ESPACIOS DE HARDY

Roberto Solera Sánchez
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Mario Pérez Riera
24 de junio de 2019

Abstract

Hardy Spaces were named after George Harold Hardy one of the great and more peculiar mathematicians of all times. During the 20th century he became worldwide known because of being Ramanujan's tutor and a curious thinker. But in the world of mathematics, he is also known because of the great collaboration that Littlewood and himself had while being professors in Cambridge. During that time they were able to discover and to succesfully proof several results on mathematical analysis. It's said that this unusual collaboration made the difference in the field of theoretical mathematics.

This paper aims to be an introduction into Hardy spaces, a classical topic in mathematical analysis. In order to do so, we will walk along the path of definitions, propositions and theorems to provide the reader a quick but thorough summary of H^p spaces.

Needs to be said that aiming to provide the reader with a coherent number of results we will mainly follow Duren's book [6] but we will also take into consideration some important results from Conway's [3] and Koosis'[9] books. Nevertheless, we will also refer the reader to other manuals of real and complex analyisis such as [4], [5], [10], [13] for well known theorems.

Trying to be consisting with the lecture notes style of this mathematical dissertation we will start in the first chapter with a quick summary and recapitulation of some definitions and handy-theorems from complex analysis and measure theory.

The first of them if the proper definition of the topic:

Definition. An analytic function f is said to be in H^p if

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p}$$

remains bounded when r goes to 1.

In the second chapter we will explain the main topics of subharmonic functions and their characterization with a 'one step at a time' style.

We will start from the study of Poisson-Stieltjes integrals and the existence of the symmetric derivative under certain conditions. Before arriving to the middle of the chapter we can find a very interesting result on subharmonic functions, that says as follows:

Theorem. A necessary and sufficient condition for a function g to be subharmonic in Ω is that for all $z_0 \in \Omega$ there exists $\rho_0 > 0$ verifying $D(z_0, p_0) \subset \Omega$ and

$$g(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + \rho e^{i\theta}) \, d\theta \quad \forall \rho < \rho_0.$$

Before ending the chapter we will show a couple of results on subordination and convex functions that will allow us to prove that $M_p(r,f)$ is a non decreasing convex function of $\log r$. Furthermore we will prove a Hardy-Littlewood maximal theorem that provides an interesting inequality regarding integrals and norms:

Theorem. Let $u(r,\theta)$ be the Poisson integral of $\varphi \in L^p$, $1 < p \leq \infty$ and $U(\theta) = \sup_{r<1} |u(r,\theta)|$. Then $U \in L^p$ and there exists a constant A_p depending only on p that verifies $\|U\|_p \leq A_p \|\varphi\|_p$.

In the third chapter we will go deeper and present the characterization and factorization of the functions that live in H^p and in the Nevanlinna class using results from inner and outer functions and measure theory. Keeping in mind the definition:

Definition. An analytic function $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ belongs to the Nevanlinna class N if the integrals:

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta$$

are bounded for $r < 1$.

Within this chapter we will work to find easier sufficient conditions for a function to be in N, one of those is the following .

Theorem. An analytic function $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ belongs to the Nevanlinna class N if and only if f is a quotient of two bounded analytic functions.

Being aware of this result we will arrive at a more precise factorization theorem that says as follows:

Theorem. Every function $0 \neq f \in H^p$ can be expressed as a product of a Blaschke product and a function $g \in H^p$ without zeros in $\mathbb{D}$. The analogous result for the Nevanlinna class is also true.

This result and several others on Blaschke products will give the reader an idea of how precise we can be when factoring a H^p function. Among these results we can find a proof of a version of the complex variable Fatou's theorem:

Theorem. For each function $f \in N$, the radial limit $f(e^{i\theta})$ exists almost everwhere with respect to the Lebesgue measure and $\log|f(e^{i\theta})|$ is in $L^1(\mathbb{T})$ unless $f \equiv 0$. Furthermore, if $f \in H^p$ for some $p > 0$ then $f(e^{i\theta}) \in L^p(\mathbb{T})$.

We also come across with a theorem that remind us of similar others of measure theory, it reads as follows:

Theorem. Let $0 < p < \infty$ and $f \in H^p$, then:

$$\lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p \, d\theta = 0.$$

Before ending this dissertation we will give a thorough proof of the main factorization result that states as follows:

Theorem. If $1 \leq p \leq \infty$ and $f \in H^p$, then $f = cB\phi F$, where c is a constant verifying $|c| = 1$, B a Blaschke product, ϕ a singular inner function and F an outer function in H^p. The converse is also true.

Finally, after having arrived to our main goal of this mathematical dissertation and having given the reader an introduction to H^p spaces we end this paper with a small taste of the wonderful topic that harmonic majorants are. Let's remaind what a harmonic majorant is:

Definition. A function $g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ it said to have an harmonic majorant in $\mathbb{D}$ if there exists a harmonic function U in $\mathbb{D}$ verifying $g(z) \leq U(z)$ for all $z \in \mathbb{D}$. Such function U is called a harmonic majorant.

Among all the results on armonic majorants that there are, we picked one of Duren's book, that says as follows:

Theorem. Let $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, then $f \in H^p$ for some $0 < p < \infty$ if and only if $|f|^p$ has a harmonic majorant $\mathbb{D}$.

Índice general

Capítulo 1

Introducción y primeros conceptos

Introducción

En este trabajo vamos a realizar una introducción a los espacios de Hardy desde el punto de vista de la variable compleja, concentrándonos en describir las funciones que pertenecen a dichos espacios, sin entrar en los aspectos del análisis funcional.

Comenzaremos enunciando resultados previos de análisis real y complejo, posteriormente estudiaremos propiedades de las funciones armónicas y subarmónicas para finalmente, en el capítulo tercero, enunciar y demostrar nuestro objetivo del trabajo, que son los teoremas de factorización.

Primeros conceptos

En este capítulo vamos a enunciar varios resultados conocidos de variable compleja y de teoría de la medida que usaremos en las demostraciones de los siguientes capítulos. Dado que son resultados auxiliares remitimos al lector para las demostraciones a otros manuales.

Definición. Dado $0 < p < \infty$, $0 \leq r < 1$ y f holomorfa en $\mathbb{D}$, llamaremos $M_p(r, f)$ a:

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p}.$$

Además si $p = \infty$, definimos: $M_\infty(r, f) = \max\limits_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|$.

Definición. Si $0 < p \leq \infty$ definimos H^p, el espacio de Hardy de orden p, como el conjunto de las funciones f holomorfas en $\mathbb{D}$ tales que $\sup\limits_{0 \leq r < 1} M_p(r, f) < \infty$.

Observamos que:

a) Si $p = \infty$, H^∞ es el espacio de las funciones holomorfas acotadas en el disco unidad.

b) Por la desigualdad de Hölder es fácil ver que si $0 < p < q < \infty$ se tiene $H^\infty \subset H^q \subset H^p$.

c) Análogamente se puede definir la clase h^p sustituyendo en la definición de H^p la condición de holomorfía por la condición de ser armónica [6, p. 2].

Definición. Se llama núcleo de Poisson a la siguiente expresión :

$$P(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}, \, 0 \leq r < 1, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Definición. Dada una función $u : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$, se llama integral de Poisson de u a la siguiente expresión :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)u(e^{it})\,dt.$$

Y dada una función μ de variación acotada en $\mathbb{T}$, se llama integral de Poisson-Stieltjes a:

$$u(z) = u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,d\mu(t).$$

Proposición 1.1. *Si μ es una función de variación acotada en $\mathbb{T}$, entonces su integral de Poisson-Stieltjes es armónica.*

Definición. Dado un abierto no vacío $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, una función $u : \Omega \to \mathbb{C}$ continua, se dice que u verifica la propiedad del valor medio en Ω, si $\forall z \in \Omega$, $\exists \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $r_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n \to 0$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + r_n e^{it})\,dt, \quad n = 1,2,\dots$$

Lema 1.2 (propiedad del valor medio)**.** *Si u es armónica entonces verifica la propiedad del valor medio.*

La demostración se puede encontrar en [13, p. 268]. La interpretación de este resultado nos dice que el valor de $u(z)$ es el valor medio de u en las circunferencias de centro z y radio r_n.

Lema 1.3 (propiedades del núcleo de Poisson)**.** *Se verifica lo siguiente:*

a) $P(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in\theta}$, $0 < r < 1$, $\quad \theta \in \mathbb{R}$.

b) $P(r,\theta) > 0$, $0 < r < 1$.

c) $P(r,\theta + 2\pi) = P(r,\theta)$, $0 < r < 1$, $\quad \theta \in \mathbb{R}$.

d) $\int_0^{2\pi} P(r,\theta)d\theta = 2\pi$, $0 < r < 1$.

La demostración se encuentra en [9, p. 7].

Definición. Se dice que $\{K_N\}_{N\in\mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{T})$, es un núcleo de sumabilidad si verifica:

a) Existe una constante $C > 0$ tal que: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_N(t)|\,dt \leq C$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

b) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt = 1$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

c) Para cada $\delta > 0$, $\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |K_N(t)|\,dt \to 0$, cuando $N \to \infty$.

Observamos que con esta definición y cambiando el límite cuando N tiende a infinito por el límite cuando r tiende a 1, se tiene que el núcleo de Poisson es un núcleo de sumabilidad.

Proposición 1.4 (Identidad de aproximación)**.** *Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, y $\{K_N\}_{N\in\mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{T})$ es un núcleo de sumabilidad, entonces:*

$$\|K_N * f - f\|_p \to 0,$$

cuando $N \to +\infty$.

La demostración de este resultado puede encontrarse en [14, p. 62].

Lema 1.5 (teorema de selección de Helly)**.** *Toda sucesión $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformemente acotada de funciones de variación acotada sobre un intervalo compacto I posee alguna subsucesión $\{\mu_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente en todo punto a una función μ de variación acotada. Además si $F : I \to \mathbb{R}$ es continua se verifica:*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_I F(x)\,d\mu_{n_k}(x) = \int_I F(x)\,d\mu(x).$$

Este teorema se encuentra en [6, p. 3].

Definición. Dado un dominio (abierto, conexo no vacío de $\mathbb{C}$) Ω , y $F \subset \mathrm{Hol}(\Omega)$, F es normal si toda sucesión de elementos de F contiene una subsucesión que converge uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω.

Teorema 1.6. *Si Ω es un dominio, $F \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, y es uniformemente acotada en cada compacto de Ω, entonces F es normal.*

La demostración se puede encontrar en [13, p. 319].

Definición. Sea f medible en $\mathbb{R}$, la función maximal de Hardy-Littlewood $f^M(x)$ es:

$$f^M(x) = \sup_{\varepsilon < x < \varepsilon'} \frac{1}{\varepsilon' - \varepsilon} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} |f(t)|\, dt.$$

Observamos que si f es acotada $|f^M(x)| \leq \|f\|_\infty$.

Teorema 1.7 (función maximal de Hardy-Littlewood)**.** *Sea f medible en $\mathbb{R}$. Entonces se tiene la siguiente cota:*

$$m_{f^M}(\lambda) \equiv m\{x \in \mathbb{R} : |f^M(x)| > \lambda\} \leq \frac{2}{\lambda} \int_{f^M(x) > \lambda} |f(x)|\, dx \quad \lambda > 0.$$

La demostración de este resultado se puede encontrar en [9, p. 234-235] siguiendo un argumento de Riesz. En [6, p. 232] puede encontrarse con otra notación.

Teorema 1.8. *Sea f 2π-periódica y sea $f \in L^p(\mathbb{T})$, ($1 < p < \infty$). Si definimos:*

$$F(x) = \sup_{0 < |T| \leq \pi} \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t)\, dt \right|, \forall x \in \mathbb{R},$$

entonces $F \in L^p(\mathbb{T})$ y se tiene que $\|F\|_p \leq C_p \|f\|_p$ con C_p dependiendo solo de p.

La demostración de este resultado se encuentra en [6, p. 234].

Lema 1.9 (fórmula de Jensen)**.** *Sea f distinta de constante y meromorfa en $\overline{D(0,R)}$, sean $\{\alpha_n\}$ los ceros y polos de f en $D(0,R)$ y $n_f(\alpha)$ su orden o multiplicidad. Entonces:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\, d\theta + n_f(0) \log\frac{1}{R} + \sum_{\alpha \in D(0,R)} n_f(\alpha) \log\frac{\alpha}{R} = \log|c_f|,$$

donde c_f es el coeficiente no nulo de menor orden en el desarrollo en serie de potencias de f en torno al cero. Además si 0 no es ni polo ni cero de f, la fórmula anterior se transforma en:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\, d\theta + \sum_{\alpha \in D(0,R)} n_f(\alpha) \log\frac{\alpha}{R} = \log|f(0)|$$

La demostración se puede encontrar en [10, p. 342].

Lema 1.10. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathbb{D}$, entonces los siguientes resultados son equivalentes.*

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|) < \infty$.

b) $\prod_{n=1}^{+\infty} |a_n| < \infty$.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \log|a_n|$ *converge.*

Sobre este resultado se puede saber más en [3, p. 273].

Capítulo 2

Funciones armónicas

En este capítulo vamos a estudiar las funciones armónicas y subarmónicas, pasando por la convexidad logarítmica de $M_p(r,f)$ con el objetivo de probar un teorema maximal de Hardy-Littlewood.

Proposición 2.1. *En el disco unidad las clases de funciones siguientes son iguales.*

a) Integrales de Poisson-Stieltjes.

b) Diferencias de funciones armónicas positivas.

c) El conjunto de las funciones u armónicas en el disco unidad tales que $\sup_{0\leq r<1} M_p(r,u) < \infty$, *es decir,* h^1.

Demostración. Seguimos y ampliamos [6, p. 2-3].

$a) \subseteq b)$ Dada una integral como en la proposición 1.1 siendo μ función de variación acotada, entonces μ es diferencia de dos funciones acotadas no decrecientes [4, adenda-p.105, resultado 5.6.3], $\mu = \mu_2 - \mu_1 \Rightarrow d\mu = d\mu_2 - d\mu_1$ y separando las integrales se tiene lo buscado.

$b) \subseteq c)$ si $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ con u_1, u_2 positivas y armónicas entonces aplicando la desigualdad triangular:

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|\, d\theta \leq \int_0^{2\pi} |u_1(re^{i\theta})|\, d\theta + \int_0^{2\pi} |u_2(re^{i\theta})|\, d\theta = \int_0^{2\pi} u_1(re^{i\theta})\, d\theta + \int_0^{2\pi} u_2(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Aplicando el lema 1.2,

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|\, d\theta \leq 2\pi[u_1(0) + u_2(0)].$$

Entonces $u \in h^1$, pues acabamos de probar que $M_1(r,u)$ permanece acotada cuando r tiende a 1 por la izquierda.

$c) \subseteq a)$ Sea $\mu_r(t) = \int_0^t u(re^{i\theta})\, d\theta$, entonces $\mu_r(0) = 0$ y si $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n < 2\pi$, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |\mu_r(t_k) - \mu_r(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_0^{t_k} u(re^{i\theta})\, d\theta - \int_0^{t_{k-1}} u(re^{i\theta})\, d\theta \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(re^{i\theta})\, d\theta \right| \leq \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|\, d\theta \leq C,\end{aligned}$$

pues $u \in h^1$. Luego las μ_r son funciones de variación acotada, aplicando el lema 1.5 existe $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $r_n \to 1$ y $\mu_{r_n}(t) \to \mu(t)$ siendo μ de variación acotada en $[0,2\pi]$, luego:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\, d\mu &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\, d\mu_{r_n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t) u(r_n e^{it})\, dt = \lim_{n\to+\infty} u(r_n z) = u(z).\end{aligned}$$

□

De esta proposición se observa que toda función armónica positiva puede expresarse como integral de Poisson-Stieltjes con respecto a una función no decreciente.

Teorema 2.2 (derivada simétrica)**.** *Sea una integral de Poisson-Stieltjes*

$$u(z)=u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r,\theta-t)\,d\mu(t)$$

donde μ es una medida de variación acotada. Si la derivada simétrica de μ en $\theta_0\in[-\pi,\pi]$ existe, entonces el límite radial $\lim_{r\to 1}u(re^{i\theta})$ existe y coincide con el de la derivada.

Demostración. Seguimos y ampliamos [6, p. 4-5]. Recordemos que la expresión de la derivada simétrica es:

$$D_\mu(\theta_0)=\lim_{t\to 0}\frac{\mu(\theta_0+t)-\mu(\theta_0-t)}{2t}.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\theta_0=0$ (bastaría con hacer una traslación en el dominio para el resto de casos). Llamando $A=D_\mu(0)$ y aplicando la proposición 1.3 tenemos que:

$$u(r)-A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,-t)\,d\mu-A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,t)\,d\mu-A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,t)[d\mu-A\,dt].$$

Integrando por partes $u=P(r,t)$, $du=\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}$, $dv=d\mu(t)-A\,dt$, $v=\mu(t)-At$, llegamos a que:

$$u(r)-A=\frac{1}{2\pi}\Big[P(r,t)(\mu(t)-At)\Big]_{t=-\pi}^{t=\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}(\mu(t)-At)]\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Big[P(r,t)(\mu(t)-At)\Big]_{t=-\pi}^{t=\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma<|t|<\pi}[\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}(\mu(t)-At)]\,dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\gamma}^{\gamma}[\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}(\mu(t)-At)]\,dt,$$

fijando cualquier $\gamma\in(0,\pi)$. Si escribimos $I_\gamma=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\gamma}^{\gamma}\left[\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}(\mu(t)-At)\right]dt$, tenemos que:

$$u(r)-A-I_\gamma=\frac{1}{2\pi}\Big[P(r,t)(\mu(t)-At)\Big]_{t=-\pi}^{t=\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma<|t|<\pi}[\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}(\mu(t)-At)]\,dt.$$

Haciendo cuentas en el primer sumando resulta el siguiente cálculo:

$$\frac{1}{2\pi}\Big[P(r,t)(\mu(t)-At)\Big]_{t=-\pi}^{t=\pi}=P(r,\pi)(\mu(\pi)-A\pi)-P(r,\pi)(\mu(-\pi)+A\pi) \tag{2.1}$$

$$=P(r,\pi)\cdot C=\frac{1-r^2}{(1+r)^2}\cdot C, \tag{2.2}$$

que tiende a 0 cuando $r\to 1^-$.

Además para el segundo sumando, si tomamos γ tal que $0<\gamma<|t|\le\pi$ se tiene:

$$\left|\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\right|=\left|\frac{2r(1-r^2)\operatorname{sen}(t)}{(1-2r\cos(t)+r^2)^2}\right|\le\frac{2r(1-r^2)}{(1-2r\cos(t)+r^2)^2}\le\frac{2r(1-r^2)}{(1-2r\cos(\gamma)+r^2)^2}\to 0$$

si $r\to 1^-$.

Es decir, $u(r)-A-I_\gamma\to 0$ cuando $r\to 1^-$. Más aún, haciendo cuentas con I_γ se tiene:

$$\begin{aligned}
-2\pi\cdot I_\gamma&=\int_{-\gamma}^{\gamma}\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}(\mu(t)-At)\,dt\\
&=\int_{-\gamma}^{0}\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}(\mu(t)-At)\,dt+\int_0^{\gamma}\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}(\mu(t)-At)\,dt\\
&=\int_0^{\gamma}\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}(-\mu(-t)-At)\,dt+\int_0^{\gamma}\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}(\mu(t)-At)\,dt\\
&=\int_0^{\gamma}\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}(\mu(t)-\mu(-t)-2At)\,dt.
\end{aligned}$$

Finalmente despejando:

$$I_\gamma = \frac{1}{\pi}\int_0^\gamma \frac{-\partial P(r,t)}{\partial t}\left(\frac{\mu(t)-\mu(-t)}{2t} - A\right) t\,dt.$$

Recordando la expresión de la derivada simétrica, que suponemos que existe por hipótesis, entonces dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar γ arbitrariamente cerca de cero tal que:

$$\left|\frac{\mu(t)-\mu(-t)}{2t} - A\right| \leq \varepsilon \quad \forall 0 < t \leq \gamma.$$

Acotando se tiene:

$$|I_\gamma| \leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\gamma \left|\frac{-\partial P(r,t)}{\partial t} t\right| dt = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\gamma}^\gamma \left|\frac{-\partial P(r,t)}{\partial t} t\right| dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi \left|\frac{-\partial P(r,t)}{\partial t} t\right| dt. \tag{2.3}$$

Notemos que el último valor absoluto es innecesario pues el integrando es positivo. Entonces quitándolo y aplicando partes $u = t$, $du = 1$, $dv = \frac{\partial P(r,t)}{\partial t}$, $v = P(r,t)$, obtenemos:

$$|I_\gamma| \leq \frac{-\varepsilon}{2\pi}\left(\Big[tP(r,t)\Big]_{t=-\pi}^{t=\pi} - \int_{-\pi}^\pi P(r,t)\,dt\right) \tag{2.4}$$

$$= \frac{-\varepsilon}{2\pi}2\pi(P(r,\pi)-1) = \varepsilon\left(1 - \frac{1-r^2}{(1+r)^2}\right) = \varepsilon\left(\frac{r^2+2r+1-1+r^2}{(1+r)^2}\right) = 2\varepsilon\frac{r}{r+1} < 2\varepsilon. \tag{2.5}$$

Por tanto $u(r) \to A$ si $r \to 1$ y se tiene la igualdad buscada. □

Corolario 2.3. *Si $u \in h^1$, entonces tiene límite radial en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue.*

Una vez caracterizadas las funciones armónicas en función de las integrales de Poisson-Stieltjes, comenzamos a estudiar las funciones subarmónicas.

Definición. Una función g real y continua en un dominio acotado Ω se dice subarmónica si para todo B dominio tal que $\overline{B} \subset \Omega$ y para toda función U armónica en B y continua en $\overline{B}$ tal que $g(z) \leq U(z)$ en ∂B, entonces la desigualdad se mantiene en B. En particular, si existe una función U armónica en B con valores frontera $g(z)$ entonces $g(z) \leq U(z)$ en B.

Teorema 2.4 (caracterización de funciones subarmónicas)**.** *Una condición necesaria y suficiente para que una función g sea subarmónica en Ω es que para cada $z_0 \in \Omega$ exista $\rho_0 > 0$ tal que $D(z_0, p_0) \subset \Omega$ y*

$$g(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0 + \rho e^{i\theta})\,d\theta \quad \forall \rho < \rho_0.$$

Demostración. Seguimos y ampliamos [6, p. 7].

- Necesidad. Sea $B = D(z_0, p_0) \subset \Omega$, y supongamos que existe U armónica en B con valores frontera $g(z)$ y $g(z) \leq U(z)$ en B. Entonces aplicando la propiedad 1.2 y recordando que U y g coinciden en ∂B:
$$g(z_0) \leq U(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(z_0 + \rho e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0 + \rho e^{it})\,dt.$$

- Suficiencia. Supongamos que existe un dominio B tal que $\overline{B} \subset \Omega$ y una función armónica U tal que $g(z) \leq U(z)$ en ∂B; pero $g(z) > U(z)$ en algún sitio de B. Sea $h(z) = g(z) - U(z)$ y $E = \{z \in \overline{B} : h(z) = \max\limits_{w \in \overline{B}} h(w) = M\}$ que está bien definido por el teorema de Weierstrass y porque g, U son reales.

Entonces como por construcción $h(z) \geq 0$ en ∂B se tiene que $E \subset B$. Como E es trivialmente cerrado (igualdad entre funciones continuas) existe $z_0 \in E$ tal que tiene un disco entorno a él no enteramente contenido en E.

Es decir, existe sucesión $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\rho_n \to 0$ y $D(z_0,\rho_n) \subset B$ pero $D(z_0,\rho_n) \not\subset E$. De donde se tiene que $h(z) \leq M$ en $D(z_0,\rho_n)$, con desigualdad estricta en un arco, pues los discos no están enteramente contenidos en E.

Por tanto:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0+\rho_n e^{it})\,dt - U(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0+\rho_n e^{it})\,dt < M$$
$$= h(z_0) = g(z_0) - U(z_0) \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0+\rho_n e^{it})dt < g(z_0).$$

Contradiciendo así el enunciado del teorema, dicha contradicción viene de suponer que $g(z) > U(z)$ en algún sitio de B. Por tanto $g(z) \leq U(z)$ en B y g es subarmónica. □

Observamos que:

a) si f es holomorfa entonces $|f(z)|^p$, $p > 0$ es subarmónica [13, p. 382].

b) si u es armónica entonces $|u(z)|^p$, $p \geq 1$ es subarmónica [6, p. 8].

Ahora con el objetivo de probar la convexidad logarítmica de $M_p(r,f)$, probaremos primero un resultado previo.

Proposición 2.5 (convexidad logarítmica)**.** *Sea g subarmónica en* $\mathbb{D}$ *y sea*

$$m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})\,d\theta \quad \forall 0 \leq r < 1.$$

Entonces $m(r)$ *es no decreciente y función convexa del logaritmo de r, es decir, si*

$$\log r = \alpha \log r_1 + (1-\alpha)\log r_2 \quad 0 < r_1 < r_2 \text{ y } 0 < \alpha < 1,$$

entonces: $\log m(r) \leq \alpha \log m(r_1) + (1-\alpha)\log m(r_2)$ *o equivalentemente* $m(r) \leq m(r_1)^\alpha m(r_2)^{1-\alpha}$.

Demostración. Seguimos y ampliamos [6, p. 9-10].

- No decreciente. Sea $0 \leq r_1 < r_2 < 1$ y $U(z)$ la función armónica en $D(0,r_2)$, continua en $\overline{D(0,r_2)}$ e igual a g en $\partial D(0,r_2)$; la existencia de dicha función es el problema de Dirichlet en el disco, viene explicada visualmente en [12, p. 334] y en [8, p. 226] hay otra demostración. Luego como $g(z) \leq U(z)$ en $\overline{D(0,r_2)}$ se tiene:

$$m(r_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r_1e^{i\theta})\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r_1e^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r_2e^{i\theta})\,d\theta = m(r_2),$$

  donde en la penúltima igualdad hemos aplicado la propiedad 1.2.

- Convexidad. Sea $0 < r_1 < r_2 < 1$ y $U(z)$ la función armónica en $D(0;r_1,r_2)$, continua en $\overline{D(0;r_1,r_2)}$ e igual a g en $\partial D(0,r_2)$ y en $\partial D(0,r_1)$. La existencia de dicha función es el conocido problema de Dirichlet en el anillo que se resuelve en [12, p. 340].

  Entonces:

$$m(r) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})\,d\theta \text{ si } r_1 \leq r \leq r_2.$$

  Por [1, p. 204], sabemos que:

$$U(re^{i\theta}) = b\log r + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (c_k r^k + \overline{c_{-k}} r^{-k})e^{ik\theta}$$

para algunos b, c_k. Además la serie converge absolutamente para cada $re^{i\theta}$ en $D(0;r_1,r_2)$ y uniformemente en los compactos de dicho anillo. Sustituyendo:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(b\log r + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(c_k r^k + \overline{c_{-k}}r^{-k})e^{ik\theta}\right)d\theta.$$

Como converge uniformemente, intercambiando serie e integral obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})\,d\theta = b\log r + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left((c_k r^k + \overline{c_{-k}}r^{-k})\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\,d\theta\right).$$

Como dichas integrales son nulas salvo cuando $k=0$, tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})\,d\theta = b\log r + (c_0+\overline{c_0}) \equiv b\log r + c, \quad r_1<r<r_2.$$

Ahora consideremos r_1 (de manera análoga para r_2), para ello recordemos que U es continua en $\overline{D(0;r_1,r_2)}$ que es un compacto, luego $|U(re^{i\theta})| \le \|U\|_\infty$. Por tanto, aplicando el teorema de la convergencia dominada [4, p. 39] tenemos que:

$$\begin{aligned} m(r_1) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r_1e^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{r\to r_1} U(re^{i\theta})\,d\theta \\ &= \lim_{r\to r_1}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})\,d\theta = \lim_{r\to r_1} b\log r + c = b\log r_1 + c. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $\log r = \alpha\log r_1 + (1-\alpha)\log r_2$, $0<\alpha<1$, entonces:

$$\begin{aligned} m(r)-\alpha m(r_1)-(1-\alpha)m(r_2) &\le b\log r + c - \alpha(b\log r_1 + c) - (1-\alpha)(b\log r_2 + c) \\ &= b(\log r - \alpha\log r_1 - (1-\alpha)\log r_2) + c - \alpha c - c + \alpha c \\ &= b(\log r - \alpha\log r_1 - (1-\alpha)\log r_2) = 0, \end{aligned}$$

teniendo así probado que $m(r)$ es función convexa del logaritmo de r. □

Teorema 2.6 (convexidad de Hardy)**.** *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ y $0<p\le\infty$. Entonces:*

a) *$M_p(r,f)$ es, como función de r, no decreciente.*

b) *$\log M_p(r,f)$ es función convexa del logaritmo de r.*

Demostración. Seguimos y ampliamos [6, p. 9-10].

El caso $p=+\infty$ es el teorema de los tres círculos de Hadamard [10, p. 353], así pues sea $0<p<\infty$.

a) Si f holomorfa entonces, como ya se comentó, $|f(z)|^p$ es subarmónica [13, p. 382], entonces $M_p(r,f)$ es no decreciente por la proposición 2.5.

b) Además si $\lambda\in\mathbb{R}$ entonces trivialmente $|z|^\lambda|f(z)|^p$ es subarmónica en $D(0;0,1)$. Ahora aplicando de nuevo la proposición 2.5 se tiene que $r^\lambda M_p^p(r,f)$ es función convexa del logaritmo de r.

Más aún, dados $0<r_1<r_2<1$, sea

$$\lambda = \left(\log\frac{M_p^p(r_2,f)}{M_p^p(r_1,f)}\right)\left(\log\frac{r_1}{r_2}\right)^{-1}$$

entonces:

$$r_1^\lambda M_p^p(r_1,f) = r_2^\lambda M_p^p(r_2,f) = K.$$

Y sea $r = r_1^\alpha r_2^{1-\alpha}$ con $0<\alpha<1$.

Notemos que:

$$\log(r) = \log(r_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha}) = \alpha \log(r_1) + (1-\alpha)\log(r_2),$$

entonces como $r^{\lambda} M_p^p(r,f)$ es función convexa del logaritmo, por definición, se ha de verificar que:

$$r^{\lambda} M_p^p(r,f) \leq K = K^{\alpha} K^{1-\alpha} = \left(r_1^{\lambda} M_p^p(r_1,f)\right)^{\alpha} \left(r_2^{\lambda} M_p^p(r_2,f)\right)^{1-\alpha} = r^{\lambda} M_p^p(r_1,f)^{\alpha} M_p^p(r_2,f)^{1-\alpha}.$$

Despejando y tomando raíces p-ésimas llegamos a:

$$M_p(r,f) \leq M_p(r_1,f)^{\alpha} M_p(r_2,f)^{1-\alpha}.$$

luego $\log M_p(r,f)$ es función convexa del $\log r$.

□

Definición. Una función f holomorfa en $\mathbb{D}$ se dice subordinada a otra función F holomorfa, si $f(z) = F(w(z))$ para una cierta función w holomorfa en $\mathbb{D}$, satisfaciendo $|w(z)| \leq |z|$. Cuando esto suceda lo denotaremos por: $f \prec F$.

Teorema 2.7 (subordinación de Littlewood)**.** *Sean f, F holomorfas en $\mathbb{D}$ y $f \prec F$, entonces $M_p(r,f) \leq M_p(r,F)$ si $0 < p \leq \infty$.*

Demostración. Seguimos y ampliamos [6, p. 10-11]. Para ello probaremos que si $G(z)$ es subarmónica en $\mathbb{D}$, y $g(z) = G(w(z))$ con w holomorfa en $\mathbb{D}$, satisfaciendo $|w(z)| \leq |z|$, entonces:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(re^{i\theta})\,d\theta.$$

Para ver esto, sea U la función armónica en $D(0,r)$ e igual a G en $\partial D(0,r)$ (su existencia se justifica en [8, p. 226]). Luego $G(z) \leq U(z)$ en $\overline{D(0,r)}$ y $g(z) \leq u(z) \equiv U(w(z))$ en $\partial D(0,r)$. Aplicando esto junto con la propiedad 1.2 resulta:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta = u(0) = U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(re^{i\theta})\,d\theta.$$

Más aún:

$$\begin{aligned} M_p(r,f) &\leq M_p(r,F) \\ &\iff \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p} \\ &\iff \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p\,d\theta. \end{aligned}$$

Recordemos que ya se observó que si h es holomorfa entonces $|h(z)|^p$ es subarmónica, entonces para aplicar lo ya probado basta ver que si $|f(re^{i\theta})|^p = g$ y $G = |F(re^{i\theta})|^p$ verifican $g(z) = G(w(z))$ con w holomorfa en en $\mathbb{D}$, satisfaciendo $|w(z)| \leq |z|$, pero esto es obvio pues $f \prec F$. □

Tras este breve comentario sobre funciones subordinadas estamos ya en condiciones de probar nuestro objetivo en esta sección, un teorema maximal de Hardy-Littlewood, y poner con él fin al capítulo 2.

Teorema 2.8 (maximal de Hardy-Littlewood)**.** *Sea $u(r,\theta)$ la integral de Poisson de $\varphi \in L^p$, $1 < p \leq \infty$ y $U(\theta) = \sup_{r<1} |u(r,\theta)|$. Entonces $U \in L^p$ y existe una constante A_p dependiente solo de p tal que $\|U\|_p \leq A_p \|\varphi\|_p$.*

Demostración. Seguimos y ampliamos [6, p. 11-12].

Extendemos φ a $\mathbb{R}$ haciéndola 2π-periódica y sea

$$M(\theta) = M(\theta;\varphi) = \sup_{0<|T|\leq\pi} \left| \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(x+t)\,dt \right|.$$

Ahora por el teorema 1.8 $M \in L^p$ y $\|M\|_p \leq C_p\|\varphi\|_p$, $1 < p \leq \infty$, con C_p dependiendo solo de p. Así mismo, si U es como en el enunciado, entonces es medible por ser el supremo de las funciones $|u(r,\theta)|$ cuando r recorre una sucesión de números racionales en $(0,1)$.

Por tanto, basta con ver que $|u(r,\theta)| \leq 2M(\theta)$ si $0 \leq r < 1$ y se tendrá la acotación buscada. Para ello, llamemos $\psi(t) = \int_0^t \varphi(\theta+u)\,du$, si θ es fijo, y notemos que por hipótesis:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)\varphi(\theta+t)\,dt.$$

Integrando por partes: $u = P(r,t)$, $du = \frac{\partial P(r,t)}{\partial t}$, $dv = \varphi(\theta+t)$, $v = \psi(t)$ se tiene:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\Big[P(r,t)\psi(t)\Big]_{t=-\pi}^{t=\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\psi(t)\,dt.$$

Multiplicando y dividiendo por t resulta:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\Big[P(r,t)\psi(t)\Big]_{t=-\pi}^{t=\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\partial P(r,t)}{\partial t}\frac{\psi(t)}{t}\,dt.$$

Como

$$\left|\frac{\psi(t)}{t}\right| = \left|\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(\theta+u)\,du\right| \leq \sup_{0<|t|\leq\pi}\left|\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(\theta+u)\,du\right| = M(\theta),$$

entonces tenemos que:

$$\left|-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\partial P(r,t)}{\partial t}\frac{\psi(t)}{t}dt\right| \leq \frac{M(\theta)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|-\frac{t\partial P(r,t)}{\partial t}\right|dt \leq \frac{2r}{1+r}M(\theta) < M(\theta),$$

donde, en los dos pasos últimos, usamos las acotaciones que surgieron en (2.3) y (2.5). Finalmente:

$$|u(r,\theta)| \leq \left|\frac{1}{2\pi}\Big[P(r,t)\psi(t)\Big]_{t=-\pi}^{t=\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\partial P(r,t)}{\partial t}\frac{\psi(t)}{t}dt\right|$$

(sustituyendo)

$$\leq \left|\frac{1}{2\pi}\frac{1-r}{1+r}(\psi(\pi)-\psi(-\pi))\right| + M(\theta)$$

(desigualdad triangular)

$$\leq \frac{1}{2\pi}\frac{1-r}{1+r}\Big(|\psi(\pi)|+|\psi(-\pi)|\Big) + M(\theta)$$

$(|\psi(t)|, |\psi(-t)| \leq \pi M(\theta))$

$$\leq \left(\frac{1-r}{1+r}+1\right)M(\theta) = \frac{2}{1+r}M(\theta) \leq 2M(\theta).$$

□

Capítulo 3

Factorización de funciones en H^p y clase de Nevanlinna

En este tercer y último capítulo vamos a caracterizar las funciones de H^p mediante teoremas de factorización. Pero antes vamos a descubrir y estudiar la clase de Nevanlinna.

Definición. Dado $x \geq 0$, se define $\log^+ x = \log x$ si $x \geq 1$, 0 si $x < 1$, y $\log^- x = \text{máx}\{-\log x, 0\}$, de modo que $\log^+ x - \log^- x = \log x$ para $x \geq 0$.

Definición. Una función $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa pertenece a la clase de Nevanlinna N si las integrales:

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta$$

están acotadas para $r < 1$.

Observamos que:

a) La función $\log^+ |f(z)|$ es subarmónica donde f es holomorfa [6, p. 8].

b) Si $0 < p < \infty$, entonces $H^p \subset N$ pues $\log^+ |f(z)| \leq (1/p)|f(z)|^p$ y $H^\infty \subset N$ trivialmente.

Teorema 3.1 (de Nevanlinna)**.** *Una función $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa pertenece a la clase de Nevanlinna N si y solo si es cociente de dos funciones holomorfas y acotadas.*

Demostración. Seguimos y ampliamos [6, p. 16-17] y procedemos por doble implicación.

$\Rightarrow$) Es decir, sea $f \in N$ no idénticamente nula, sea 0 un cero de multiplicidad $m \geq 0$ y sean z_n el resto de ceros de f en $\mathbb{D}$ repetidos de acuerdo con su multiplicidad. Si $f(z) \neq 0$ en $\partial D(0,\rho)$ con $\rho < 1$ la función:

$$f(z)\frac{\rho^m}{z^m} \prod_{|z_n|<\rho} \frac{\rho^2 - \overline{z_n} z}{\rho(z - z_n)}$$

extendida por continuidad en 0 y en los z_n, no se anula en $\overline{D(0,\rho)}$, luego tiene logaritmo holomorfo en $\overline{D(0,\rho)}$, es decir, existe F holomorfa en $\overline{D(0,\rho)}$ tal que:

$$e^{F(z)} = f(z)\frac{\rho^m}{z^m} \prod_{|z_n|<\rho} \frac{\rho^2 - \overline{z_n} z}{\rho(z - z_n)}$$

Además en $\partial D(0,\rho)$ se tiene:

$$\operatorname{Re} F(z) = \log\left| f(z)\frac{\rho^m}{z^m} \prod_{|z_n|<\rho} \frac{\rho^2 - \overline{z_n} z}{\rho(z - z_n)} \right| = \log\left| f(z) \prod_{|z_n|<\rho} \frac{\rho^2 - \overline{z_n} z}{\rho(z - z_n)} \right|.$$

Ahora realizando cuentas y notando que $z\overline{z} = \rho^2$ en $\partial D(0,\rho)$ resulta:

$$\left|\frac{\rho^2 - \overline{z_n}z}{\rho(z-z_n)}\right| = \left|\frac{z}{\rho^2}\frac{\rho^2\overline{z} - \overline{z_n}\overline{z}z}{\rho(z-z_n)}\right| = \left|\frac{z}{\rho^2}\frac{\rho^2\overline{z} - \overline{z_n}\rho^2}{\rho(z-z_n)}\right| = \left|\frac{z}{\rho}\frac{\overline{z-z_n}}{(z-z_n)}\right| = \left|\frac{z}{\rho}\right| = 1.$$

De donde $\operatorname{Re} F(z) = \log|f(z)|$ para todo $z \in \partial D(0,\rho)$. Observemos que como $\operatorname{Re} F(z)$ es armónica en $\overline{D(0,\rho)}$ entonces tomando su integral de Poisson, sustituyendo y simplificando tenemos que:

$$\operatorname{Re} F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} F(\rho e^{it}) \operatorname{Re} \frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z}\,dt = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\rho e^{it})| \frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z}\,dt.$$

Tenemos por tanto que la expresión anterior es una función holomorfa, además recordando que dos funciones holomorfas con igual parte real se diferencian en una constante imaginaria tenemos que:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\rho e^{it})| \frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z}\,dt + iC.$$

Tras exponenciar la fórmula anterior se llega a que $f(z) = \varphi_\rho(z)/\psi_\rho(z)$ en $D(0,\rho)$, donde:

$$\varphi_\rho(z) = \frac{z^m}{\rho^m}\prod_{|z_n|<\rho} \frac{\rho(z-z_n)}{\rho^2 - \overline{z_n}z} \exp\left(\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^-|f(\rho e^{it})| \frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z}\,dt + iC\right),$$

$$\psi_\rho(z) = \exp\left(\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(\rho e^{it})| \frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z}\,dt\right).$$

Consideremos una sucesión $\{\rho_k\}$ tal que $\rho_k \to 1$ y $f(z) \neq 0$ en $\partial D(0,\rho_k)$ para todo k. Tomando $\vartheta_k(z) = \varphi_{\rho_k}(\rho_k z)$ y $\Upsilon_k(z) = \psi_{\rho_k}(\rho_k z)$, se tiene por lo anterior que $f(\rho_k z) = \vartheta_k(z)/\Upsilon_k(z)$ en $\mathbb{D}$. Pero las funciones Υ_k, ϑ_k son holomorfas en $\mathbb{D}$ y de módulo menor o igual que uno (basta tomar módulos en la expresión explícita de ψ_ρ y aplicar el principio de modulo máximo [2, p. 124] tras tomar módulos en la de φ_ρ).

Entonces por el teorema 1.6 las familias $\{\Upsilon_k\}, \{\vartheta_k\}$ son normales y por tanto existe subsucesión $\{k_i\}$ tal que $\Upsilon_{k_i}(z) \to \psi(z)$ y $\vartheta_{k_i}(z) \to \varphi(z)$ uniformemente en cada disco de radio menor que 1. Además, por construcción, las funciones φ, ψ son holomorfas y de módulo menor o igual que 1, teniendo así probado que $f = \varphi/\psi$.

Finalmente notar que como $f \in N$, se tiene $\int_0^{2\pi} \log^+|f(\rho_k e^{it})|\,dt < K$ para algún $K > 0$, entonces:

$$|\Upsilon_k(0)| = \left|\exp\left(\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(\rho_k e^{it})| \frac{\rho_k e^{it}}{\rho_k e^{it}}\,dt\right)\right| \geq \exp\left(\frac{-K}{2\pi}2\pi\right) > 0,$$

luego $\Upsilon_k(0) \neq 0$.

$\Leftarrow$) Sea $f = \varphi/\psi$, con φ y ψ holomorfas y acotadas, sin pérdida de generalidad supongamos que el módulo de las funciones φ y ψ está acotado por 1, así como que $\psi(0) \neq 0$. Primeramente observemos que si $|f(z)| \leq 1$ se tiene:

$$\log^+|f(z)| = 0 \leq -\log|\psi(z)|. \tag{3.1}$$

Pero si $|f(z)| > 1$ entonces como por hipótesis $|\varphi(z)| \leq 1$ y $|\psi(z)| \leq 1$ obtenemos:

$$\log^+|f(z)| = \log|f(z)| = \log|\varphi(z)| - \log|\psi(z)| \leq -\log|\psi(z)|. \tag{3.2}$$

Aplicando esto llegamos a:

$$\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta \leq -\int_0^{2\pi} \log|\psi(re^{i\theta})|\,d\theta.$$

Ahora como ψ es holomorfa y $\psi(0) \neq 0$ si aplicamos el lema 1.9 se obtiene:

$$\log|\psi(0)| + \sum_{|\alpha_n|<r} \log\frac{r}{|\alpha_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\psi(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

donde α_n son ahora los ceros de ψ repetidos de acuerdo con su multiplicidad. Recordando que el logaritmo es una función creciente y que $\frac{r}{|\alpha_n|} > 1$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \log|\psi(re^{i\theta})|\,d\theta \geq 2\pi \log|\psi(0)|.$$

Por tanto tenemos que:

$$0 \leq \int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta \leq -\int_0^{2\pi} \log|\psi(re^{i\theta})|\,d\theta \leq -2\pi\log|\psi(0)|.$$

Luego $f \in N$.

$\square$

El siguiente resultado completa el corolario 2.3.

Teorema 3.2 (Fatou versión compleja)**.** *Para cada función $f \in H^\infty$, el límite radial $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ existe en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue y $f^*(e^{i\theta}) \in L^\infty(\mathbb{T})$.*

Demostración. Seguimos y ampliamos [13, p. 281-282]. Dada $f \in H^\infty$ existe una $g \in L^\infty$ tal que:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta - t)g(t)\,dt.$$

En efecto, definimos los funcionales lineales en $L^1(T)$ dados por:

$$\lambda_r G = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(e^{it})f(re^{it})\,dt, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Además:

$$\|\lambda_r\|_{op} = \sup_{\|G\|_1\leq 1}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(e^{it})f(re^{it})\,dt\right| \leq \|f\|_\infty \leq K,$$

luego los λ_r continuos. Es decir, la familia de funcionales λ_r está acotada. Existirá entonces un funcional λ sobre $L^1(\mathbb{T})$, es decir, una función $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$ y una sucesión de $r_n \to 1$ tales que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(e^{it})f(r_ne^{it})\,dt = \lim_{n\to+\infty}\lambda_{r_n} &= \lambda(G)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(e^{it})f^*(e^{it})\,dt,\end{aligned}$$

para toda $G \in L^1(\mathbb{T})$. Haciendo $h_n(z) = f(r_nz)$ entonces h_n es armónica compleja en $\mathbb{D}$ ($\operatorname{Re} h_n, \operatorname{Im} h_n$ armónicas reales), continua en $\overline{\mathbb{D}}$ y por tanto es la integral de Poisson de su restricción a $\mathbb{T}$ [13, p.266]. Fijando $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ y considerando ahora como G el núcleo de Poisson, si sustituimos tenemos que:

$$\begin{aligned}f(z) = f(re^{i\theta}) &= \lim_{n\to+\infty} f(r_nz) = \lim_{n\to+\infty} h_n(z) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)f(r_ne^{it})\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)f^*(e^{it})\,dt.\end{aligned}$$

Para acabar la demostración basta aplicar el teorema 2.2 de la derivada simétrica pues $f^*(e^{it})\,dt$ es una medida de variación acotada.

$\square$

Proposición 3.3. *Para cada función $f \in N$, el límite radial $f(e^{i\theta})$ existe en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue y $\log|f(e^{i\theta})|$ es integrable salvo si f es idénticamente nula. Más aún si $f \in H^p$ para algún $0 < p < \infty$ entonces $f(e^{i\theta}) \in L^p(\mathbb{T})$.*

Demostración. Seguimos y ampliamos [3, p. 277]. Sea primeramente $f \in H^\infty$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $\|f\|_\infty \leq 1$, además supongamos que $f(0) \neq 0$ (si no fuera así habría que considerar la función $f(z)/z^k$, con k el orden de 0 como cero de f y procederíamos de manera análoga). Por el teorema 3.2, f tiene límite radial en casi todo punto de $\mathbb{T}$ (con respecto a la medida de Lebesgue). Por el lema de Fatou para variable real [4, p. 35] resulta:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(e^{i\theta})||\,d\theta \leq \liminf_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{i\theta})||\,d\theta = \liminf_{r\to 1^-} -\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta.$$

Pero como $\log|f|$ es subarmónica [13, p. 382], entonces por la propiedad del valor medio 1.2 se tiene que $\log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$. De donde:

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(e^{i\theta})||\,d\theta \leq -\log|f(0)| < \infty.$$

Luego $\log|f| \in L^1(\mathbb{T})$. Ahora supongamos que $f \in N$, por el teorema 3.1 $f = \varphi/\psi$ con φ, ψ acotadas. Por lo que acabamos de probar $\log|\varphi| \in L^1(\mathbb{T})$ y $\log|\psi| \in L^1(\mathbb{T})$, luego ni φ ni ψ pueden anularse en un conjunto de medida positiva. Además la existencia de límite radial para ambas asegura la existencia del límite radial para f y $\log|f| = \log|\varphi| - \log|\psi| \in L^1(\mathbb{T})$.

Más aún sea $f \in H^p$ para algún $0 < p < \infty$ entonces $f(e^{i\theta})$ existe pues $H^p \subset N$ y aplicando el lema de Fatou [4, p. 35] resulta:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^p\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \liminf_{r\to 1^-} |f(re^{i\theta})|^p\,d\theta \leq \liminf_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p\,d\theta \leq C.$$

Luego $f(e^{i\theta}) \in L^p(\mathbb{T})$ teniéndose así probado el resultado. □

Teorema 3.4. *Sea f no idénticamente nula y holomorfa en $\mathbb{D}$. Y sean $z_1, z_2, \ldots$ sus ceros en $\mathbb{D}$ repetidos de acuerdo con su multiplicidad. Entonces dado $r < 1$, $\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$ está acotado superiormente si y solo si $\sum_n (1 - |z_n|) < \infty$.*

Demostración. Seguimos y ampliamos [6, p. 18]. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que los ceros de f están ordenados según su módulo de manera creciente. Sea $z_0 = 0$ un cero de f de multiplicidad $m \geq 0$, y α el coeficiente no nulo de menor orden en el desarrollo en serie de potencias de f en torno al cero, aplicando el lema 1.9:

$$\log|\alpha| + \sum_{|z_n|<r} \log\frac{r}{|z_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \log r^m,$$

es decir,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \sum_{|z_n|<r} \log\frac{r}{|z_n|} + \log|\alpha| r^m.$$

Como $r > |z_n|$, tenemos que la expresión anterior, que depende de r, crece monotonamente. En particular, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$ estará acotada si y solo si su límite cuando r tiende a 1 es finito, pero por el teorema de la convergencia monótona [4, p. 33] obtenemos que:

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \lim_{r\to 1^-} \sum_{|z_n|<r} \log\frac{r}{|z_n|} + \log|\alpha| r^m = \log|\alpha| - \sum_n \log|z_n|. \tag{3.3}$$

Ahora supongamos que $\sum_n (1 - |z_n|) < \infty$. Si hay un número finito de z_n la suma de (3.3) es finita luego converge y si es infinita también converge por el lema 1.10.

Para el recíproco, supongamos que $\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$ está acotado y partiendo de la expresión (3.3) se sigue que la suma $-\sum_n \log|z_n|$ debe converger y aplicando el lema 1.10 se tiene el resultado. □

Ahora antes de realizar la factorización de las funciones de H^p, vamos a estudiar y definir una herramienta muy útil, los productos de Blaschke.

Teorema 3.5 (convergencia de productos de Blaschke)**.** *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión en* $\mathbb{D}$ *tal que:* $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots < 1$ *y* $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|) < \infty$*. Entonces el producto infinito*

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z}$$

converge uniformemente en cada $\overline{D(0,R)} \subset \mathbb{D}$*. Además, cada* a_n *es un cero de* B *con multiplicidad igual al número de veces que aparece en la sucesión y* B *no tiene más ceros en* $\mathbb{D}$*. Finalmente* $|B(z)| < 1$ *en* $\mathbb{D}$ *y* $|B(e^{i\theta})| = 1$ *en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue.*

Demostración. Seguimos y ampliamos [6, p. 19] para la primera parte y [9, p. 90-92] para la segunda. Observemos que si aplicamos la desigualdad triangular, en cada $\overline{D(0,R)} \subset \mathbb{D}$ tenemos:

$$\left|1 - \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z}\right| = \left|\frac{(a_n + |a_n| z)(1 - |a_n|)}{a_n(1 - \overline{a_n} z)}\right| \leq \frac{2|a_n|}{|a_n|} \frac{1 - |a_n|}{|1 - \overline{a_n} z|} \leq \frac{2(1 - |a_n|)}{1 - R}.$$

Por el lema 1.10 y la desigualdad triangular inversa se tiene que el producto debe converger absoluta y uniformemente en los discos de radio menor que 1 y se sigue que B es holomorfa en $\mathbb{D}$. Además, trivialmente cada a_n es cero de B y $B(z) \neq 0$ si $z \neq a_n$ para todo n. Más aún, si $z \in \mathbb{T}$ tenemos que:

$$\left|\frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z}\right| = \left|\frac{a_n \bar{z} - |z|^2}{1 - \overline{a_n} z}\right| = \left|\frac{a_n \bar{z} - 1}{1 - \overline{a_n} z}\right| = 1.$$

Luego el producto finito tiene módulo 1 en $\mathbb{T}$. Además por el principio del módulo máximo [2, p. 124] el producto finito tiene módulo menor que 1 en $\mathbb{D}$, luego $|B(z)| < 1$ en $\mathbb{D}$.

Finalmente queremos ver que $|B(e^{i\theta})| = 1$ en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue, para ello notemos que $\sum_{n=1}^{+\infty}(1 - |a_n|) < \infty$, luego aplicando el lema 1.10 tenemos que $\log|B(0)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \log|a_n| > -\infty$.

Ahora aplicando la fórmula de Jensen 1.9 en $D(0,r) \subset \mathbb{D}$, tenemos que:

$$\log|B(0)| = \sum_{|a_n|<r} \log\frac{|a_n|}{r} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|B(re^{i\theta})|\, d\theta$$

(sustituyendo)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log|a_n| = \sum_{|a_n|<r} \log\frac{|a_n|}{r} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|B(re^{i\theta})|\, d\theta$$

(por las propiedades del logaritmo)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|B(re^{i\theta})|\, d\theta = \sum_{|a_n|<r} \log\frac{r}{|a_n|} - \sum_{n=1}^{+\infty} \log\frac{1}{|a_n|}$$

Por ser $\log|B(0)|$ finito, podemos elegir $p > 0$ tal que $\sum_{n>p} \log\frac{1}{|a_n|} < \varepsilon$, y elegimos r lo suficientemente cerca de 1 de modo que $|a_n| < r$ para todo $1 \leq n \leq p$. Por tanto, aplicándolo a lo anterior tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|B(re^{i\theta})|\, d\theta \geq \sum_{n=1}^{p} \log\frac{r}{|a_n|} - \sum_{n=1}^{p} \log\frac{1}{|a_n|} - \varepsilon = p\log r - \varepsilon$$

(haciendo r arbitrariamente cerca de 1)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{i\theta})|\,d\theta > -2\varepsilon$$

(tomando límites)

$$\limsup_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{i\theta})|\,d\theta \geq 0.$$

Por el teorema 3.2, $B(re^{i\theta}) \to B(e^{i\theta})$ en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue cuando $r \to 1^-$, y que además $\log|B(re^{i\theta})| \leq 0$.

Por otro lado tomando una sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ creciente a 1 y aplicando el lema de Fatou [4, p. 35], tenemos que: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(e^{i\theta})|\,d\theta \geq 0$.

Como $|B(e^{i\theta})| \leq 1$ tenemos que $\log|B(e^{i\theta})| = 0$ en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue. □

Definición. En las condiciones del teorema anterior si $m \geq 0$, se le llama producto de Blaschke a:

$$B(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n - z}{1 - a_n z}.$$

Si $\{a_n\} = \emptyset$, se entiende que $B = z^m$.

Teorema 3.6. *Toda función $f \in H^p$, $0 < p \leq \infty$, no idénticamente nula puede factorizarse como $f(z) = B(z)g(z)$ con B de Blaschke y $g \in H^p$ sin ceros en $\mathbb{D}$. El resultado análogo para la clase de Nevanlinna también es cierto.*

Demostración. Seguimos y ampliamos [9, p. 94] para la primera parte y [3, p. 275] para la segunda. Sea $f \in H^p$, $0 < p < \infty$ y $r < 1$. Por la desigualdad de Jensen [13, p. 71]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta \leq \log\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta \leq K,$$

donde en el último paso hemos usado que $f \in H^p$. Sean $\{a_n\}$ los ceros de f en $\mathbb{D}$ repetidos de acuerdo con su multiplicidad, por el teorema 3.4 sabemos que se cumplen las hipótesis del teorema 3.5 y podemos formar B como producto de Blaschke de manera que $g = f/B$ no tiene ceros en $\mathbb{D}$.

Denotemos

$$B_N = \prod_{n=1}^{N}\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n}z},$$

de nuevo por el teorema 3.5 tenemos que $B_N \to B$ uniformemente en los discos $\overline{D(0,r)}$ con $r < 1$. Sea $r \neq |z_n|$ para todo n, entonces despejando tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(re^{i\theta})|^p\,d\theta = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f(re^{i\theta})|^p}{|B_N(re^{i\theta})|^p}\,d\theta.$$

Además, para cada N, la función $g_N = f/B_N$ es holomorfa en $\mathbb{D}$, luego $|g_n(z)|^p$ es subarmónica en $\mathbb{D}$, es decir, si fijamos un $r < 1$, tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_N(re^{i\theta})|^p\,d\theta \leq \limsup_{R\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_N(Re^{i\theta})|^p\,d\theta.$$

Como B_N es un producto finito, entonces $|B_N(Re^{i\theta})| \to 1$ uniformemente cuando $R \to 1$, por tanto despejando B_N tenemos que:

$$\limsup_{R\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_N(Re^{i\theta})|^p\,d\theta = \limsup_{R\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(Re^{i\theta})|^p\,d\theta \leq C,$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $f \in H^p$. Concluimos que para cada $0 < r < 1$ y para todo $N \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_N(re^{i\theta})|^p \, d\theta \leq C.$$

Y por tanto para todo $0 < r < 1$, se tiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})|^p \, d\theta \leq C,$$

es decir, $g \in H^p$.

Si $p = \infty$, las hipótesis de 3.4 se cumplen trivialmente luego podemos tomar B y $g = f/B$ como antes. Entonces g es holomorfa y está acotada en $\mathbb{D}$ luego está en H^∞.

Sea ahora $f \in N$ y $f(0) \neq 0$, sin pérdida de generalidad (si no fuera así habría que realizar modificaciones similares a las hechas en el teorema 3.4) y aplicando el lema 1.9 se llega a que:

$$\log|f(0)| + \sum_{|\alpha_n|<r} \log\frac{r}{|\alpha_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})| \, d\theta,$$

donde α_n son los ceros de f repetidos de acuerdo con su multiplicidad y r elegido de manera que $|\alpha_n| \neq r$ para todo n. Recordando que $\log x \leq \log^+ x$ y que $f \in N$ resulta:

$$\log|f(0)| + \sum_{|\alpha_n|<r} \log\frac{r}{|\alpha_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})| \, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})| \, d\theta \leq C.$$

Ahora tomando límites cuando $r \to 1^-$, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\frac{1}{|\alpha_n|} \leq -\log|f(0)| + C < \infty.$$

Ahora aplicando el lema 1.10 y el teorema 3.5 tenemos que $\{\alpha_n\}$ generan un producto de Blaschke B. Sea pues $g = f/B$, que es holomorfa en $\mathbb{D}$ por el teorema 3.5 y que no se anula nunca. Además como ya se comentó B es holomorfa y $\log|B|$ es subarmónica. Si $z \in \mathbb{D}$, con $|g(z)| \leq 1$, se tiene que $|f(z)| \leq |B(z)| \leq 1$ y como $\log^+|f(z)| = 0$ resulta:

$$\log^+|g(z)| = 0 \leq -\log|B(z)| = \log^+|f(z)| - \log|B(z)|.$$

Ahora si $|g(z)| > 1$, como $\log^+|f(z)| \geq \log|f(z)|$ se tiene que:

$$\log^+|g(z)| = \log|g(z)| = \log|f(z)| - \log|B(z)| \leq \log^+|f(z)| - \log|B(z)|.$$

Es decir, tenemos que para todo $z \in \mathbb{D}$, $\log^+|g(z)| \leq \log^+|f(z)| - \log|B(z)|$, tomando $0 < r < 1$ tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|g(re^{i\theta})| \, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})| \, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|B(re^{i\theta})| \, d\theta.$$

Ahora recordemos que $f \in N$ y que $\log|B|$ es subarmónica, luego si aplicamos el teorema 2.4 y que $B(0) \neq 0$, obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|g(re^{i\theta})| \, d\theta \leq C - \log|B(0)| < +\infty.$$

Teniendo así probado que $g \in N$.

□

Proposición 3.7. *Sea* $0 < p < \infty$ *y* $f \in H^p$*, entonces:*

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p \, d\theta = 0.$$

Demostración. Seguimos y ampliamos [9, p. 98-100].

Sea B el producto de Blaschke formado a partir de los ceros de f repetidos según su multiplicidad, aplicando el teorema 3.6, $f = BF$ con $F \in H^p$ sin ceros en $\mathbb{D}$. Sea $0 < r < 1$ y $0 < p < 1$, si tras sustituir, sumamos y restamos $F(e^{i\theta})B(re^{i\theta})$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p \, d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} |B(re^{i\theta})F(re^{i\theta}) - B(e^{i\theta})F(e^{i\theta})|^p \, d\theta \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |B(re^{i\theta})|^p |F(e^{i\theta}) - F(re^{i\theta})|^p \, d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{i\theta})|^p |B(e^{i\theta}) - B(re^{i\theta})|^p \, d\theta \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{i\theta}) - F(re^{i\theta})|^p \, d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{i\theta})|^p |B(e^{i\theta}) - B(re^{i\theta})|^p \, d\theta,\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que por el teorema 3.5 $|B(re^{i\theta})| \leq 1$.

Además por el teorema 3.5, $B(re^{i\theta}) \to B(e^{i\theta})$ en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue cuando $r \to 1^-$ y por la proposición 3.3 $|F(e^{i\theta})|^p \in L^1$.

Teniendo eso en consideración y aplicando el teorema de la convergencia dominada [4, p. 39]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{i\theta})|^p |B(e^{i\theta}) - B(re^{i\theta})|^p \, d\theta \to 0,$$

cuando $r \to 1^-$.

Supongamos que $p \geq 1$, lo hecho hasta ahora no pierde validez pues las desigualdades serían parecidas (aplicando la desigualdad de Minkowski [13, p. 72]), salvo que vendrían afectadas por raíces p-ésimas. Por lo tanto, basta probar que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{i\theta}) - F(re^{i\theta})|^p \, d\theta \to 0,$$

cuando $r \to 1^-$. Aplicando de nuevo la desigualdad de Hölder [13, p. 72], se tiene que:

$$\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})| \, d\theta \leq \left(\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \right)^{1-1/p} = \left(\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} (2\pi)^{1-1/p}$$

Recordando que $F \in H^p \subset H^1$, se tiene que F es armónica compleja en $\mathbb{D}$ ($\operatorname{Re} F, \operatorname{Im} F$ son armónicas reales) [13, p. 266] y puedo expresar F en función de su integral de Poisson:

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - t) F(e^{it}) \, dt,$$

y tenemos aplicando la proposición 1.4 de la identidad de aproximación que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{i\theta}) - F(re^{i\theta})|^p \, d\theta \to 0$$

cuando $r \to 1^-$. Sea ahora $p \geq 1/2$, como F no tiene ceros en $\mathbb{D}$ entonces posee raíz cuadrada holomorfa G, y $G \in H^{2p}$ con $2p \geq 1$ y por tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{i\theta}) - F(re^{i\theta})|^p \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(G(e^{i\theta}) - G(re^{i\theta}) \right) \left(G(e^{i\theta}) + G(re^{i\theta}) \right) \right|^p \, d\theta$$

(por Cauchy-Schwarz [13, p.72])

$$\leq \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |G(e^{i\theta}) + G(re^{i\theta})|^{2p} \, d\theta} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |G(e^{i\theta}) - G(re^{i\theta})|^{2p} \, d\theta}$$

($G \in H^{2p}$)

$$\leq C \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |G(e^{i\theta}) - G(re^{i\theta})|^{2p} \, d\theta} \to 0,$$

cuando $r \to 1^-$, donde para el límite hemos usado lo probado en el párrafo anterior. Reiterando este proceso de tomar raíces tenemos probado para todo $p > 0$ que $\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{i\theta}) - F(re^{i\theta})|^p \, d\theta \to 0$ cuando $r \to 1^-$ y con ello el teorema. $\square$

Proposición 3.8. *Sean* $0 < p < \infty$, $0 < r < 1$ *y* $f \in H^p$, *entonces*

$$\log|f(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\log|f(e^{it})|\,dt.$$

Demostración. Seguimos y ampliamos [3, p. 281] y [6, p. 23]. Primeramente veamos que $|\log^+ b - \log^+ a| \leq |b-a|$ para todo $0 < a, b$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a < b$ y consideremos los diferentes casos:

- Si $0 < a < b \leq 1$, entonces $\log^+ b = \log^+ a = 0 \leq |b-a|$.
- Si $0 < a < 1 < b$, entonces $|\log^+ b - \log^+ a| = \log b \leq b - 1 \leq |b-a|$.
- Si $1 \leq a < b$, aplicando el teorema de valor medio con $1 \leq a < x < b$ se tiene $|\log^+ b - \log^+ a| = \log b - \log a = (b-a)\frac{1}{x} \leq b - a$.

Aplicando esto junto con la desigualdad de Hölder [13, p. 72] y junto con que $f(e^{it})$ existe por la proposición 3.3 ya que $H^p \subset N$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\log^+|f(re^{it})| - \log^+|f(e^{it})|\right| dt &\leq \int_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{it}) - f(e^{it})\right| dt \\ &\leq (2\pi)^{1-1/p}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{it}) - f(e^{it})\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \to 0,\end{aligned}$$

cuando r tiende a 1 por la izquierda por la proposición 3.7. Probemos finalmente la afirmación del enunciado, por el teorema 3.6 factoricemos $f = Bg$, con $g \in H^p$ y B de Blaschke. Como $|f| = |g|$ en $\mathbb{T}$, y $\log|f| = \log|B| + \log|g| \leq \log|g|$ en $\mathbb{D}$, basta ver que la afirmación del enunciado es cierta para g.

Sabemos g es no nula, por tanto $\log|g(z)|$ es armónica [6, p. 8] y si $0 < R < 1$, $\log|g(Re^{i\theta})|$ es armónica en un entorno de $\overline{\mathbb{D}}$.

Consideremos su integral de Poisson, es decir, $\log|g(Rre^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)\log|g(Re^{it})|\,dt$, $0 < r < 1$. Como $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, entonces $P(r,\theta-t)$ está acotada y por lo que acabamos de probar:

$$\lim_{R\to 1^-}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)\log^+|g(Re^{it})|\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)\log^+|g(e^{it})|\,dt.$$

Además por el lema de Fatou [4, p. 35], tenemos que:

$$\liminf_{R\to 1^-}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)\log^-|g(Re^{it})|\,dt \geq \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)\log^-|g(e^{it})|\,dt.$$

Uniendo todo ello tenemos que:

$$\begin{aligned}\log|g(re^{i\theta})| &= \lim_{R\to 1^-}\log|g(Rre^{i\theta})| = \lim_{R\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)\log|g(Re^{it})|\,dt \\ &= \liminf_{R\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)\left(\log^+|g(Re^{it})| - \log^-|g(Re^{it})|\right) dt \\ &= \liminf_{R\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)\log^+|g(Re^{it})|\,dt - \liminf_{R\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)\log^-|g(Re^{it})|\,dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)\log^+|g(e^{it})|\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)\log^-|g(e^{it})|\,dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)\log|g(e^{it})|\,dt.\end{aligned}$$

$\square$

Antes de acabar el capítulo vamos a dar otro paso más y afinar más los teoremas de factorización mediante el uso de funciones externas e internas, para ello recordamos sus definiciones.

Definición. Una función interna es una función ϕ holomorfa y acotada en $\mathbb{D}$ tal que $|\phi(w)| = 1$ en casi todo punto de $\mathbb{T}$ con respecto a la medida de Lebesgue.

Lema 3.9. *Si μ es una medida positiva singular en $\mathbb{T}$ y:*

$$\phi(z) = \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} d\mu(w)\right),$$

entonces ϕ es una función interna.

La demostración está en [3, p. 278].

Definición. Una función holomorfa $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice función externa para la clase H^p si existe una función $h : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable Lebesgue tal que $\forall z \in \mathbb{D}$:

$$f(z) = \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} h(w)\, dw\right).$$

Teorema 3.10. *Sean $0 < p \leq \infty$ y $f \in H^p$, entonces admite una factorización $f = cB\phi F$, siendo c una constante de módulo 1, B un producto de Blaschke, ϕ una función singular interna y F externa para la clase H^p. Recíprocamente, toda función de esta forma está en H^p.*

Demostración. Seguimos y ampliamos [3, p. 280,282] y [6, p. 25].

$\Rightarrow$) Supongamos que f está acotada y sin pérdida de generalidad $\|f\|_\infty \leq 1$. Por el teorema 3.6 escribimos $f = cBg$ con c una constante unimodular, B de Blaschke y $g \in H^p$ holomorfa, y sin ceros en $\mathbb{D}$ tal que $g(0) > 0$ (sin pérdida de generalidad), luego existe una función $k : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ verificando $g = e^{-k}$, con $k(0) = -\log|g(0)|$. Además $|g(e^{i\theta})| = |f(e^{i\theta})|$ en casi todo punto de $\mathbb{T}$ con respecto a la medida de Lebesgue (estos valores frontera existen por el teorema 3.2).

Llamando $u = \operatorname{Re} k = -\log|g| \geq 0$. Tenemos pues que u es una función armónica no negativa, entonces por la proposición 2.1 expresamos u en función de su integral de Poisson-Stieltjes:

$$u(z) = u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\, d\mu(t),$$

para función μ de variación acotada.

Entonces se tiene que:

$$k(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} d\mu(w).$$

En efecto:

$$\operatorname{Re} k(z) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} d\mu(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\, d\mu(t),$$

recodando que dos funciones holomorfas con igual parte real se diferencian en una constante imaginaria y que $\operatorname{Re} k(z)$ es holomorfa resulta:

$$k(z) = i\lambda + \int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} d\mu(w).$$

Pero como $-\log|g(0)| = k(0)$, se tiene $\lambda = 0$. Por el teorema de la descomposición de Lebesgue [4, p. 60] sea $\mu = \mu_a + \mu_s$ la descomposición con respecto a la medida de Lebesgue con $\mu_a \ll m$ y $\mu_s \perp m$, y sea h la derivada de Radon-Nikodym de μ_a con respecto a la medida de Lebesgue ($h \geq 0$, pues $\mu \geq 0$ en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue). Sustituimos:

$$\begin{aligned} k(z) &= \int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} d\mu(w) = \int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} d(\mu_a(w) + \mu_s(w)) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} d\mu_a(w) + \int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} d\mu_s(w) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} h(w)\, dw + \int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} d\mu_s(w). \end{aligned}$$

Definamos F y ϕ como sigue:

$$F(z) = \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z}(-h(w))\,dw\right), \quad \phi(z) = \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z}\,d\mu_s(w)\right).$$

Si tomamos módulo en F resulta:

$$|F| = \exp\left(Re\int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z}(-h(w))\,dw\right).$$

Tomando logaritmos se tiene:

$$\log|F| = Re\int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z}(-h(w))\,dw,$$

si observamos que es el segundo miembro es una integral de Poisson aplicando el teorema 3.2 se tiene que $h = -\log|F|$ en $\mathbb{T}$. Se tiene, uniendo todo, que $g = F\phi$ donde F es:

$$F(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z}\log|f(w)|\,dw,$$

además por el teorema 3.2 $\log|g| = -\operatorname{Re} k = -u$, y $u(rw) \to h(w) = -\log|F|$. Esto implica $-h = \log|g|$ en $\mathbb{T}$, luego $|F| = |g|$ en $\mathbb{T}$ y por tanto $F \in H^p$ pues $g \in H^p$.

Finalmente, notar que $f = cBF\phi$ y además de acuerdo con la definición y el lema previo F y ϕ son funciones externa y singular interna respectivamente.

Sea ahora $0 < p < \infty$, y sea f no idénticamente nula entonces por la proposición 3.3 $f(e^{i\theta}) \in L^p(\mathbb{T})$ y $\log|f(e^{i\theta})| \in L^1(\mathbb{T})$. Definimos la siguiente función F:

$$F(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f(e^{i\theta})|\,dt\right),$$

que es holomorfa. Sea ahora $f = cBg$ como en el teorema 3.6, $f = cBg$ con B de Blaschke, $g \in H^p$ holomorfa, y sin ceros en $\mathbb{D}$ y con $c = e^{i\gamma} \equiv g(0)/|g(0)|$.

Además $|g(e^{i\theta})| = |f(e^{i\theta})|$ en casi todo punto de $\mathbb{T}$ con respecto a la medida de Lebesgue (estos valores frontera existen por el teorema 3.3). Luego de tomar exponenciales en la proposición 3.8 se tiene que $|g(z)| \leq |F(z)|$ en $\mathbb{D}$. Y si aplicamos la proposición 3.3 y el teorema 2.2 de la derivada simétrica tenemos que $|F(e^{i\theta})| = |f(e^{i\theta})| = |g(e^{i\theta})|$.

Luego si definimos $\phi = e^{-i\gamma}g/F$, que es holomorfa en $\mathbb{D}$, entonces ϕ verifica que $0 < |\phi(z)| \leq 1$, $|\phi(e^{i\theta})| = 1$ en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue y $\phi(0) > 0$. Por tanto es función interna de acuerdo con la definición previa. Además por dichas acotaciones se tiene que $-\log|\phi(z)|$ es una función armónica positiva en $\mathbb{D}$ que se anula en $\mathbb{T}$.

Por el teorema de la derivada simétrica 2.2 expresamos $-\log|\phi(z)|$ como integral de Poisson-Stieltjes con respecto una función acotada no decreciente μ_s tal que $\mu_s \perp m$. Como $\phi(0) > 0$, tomando exponenciales y por compleción analítica de manera similar a la del apartado anterior, tenemos que:

$$\phi(z) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu_s\right).$$

Uniendo todo, tenemos igual que en el caso anterior $g = \phi F$ y tenemos así la descomposición buscada.

$\Leftarrow$) Si $p = \infty$ es obvio tomando módulos trivialmente.

Sea $0 < p < \infty$ y sea $f = B\phi F$. Dado que $|B(z)|, |\phi(z)| \leq 1$ por los resultados 3.5, 3.9 y el principio de módulo máximo [2, p. 124], entonces basta ver que una función externa para la clase H^p debe estar en H^p. Aplicando la desigualdad de Jensen [13, p. 71] tenemos:

$$|F(re^{i\theta})|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)|f(e^{it})|^p\,dt.$$

Integrando y aplicando el teorema de Fubini [4, p. 76], tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p \, d\theta &\leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)|f(e^{it})|^p \, dt \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)|f(e^{it})|^p \, d\theta \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p \, dt \leq K,\end{aligned}$$

pues $f(e^{it}) \in L^p(\mathbb{T})$ por el teorema 3.3. □

Definición. Una función $g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ se dice que posee mayorante armónico en $\mathbb{D}$ si existe una función armónica U en $\mathbb{D}$ tal que $g(z) \leq U(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y a tal función U se la llama mayorante armónico.

Teorema 3.11. *Sea $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, entonces $f \in H^p$,$0 < p < \infty$ si y solo si $|f|^p$ posee mayorante armónico en $\mathbb{D}$.*

Demostración. Seguimos y ampliamos [6, p. 28].

$\Rightarrow$) Por la proposición 3.8 sabemos que si $f \in H^p$, entonces

$$\log|f(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,\theta - t) \log|f(e^{it})| \, dt.$$

Multiplicando por p:

$$\log|f(re^{i\theta})|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,\theta - t) \log|f(e^{it})|^p \, dt.$$

Ahora por la desigualdad de Jensen [13, p. 71] tenemos:

$$|f(re^{i\theta})|^p \leq \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,\theta - t) \log|f(e^{it})|^p \, dt\right) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)|f(e^{it})|^p \, dt.$$

Por tanto, tenemos que $|f|^p$ esta dominada por la integral de Poisson de su función frontera, es decir, $|f|^p$ tiene un mayorante armónico U en $\mathbb{D}$ definido por:

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)|f(e^{it})|^p \, dt.$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $|f|^p$ posee mayorante armónico en $\mathbb{D}$, es decir, que existe una función armónica U en $\mathbb{D}$ tal que $|f|^p \leq U(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces aplicando el lema 1.2 y sustituyendo tenemos que:

$$M_p(r,f) \leq (U(0))^{1/p}.$$

□

Bibliografía

[1] S. AXLER, P. BOURDON, W. RAMEY, *Harmonic function theory*, Springer-Verlag, 2000.

[2] J. B. CONWAY, *Functions of one complex variable*, Springer Verlag, 1973.

[3] J. B. CONWAY, *Functions of one complex variable II*, Springer Verlag, 1995.

[4] B. CUARTERO, *La integral de Lebesgue*, Universidad de Zaragoza, 2018.

[5] B. CUARTERO Y F.J. RUIZ, *Teoría de funciones de variable compleja*, Universidad de Zaragoza, 2018.

[6] P. L. DUREN, *The theory of H^p spaces*, Academic Press, 1970.

[7] J. GARNETT, *Bounded analytic functions*, Springer, 2007.

[8] P. HENRICI, *Applied and computational complex analysis, Volume 3*, Wiley Classics, 1993.

[9] P. KOOSIS, *Introduction to H^p spaces*, Cambridge Univerity Press, 1980.

[10] S. LANG, *Complex analysis*, Springer-Verlag, 1993.

[11] J. MASHREGHI, *Representation theorems in Hardy spaces*, Cambridge University Press, 2009.

[12] T. MYINT-U, L. DEBNATH, *Linear partial differential equations for scientists and engineers*, Birkhäuser, 2007.

[13] W. RUDIN, *Análisis real y complejo*, McGraw-Hill, tercera edición, 1987.

[14] F. J. RUIZ , *Análisis de Fourier*, Universidad de Zaragoza, 2019.