico, confirmando así la conjetura de Bernstein:

Teorema de Müntz-Szász clásico. *Sea $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente de números positivos. Entonces el conjunto de las combinaciones lineales finitas de las funciones $1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_n}, \ldots$ es denso en $C([0,1])$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = +\infty$.*

En 1916, el matemático austrohúngaro Otto Szász publicó una versión mejorada de la demostración de Müntz. La prueba de Müntz empleaba métodos de variable real para estimar la distancia entre una función continua arbitraria y determinados subespacios de polinomios, y ver que se podía hacer tan pequeña como se quisiese; en cambio, la de Szász se basaba en argumentos de variable compleja e involucraba resultados profundos de análisis funcional.

El objetivo de este trabajo es desarrollar la demostración de Szász con todo detalle, así como dar teoremas análogos para los espacios L^p y algunas extensiones de estos resultados en que la sucesión de exponentes no se supone monótona. Nuestra referencia principal para la demostración de Szász es el libro de Walter Rudin *Real and Complex Analysis* [6], mientras que el resto del trabajo está basado en el artículo de Borwein y Erdélyi titulado *The Full Müntz Theorem* [2].

En el primer capítulo repasaremos brevemente los conceptos y teoremas preliminares que se requieren para la demostración. En concreto, recordaremos la noción de espacio de Banach y sus ejemplos más importantes; a saber, los espacios L^p, los espacios de funciones continuas y los espacios duales. A continuación, definiremos las medidas complejas y sus variaciones totales asociadas (que son medidas positivas finitas), y estudiaremos el procedimiento que permite construir medidas complejas a partir de medidas positivas. Veremos que toda medida compleja se puede obtener a partir de su variación total y una función de módulo constante 1 por este procedimiento, hecho esencial a la hora de definir la integración respecto de medidas complejas. Esta nueva integración verifica todas la propidades habituales de la integración y proporciona una descripción precisa de los duales de los espacios de funciones continuas y los espacios L^p (teoremas de representación de Riesz). Como consecuencia de estos resultados se puede obtener el teorema de Bishop, generalización del teorema de aproximación de Weierstrass a espacios abstractos de funciones continuas; no obstante, sólo necesitaremos usar el caso particular de Weierstrass.

Después recordaremos varios teoremas conocidos de variable compleja, tales como el teorema de Morera, el teorema de Cauchy y la fórmula de Cauchy. También daremos una condición suficiente para que una función holomorfa y acotada en el disco unidad sea idénticamente nula, normalmente llamada teorema de Blaschke. Y para acabar, definiremos los productos infinitos, demostraremos la proposición elemental que los relaciona con las series infinitas y estudiaremos las condiciones bajo las que un producto infinito define una función holomorfa. Dado que el material de este primer capítulo no es el objetivo principal del trabajo, hemos incluido pocas demostraciones, aunque indicamos dónde se pueden encontrar.

El segundo capítulo está dedicado al teorema de Müntz-Szász clásico, cuya demostración se apoya en el siguiente corolario del teorema de Hahn-Banach sobre extensión de funcionales lineales continuos:

Corolario del teorema de Hahn-Banach. *Sea M un subespacio vectorial de un espacio normado E sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Dado $x_0 \in E$, se tiene que $x_0 \in \overline{M}$ si y sólo si todo funcional lineal continuo de E^* que se anule en M se anula también en x_0.*

Así, tendremos que comprobar que sólo cuando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ diverge existe un funcional lineal y continuo no nulo definido en $C([0,1])$ que se anula en el subespacio engendrado por 1 y las t^{λ_i}. Para ello, usaremos las excelentes propiedades de los ceros de las funciones holomorfas y el teorema de representación de Riesz, que nos dice qué aspecto tienen esos funcionales. También demostraremos una versión del teorema de Müntz-Szász para espacios L^p, que se sigue fácilmente del teorema clásico para $C([0,1])$.

En el tercer y último capítulo, extenderemos el teorema de Müntz-Szász clásico al contexto general de sucesiones de exponentes cualesquiera, así como sus versiones para $L^2([0,1])$ y $L^1([0,1])$. Las ideas de este capítulo son parecidas a las del capítulo 2, pero surgen varias complicaciones técnicas y se necesitan algunos resultados adicionales, como la desigualdad de Newman. No hemos incluido la demostración de ésta porque es demasiado larga, pero nuevamente damos una referencia donde puede consultarse.

Terminamos este resumen enunciando varias generalizaciones ulteriores del teorema de Müntz-Szász que no demostramos en este trabajo:

Teorema de Müntz-Szász completo en $C([a,b])$. *Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$ y sea $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales distintos. Entonces el conjunto formado por las combinaciones lineales finitas de las funciones $1, t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_n}, \dots$ es denso en $C([a,b])$ si y sólo si $\sum_{\lambda_n \neq 0} 1/|\lambda_n| = +\infty$.*

Teorema de Müntz-Szász completo en $L^p([0,1])$. *Sea $p \in [1,+\infty]$ y supongamos que $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales distintos con $\lambda_n > -1/p$ para todol $n \in \mathbb{N}$. Entonces el conjunto formado por las combinaciones lineales finitas de las funciones $1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_n}, \ldots$ es denso en $L^p([0,1])$ si y sólo si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n + 1/p}{(\lambda_n + 1/p)^2 + 1} = +\infty.$$

Teorema de Müntz-Szász completo en $L^p([a,b])$. *Sea $p \in [1,+\infty)$ y sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$. Supongamos que $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales distintos. Entonces el conjunto formado por las combinaciones lineales finitas de las funciones $1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_n}, \ldots$ es denso en $L^p([a,b])$ si y sólo si $\sum_{\lambda_n \neq 0} 1/|\lambda_n| = +\infty$.*

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios de Banach

En esta sección introducimos las definiciones básicas de la teoría de espacios de Banach que usaremos a lo largo del trabajo.

Definición 1.1. Un ***espacio de Banach*** es un espacio normado (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) completo respecto de la métrica a la que da lugar su norma.

Espacios L^p. Sea μ una medida positiva sobre un espacio medible $(X, \mathscr{A})$. Para cada $p \in [1, +\infty)$, se define

$$\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{K} \text{ medible} : \int_X |f| \, d\mu < +\infty \right\}.$$

Considerado con la suma de funciones y el producto de funciones por escalares de $\mathbb{K}$, $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mu)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y el conjunto $N = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ medible} : f = 0 \text{ en casi todo punto}\}$ es subespacio vectorial suyo. Se denota entonces

$$L^p_{\mathbb{K}}(X, \mu) = \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mu)/N = \left\{ [f] : f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mu) \right\}.$$

Observar que $[f] = \left\{ g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mu) : f = g \text{ en casi todo punto} \right\}$; es decir, $L^p_{\mathbb{K}}(X, \mu)$ se obtiene de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mu)$ identificando funciones iguales en casi todo punto, que son indistinguibles en cuanto a integración. Y $L^p_{\mathbb{K}}(X, \mu)$ es espacio de Banach con las operaciones heredadas y la norma (bien definida)

$$\|[f]\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Por otra parte, se define

$$\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{K} \text{ medible} : \exists\, C > 0 \text{ tal que } |f| \leq C \text{ en casi todo punto} \}.$$

Del mismo modo que antes, $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X, \mu)$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, e identificando funciones iguales en casi todo punto se pasa a $L^\infty_{\mathbb{K}}(X, \mu)$, que es espacio de Banach con las operaciones heredadas y la norma (bien definida)

$$\|[f]\|_\infty = \text{ínf}\{ C > 0 : |f| \leq C \text{ en casi todo punto} \}.$$

Tanto en el caso $p \in [1, +\infty)$ como en el caso $p = \infty$, cometiendo un ligero abuso de notación, se escribe f en lugar de $[f]$ para las clases de equivalencia.

Nota 1. Salvo que se diga lo contrario, se entiende que $\mathscr{L}^p(X,\mu) = \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ y $L^p(X,\mu) = L^p_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ (sea $p \in [1,+\infty)$ o $p = \infty$).

Nota 2. Cuando $X = \mathbb{R}^n$, si no se indica otra cosa, se entiende que $\mathscr{A}$ y μ son la σ-álgebra y la medida de Lebesgue, respectivamente.

Espacios de funciones continuas. Sea K un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Se denota

$$C_{\mathbb{K}}(K) = \{f\colon K \to \mathbb{K} : f \text{ continua}\}.$$

Con la suma de funciones, el producto de funciones por escalares y la «norma del máximo»

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in K} |f(x)|,$$

$C_{\mathbb{K}}(K)$ es espacio de Banach.

Nota 3. Notar que si $(K,\mathscr{A},\mu)$ es un espacio de medida, $C_{\mathbb{K}}(K) \subseteq L^\infty_{\mathbb{K}}(K,\mu)$ y la norma del máximo de cualquier $f \in C_{\mathbb{K}}(K)$ coincide con su norma infinito como elemento de $L^\infty_{\mathbb{K}}(K,\mu)$ (teorema de Weierstrass). Es decir, no hay contradicción en denotar la norma del máximo por $\|\cdot\|_\infty$.

Nota 4. Salvo que se diga explícitamente lo contrario, se entiende que $C(K) = C_{\mathbb{C}}(K)$.

Espacios duales. Sea E un espacio normado cualquiera sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Se llama ***espacio dual*** de E a

$$E^* = \{\varphi\colon E \to \mathbb{K} : \varphi \text{ lineal y continua}\}.$$

Con la suma de aplicaciones, el producto de aplicaciones por escalares y la norma

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup_{\|x\|\le 1} |\varphi(x)|,$$

el dual E^* es espacio de Banach. □

Damos a continuación un lema general sobre espacios métricos:

Lema 1.2. *Sean K, X e Y espacios métricos, K compacto, y sea $F\colon K\times X \to Y$ una aplicación continua. Entonces, dado $x_0 \in X$, para cada $\varepsilon > 0$ hay algún $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in X$ con $\operatorname{dist}(x,x_0) < \delta$ se verifica $\operatorname{dist}(F(t,x),F(t,x_0)) < \varepsilon$ para todo $t \in K$.*

Demostración. Fijemos $x_0 \in X$, y sea $\varepsilon > 0$. Para cada $t \in K$, F es continua en (t,x_0), por lo que existirá $\delta_t > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(s,t) < \delta_t,\ \operatorname{dist}(x,x_0) < \delta_t \Longrightarrow \operatorname{dist}(F(s,x),F(t,x_0)) < \varepsilon/2. \tag{$*$}$$

Claramente $\{B(t,\delta_t)\}_{t\in K}$ es un recubrimiento abierto de K, y al ser éste compacto se podrá extraer de él un subrecubrimiento finito $\{B(t_i,\delta_{t_i})\}_{i=1}^n$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_{t_i}\}_{i=1}^n$ y veamos que verifica la condición deseada: Sea $x \in X$ con $\operatorname{dist}(x,x_0) < \delta$ y $t \in K$; necesariamente $t \in B(t_i,\delta_{t_i})$ para algún $i \in \{1,\dots,n\}$, y así

$$\operatorname{dist}(F(t,x),F(t,x_0)) \le \operatorname{dist}(F(t,x),F(t_i,x_0)) + \operatorname{dist}(F(t_i,x_0),(t,x_0)) \overset{(*)}{<} \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon. \qquad \square$$

Asimismo necesitaremos el siguiente resultado de análisis funcional, cuya demostración es rutinaria:

Proposición 1.3. *Sean X e Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que Y es de Banach. Si D es un subespacio vectorial denso de X y $\tilde{T}\colon D \to Y$ es una aplicación lineal y continua, entonces existe una única $T\colon X \to Y$ lineal y continua que extiende a $\tilde{T}$. Además, siempre que $X = Y$, $D \subseteq \tilde{T}(D)$ y $\tilde{T}$ sea isometría, se puede asegurar que T es suprayectiva.*

Concluimos esta sección con un resultado general de espacios normados que se obtiene como corolario del teorema de Hahn-Banach sobre extensión de aplicaciones lineales. Las demostraciones del teorema y del corolario se pueden ver en [6, teor. 5.16] y [6, teor. 5.19] respectivamente.

Proposición 1.4. *Sea M un subespacio vectorial de un espacio normado E sobre $\mathbb{K}$. Dado $x_0 \in E$, se tiene que $x_0 \in \overline{M}$ si y sólo si para cada $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(M) = \{0\}$ es $\varphi(x_0) = 0$.*

1.2. Medidas complejas

Recogemos aquí las ideas elementales sobre medidas complejas que necesitaremos usar. Puede verse una exposición mucho más amplia y detallada que la nuestra en [6, cap. 6].

Definición 1.5. Una ***medida compleja*** sobre un espacio medible $(X, \mathscr{A})$ es una aplicación $\mu \colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ que verifica:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) Para toda sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ de conjuntos medibles disjuntos entre sí,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Obsérvese que, como para cualquier permutación $\alpha \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\alpha(n)}$, necesariamente $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_{\alpha(n)}\right)$ para toda α; es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ es incondicionalmente convergente, y por tanto debe converger absolutamente.

Es sencillo construir medidas complejas a partir de medidas positivas: si $\lambda \colon \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ es una medida positiva y $f \colon X \to \mathbb{C}$ una función integrable respecto de λ, entonces la aplicación $\mu \colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\mu(E) = \int_E f \, d\lambda$$

es una medida compleja. Para expresar que μ se obtiene a partir de λ y f de esta manera, se escribe $d\mu = f \, d\lambda$.

Definición 1.6. Sea $\mu \colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ una medida compleja. Se denomina ***variación total*** de μ a la aplicación $|\mu| \colon \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ dada por

$$|\mu|(E) = \sup\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| : E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n, \ \ E_n \in \mathscr{A} \text{ para todo } n \right\},$$

donde $\sqcup$ denota la unión disjunta.

En general, $|\mu(E)| \neq |\mu|(E)$, pero se tiene la desigualdad $|\mu(E)| \leq |\mu|(E)$ para todo $E \in \mathscr{A}$. Además, se demuestra que la variación total $|\mu|$ es una medida positiva finita, y el valor $|\mu|(X) \in [0, +\infty)$ se denota por $\|\mu\|$.

Espacios de medidas complejas. Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible. Se denota

$$\mathscr{M}(X) = \{\mu \colon \mathscr{A} \to \mathbb{C} : \mu \text{ medida}\}.$$

Con la suma de medidas, el producto de medidas por números complejos y la norma $\|\mu\|_{\mathscr{M}(K)} = |\mu|(X)$, $\mathscr{M}(X)$ es espacio de Banach.

Si además X es espacio topológico, podemos tomar como $\mathscr{A}$ la σ-álgebra $\mathscr{B}(X)$ de los borelianos de X. Entonces el subconjunto $M(X) \subseteq \mathscr{M}(X)$ formado por las medidas de Borel regulares[1] es un subespacio vectorial que, con la restricción de la norma, es espacio de Banach también. □

El teorema que sigue nos permitirá definir la integral de una función medible respecto de una medida compleja como una integral respecto de una medida positiva.

Teorema 1.7. *Sea μ una medida compleja sobre un espacio medible $(X, \mathscr{A})$. Entonces μ se puede poner en la forma $d\mu = h\,d|\mu|$, siendo $h \in L^1(X, |\mu|)$ tal que $|h| \equiv 1$. Esta función h es esencialmente única, en el sentido de que para cualquier otra $h' \in L^1(X, |\mu|)$ con $|h'| \equiv 1$ que cumpla $d\mu = h'\,d|\mu|$ tiene que ser $h(x) = h'(x)$ para casi todo $x \in X$ respecto de μ.*

En la situación del teorema, se dice que $d\mu = h\,d|\mu|$ es una ***descomposición polar*** de μ.

Definición 1.8. Sea μ una medida compleja sobre un espacio medible $(X, \mathscr{A})$, y sea $d\mu = h\,d|\mu|$ una descomposición polar suya. Se dice que una función medible $f\colon X \to \mathbb{C}$ es ***integrable respecto de*** μ, y se escribe $f \in L^1(X, \mu)$, si $fh \in L^1(X, |\mu|)$. En ese caso, se llama ***integral de*** f ***respecto de*** μ al número complejo

$$\int_X f\,d\mu = \int_X fh\,d|\mu|.$$

Nótese que, por la parte de unicidad del teorema anterior, el valor de la integral no depende de qué h se escoja en la descomposición polar de μ.

La nueva integral que acabamos de definir posee propiedades análogas a las de la integral respecto de medidas positivas. Vamos a enunciar las que emplearemos más adelante:

Proposición 1.9. *Sea μ una medida compleja sobre un espacio medible $(X, \mathscr{A})$. Si $f, g \in L^1(X, \mu)$ y $a, b \in \mathbb{C}$, entonces $af + bg \in L^1(X, \mu)$, $|f| \in L^1(X, |\mu|)$ y se verifica*

$$\int_X (af + bg)\,d\mu = a\int_X f\,d\mu + b\int_X g\,d\mu, \qquad \left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d|\mu|.$$

Proposición 1.10. *Sea λ una medida compleja sobre un espacio medible $(X, \mathscr{A})$. Dada $f \in L^1(X, \lambda)$, la aplicación $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ definida por*

$$\mu(E) = \int_E f\,d\lambda$$

es una medida compleja.

Asimismo, si $g \in L^1(X, \mu)$, entonces

$$\int_X g\,d\mu = \int_X gf\,d\lambda$$

(lo que justifica la notación $d\mu = f\,d\lambda$ usada para expresar que μ se obtiene a partir de λ y f mediante la fórmula de arriba).

La integración respecto de medidas complejas proporciona una descripción precisa de los duales de los espacios de funciones continuas y de los L^p:

Teorema 1.11 (teorema de representación de Riesz-Markov-Kakutani)**.** *Sea K un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Entonces la aplicación $\Lambda\colon M(K) \to C(K)^*$ que asocia a cada $\mu \in M(K)$ el funcional $T_\mu \in C(K)^*$ dado por*

$$T_\mu(f) = \int_K f\,d\mu \quad \textit{para toda } f \in C(K)$$

está bien definida (esto es: $C(K) \subseteq L^1(K, \mu)$ y T_μ es lineal y continua), es biyectiva y lineal, y satisface $\|\Lambda(\mu)\|_{C(K)*} = \|\mu\|_{M(K)}$ cualquiera que sea $\mu \in M(K)$.

[1] Por *regulares* nos referimos a aquellas medidas que verifican para todo $A \in \mathscr{A}$ que $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq A, K \in \mathscr{A}\} = \inf\{\mu(G) : G \text{ abierto}, G \supseteq A, G \in \mathscr{A}\}$.

Teorema 1.12 (teorema de representación de Riesz para espacios L^p)**.** *Sea μ una medida compleja sobre un espacio medible $(X,\mathscr{A})$. Sea $p \in [1,+\infty)$ y denotemos por $p' \in (1,+\infty]$ su exponente conjugado. Entonces la aplicación $\Lambda\colon L^{p'}(X,\mu) \to L^p(X,\mu)^*$ que a cada $g \in L^{p'}(X,\mu)$ le hace corresponder el funcional $T_g \in L^p(X,\mu)^*$ dado por*

$$T_g(f) = \int_X fg\,d\mu \quad \text{para toda } f \in L^p(X,\mu)$$

está bien definida (esto es: fg es integrable y T_g es lineal y continua), es biyectiva y lineal, y verifica $\|\Lambda(g)\|_{L^p(X,\mu)^*} = \|g\|_{p'}$ cualquiera que sea $g \in L^{p'}(X,\mu)$.

Consecuencia del teorema de Riesz-Markov-Kakutani es el siguiente resultado de densidad, cuya demostración se puede consultar en [5, teor. 5.7]:

Teorema 1.13 (teorema de Bishop)**.** *Sea K un espacio topológico compacto y de Hausdorff, sea $A \subseteq C(K)$ y supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

(a) Siempre que $f,g \in A$, $c \in \mathbb{C}$, también $f+g \in A$, $cf \in A$, $fg \in A$, $\overline{f} \in A$.

(b) Dados $x,y \in K$ con $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$ (en palabras, A separa puntos de K).

(c) La función constante 1 pertenece a A (notar que, por la estabilidad para el producto por escalares, esta condición equivale a que A contenga todas las funciones constantes).

Entonces A es denso en $C(K)$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

El caso particular que necesitaremos es el que enunciamos a continuación:

Corolario 1.14 (teorema de aproximación de Weierstrass)**.** *El conjunto $P([0,1])$ de las funciones polinómicas con coeficientes complejos definidas en $[0,1]$ es denso en $C([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$.*

1.3. Variable compleja

Notación. En lo que sigue, para cada abierto Ω del plano complejo indicaremos con $\mathscr{H}(\Omega)$ el conjunto de las funciones holomorfas en Ω. También usaremos la notaciones

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \qquad \mathbb{H}_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \alpha\} \quad \text{para } \alpha \in \mathbb{R}.$$

1.3.1. Resultados clásicos

Pasamos ahora a recordar algunos resultados clásicos de análisis complejo que nos serán útiles en la demostración del teorema de Müntz-Szász. Nos limitamos aquí a dar los enunciados; las demostraciones pueden encontrarse en cualquier texto de iniciación al análisis complejo (consúltese por ejemplo [4, págs. 84-87]).

Teorema 1.15 (teorema de Morera)**.** *Sea Ω un abierto del plano complejo, y sea $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Si para todo camino cerrado γ con soporte en Ω se tiene*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

entonces $f \in \mathscr{H}(\Omega)$.

Teorema 1.16 (teorema de Cauchy)**.** *Sea Ω un abierto simplemente conexo del plano complejo. Entonces, dada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$,*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

para todo camino cerrado γ con soporte en Ω.

Teorema 1.17 (fórmula de Cauchy)**.** *Sea Ω un abierto simplemente conexo del plano complejo y sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Si γ es un camino cerrado con soporte en Ω, entonces para cada $z \in \Omega \setminus \operatorname{sop}\gamma$,*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

siendo $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ el índice de z respecto de γ.

El siguiente teorema proporciona una condición suficiente sobre los ceros de una función holomorfa y acotada en el disco unidad para que ésta sea idénticamente nula. Es un caso particular del resultado más general [6, teor. 15.23].

Teorema 1.18 (teorema de Blaschke)**.** *Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ una función acotada. Si $(\alpha_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{D}$ es una sucesión de ceros de f tal que la serie de números no negativos*

$$\sum_{n=1}^\infty (1-|\alpha_n|)$$

diverge a $+\infty$, entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

A continuación, daremos la definición y las propiedades básicas de los productos infinitos:

Definición 1.19. Sea $(z_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de números complejos. Se denota

$$\prod_{n=1}^\infty z_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^N z_n,$$

siempre que el límite exista y sea complejo.

Proposición 1.20. *Sea $(z_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de números complejos tal que $\prod_{n=1}^\infty z_n \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Entonces, $z_n \to 1$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Denotemos $P_N = \prod_{n=1}^N z_n$, $P = \prod_{n=1}^\infty z_n$. Necesariamente $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues de lo contrario sería $P = 0$, y así $P_N \neq 0$ para todo $N \in \mathbb{N}$; en consecuencia, para cada $N \geq 2$, $z_N = P_N/P_{N-1}$, y tomando límites en esta igualdad se obtiene que $z_N \to P/P = 1$ cuando $N \to \infty$. □

Proposición 1.21. *Sea $(a_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de números reales con $0 \leq a_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Si $\sum_{n=1}^\infty a_n < +\infty$, entonces $\prod_{n=1}^\infty (1-a_n) \in (0,1]$.
(b) Si $\sum_{n=1}^\infty a_n = +\infty$, entonces $\prod_{n=1}^\infty (1-a_n) = 0$.

Demostración. Como en la demostración precedente, denotemos $P_N = \prod_{n=1}^N (1-a_n)$ para cada $N \in \mathbb{N}$. Nótese que $0 < 1-a_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $0 < P_N \leq 1$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Esto, unido a que la sucesión $(P_N)_{N=1}^\infty$ es decreciente, implica que existe

$$P = \lim_{N\to\infty} P_N \in [0,1].$$

Así pues, basta probar que

$$\sum_{n=1}^\infty a_n < +\infty \iff P > 0:$$

$\Longrightarrow$) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, tiene que ser $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por consiguiente, $-\log(1-a_n) \sim a_n$ cuando $n \to \infty$, y por el criterio de comparación por paso al límite (recordar que se aplica a series de términos no negativos), $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1-a_n)$ converge a algún valor Q. Debido a ello,

$$P = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N}(1-a_n) = \lim_{N\to\infty} \exp\left[\log \prod_{n=1}^{N}(1-a_n)\right] = \lim_{N\to\infty} \exp\left[\sum_{n=1}^{N} \log(1-a_n)\right] = e^{Q} \neq 0.$$

$\Longleftarrow$) Supongamos $P > 0$. Por la proposición anterior, necesariamente $1-a_n \to 1$, y por tanto $a_n \to 0$, cuando $n \to \infty$. Se deduce de ello que $-\log(1-a_n) \sim a_n$ cuando $n \to \infty$, con lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene el mismo carácter que $\sum_{n=1}^{\infty} -\log(1-a_n)$. Y esta serie converge; concretamente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\log(1-a_n) = -\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \log(1-a_n) = -\lim_{N\to\infty} \log \prod_{n=1}^{N}(1-a_n) = -\log P. \qquad \square$$

La demostración del siguiente resultado se puede ver en [4, teor. 5.9].

Teorema 1.22. *Sea Ω un abierto conexo del plano complejo y sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{H}(\Omega)$ una sucesión de funciones holomorfas no idénticamente nulas. Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1-f_n|$$

converge uniformemente sobre compactos en Ω, entonces el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n$$

también converge uniformemente sobre compactos en Ω y la función $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ que define es holomorfa.

Además, si para un $z_0 \in \Omega$ es $f(z_0) = 0$, entonces $f_n(z_0) = 0$ para un número finito (no nulo) de n. Dicho de otro modo: un punto $z_0 \in \Omega$ es cero de f si y sólo si es cero de alguno de sus factores, y en ese caso lo es solamente de un número finito de ellos.

1.3.2. Transformaciones de Möbius

Definición 1.23. Denotemos $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y sean $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ tales que $ad-bc \neq 0$. Se llama ***transformación de Möbius de parámetros*** a, b, c, d a la aplicación $T\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dada por

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ con $cz+d \neq 0$, con los siguientes convenios:

- Si $c = 0$, se define $T(\infty) = \infty$.
- Si $c \neq 0$, se define $T(\infty) = a/c$ y $T(-d/c) = \infty$.

Lema 1.24. *La transformación de Möbius $f\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dada por*

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

aplica biyectivamente $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{H}_0$, y su inversa $f^{-1}\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ (que aplica biyectivamente $\mathbb{H}_0$ sobre $\mathbb{D}$) viene dada por

$$f^{-1}(w) = \frac{w-1}{w+1}.$$

Demostración. Es conocido que la imagen de cualquier *circunferencia generalizada* (esto es, recta a la que se ha añadido el punto ∞ o circunferencia) por una transformación de Möbius es una circunferencia generalizada, y una circunferencia generalizada queda determinada por tres puntos. De acuerdo con esto, al ser $f(1) = \infty$, $f(i) = i$ y $f(-1) = 0$, necesariamente $f(\partial\mathbb{D}) = \mathbb{R}i \cup \{\infty\}$. Por el principio de orientación, como $\mathbb{D}$ es el lado izquierdo de $\partial\mathbb{D}$ respecto de la orientación $(1, i, -1)$, $f(\mathbb{D})$ debe ser el lado izquierdo de $f(\partial\mathbb{D}) = \mathbb{R}i \cup \{\infty\}$ respecto de $(f(1), f(i), f(-1)) = (\infty, i, 0)$; dicho de otra manera, $f(\mathbb{D}) = \mathbb{H}_0$ (ver la figura 1.1). Y dado que toda transformación de Möbius es una biyección de $\mathbb{C}_\infty$, f aplica biyectivamente $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{H}_0$. El cálculo de la inversa es sencillo. $\square$

Lema 1.25. *Para cada $a > 0$, la transformación de Möbius $f_a \colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dada por*

$$f_a(z) = \frac{a-1-z}{a+1+z} = -\frac{\frac{z+1}{a} - 1}{\frac{z+1}{a} + 1}$$

aplica biyectivamente $\mathbb{H}_{-1} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -1\} \cup \{\infty\}$ sobre $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Demostración. Se prueba con el mismo tipo de razonamientos que el lema anterior. $\square$

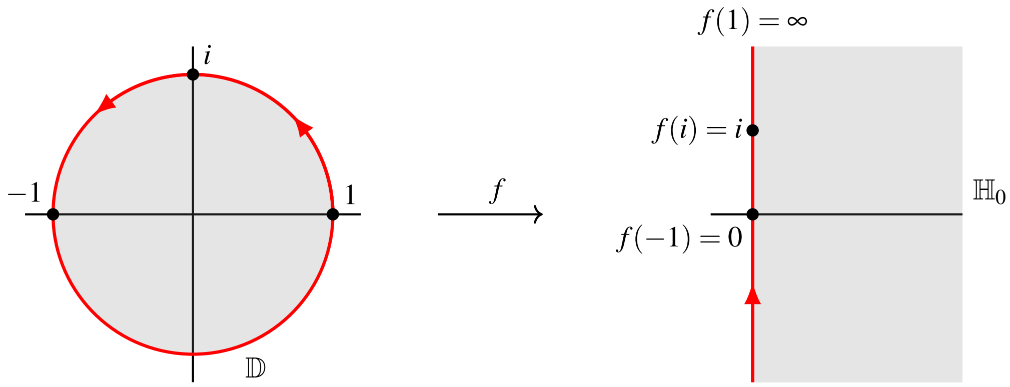

Figura 1.1: $f(z) = (1+z)/(1-z)$ transforma $\mathbb{D}$ en $\mathbb{H}_0$

Capítulo 2

Teorema de Müntz-Szász

En este capítulo seguiremos esencialmente la exposición de [6, teor. 15.26].

2.1. Teorema de Müntz-Szász clásico

Notación y observación. Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, llamaremos $h_z\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ a la función dada por

$$h_z(t) = \begin{cases} e^{z \log t} = t^z & \text{si } t \in (0,1], \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Estas h_z tienen las siguientes propiedades:

- Para cada $z \in \mathbb{H}_0$, h_z es continua: el único punto dudoso es $t = 0$, y $\left|e^{z \log t}\right| = e^{\operatorname{Re} z \log t}$ tiende a $0 = h_z(0)$ cuando $t \to 0^+$ porque $\operatorname{Re} z > 0$.
- Para cada $z \in \mathbb{H}_0$, se cumple $|h_z(t)| \leq 1$ para todo $t \in [0,1]$: dados $z \in \mathbb{H}_0$, $t \in (0,1]$, se tiene que $|h_z(t)| = |t^z| = e^{\operatorname{Re} z \log t} \leq 1$, ya que $\operatorname{Re} z > 0$, $\log t \leq 0$.
- Para cada $z \in \mathbb{H}_{-1} \setminus \{0\}$, h_z es integrable: para cada $t \in (0,1]$, $|h_z(t)| = e^{\operatorname{Re} z \log t} = t^{\operatorname{Re} z}$, que es integrable porque $\operatorname{Re} z > -1$.

Por conveniencia, llamaremos $h_0\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ a la función constante 1, que es continua, integrable y está acotada en módulo por 1.

Proposición 2.1. *Sea $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos distintos tal que $\inf\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = +\infty$, y sea $\mu \in M([0,1])$. Si el funcional $T_\mu \in C([0,1])^*$ del teorema 1.11 de Riesz-Markov-Kakutani cumple $T_\mu\left(t^{\lambda_n}\right) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $T_\mu(t^k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Consideremos la función $f\colon \mathbb{H}_0 \to \mathbb{C}$ definida mediante

$$f(z) = T_\mu(h_z) = \int_0^1 t^z \, d\mu(t).$$

Nuestra hipótesis es que $f(\lambda_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y queremos demostrar que $f(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dividimos la demostración en pasos:

■ *f es continua.* Podemos suponer $\|\mu\| \neq 0$, pues de lo contrario $f = 0$, que es trivialmente continua. Fijemos $z_0 \in \mathbb{H}_0$. Por la proposición 1.9, para cada $z \in \mathbb{H}_0$ se tiene que

$$f(z) - f(z_0) = \int_0^1 (t^z - t^{z_0})\, d\mu(t),$$

con lo que, de nuevo por la proposición 1.9,

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \int_0^1 |t^z - t^{z_0}|\, d|\mu|(t).$$

Por el lema 1.2, al ser $(t,z) \in [0,1] \times \mathbb{H}_0 \mapsto t^z \in \mathbb{C}$ continua (esto se razona de manera semejante a la continuidad de las h_z), dado $\varepsilon > 0$ existirá $\delta > 0$ tal que si $z \in \mathbb{H}_0$ cumple $|z - z_0| < \delta$, entonces $|t^z - t^{z_0}| < \varepsilon/\|\mu\|$ para todo $t \in [0,1]$, y en consecuencia

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \int_0^1 \frac{\varepsilon}{\|\mu\|}\, d|\mu|(t) = \frac{\varepsilon}{\|\mu\|} |\mu|([0,1]) = \varepsilon.$$

Se sigue que f es continua en z_0.

■ *f es holomorfa.* Como f es continua, por el teorema de Morera bastará ver que la integral de f a lo largo de cualquier camino cerrado con soporte en $\mathbb{H}_0$ es nula. Sea $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un tal camino. Entonces, si $d\mu = h\,d|\mu|$ es una descomposición polar de μ,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \left(\int_0^1 t^z\, d\mu(t) \right) dz = \int_a^b \left(\int_0^1 t^{\gamma(s)} \gamma'(s) h(t)\, d|\mu|(t) \right) ds.$$

Dado que $|h| \equiv 1$ (teorema 1.7) y $\left|h_{\gamma(s)}\right| \leq 1$ (observación inicial de este capítulo), $\left|t^{\gamma(s)}\gamma'(s)h(t)\right| = \left|h_{\gamma(s)}(t)\gamma'(s)\right| \leq |\gamma'(s)|$ para todos $s \in [a,b]$, $t \in [0,1]$, con lo que

$$\int_a^b \left(\int_0^1 \left| t^{\gamma(s)} \gamma'(s) h(t) \right| d|\mu|(t) \right) ds \leq \int_a^b \left|\gamma'(s)\right| |\mu|([0,1])\, ds = \|\mu\| \operatorname{long}(\gamma) < +\infty.$$

Así, por el teorema de Fubini,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 \left(\int_a^b t^{\gamma(s)} \gamma'(s) h(t)\, ds \right) d|\mu|(t) = \int_0^1 \left(\int_\gamma t^z\, dz \right) d\mu(t) = \int_0^1 0\, d\mu(t) = 0.$$

La penúltima igualdad se debe al teorema 1.16 de Cauchy: $\mathbb{H}_0$ es simplemente conexo y $t^z \in \mathscr{H}(\mathbb{H}_0)$ cualquiera que sea $t \in [0,1]$.

■ *f está acotada.* Aplicando la proposición 1.9 y la observación inicial de este capítulo, para cada $z \in \mathbb{H}_0$ se tiene que

$$|f(z)| \leq \int_0^1 |h_z(t)|\, d|\mu|(t) \leq \int_0^1 d|\mu|(t) = \|\mu\|.$$

■ *$f(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.* Consideremos la función $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = f\left(\frac{1+z}{1-z} \right),$$

que está bien definida por el lema 1.24. Esta función g es holomorfa por composición y está acotada por estarlo f. Además, de nuevo por el lema 1.24, la hipótesis de que $f(\lambda_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se traduce en que $g(\alpha_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siendo

$$\alpha_n = \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}.$$

Probemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n+1-|\lambda_n-1|}{\lambda_n+1}=+\infty:$$

Sea $S=\{n\in\mathbb{N}:0<\lambda_n<1\}$. Si S es infinito (necesariamente numerable), entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)\geq\sum_{\substack{n=1\\0<\lambda_n<1}}^{\infty}(1-|\alpha_n|)=\sum_{\substack{n=1\\0<\lambda_n<1}}^{\infty}\frac{2\lambda_n}{\lambda_n+1}\geq\sum_{\substack{n=1\\0<\lambda_n<1}}^{\infty}\lambda_n=+\infty,$$

dado que por la infinitud del conjunto este último sumatorio es una auténtica serie y, al ser $\operatorname{inf}\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}>0$, la subsucesión de los λ_n con $0<\lambda_n<1$ no puede converger a 0; y si S es finito,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)\geq\sum_{\substack{n=1\\\lambda_n\geq1}}^{\infty}(1-|\alpha_n|)=\sum_{\substack{n=1\\\lambda_n\geq1}}^{\infty}\frac{2}{\lambda_n+1}\geq\sum_{\substack{n=1\\\lambda_n\geq1}}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}=+\infty,$$

pues esta serie no es otra que $\sum_{n=1}^{\infty}1/\lambda_n$, divergente por hipótesis, menos un número finito de sumandos.

Ahora, por el teorema 1.18, debe ser $g(z)=0$ para todo $z\in\mathbb{D}$, y por ende $f(z)=0$ para todo $z\in\mathbb{H}_0$; en particular, $f(k)=0$ para todo $k\in\mathbb{N}$. □

Ya estamos en disposición de demostrar el teorema de Müntz-Szász.

Teorema 2.2 (teorema de Müntz-Szász: caso complejo)**.** *Sea* $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$ *una sucesión creciente de números positivos. Si* $\sum_{n=1}^{\infty}1/\lambda_n=+\infty$*, el conjunto* $H\subseteq C([0,1])$ *de las combinaciones lineales finitas con coeficientes complejos de las funciones*

$$1,t^{\lambda_1},t^{\lambda_2},\ldots,t^{\lambda_n},\ldots$$

es denso en $C([0,1])$ *con la norma* $\|\cdot\|_\infty$*. Si por el contrario* $\sum_{n=1}^{\infty}1/\lambda_n<+\infty$, $t^{\lambda}\notin\overline{H}^{C([0,1])}$ *para ningún* $\lambda>0$ *tal que* $\lambda\notin\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$*, con lo que* H *no es denso en* $C([0,1])$*.*

Demostración. Supongamos primero que $\sum_{n=1}^{\infty}1/\lambda_n=+\infty$. Si para algún $k_0\in\mathbb{N}$ fuese $h_{k_0}\notin\overline{H}$, por la proposición 1.4 existiría $T\in C([0,1])^*$ tal que $T\left(h_{\lambda_n}\right)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ pero $T\left(h_{k_0}\right)\neq0$, lo cual contradice la proposición anterior. Así, $h_k\in\overline{H}$ para todo $k\in\mathbb{N}$, y como $\overline{H}$ es subespacio vectorial de $C([0,1])$ (por serlo H) y $h_0\in H\subseteq\overline{H}$, pertenecen a $\overline{H}$ todas las funciones polinómicas con coeficientes complejos definidas en $[0,1]$. La densidad de H en $C([0,1])$ se deduce ahora del corolario 1.14.

Recíprocamente, supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty}1/\lambda_n<+\infty$. Procedamos por etapas:

- *El producto infinito*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-z}{2+\lambda_n+z}$$

define una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{-2-\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Según el teorema 1.22, basta probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|1-\frac{\lambda_n-z}{2+\lambda_n+z}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2+2z}{2+\lambda_n+z}\right|$$

converge uniformemente sobre compactos en $\mathbb{C}\setminus\{-2-\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea K un compacto de dicho conjunto. Ya que todo compacto en $\mathbb{C}$ está acotado, habrá alguna constante $M>0$ tal que $|z|\leq M$ para todo $z\in K$. Por otra parte, dado que $\sum_{n=1}^{\infty}1/\lambda_n<+\infty$, necesariamente $1/\lambda_n\to0$ cuando $n\to\infty$. Y como existe

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n\in[\lambda_1,+\infty],$$

porque $\lambda_{n+1} \geq \lambda_n \geq \lambda_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sólo puede ser $\lambda_n \to +\infty$ cuando $n \to \infty$. En consecuencia, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2+\lambda_n > M$ siempre que $n \geq n_0$, lo que implica que, para estos n,

$$|2+\lambda_n+z| \geq 2+\lambda_n-|z| \geq 2+\lambda_n-M > 0$$

cualquiera que sea $z \in K$. Así, denotando $C = \max_{w\in K} |2+2w|$, resulta que si $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{2+2z}{2+\lambda_n+z}\right| \leq \frac{C}{2+\lambda_n-M} =: M_n$$

para todo $z \in K$. Además, si $n < n_0$,

$$\left|\frac{2+2z}{2+\lambda_n+z}\right| \leq \max_{w\in K}\left|\frac{2+2w}{2+\lambda_n+w}\right| =: M_n$$

para todo $z \in K$. Por último, notar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{1/\lambda_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{C/(2+\lambda_n-M)}{1/\lambda_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{C\lambda_n}{2+\lambda_n-M} = \lim_{n\to\infty}\frac{C}{2/\lambda_n+1-M/\lambda_n} = C < +\infty;$$

en virtud del criterio de comparación por paso al límite, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$, y el criterio M de Weierstrass nos permite concluir que la serie converge uniformemente en K.

■ *El conjunto de ceros en* $\mathbb{C}\setminus\{-2-\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *del producto infinito anterior es* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Es consecuencia inmediata del teorema 1.22.

■ *Para cualquier* $z \in \mathbb{C}$ *con* $\operatorname{Re} z \geq -1$,

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-z}{2+\lambda_n+z}\right| \leq 1.$$

Las funciones f_a del lema 1.25 satisfacen $|f_a(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z \geq -1$, y tomando $a = \lambda_n+1$, se obtiene que, siempre que $\operatorname{Re} z \geq -1$,

$$|f_a(z)| = \left|\frac{\lambda_n-z}{2+\lambda_n+z}\right| \leq 1,$$

luego

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-z}{2+\lambda_n+z}\right| = \lim_{N\to\infty}\left|\prod_{n=1}^{N}\frac{\lambda_n-z}{2+\lambda_n+z}\right| = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left|\frac{\lambda_n-z}{2+\lambda_n+z}\right| \leq \lim_{N\to\infty} 1 = 1.$$

■ *La función* $f\colon \mathbb{C}\setminus\big(\{-2\}\cup\{-2-\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big) \to \mathbb{C}$ *definida mediante*

$$f(z) = \frac{z}{(2+z)^3}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-z}{2+\lambda_n+z}$$

es holomorfa en su dominio y su conjunto de ceros es $\{0\}\cup\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Es consecuencia inmediata de los dos primeros puntos.

■ *La función* $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *dada por* $g(s) = f(-1+is)$ *pertenece a* $L^1(\mathbb{R})$. Como el módulo del producto infinito está mayorado por 1 en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -1\}$,

$$\int_{\mathbb{R}}|f(-1+is)|\,ds \leq \int_{\mathbb{R}}\frac{|-1+is|}{|1+is|^3}\,ds = \int_{\mathbb{R}}\frac{(1+s^2)^{1/2}}{(1+s^2)^{3/2}}\,ds = \int_{\mathbb{R}}\frac{ds}{1+s^2} = \pi < +\infty.$$

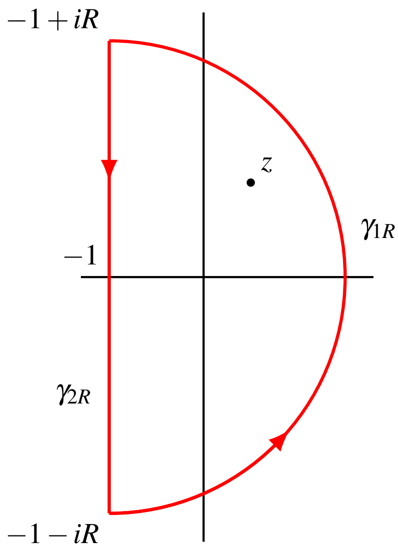

Figura 2.1: El camino Γ_R

- *Para cualquier* $z \in \mathbb{H}_{-1}$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(-1+is)}{1-is+z}\, ds.$$

Fijemos $z \in \mathbb{H}_{-1}$. Para cada $R > |z|+1$, sea Γ_R el camino que se obtiene al unir el arco de la circunferencia de centro -1 y radio R comprendido entre $-1-iR$ y $-1+iR$ (recorrido positivamente) con el segmento de extremos $-1+iR$ y $-1-iR$ (recorrido de arriba abajo); es decir, $\Gamma_R = \gamma_{1R} \cup (-\gamma_{2R})$ con

$$\gamma_{1R} \colon s \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto -1+Re^{is} \in \mathbb{C}, \quad \gamma_{2R} \colon s \in [-R,R] \mapsto -1+is \in \mathbb{C}$$

(ver la figura 2.1). Obsérvese que, al ser $R > |z|+1$, $|z-(-1)| \leq |z|+1 < R$, por lo que z queda dentro de Γ_R.

Ahora, aplicando la fórmula 1.17 de Cauchy con $\Omega = \mathbb{H}_{-3/2}$, se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f(-1+Re^{is})}{-1+Re^{is}-z} Re^{is}\, ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \frac{f(-1+is)}{1-is+z}\, ds. \tag{2.1}$$

Llamemos I_{1R} al primer sumando e I_{2R} al segundo, y estudiemos cómo se comporta cada uno de ellos cuando $R \to +\infty$. Como $|f(z)| \leq |z|/|2+z|^3$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z \geq -1$,

$$|I_{1R}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\left|f(-1+Re^{is})\right|}{\left|-1+Re^{is}-z\right|} R\, ds \leq \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\left|-1+Re^{is}\right|}{\left|1+Re^{is}\right|^3 \left|-1+Re^{is}-z\right|}\, ds.$$

Además,

$$\left|-1+Re^{is}\right| \leq R+1, \quad \left|1+Re^{is}\right| \geq R-1 \quad \text{y} \quad \left|-1+Re^{is}-z\right| \geq R-|1+z|,$$

de modo que, para todo R suficientemente grande,

$$|I_{1R}| \leq \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R+1}{(R-1)(R-|1+z|)}\, ds = \frac{R(R+1)}{2(R-1)^3(R-|1+z|)} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0.$$

Tenemos así que el primer sumando tiende a 0. Con respecto al segundo, notar que puede reescribirse como

$$I_{2R} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(-1+is)}{1-is+z} \chi_{[-R,R]}(s)\, ds.$$

Es claro que, cualquiera que sea $s \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{f(-1+is)}{1-is+z}\chi_{[-R,R]}(s) = \frac{f(-1+is)}{1-is+z},$$

y dado que el punto de la recta $\{-1+ir : r \in \mathbb{R}\}$ más próximo a z es $-1+i\operatorname{Im} z$,

$$|1-is+z| = |z-(-1+is)| \geq |z-(-1+i\operatorname{Im} z)| = |\operatorname{Re} z+1| = \operatorname{Re} z+1 > 1,$$

de donde se sigue que

$$\left|\frac{f(-1+is)}{1-is+z}\chi_{[-R,R]}(s)\right| \leq |f(-1+is)| = |g(s)| \in L^1(\mathbb{R});$$

así, por el teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{R\to+\infty} I_{2R} = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(-1+is)}{1-is+z}\, ds.$$

Finalmente, haciendo $R \to +\infty$ en (2.1) se llega a la expresión deseada.

■ *Existe $\mu \in M([0,1])$ tal que*

$$f(z) = \int_0^1 h_z(t)\, dt = \int_0^1 t^z\, d\mu(t) \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{H}_{-1}.$$

Observar que para cualesquiera $z \in \mathbb{H}_{-1}$, $s \in \mathbb{R}$ es $\operatorname{Re}(z-is) = \operatorname{Re} z > -1$, por lo que

$$\int_0^1 t^{z-is}\, dt = \left[\frac{t^{z-is+1}}{z-is+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{1-is+z}.$$

Gracias a esta igualdad, la representación integral de f en $\mathbb{H}_{-1}$ hallada en el punto anterior se puede reescribir como

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \left[\int_{\mathbb{R}} h_{z-is}(t) f(-1+is)\, ds\right] dt. \tag{2.2}$$

El intercambio efectuado en el orden de integración es válido porque, al ser $z-is \in \mathbb{H}_{-1}$ y $g \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_0^1 \left[\int_{\mathbb{R}} |h_{z-is}(t) f(-1+is)|\, ds\right] dt = \int_0^1 |h_{z-is}(t)|\, dt \int_{\mathbb{R}} |g(s)|\, ds < +\infty.$$

Notar ahora que $h_{z-is}(t) = h_z(t)G(t,s)$ para todos $t \in [0,1]$, $s \in \mathbb{R}$, siendo $G\colon [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la función dada por $G(t,s) = e^{-is\log t}$ cuando $t \neq 0$ y por $G(t,s) = 0$ cuando $t = 0$. En términos de esta G, (2.2) se expresa como

$$f(z) = \int_0^1 h_z(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(s)G(t,s)\, ds\right] dt \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H}_{-1}.$$

Para terminar, sea $F\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ la función que hace corresponder a cada t el valor entre corchetes de la fórmula anterior, de forma que

$$f(z) = \int_0^1 h_z(t)F(t)\, dt \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H}_{-1}.$$

Puesto que $F(t) = \hat{g}(\log t)/2\pi$ para todo $t \in (0,1]$, siendo $\hat{g}$ la transformada de Fourier de g, y que las transformadas de Fourier de funciones integrables en $\mathbb{R}$ están acotadas, F es integrable en $[0,1]$, por lo que podemos tomar $d\mu(t) = F(t)\, dt$ (proposición 1.10). Y ciertamente $\mu \in M([0,1])$, ya que toda medida de Borel finita es regular.

■ *No pertenece a* $\overline{H}^{C([0,1])}$ *ninguna función* t^λ *con* $\lambda > 0$ *tal que* $\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$. Sea $T_\mu \in C([0,1])^*$ el funcional que asocia a μ el teorema 1.11 de Riesz-Markov-Kakutani; es decir,

$$T_\mu(h) = \int_0^1 h(t)\, d\mu(t) \quad \text{para todo } h \in C([0,1]).$$

Sea $\lambda > 0$ tal que $\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$. Es evidente que $T_\mu\left(t^{\lambda_n}\right) = f(\lambda_n) = 0$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$ y que $T_\mu(1) = f(0) = 0$, luego $T_\mu(H) = \{0\}$, por linealidad. Pero $T_\mu\left(t^\lambda\right) = f(\lambda) \neq 0$, y el resultado se sigue de la proposición 1.4. □

Corolario 2.3 (teorema de Müntz-Szász: caso real)**.** *Sea* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ *una sucesión creciente de números positivos. Si* $\sum_{n=1}^\infty 1/\lambda_n = +\infty$, *el conjunto* $H_\mathbb{R} \subseteq C_\mathbb{R}([0,1])$ *de las combinaciones lineales finitas con coeficientes reales de las funciones*

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots, t^{\lambda_n}, \ldots$$

es denso en $C_\mathbb{R}([0,1])$ *con la norma* $\|\cdot\|_\infty$. *Si por el contrario* $\sum_{n=1}^\infty 1/\lambda_n < +\infty$, $t^\lambda \notin \overline{H_\mathbb{R}}^{C_\mathbb{R}([0,1])}$ *para ningún* $\lambda > 0$ *tal que* $\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, *con lo que* H *no es denso en* $C_\mathbb{R}([0,1])$.

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=1}^\infty 1/\lambda_n = +\infty$ y sea $f \in C_\mathbb{R}([0,1])$. Como f es en particular una función compleja, por el teorema precedente, para cada $\varepsilon > 0$ existirá $g \in H$ tal que $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$ o, equivalentemente, $|f(t)-g(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [0,1]$, de donde se sigue que

$$|f(t) - \operatorname{Re} g(t)| = |\operatorname{Re}(f(t) - g(t))| \leq |f(t) - g(t)| < \varepsilon$$

para todo $t \in [0,1]$; es decir, $\|f - \operatorname{Re} g\|_\infty < \varepsilon$, con $\operatorname{Re} g \in H_\mathbb{R}$. Concluimos que $H_\mathbb{R}$ es denso en $C_\mathbb{R}([0,1])$.

Si $\sum_{n=1}^\infty 1/\lambda_n < +\infty$, para cada $\lambda > 0$ tal que $\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, $t^\lambda \notin \overline{H}^{C([0,1])}$. Y puesto que

$$\overline{H_\mathbb{R}}^{C_\mathbb{R}([0,1])} = \overline{H_\mathbb{R}}^{C([0,1])} \cap C_\mathbb{R}([0,1]) \subseteq \overline{H_\mathbb{R}}^{C([0,1])} \subseteq \overline{H}^{C([0,1])},$$

menos aún puede ser $t^\lambda \in \overline{H_\mathbb{R}}^{C_\mathbb{R}([0,1])}$. □

2.2. Teorema de Müntz-Szász en L^p para exponentes estrictamente crecientes

Teorema 2.4. *Sea* $p \in [1,+\infty)$ *y sea* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ *una sucesión creciente de números positivos. Si* $\sum_{n=1}^\infty 1/\lambda_n = +\infty$, *el conjunto* $H \subseteq L^p([0,1])$ *de las combinaciones lineales finitas con coeficientes complejos de las funciones*

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots, t^{\lambda_n}, \ldots$$

es denso en $L^p([0,1])$ *con la norma* $\|\cdot\|_p$. *Si por el contrario* $\sum_{n=1}^\infty 1/\lambda_n < +\infty$, $t^\lambda \notin \overline{H}^{L^p([0,1])}$ *para ningún* $\lambda > 0$ *tal que* $\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, *con lo que* H *no es denso en* $L^p([0,1])$.

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=1}^\infty 1/\lambda_n = +\infty$ y sea $f \in L^p([0,1])$. Es bien conocido que $C([0,1])$ es denso en $L^p([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_p$; por esta razón, para cada $\varepsilon > 0$ existirá $g \in C([0,1])$ tal que $\|f-g\|_p < \varepsilon/2$. Por otro lado, por el teorema 2.2 de Müntz-Szász, H es denso en $C([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, luego habrá alguna función $h \in H$ que verifique $\|g-h\|_\infty < \varepsilon/2$. Finalmente, recordando que $L^\infty([0,1]) \subseteq L^p([0,1])$ y que $\|\varphi\|_p \leq \|\varphi\|_\infty$ para todo $\varphi \in L^\infty([0,1])$,

$$\|f-h\|_p \leq \|f-g\|_p + \|g-h\|_p \leq \|f-g\|_p + \|g-h\|_\infty < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

lo que prueba la densidad de H en $L^p([0,1])$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n < +\infty$, llamemos $\mu \in M([0,1])$ a la medida de la parte final de la demostración del teorema 2.2, que cumple $d\mu(t) = F(t)\,dt$ para una función $F\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ acotada, y sea $q \in (1,+\infty]$ el exponente conjugado de p. Como $L^\infty([0,1]) \subseteq L^q([0,1])$, $F \in L^q([0,1])$, y por la desigualdad de Hölder, cualquiera que sea $f \in L^p([0,1])$ se tiene que $fF \in L^1([0,1])$ y que

$$\left| \int_0^1 f(t)F(t)\,dt \right| \leq \|F\|_q \|f\|_p. \tag{2.3}$$

Por lo primero, la aplicación $T\colon L^p([0,1]) \to \mathbb{C}$ dada por

$$T(f) = \int_0^1 f(t)F(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,d\mu(t)$$

está bien definida. Además, es obviamente lineal, y debido a ello (2.3) implica que es continua. Así, $T \in L^p([0,1])^*$, y por la demostración de 2.2 se tiene que $T(H) = \{0\}$ pero $T(t^\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda > 0$ tal que $\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. En virtud de la proposición 1.4, concluimos que estas t^λ no pertenecen a la clausura de H en $L^p([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_p$. □

Con los argumentos empleados en la demostración del corolario 2.3, el teorema anterior se traslada al caso real:

Corolario 2.5. *Sea $p \in [1,+\infty)$ y sea $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ una sucesión creciente de números positivos. Si $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = +\infty$, el conjunto $H_{\mathbb{R}} \subseteq L^p_{\mathbb{R}}([0,1])$ de las combinaciones lineales finitas con coeficientes reales de las funciones*

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots, t^{\lambda_n}, \ldots$$

es denso en $L^p_{\mathbb{R}}([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_p$. Si por el contrario $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n < +\infty$, $t^\lambda \notin \overline{H}^{L^p_{\mathbb{R}}([0,1])}$ para ningún $\lambda > 0$ tal que $\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, con lo que $H_{\mathbb{R}}$ no es denso en $L^p_{\mathbb{R}}([0,1])$.

Capítulo 3

Extensiones del teorema de Müntz-Szász

En esta último capítulo, abordaremos cómo extender los teoremas de Müntz-Szász ya demostrados para $C([0,1])$, $L^1([0,1])$ y $L^2([0,1])$ cuando se elimina la hipótesis de que la sucesión de los exponentes $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ sea estrictamente creciente. Nuestras referencias fundamentales son [2] y [1].

3.1. Espacio L^2

Para probar la generalización del teorema a este caso, necesitaremos el siguiente lema topológico, cuya demostración incluimos aquí al no haber podido encontrar ninguna referencia para ella:

Lema 3.1. *Sea X un espacio métrico. Dada una colección numerable $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de X, cualquiera que sea $x \in X$ se verifica que*

$$\operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{dist}(x, E_n).$$

En particular, si la colección $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es expansiva (esto es, si $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_n \subseteq \ldots$),

$$\operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x, E_n).$$

Demostración. Sea $x \in X$ y denotemos $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Dado que $E_n \subseteq E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{dist}(x,E) \leq \operatorname{dist}(x,E_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se deduce que

$$\operatorname{dist}(x,E) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{dist}(x,E_n).$$

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, existirá $y \in E$ tal que $\operatorname{dist}(x,y) < \operatorname{dist}(x,E) + \varepsilon$ (en efecto, si se tuviese $\operatorname{dist}(x,y) \geq \operatorname{dist}(x,E) + \varepsilon$ para todo $y \in E$, sería $\operatorname{dist}(x,E) \geq \operatorname{dist}(x,E) + \varepsilon$, lo cual es absurdo). Para dicho y, habrá algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y \in E_{n_0}$, y así

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{dist}(x,E_n) \leq \operatorname{dist}(x,E_{n_0}) \leq \operatorname{dist}(x,y) \leq \operatorname{dist}(x,E) + \varepsilon.$$

Hemos probado que

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{dist}(x,E_n) \leq \operatorname{dist}(x,E) + \varepsilon \quad \text{para todo } \varepsilon > 0,$$

lo que implica

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{dist}(x,E_n) \leq \operatorname{dist}(x,E).$$

Si la colección $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es expansiva, entonces la sucesión $(\operatorname{dist}(x,E_n))_{n=1}^{\infty}$ es decreciente (y está minorada), luego existe

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x,E_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{dist}(x,E_n). \qquad \square$$

Teorema 3.2. *Sea $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales distintos dos a dos tal que $\lambda_n > -1/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (de manera que $t^{\lambda_n} \in L^2([0,1])$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Entonces el conjunto $H \subseteq L^2([0,1])$ formado por las combinaciones lineales finitas con coeficientes complejos de las funciones*

$$1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_n}, \ldots$$

es denso en $L^2([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_2$ si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n + 1}{(2\lambda_n+1)^2+1} = +\infty.$$

Demostración. Por el corolario 1.14, el conjunto $P([0,1])$ es denso en $C([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, y puesto que $C([0,1]) \subseteq L^2([0,1])$ y $\|\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty$ para todo $\varphi \in C([0,1])$, $P([0,1])$ es denso en $C([0,1])$ también con la norma $\|\cdot\|_2$. Pero además $C([0,1])$ es denso en $L^2([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_2$, por lo que $P([0,1])$ es denso en $C([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_2$. En consecuencia, H será denso en $L^2([0,1])$ con dicha norma si y sólo si $P([0,1]) \subseteq \overline{H}$, condición que equivale a

$$t^m \in \overline{H} \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}_0, \tag{3.1}$$

ya que la clausura de cualquier subespacio vectorial es subespacio ($\overline{H}$ denota, claro está, la clausura en $\|\cdot\|_2$).

Así pues, basta con probar que para que se satisfaga $(*)$ es necesario y suficiente que diverja la serie del enunciado. Fijemos $m \in \mathbb{N}$ con $m \notin \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, llamemos $H_n \subseteq L^2([0,1])$ al conjunto formado por las combinaciones lineales finitas con coeficientes complejos de $1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_n}$. Se sabe que

$$\operatorname{dist}_2(t^m, H_n) = \frac{m}{(m+1)\sqrt{1+2m}} \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{m-\lambda_j}{m+\lambda_j+1} \right| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

(consúltese por ejemplo [3, pág. 173]), lo cual, dado que la sucesión $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ es expansiva y $\cup_{n=1}^{\infty} H_n = H$, por el lema precedente implica que

$$\operatorname{dist}_2(t^m, H) = \frac{m}{(m+1)\sqrt{1+2m}} \prod_{j=1}^{\infty} \left| \frac{m-\lambda_j}{m+\lambda_j+1} \right|,$$

y como los puntos de la clausura de un conjunto son los que están a distancia 0 de él, se tiene que

$$t^m \in \overline{H} \iff \prod_{j=0}^{\infty} \left| \frac{m-\lambda_j}{m+\lambda_j+1} \right| = 0.$$

Observar ahora que si para cada $j \in \mathbb{N}$ ponemos

$$a_j = \begin{cases} \dfrac{2m+1}{m+\lambda_j+1} & \text{si } \lambda_j > m, \\[2ex] \dfrac{2\lambda_j+1}{m+\lambda_j+1} & \text{si} -1/2 < \lambda_j < m, \end{cases}$$

entonces

$$0 < a_j < 1 \quad \text{y} \quad \left| \frac{m-\lambda_j}{m+\lambda_j+1} \right| = 1 - a_j \qquad \text{para todo } j \in \mathbb{N},$$

y en virtud de la proposición 1.21,

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left|\frac{m-\lambda_j}{m+\lambda_j+1}\right| = \prod_{j=1}^{\infty}(1-a_j) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j = +\infty.$$

La divergencia de $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ evidentemente equivale a

$$\sum_{\substack{j=1\\ \lambda_j>m}}^{\infty} \frac{2m+1}{m+\lambda_j+1} = +\infty \quad \text{ó} \quad \sum_{\substack{j=1\\ -1/2<\lambda_j<m}}^{\infty} \frac{2\lambda_j+1}{m+\lambda_j+1} = +\infty. \tag{3.2}$$

Y como para todo $j \in \mathbb{N}$ se verifican las acotaciones

$$\begin{cases} \dfrac{2m+1}{2\lambda_j+1} \leq \dfrac{2m+1}{m+\lambda_j+1} \leq \dfrac{2(2m+1)}{2\lambda_j+1} & \text{si } \lambda_j > m, \\[2ex] \dfrac{2\lambda_j+1}{2m+1} \leq \dfrac{2\lambda_j+1}{m+\lambda_j+1} \leq \dfrac{2\lambda_j+1}{m+1/2} & \text{si } -1/2 < \lambda_j < m, \end{cases}$$

la condición (3.2) equivale a

$$\sum_{\substack{j=1\\ \lambda_j>m}}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_j+1} = +\infty \quad \text{ó} \quad \sum_{\substack{j=1\\ -1/2<\lambda_j<m}}^{\infty} (2\lambda_j+1) = +\infty, \tag{3.3}$$

lo que a su vez es cierto si y sólo si la serie del enunciado diverge. En efecto:

Escribamos, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$b_j = \begin{cases} \dfrac{1}{2\lambda_j+1} & \text{si } \lambda_j > m, \\[2ex] 2\lambda_j+1 & \text{si } -1/2 < \lambda_j < m. \end{cases}$$

Es inmediato que

$$\frac{2\lambda_j+1}{(2\lambda_j+1)^2+1} \leq b_j \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N},$$

por lo que si la serie del enunciado diverge, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ también, y al ser ésta la suma de las dos series de (3.3), alguna de ellas ha de divergir.

Recíprocamente, al tenerse que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\lambda_j+1}{(2\lambda_j+1)^2+1} \geq \sum_{\substack{j=1\\ \lambda_j>m}}^{\infty} \frac{2\lambda_j+1}{(2\lambda_j+1)^2+1} \geq \frac{(2m+1)^2}{(2m+1)^2+1} \sum_{\substack{j=1\\ \lambda_j>m}}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_j+1}$$

(la última desigualdad se debe a que $s \in [0,+\infty) \mapsto s^2/(s^2+1)$ es creciente) y que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\lambda_j+1}{(2\lambda_j+1)^2+1} \geq \sum_{\substack{j=1\\ -1/2<\lambda_j\leq m}}^{\infty} \frac{2\lambda_j+1}{(2\lambda_j+1)^2+1} \geq \frac{1}{(2m+1)^2+1} \sum_{\substack{j=1\\ -1/2<\lambda_j\leq m}}^{\infty} (2\lambda_j+1),$$

si alguna de las series de (3.3) diverge, la del enunciado también.

En definitiva, hemos probado que, dado $m \in \mathbb{N}$ con $m \notin \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $t^m \in \overline{H}$ si y sólo si la serie del enunciado diverge; es decir, que se cumple (3.1) si y sólo si la serie del enunciado diverge, como queríamos demostrar. $\square$

3.2. Espacio de las funciones continuas

En esta sección necesitaremos la desigualdad de Newman; su demostración, que es laboriosa, puede encontrarse en [1, teor. 14].

Teorema 3.3 (desigualdad de Newman). *Sea $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos distintos dos a dos. Entonces, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, se verifica que*

$$\|tp'(t)\|_\infty \leq 11(1+\lambda_1+\cdots+\lambda_n)\|p\|_\infty \quad \textit{para todo } p \in H_n = \mathbb{C}\langle 1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_n}\rangle.$$

Teorema 3.4. *Sea $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos distintos dos a dos. Entonces el conjunto $H \subseteq C([0,1])$ formado por las combinaciones lineales finitas con coeficientes complejos de las funciones*

$$1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_n}, \ldots$$

es denso en $C([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2+1} = +\infty.$$

Demostración. Dividimos la demostración en varios casos:

CASO 1: $\inf\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} > 0$. Supongamos primero que la serie del enunciado del teorema diverge. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_n^2+1} \leq \frac{1}{\lambda_n}, \quad \text{también} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty.$$

Si H no fuese denso en $C([0,1])$, según la proposición 1.4, habría algún funcional no nulo $T \in C([0,1])^*$ tal que $T(H) = \{0\}$. En particular, se tendría $T(t^{\lambda_n}) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y como $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = +\infty$, por la proposición precedente $T(t^k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además $T(1) = 0$, porque $1 \in H$, y por linealidad T se anularía en cualquier polinomio con coeficientes complejos definido en $[0,1]$. Pero el conjunto que forman dichos polinomios es denso en $C([0,1])$ (corolario 1.14), y al ser T continuo, T sería nulo. Esta contradicción nos permite concluir que H es denso en $C([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

La demostración del recíproco la desglosamos en dos subcasos:

SUBCASO 1.1: $\inf\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \geq 1$. Supongamos que H es denso en $C([0,1])$. Entonces cada función t^m con $m \in \mathbb{N}_0$ se puede aproximar en $\|\cdot\|_\infty$ por elementos de H tanto como se desee, y como $\|\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty$ para todo $\varphi \in C([0,1]) \subseteq L^2([0,1])$, otro tanto sucede en $\|\cdot\|_2$. De acuerdo con la condición (3.1) de la demostración del teorema 3.2, esto implica que H es denso en $L^2([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_2$, y por el propio teorema 3.2,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n+1}{(2\lambda_n+1)^2+1} = +\infty.$$

Usando la hipótesis de que $\lambda_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es fácil ver que existe $A > 0$ tal que

$$A\frac{2\lambda_n+1}{(2\lambda_n+1)^2+1} \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

de donde se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2+1} = +\infty.$$

SUBCASO 1.2: $0 < \inf\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} < 1$. Supongamos que H es denso y escribamos $\delta = \inf\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Es claro que el conjunto

$$D = \{a_0 + a_1t^{\alpha_1} + \cdots + a_nt^{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}_0, 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\} \supseteq P([0,1])$$

es un subespacio vectorial denso de $C([0,1])$ y que la aplicación $\tilde{T}\colon D \to C([0,1])$ dada por

$$\tilde{T}\left(a_0 + a_1 t^{\alpha_1} + \cdots + a_n t^{\alpha_n}\right) = a_0 + a_1 t^{\alpha_1/\delta} + \cdots + a_n t^{\alpha_n/\delta}$$

es lineal e isométrica (luego continua) y que verifica $D \subseteq \tilde{T}(D)$. Consecuentemente, por la proposición anterior $\tilde{T}$ se puede extender a una aplicación $T\colon C([0,1]) \to C([0,1])$ lineal, continua y suprayectiva.

Llamemos $\lambda_n^* = \lambda_n/\delta$, $H^* = \mathbb{C}\left\langle 1, t^{\lambda_1^*}, \ldots, t^{\lambda_n^*}, \ldots \right\rangle$. Al ser T lineal, $T(H) = H^*$, y puesto que la imagen de un denso por una aplicación continua y suprayectiva es densa, H^* es denso en $C([0,1])$. Finalmente, como $\inf\{\lambda_n^*\}_{n=1}^{\infty} \geq 1$, por el subcaso ya probado,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^*}{1+(\lambda_n^*)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta\lambda_n}{\delta^2+\lambda_n^2} = +\infty,$$

y ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\frac{\delta\lambda_n}{\delta^2+\lambda_n^2} \leq \frac{\delta^2+1}{2\delta}\frac{\lambda_n}{1+\lambda_n^2}, \quad \text{también} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n^2} = +\infty.$$

CASO 2: $\inf\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} = 0$ y $\lambda_n \to 0$. Por el criterio de comparación por paso al límite, la hipótesis $\lambda_n \to 0$ conlleva que la serie del enunciado tiene el mismo carácter que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$. Así, si aquélla diverge, ésta diverge, y comparándola por paso al límite con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left|\frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}\right|\right),$$

resulta que esta serie también diverge. Por lo tanto, la proposición 2.1 continúa siendo verdadera si se sustituyen las hipótesis de que $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ sea creciente y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ divergente por la divergencia de la serie del enunciado y $\lambda_n \to 0$. Teniendo esto en cuenta, puede repetirse la reducción al absurdo del primer párrafo de la demostración del caso anterior para deducir que H debe ser denso.

Recíprocamente, supongamos que H es denso. Si fuese $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty$, llamando $\eta = 11(1+\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n)$, por la desigualdad de Newman se tendría que

$$\|tp'(t)\|_\infty \leq \eta \|p\|_\infty \quad \text{para todo } p \in H.$$

Pero esto no puede suceder. En efecto: Sea $f(t) = \sqrt{1-t} \in C([0,1])$. Dado que H es denso en $C([0,1])$, para cada $m \in \mathbb{N}$ habrá algún $p \in H$ tal que $|p(t) - f(t)| < 1/m^2$ para todo $t \in [0,1]$. De aquí se sigue que $|p(t)| \geq f(t) - 1/m^2$ y que $-|p(t)| \geq -f(t) - 1/m^2$ para todo $t \in [0,1]$, y por tanto,

$$\begin{aligned} \left|p(1) - p\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\right| &\geq \left|p\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\right| - |p(1)| \geq f\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) - \frac{1}{m^2} - f(1) - \frac{1}{m^2} \\ &= \frac{1}{m} - \frac{2}{m^2}. \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio, existirá $\xi \in (1 - 1/m^2, m)$ tal que

$$p'(\xi) = m^2\left[p(1) - p\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\right],$$

luego

$$\|tp'(t)\|_\infty \geq \left|\xi p'(\xi)\right| \geq \xi m^2 \left|p(1) - p\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\right| \geq \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) m^2 \left(\frac{1}{m} - \frac{2}{m^2}\right) \geq \frac{m-2}{2}.$$

Por otra parte, como $|p(t)| \leq f(t) + 1/m^2 \leq 1 + 1/m^2$ para todo $t \in [0,1]$, $\|p\|_\infty \leq 1 + 1/m^2$, y así

$$\frac{m-2}{2} \leq \|tp'(t)\|_\infty \leq \eta\|p\|_\infty \leq \eta\left(1 + \frac{1}{m^2}\right).$$

En resumidas cuentas, hemos probado que si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty$, entonces

$$\frac{m-2}{2} \leq \eta \left(1 + \frac{1}{m^2}\right) \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N},$$

lo cual es falso, porque el lado izquierdo tiende a $+\infty$ cuando $m \to \infty$ y el derecho a $\eta < +\infty$. Así pues, necesariamente $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$ y, por ende, la serie del enunciado diverge.

Caso 3: Denotamos $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ y Λ' el conjunto de los puntos de acumulación de Λ, y consideramos dos subcasos:

Subcaso 3.1: $\Lambda' \cap (0, +\infty) = \varnothing$. Tenemos tres hipótesis sobre la sucesión $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$:

(1) $\inf \Lambda = 0$

(2) $\lambda_n \not\to 0$

(3) $\Lambda' \cap (0, +\infty) = \varnothing$

La condición (3) implica que en cualquier intervalo $[a,b]$ con $0 < a < b$ hay sólo un número finito de λ_n. En efecto, dado $x \in [a,b]$, $x \notin \Lambda'$, por lo que existe $\delta > 0$ tal que en $(x-\delta, x+\delta)$ hay como mucho un λ_n, y como $\{(x-\delta, x+\delta)\}_{x \in [a,b]}$ es un recubrimiento abierto de $[a,b]$ y éste es compacto, basta un número finito de $(x-\delta, x+\delta)$ para recubrirlo.

Ahora, por (2), existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda_n \geq \varepsilon$ para infinitos λ_n; por (1), $\lambda_n < \varepsilon$ para infinitos λ_n; y según hemos visto, por (3), para cada $M > \varepsilon$, $\lambda_n \in [\varepsilon, M]$ sólo para un número finito de λ_n. Escribiendo entonces $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\lambda_n : \lambda_n < \varepsilon\}$ y $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\lambda_n : \lambda_n \geq \varepsilon\}$, se tiene que $\alpha_k \to 0$ y que $\beta_k \to +\infty$.[1]

Dado que $\{\lambda_n\}_{n=1} = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \sqcup \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\beta_k^2 + 1},$$

por lo que la serie del enunciado diverge si y sólo si lo hace alguna de las otras dos. Y mediante dobles acotaciones como las que ya hemos usado otras veces, se ve que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + 1} = +\infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\beta_k^2 + 1} = +\infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} = +\infty.$$

Así, si $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$, como $\alpha_k \to 0$, por el caso previo $\mathbb{C}\langle 1, t^{\alpha_1}, \ldots t^{\alpha_k}, \ldots \rangle$ es denso en $C([0,1])$, y en consecuencia lo es también el conjunto más grande H. Del mismo modo, si $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\beta_k = +\infty$, por el caso 1, $\mathbb{C}\langle 1, t^{\beta_1}, \ldots t^{\beta_k}, \ldots \rangle$ es denso en $C([0,1])$, y por lo tanto también lo es el conjunto más grande H. Es decir, si la serie del enunciado diverge, H es denso.

Falta probar que si H es denso, necesariamente la serie del enunciado diverge o, lo que es lo mismo, que al menos una serie de entre $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\beta_k$ diverge. Para esta implicación se requiere definir el concepto de polinomio de Chebyshev asociado a un sistema de Chebyshev $(f_k)_{k=0}^{n} \subseteq C(K)$ y establecer varias propiedades suyas nada triviales. Por razones de espacio, no desarrollamos esta parte de la demostración aquí y remitimos al lector interesado a [1, págs. 175-185]. En [3, secc. 3.3] se trata el tema de los polinomios de Chebyshev por extenso.

Subcaso 3.2: $\Lambda' \cap (0, +\infty) \neq \varnothing$. Tomemos $x \in \Lambda' \cap (0, +\infty)$ y $0 < \delta < x$, de modo que $[x-\delta, x+\delta] \subseteq (0, +\infty)$. Es obvio que existe $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \Lambda \cup [x-\delta, x+\delta]$ con los α_k distintos dos a dos. Además, habrá alguna constante $K > 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $\alpha_k/(1+\alpha_k^2) \geq K$, con lo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + 1} = +\infty. \tag{3.4}$$

[1] Recuérdese que $c_n \in \mathbb{R} \to c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ equivale a que de cada entorno de c sólo quede fuera c_n para un número finito de n.

Y como $\inf\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \geq x-\delta > 0$, por el caso 1 el conjunto $\mathbb{C}\langle 1, t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_k}, \dots\rangle$ es denso en $C([0,1])$. En consecuencia, también lo será H, que es más grande, y lo único que tenemos que probar es que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2+1} = +\infty,$$

lo cual se cumple trivialmente, pues esta serie está minorada por la de (3.4). □

3.3. Espacio L^1

Teorema 3.5. *Sea $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales distintos dos a dos tal que $\lambda_n > -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (de manera que $t^{\lambda_n} \in L^1([0,1])$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Entonces el conjunto H de las combinaciones lineales finitas con coeficientes complejos de*

$$1, t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_n}, \dots$$

es denso en $L^1([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_1$ si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n+1}{(\lambda_n+1)^2+1} = +\infty.$$

Demostración. Supongamos que H es denso en $L^1([0,1])$ y llamemos $A = \mathbb{C}\langle 1, t, t^{\lambda_1+1}, \dots, t^{\lambda_n+1}, \dots\rangle$. Es claro que $A \subseteq C([0,1])$. Si logramos probar que A es denso en $C([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, según el teorema 3.4 tendremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n+1}{(\lambda_n+1)^2+1} = +\infty,$$

como queremos. Y efectivamente A es denso en $C([0,1])$:

Para cada $m \in \mathbb{N}_0$, $x^m \in L^1([0,1])$, luego, dado $\varepsilon > 0$, existirá $p \in H$ tal que $\|x^m - p(x)\|_1 < \varepsilon$. Definiendo $q\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mediante

$$q(t) = \int_0^t p(x)\,dx,$$

se tiene que $q \in A$ y que

$$\left|\frac{t^{m+1}}{m+1} - q(t)\right| = \left|\int_0^t x^m\,dx - \int_0^t p(x)\,dx\right| \leq \int_0^t |x^m - p(x)|\,dx \leq \|x^m - p(x)\|_1 < \varepsilon$$

para todo $t \in [0,1]$, con lo que

$$\left\|\frac{t^{m+1}}{m+1} - q(t)\right\|_\infty < \varepsilon.$$

Hemos visto que $t^{m+1}/(m+1)$ pertenece a la clasura de A en $C([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Así, dicha clausura contiene a $P([0,1])$, y como este conjunto es denso en $C([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, A también.

Recíprocamente, supongamos que la serie del enunciado diverge. Si H no fuese denso en $L^1([0,1])$, por el corolario 1.4 y el teorema 1.12, existiría $0 \neq h \in L^\infty([0,1])$ de forma que el funcional $T_h \in L^1([0,1])^*$ se anulase en H; esto es,

$$T_h(p) = \int_0^1 p(t)h(t)\,dt = 0 \quad \text{para todo } p \in H.$$

Consideremos la función $f\colon \mathbb{H}_{-1} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \int_0^1 t^z h(t)\, dt,$$

que es holomorfa y está acotada (razónese de modo similar a como se hizo en la demostración de 2.1). La transformación de Möbius $z \mapsto 2z/(1-z)$ aplica biyectivamente $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{H}_{-1}$, por lo que la función $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = f\left(\frac{2z}{1-z}\right)$$

está bien definida, es holomorfa, está acotada y cumple $g(\alpha_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siendo

$$\alpha_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + 2}.$$

Y como la divergencia de la serie del enunciado implica la de

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|)$$

(por mayoración), en virtud del teorema 1.18 concluimos que g es nula en $\mathbb{D}$. Por tanto, f es nula en $\mathbb{H}_{-1}$, y en particular,

$$f(k) = \int_0^1 t^k h(t)\, dt = T_h(t^k) = 0.$$

Por linealidad, T_h se anula en todo $P([0,1])$, y al ser este conjunto denso en $L^1([0,1])$ y T_h continuo, T_h ha de ser nulo. Se sigue de esta contradicción que H es denso en $L^1([0,1])$. $\square$

Nota. Todos los teoremas de este capítulo se trasladan a los espacios sobre $\mathbb{R}$ como se mostró en el capítulo 2.

Bibliografía

[1] **Almira, José María:** *Müntz Type Theorems I*. Surveys in Approximation Theory 3, pp. 152-194, 2007. `https://arxiv.org/pdf/0710.3570.pdf` (consultada el 3 de junio de 2019).

[2] **Borwein, Peter; Erdélyi, Tamás:** *The Full Müntz Theorem in* $C[0,1]$ *and* $L_1[0,1]$. Journal of the London Mathematical Society 54, pp. 102-110, 1996. `https://pdfs.semanticscholar.org/a856/08402bfcc3a80dfc0e934a0e7eb0be8dcb0f.pdf` (consultada el 27 de mayo de 2019).

[3] **Borwein, Peter; Erdélyi, Tamás:** *Polynomials and Polynomial Inequalities* (primera edición). Springer-Verlag, 1995.

[4] **Conway, John B.:** *Functions of One Complex Variable* (segunda edición). Springer-Verlag, 1978.

[5] **Rudin, Walter:** *Functional Analysis* (segunda edición). McGraw Hill, 1991.

[6] **Rudin, Walter:** *Real and Complex Analysis* (tercera edición). McGraw Hill, 1987.