



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Magisterio en Educación Primaria

Diseño y experimentación de una secuencia de enseñanza para introducir el algoritmo de la multiplicación a estudiantes de segundo de Educación Primaria

Design and experimentation of a teaching sequence to introduce the multiplication algorithm with second grade primary students

Autor/es

Judit Berges Sánchez

Director/es

Sergio Martínez Juste

FACULTAD DE EDUCACIÓN
Año 2018-2019

RESUMEN

En este Trabajo de Final de Grado abordamos los procesos de enseñanza y aprendizaje del algoritmo de la multiplicación en primaria a través de la planificación y experimentación de una secuencia de enseñanza en un grupo de alumnos de 2º de Educación Primaria.

Para ello, seguiremos un recorrido de investigación basado en la metodología del Análisis Didáctico. Acercándonos al algoritmo de la multiplicación como objeto de estudio, considerando los diferentes contenidos asociados a él, algoritmos que se practican y su estado actual en la enseñanza. Considerando esta indagación como la línea base de la que partirá la experimentación implementada en el aula.

Palabras clave: algoritmo de la multiplicación, educación primaria, análisis didáctico, experiencia de enseñanza, material manipulativo.

ÍNDICE	PÁGINA
Introducción	5
Problema y objetivos	7
Capítulo I: Marco teórico	9
I.1. El análisis didáctico como herramienta para la elaboración de propuestas de enseñanza.	9
I.2. El análisis de libros de texto	12
Capítulo II: Análisis de contenidos de los algoritmos de la multiplicación	14
II.1. Fases en el aprendizaje de las operaciones	14
II.2. Noción de algoritmo	17
II.3. Cálculo del algoritmo de la multiplicación	19
II.4. Diferentes métodos en el algoritmo de la multiplicación	21
Capítulo III: Aspectos cognitivos sobre los algoritmos de la multiplicación	26
III.1. Expectativas de aprendizaje	26
III.2. Dificultades y errores	27
III.3. Oportunidades	30
Capítulo IV: Estado de la enseñanza de algoritmos de multiplicación	33
IV.1. Análisis libro de texto del aula	33
IV.2. Análisis del segundo libro de texto	37
IV.3. La enseñanza de la multiplicación en el aula	42
Capítulo V: Una secuencia de enseñanza para introducir el algoritmo de la multiplicación	47
V.1. Justificación y contextualización	47
V.2. Metodología utilizada en las sesiones	50
V.3. Sesión 1	52
V.4. Sesión 2	54

V.5. Sesión 3	55
V.6. Sesión 4	57
V.7. Sesión 5	59
V.8. Sesión 6	61
V.9. Sesión 7	62
Capítulo VI: Análisis de los resultados	65
Capítulo VII: Conclusiones finales	78
Referencias	81
Anexos	84

INTRODUCCIÓN

En el Trabajo que a continuación vamos a exponer, los procesos de planificación, diseño e implementación de la secuencia didáctica en alumnos de 2º de Educación Primaria, partirán de la metodología del Análisis Didáctico, cuyas etapas secuencian los diferentes capítulos en los que se divide el trabajo.

En el primer capítulo introduciremos las herramientas teóricas para llevar a cabo el Análisis Didáctico mediante el que hemos planteado la secuencia didáctica y el análisis de libros de texto que hemos desarrollado para dar una visión del estado actual de la enseñanza del algoritmo de la multiplicación.

Seguidamente, en el capítulo segundo, veremos el análisis de contenido de los algoritmos de la multiplicación, investigando más concretamente en el objeto de estudio, cómo definimos y describimos algoritmo, cómo se calcula, qué métodos han existido y cuáles se usan.

Un tercer capítulo que tratará los aspectos cognitivos sobre los algoritmos de la multiplicación centrándose en las expectativas de aprendizaje, las dificultades y errores, así como las oportunidades y propuestas para su aprendizaje.

El cuarto capítulo nos muestra el estado de la enseñanza del algoritmo actualmente, con el análisis de dos libros de texto que se usan en el aula y una serie de propuestas para trabajar el algoritmo desde un punto de vista diferente al tradicional.

En el capítulo quinto se desarrolla la propuesta de enseñanza que se impartirá en el aula, con la contextualización, justificación, metodología utilizada y el diseño curricular concreto de cada una de las sesiones.

Se analizarán los resultados obtenidos en cada sesión dentro del capítulo sexto y, por último, terminar en el capítulo séptimo con las conclusiones finales obtenidas de la realización de la secuencia didáctica y las reflexiones obtenidas sobre la realización y desarrollo del propio trabajo.

PROBLEMA Y OBJETIVOS

Actualmente la enseñanza de las matemáticas escolares requiere de un enfoque funcional del currículo que se base principalmente en formar al alumnado para ser capaz de afrontar, resolver problemas y utilizar lo aprendido en momentos cotidianos. Además, la planificación de los procesos de enseñanza y aprendizaje requiere de un diseño cuidado y detallado de las matemáticas escolares. (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009; Rico, 2008).

Siguiendo esas premisas este trabajo de investigación se justifica por el creciente interés creado en mi docencia por las matemáticas. Tras varios años ejerciendo como docente en varios cursos e impartiendo el área de matemáticas, me surge la inquietud de investigarla e implementarla de una forma distinta a la que están acostumbrados los alumnos.

La elección del algoritmo de la multiplicación se debe a querer despertar en los alumnos esa motivación por comprenderlo y no aprenderlo como algo sistemático y mecánico, sin llegar a saber el proceso que conlleva ni el significado que tiene.

Siendo el punto de partida, la creación de un contexto donde los alumnos sientan que el trabajo que realizan les va a servir para un futuro inmediato y adquieran la capacidad de utilizarlo en otros ámbitos diferentes al escolar.

Por ello durante este trabajo se analizarán diferentes perspectivas del tema escogido, valorando las diversas metodologías y propuestas para desarrollar un planteamiento de enseñanza diferente en el aula que permita a los alumnos adquirir unos objetivos y competencias adecuadas a su realidad, tal y como la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa, LOMCE¹, nos expone.

¹ Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre para la Mejora de la Calidad Educativa. Boletín Oficial del Estado, nº 295, 10 de diciembre de 2013, Madrid, pp. 97858-97921.

Por tanto, entre los objetivos que se plantean perseguir con este TFG encontramos los siguientes:

- Estudiar e indagar diferentes enfoques, recursos, métodos en la enseñanza del algoritmo de la multiplicación.
- Analizar y valorar los puntos fuertes y débiles de estas perspectivas, metodologías y recursos para utilizarlos como referente en la elaboración de la secuencia de enseñanza didáctica.
- Crear una secuenciación didáctica para introducir el algoritmo de la multiplicación partiendo de los intereses y motivaciones de los alumnos.
- Analizar los resultados de la puesta en práctica y reflexionar sobre éstos, para mejorar los aspectos que no hayan sido satisfactorios.

CAPÍTULO I: MARCO TEÓRICO

I.1. EL ANÁLISIS DIDÁCTICO COMO HERRAMIENTA PARA LA ELABORACIÓN DE PROPUESTAS DE ENSEÑANZA

Gómez (2007), Lupiáñez (2009) y Rico (2008) describen el análisis didáctico como una estructura formada por cuatro análisis: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación. Siendo los tres primeros los encargados del diseño de la propuesta de enseñanza y el cuarto se centra en la puesta en práctica. Todos ellos comparten una estructura cíclica en el análisis didáctico tal y como Lupiáñez (2013) nos esquematiza y representa en la Figura 1.

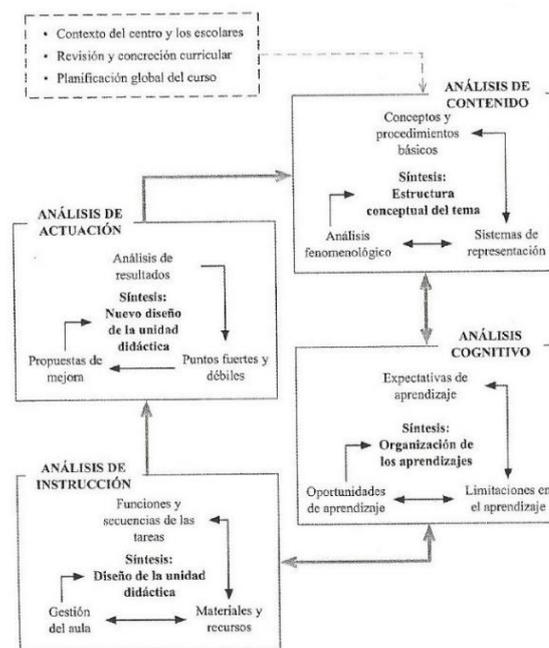


Figura 1. Ciclo del Análisis Didáctico.

A continuación, profundizaremos en la estructura y organización de los cuatro análisis propuestos anteriormente.

El **análisis de contenido** se centra en analizar, describir y establecer los diferentes significados que tienen las nociones involucradas en el tema de matemáticas sobre el que el profesor está realizando la planificación de su propuesta de enseñanza. Este análisis se centra en la parte conceptual del currículo y en el nivel de concreción del contenido a trabajar, que en nuestro caso se refiere al algoritmo de la multiplicación.

Hiebert y Lefevre (1986) propusieron una clasificación cognitiva relacionada con el contenido y el conocimiento matemático, organizada en dos: el conocimiento conceptual y el procedimental. Esta clasificación permite que Rico (2013) estructure el análisis del contenido matemático en tres organizadores fundamentales:

- Los *sistemas de representación*, se refiere a las diferentes formas de representación del contenido y sus relaciones con otros conceptos y procedimientos. Como por ejemplo los cuatro sistemas entorno a los números naturales, que serían *el simbólico, verbal, gráfico y mediante materiales manipulativos*.
- La *fenomenología*, donde los fenómenos tales como contextos, situaciones y problemas dan sentido al contenido escogido. En el marco del Proyecto PISA, se proponen cuatro situaciones personales, ocupacionales, sociales y científicas (OECD, 2010; pp. 21-22).
- La *estructura conceptual*, que se basa en las relaciones entre los conceptos y procedimientos implicados según a la estructura que pertenecen o la que conforman.

El **análisis cognitivo** se refiere principalmente al aprendizaje por parte de los alumnos. Permite al docente llevar a cabo una descripción y un análisis de la problemática del aprendizaje de un tema específico de matemáticas desde un punto de vista curricular y funcional (Lupiañez, 2013). Este mismo autor estructura el análisis cognitivo teniendo en cuenta los siguientes elementos:

- Las *expectativas de aprendizaje*, se refiere a las expectativas que el docente quiere que sus alumnos aprendan según diferentes niveles. Rico (2008) teniendo en cuenta otros análisis de estas expectativas, él se centra en dos: los objetivos específicos y competencias. Los objetivos específicos se definen como los niveles que queremos alcanzar en relación con unos contenidos concretos y a través de unas tareas en ciertas situaciones. Al hablar de competencia nos referimos a las capacidades que el alumnado desarrolla en la realización de diferentes tareas, trabajos, toma de decisiones, resolución de problemas...
- Cuando hablamos de las *limitaciones de aprendizaje*, nos referimos a las dificultades y errores que surgen del aprendizaje. Según Rico (1997) tales errores y dificultades permiten que el docente sea consciente de los resultados obtenidos durante la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos correspondientes. Elementos que están muy presentes en nuestra propuesta de enseñanza.
- Las *oportunidades de aprendizaje* que proporciona el profesor a sus alumnos a través de tareas matemáticas. Estas tareas serán las que permitan alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos creando el medio oportuno para ello, mediante la utilización de recursos, contextos e instrumentos adecuados. Incluso nos sirven de indicadores para evaluar y superar los errores cometidos por el alumnado.

El **análisis de instrucción** se basa en diseñar la propuesta de enseñanza o unidad didáctica que se quiere llevar a cabo con los alumnos. Varios elementos son necesarios, partiendo de los objetivos específicos de aprendizaje y contenidos matemáticos, a las tareas, recursos, materiales, secuenciación, atención a la diversidad y a la evaluación del aprendizaje.

El **análisis de actuación** implica la puesta en práctica de la propuesta diseñada por el docente. Este análisis transmitirá información de gran relevancia al profesor en referencia al punto de adquisición de contenidos o expectativas de aprendizaje, dificultades que han surgido, cambios en recursos, tiempos, espacios, valorar si la evaluación ha sido adecuada y obtener un *feedback* que sirva tanto al docente como al alumnado para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la competencia matemática.

I.2. EL ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

Son varios los autores que coinciden en que los libros de texto constituyen un elemento esencial en la enseñanza escolar. Choppin (1980) define el libro de texto como:

El apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores; es instrumento de poder, [...]a nivel cultural y a la propagación de las ideas dominantes.

En la misma línea Schubring (1987) afirma que “los libros de texto determinan en la práctica la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos” (citado en González y Sierra, 2004).

Sierra, González y López (2003) consideran que el interés del análisis sobre libros de texto tiene su origen en la idea de que la enseñanza no está tan marcada por los decretos y órdenes ministeriales como por los libros de texto que se utilizan en el aula. Asimismo, Rico (1990) sostiene que el libro de texto proporciona al docente los contenidos exigidos por el currículum, de manera estructurada, organizada, secuenciada y planificada. Considerándolo como el modelo único en la divulgación de contenidos al alumnado.

Todas estas aseveraciones nos dirigen a la premisa de que el libro de texto posee gran importancia en la historia de la docencia ya que supone un elemento vital en la enseñanza tradicional y en la transmisión de conocimientos.

En efecto, el análisis de libros de texto nos lleva a encontrar las funciones primordiales que tienen en la escuela. Tal y como expone Schubring (1987), explicando que el análisis de textos antiguos de matemáticas permite: extraer información sobre difusión y evolución de los saberes en una época determinada, interpretar fenómenos que tienen relación con los procesos de enseñanza-aprendizaje (representación, concepciones, aplicaciones), etc. (Citado en González y Sierra, 2004)

Braga y Belver (2014) formulan tres funciones que realizan los libros de texto en el marco del desarrollo curricular basándose en varios autores como Puelles y Torres. La primera función que encontramos es que realizan una determinada selección cultural, ya que transmiten la percepción que se tiene sobre la realidad en el momento de actualidad que se encuentran, “representando el saber oficial”. Otra de sus funciones es que se definen como productos de consumo, han sido utilizados a lo largo de la enseñanza tradicional como un material imprescindible en la escuela, y que, a pesar de los programas de préstamo, se siguen comercializando y produciendo. La última de las funciones propuestas, se refiere a que los libros de texto se convierten en el currículum real, el libro de texto se ha convertido en un producto escolar específico en el que se materializa el currículum en todas sus dimensiones (Escolano, 1997). Se les sigue considerando como un elemento esencial a nivel de concreción curricular en las aulas y para el docente.

Por último, González y Sierra (2004, p. 389) exponen otras funciones esenciales de los libros de texto “como objeto de estudio, como material de consulta, como registro de las actividades del alumno, como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver...”

CAPÍTULO II: ANÁLISIS DE CONTENIDO DE LOS ALGORITMOS DE LA MULTIPLICACIÓN

Como hemos tratado en el capítulo anterior, el análisis didáctico comienza por el análisis de contenido. Definido como un instrumento que nos va a permitir estudiar los contenidos de matemáticas escolares que se pretenden trabajar y su significado. Además, este análisis ayudará posteriormente al docente a marcar las expectativas de aprendizaje para diseñar las tareas basadas en las demandas cognitivas (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008).

Para ello, a lo largo de este capítulo, comenzaremos explicando fugazmente las etapas que siguen los alumnos en el aprendizaje de las operaciones, donde una de ellas nos lleva a la contextualización del término algoritmo, refiriéndonos seguidamente al objeto de estudio nuestro, que es el de la multiplicación; para terminar, describimos diferentes contenidos y métodos en la realización y práctica de este.

II.1. FASES EN EL APRENDIZAJE DE LAS OPERACIONES

Tal y como nos proponen Castro, Rico y Castro (1988), existen una serie de fases o etapas que seguimos en el proceso de aprendizaje de cada operación, ya sea en la suma, la resta, la multiplicación o la división. Estas etapas se dividen en seis, siendo la etapa del algoritmo la quinta según lo que estos autores nos muestran.

En primer lugar, encontramos la **etapa de las acciones** y transformaciones que se realizan en diferentes situaciones numéricas, como por ejemplo en la suma agregar o desagregar; en el caso de la multiplicación sería necesario adquirir unas nociones numéricas previamente a estas acciones, incluyendo las de la suma.

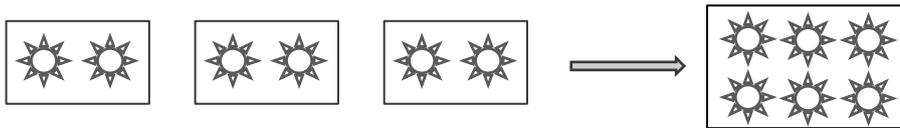
En una **segunda fase** encontramos **los modelos** que son las imágenes o esquemas que se crean partiendo de las situaciones numéricas de la etapa anterior. En el caso de la multiplicación siguiendo las propuestas de estos autores encontramos algunos ejemplos:

- *Modelo lineal*: En este modelo se utiliza una línea o recta numérica, donde aparecen representados los números necesarios para la realización del producto $n \times a$, que significa n veces de a , el resultado es el último punto al que se accede.



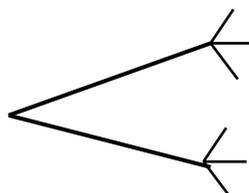
- *Modelos cardinales*: Como por ejemplo:

1. La suma reiterada de grupos de objetos iguales, por ejemplo 2×3 :



2. Producto cartesiano, escogiendo dos colecciones de objetos, para la multiplicación 2×3 , formar todos los pares posibles dentro de un cuadro.

- Entre los *modelos combinatorios* encontramos el ejemplo del modelo de árbol, se realiza un esquema ramificado. Desde un punto de partida nacen varias ramas que a su vez nacen otras de ellas, siempre el mismo número, como en el ejemplo siguiente de 2×3 .



- *Modelo con medida:* En este caso el modelo usa un material complementario como son las regletas de Cuisenaire, para realizar un producto como el de 2×3 , en primer lugar, escogeríamos 3 regletas con la longitud de 2 y se colocan una seguida de la otra de forma lineal. Para saber el valor de la longitud de esas regletas habrá que buscar una que tenga esa medida en este caso la regleta de 6.



Una **tercera etapa, la simbolización**. A través del trabajo con modelos llegamos a un nivel más abstracto que es el nivel operatorio. Por tanto, se establece una relación entre los números que proporciona la operación usando la expresión simbólica, en el caso de la multiplicación, se expresa utilizando los siguientes símbolos entre los números: $7 \times 2 = 14$.

Después llega el momento de los **hechos numéricos**, consiste en saber el número que nos falta, que se obtiene de la relación de otros dos números, como en 7×2 , el número sería el 14. En esta cuarta etapa se pretende el aprendizaje de estos hechos numéricos, llegando a la creación de unas tablas, como es el caso de las tablas de multiplicación.

La **quinta etapa** es aquella en la que con los conocimientos anteriores y siguiendo unas normas básicas establecidas se calcula el resultado de la operación, o lo que es lo mismo el desarrollo del **algoritmo**, que hablaremos más extensamente en el siguiente apartado del capítulo.

Por último, la **sexta etapa** es la utilización de estas operaciones, es decir, la **resolución de problemas**. Aunque no necesariamente, esta etapa debe ser la última en realizarse, ya que la resolución de problemas va más allá de los problemas aritméticos con operaciones.

II.2. NOCIÓN DE ALGORITMO

Llegados a este punto retomaremos la descripción de algoritmo, partiendo de la siguiente definición:

“Un algoritmo es una prescripción, una orden o sistema secuenciado de órdenes que encadena una serie de operaciones elementales que llevan desde los datos iniciales al resultado” (Gairín y Sancho, 2002, p. 83).

Aunque estos autores podrían acercarse a la definición de algoritmo según Gallardo (2004), la noción de algoritmo abarca más contenido del expuesto ahí, como la naturaleza de los elementos que intervienen, el tipo de reglas elementales involucradas o la clase de operaciones ejecutables. Resulta complicado encontrar una explicación exacta que pueda ser aceptada y aprobada.

Según Krimitsi (1978) un algoritmo comprende las siguientes propiedades: la *nitidez*, lo que nos indica que el algoritmo es un proceso mecánico; la *eficacia*, siguiendo unos pasos simples y finitos se llega a los resultados esperados y la *universalidad*, donde cada algoritmo se pueda utilizar en todos los problemas de un tipo (como se cita en Castro, Rico y Castro, 1988)

Para ser más concretos, en la definición de algoritmo, Usiskin (1998) propone tres categorías que abarcan los procedimientos algorítmicos que se presentan en el aula de matemáticas (como se cita en Gallardo, 2004):

- *Algoritmos aritméticos*: como los de columnas para sumar, restar, multiplicar y dividir números de varios dígitos entre otros.
- *Algoritmos de álgebra y cálculo*: como los procedimientos para resolver ecuaciones lineales e inecuaciones, integrales definidas...

- *Algoritmos de dibujo*: como para hacer gráficos de barras o de sectores, representar funciones...

Esta clasificación nos permite centrarnos en los algoritmos aritméticos, más concretamente en el de la multiplicación, ya que es el contenido que queremos trabajar en nuestra propuesta de enseñanza. De ahí la siguiente aclaración:

“Multiplicar es reiterar una cantidad, en su nivel más intuitivo. Los dos términos del producto responden a contextos diferentes; uno de ellos es la cantidad que se repite, multiplicando[...].El otro factor nos dice las veces que se repite la cantidad inicial, multiplicador[...] mucho más abstracto que el anterior y por eso mismo se debe simbolizar de inmediato” (Castro E., Rico, Castro E., 1988, p.139-140).

Una vez aclarado en qué consiste multiplicar, nos centraremos en la descripción del algoritmo de la multiplicación estándar escrito, que es el más conocido y el que se trabaja en las aulas de Primaria. Epistemológicamente, al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales se le considera un procedimiento de cálculo con una sintaxis de manera clara, que actualmente se reduce a la clásica y extendida representación en columnas, más concretamente la colocación de ambos factores en diferentes filas contiguas, situando el número mayor arriba y siempre alineados a la derecha (Gallardo 2004).

Finalmente, su cálculo se lleva a cabo utilizando las cifras del 0 al 9, el valor posicional, el agrupamiento multiplicativo, las tablas de multiplicar y el algoritmo estándar escrito de la suma de números naturales (Gómez 1999).

Desde otro punto de vista, Maza (1991) plantea una serie de ideas necesarias para tener en cuenta como un contexto primario para después llegar a construir y utilizar el algoritmo de la multiplicación. Él considera que antes de su ejecución, es necesario unos

requisitos fundamentales previos basados en una perspectiva conceptual, dichos requisitos son los siguientes:

- *Memorización de los hechos multiplicativos básicos*, ya que un conocimiento escaso de los mismos nos llevará a cometer grandes errores en la ejecución del algoritmo.
- *La descomposición de un número por el valor posicional de sus cifras*, esto significa que en el caso de la multiplicación de 45×3 , se distinguirán dos pasos, uno el multiplicar 5×3 y después 40×3 . El control de esta descomposición por parte del alumno evitara posibles dificultades futuras.
- *La multiplicación por potencias de diez*, cuando el alumno domine las multiplicaciones $A \times 10$, $A \times 100$ siendo A un número desde 1 a 10, le ayudará a entender una parte esencial del algoritmo.
- *La multiplicación por múltiplos de diez y sus potencias*, además de su uso a multiplicaciones por diez, cien, gracias a la propiedad asociativa se puede utilizar en multiplicaciones, por veinte, por treinta, doscientos, trescientos etc.
- *Dominio de las propiedades multiplicativas*, tanto la propiedad conmutativa como la asociativa y distributiva constituyen la base principal del algoritmo de la multiplicación de dos números con varios dígitos.

II.3. CÁLCULO DEL ALGORITMO DE LA MULTIPLICACIÓN

Una vez contextualizado el algoritmo, nos centraremos en el cálculo habitual del algoritmo de la multiplicación siguiendo la propuesta de Cid, Godino y Batanero (2003).

En la realización de la técnica escrita que se conoce y se enseña habitualmente, se siguen unos pasos o reglas, que son las siguientes, veamos el ejemplo con la siguiente multiplicación 32×3 :

1. Se escoge de los factores dados como multiplicando el número mayor. Se escribe el multiplicando y debajo el multiplicador, que obviamente es el número menor, alineando las cifras en columnas por unidades, decenas... Después se dibuja una raya horizontal debajo del multiplicador.

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

2. Si el multiplicando o multiplicador son números acabados en ceros se suprimen primeramente y, al finalizar el algoritmo, al resultado obtenido se le añaden los ceros de ambos, de multiplicando y multiplicador.
3. Se elige la primera cifra significativa del multiplicador empezando por la derecha (en este caso el 3) y se multiplica por la primera cifra del multiplicando (columna de las unidades), también por la derecha (en este caso el 2).

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

4. Si el resultado de ese producto es menor que 10 se escribe debajo de la raya ($2 \times 3 = 6$). Si es mayor o igual que 10 se escriben las unidades debajo de la raya (el 6) y la cifra de las decenas (llevada) se guarda para añadirla a la operación siguiente.

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 3 \\ \hline 6 \end{array}$$

5. Se pasa a multiplicar la misma cifra del multiplicador por la cifra siguiente del multiplicando (la de las decenas) (3×3) y sumándole la llevada si existe. La cifra de las unidades del resultado se escribe bajo la raya ($3 \times 3 = 9$), a la izquierda de la cifra

ya escrita y la cifra de las decenas, si existe, se guarda para incorporarla al producto siguiente si hubiera centenas por las que multiplicar.

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 3 \\ \hline 96 \end{array}$$

6. Se continúa el procedimiento hasta llegar a la última cifra del multiplicando. El resultado de esta operación se escribe íntegro debajo de la raya.

II.4. DIFERENTES MÉTODOS EN EL ALGORITMO DE LA MULTIPLICACIÓN

Además de la técnica vista anteriormente, existen otros métodos en la realización del algoritmo, y que serán descritos a continuación.

Maza (1991) nos expone los principios de un método nacido en Holanda a principios de los ochenta llamado Wiskobas, que pretende contextualizar al alumnado previamente antes de conocer y realizar el algoritmo de la multiplicación, este método es distinguido por las siguientes características:

- Primeramente, se parte de un contexto de problemas que reflejen situaciones cotidianas, más que de ejercicios numéricos.
- Para darle solución al problema, comenzará por el concepto de suma reiterada para después utilizar métodos multiplicativos. Aquí unos ejemplos (véase Figura 2):

1) Adición reiterada:

$$\begin{array}{r}
 14 \\
 14 \\
 14 \\
 14 \\
 + \dots\dots\dots (20 \text{ veces}) \\
 14 \\
 \hline
 280 \text{ litros}
 \end{array}$$

2) Adición reiterada separando decenas y unidades:

$$\begin{array}{r}
 10 \\
 10 \\
 10 \\
 10 \\
 + \dots\dots\dots \\
 \hline
 200
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 \\
 4 \\
 4 \\
 4 \\
 + \dots\dots\dots (20 \text{ veces}) \\
 4 \\
 \hline
 80
 \end{array}$$

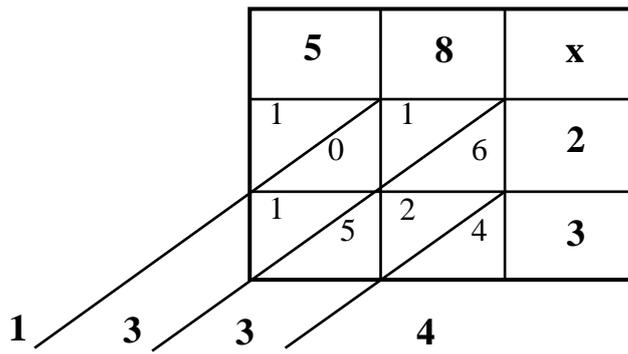
$200 + 80 = 280 \text{ litros.}$

Figura 2. Ejemplo de adición reiterada que propone este método.

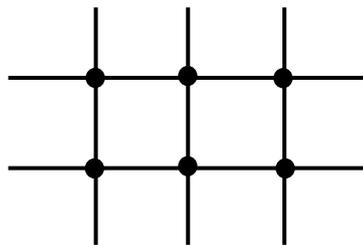
- Para aumentar y avanzar en la esquematización multiplicativa de la suma reiterada, es esencial el dominio de las multiplicaciones por diez y por cien.
- El cálculo debe barajar varias opciones, no solamente hay que saber realizar la habitual, ayudándose de las propiedades multiplicativas.

Gómez (1999) tiene otras propuestas para la ejecución del algoritmo de la multiplicación entre las más destacadas encontramos las siguientes:

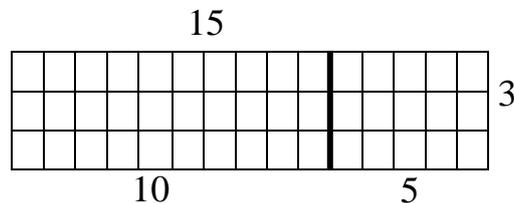
- *El enrejado*, también llamado en celosía, isabelino o musulmán, porque fue utilizado por Karaji, un matemático persa del siglo X. También se usó en Europa hasta el siglo XVI. El algoritmo en sí consiste en escribir el multiplicando en la rejilla superior y el multiplicador en la columna de la derecha. Las casillas en las que se ha dividido el rectángulo se dividen a su vez en decenas y unidades, escribiendo ahí los resultados de los productos de cada cifra. El resultado final se logra sumando en diagonal los ribetes de izquierda a derecha.



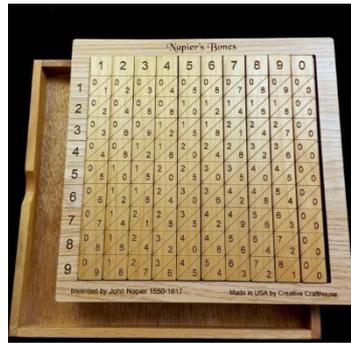
- *El retículo*, el resultado de la multiplicación se obtiene por el número de cruces entre líneas. Veamos con la multiplicación 2x3.



- *La cuadrícula*, se trata de dividir el rectángulo principal en cuadros más pequeños según el número de los factores a multiplicar. Por ejemplo, en 15x3.



- *Las regletas o rodillos de Neper*, para la realización del algoritmo es necesario un material que se compone de unas regletas o rodillos con las tablas de multiplicar de cada cifra del 0 al 9 escritas en ellas. Después estas regletas deben encajar en una base hecha de madera o cartón donde se introducirán las regletas de los números que se quieren multiplicar, por ejemplo, si queremos multiplicar 35x8, escogeremos las regletas del 3 y del 5 las colocaremos en el encajable de madera y nos iremos a la fila 8, y sumaremos como en el método del enrejado en diagonal para conseguir el resultado.



Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

- *La multiplicación egipcia*, para su cálculo se hacían dos columnas colocando en la primera, con la unidad al mando, los dobles y en la otra los dobles del multiplicando. En la siguiente imagen se explica la multiplicación 18x5.

Notación			
Egipcia		Indoarábica	
	○	1	18
	○○○	2	36
	○○○○○○	4	72
	○○○○○○○○○	5(4 + 1)	(18 + 72)90

- *La multiplicación rusa o campesina*, en esta se hacen tres columnas, una de las columnas es para ir escribiendo los dobles del multiplicando a la izquierda, otra en medio para escribir las mitades del multiplicador y cada vez que sale impar se apunta en la última columna un 1, finalmente el resultado se obtiene sumando los dobles que están marcados con los unos de la primera columna. Tomamos como ejemplo 12x15.

0	12	15
0	6	30
1	3	60
1	1	120

$$60 + 120 = 180$$

Método ABN

El nombre de este método de enseñanza se forma a partir de las siglas de la expresión “método abierto basado en números”. Su creador, Jaime Martínez Montero, opina que las aulas necesitan un cambio metodológico en la enseñanza de las matemáticas, instaurando así este método que está en auge desde hace unos años. Sin embargo, es un método también criticado por no atender el nivel madurativo de cada alumno, ya que este necesita de gran dominio en la descomposición y composición de números para poder ejecutar los algoritmos y no todos los alumnos llegan al nivel exigido. Al mismo tiempo este método se centra exclusivamente en numeración y operaciones, sin prestar gran importancia a otros ámbitos de las matemáticas, como la resolución de problemas.

El método ABN se basa en la descomposición polinómica de los números en sistema decimal. Para manejar los algoritmos el niño debe dominar ciertas propiedades numéricas a través del uso de material manipulativo y la composición y descomposición aditiva, realización de agrupaciones y repartos, etc.

A continuación, trataremos cómo se desarrolla el algoritmo de la multiplicación según el método ABN: partiendo de la base de una rejilla con tres columnas, en la primera columna escribiremos la descomposición del multiplicando en unidades, decenas, centenas... y en la siguiente columna multiplicaremos cada número de la descomposición por el multiplicador, sumando finalmente los resultados que salgan de cada uno, y escribiéndolo en la tercera columna, véase en el caso de 358×5 .

300	1500	
50	250	1750
8	40	1790

CAPÍTULO III: ASPECTOS COGNITIVOS SOBRE LOS ALGORITMOS DE LA MULTIPLICACIÓN

III.1. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

El currículo aragonés en su Orden de 16 de junio de 2014 revela que “lograr una verdadera alfabetización numérica no es sinónimo de dominio de los algoritmos de cálculo escrito. Es preciso desplazar esta prioridad tradicional en el tratamiento escolar de las Matemáticas [...] el énfasis se sitúe en el proceso, su adecuada planificación y ejecución, la aproximación al método científico y el desarrollo de actitudes básicas para el trabajo matemático”.

Siguiendo las directrices marcadas por el currículo, las expectativas de aprendizaje se sitúan en los siguientes objetivos, criterios y estándares comenzando por el nivel de 1º hasta 3º de Educación Primaria, tal y como muestra la siguiente tabla.

Curso 1º Bloque 2: Números	Crt.MAT.2.8. Conocer y utilizar algoritmos estándar de suma y resta de números naturales hasta la centena en la resolución de problemas en el entorno escolar y familiar.	Est.MAT.2.8.1. Utiliza algoritmos estándar de suma, resta de números naturales hasta la centena en la resolución de problemas en el entorno escolar y familiar.
		Est.MAT.2.8.12. Utiliza estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta en situaciones de la vida cotidiana.
Curso 2º Bloque 2: Números	Crt.MAT.2.8. Conocer, utilizar y automatizar algoritmos estándar de suma y resta de números naturales hasta el millar en la resolución de problemas en el entorno escolar y familiar y la vida cotidiana.	Est.MAT. 2.8.1. Utiliza y automatiza algoritmos estándar de suma, resta de números naturales hasta el millar en la resolución de problemas en el entorno escolar y familiar y la vida cotidiana.
		Est.MAT. 2.8.5. Construye las tablas de multiplicar del 2 del 5 y del 10 utilizándolas para realizar cálculo mental.

		Est.MAT.2.8.12. Utiliza estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta, dobles y mitades en situaciones del entorno inmediato
Curso 3º Bloque 2: Números	Crt.MAT.2.8. Conocer, utilizar y automatizar algoritmos estándar de suma, resta y multiplicación de números naturales hasta la decena de millar en la resolución de problemas de situaciones cotidianas.	Est.MAT.2.8.1. Utiliza y automatiza algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación de números naturales hasta la decena de millar en la resolución de problemas de situaciones cotidianas.
		Est.MAT.2.8.5. Construye y memoriza las tablas de multiplicar, utilizándolas para realizar cálculo mental.
		Est.MAT.2.8.12. Utiliza estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta, multiplicación y división por una cifra, explicando de forma oral el procedimiento seguido.

III.2. DIFICULTADES Y ERRORES

Cuando hablamos del aprendizaje de las matemáticas surge un concepto muy ligado a él, las dificultades que el alumnado presenta en ese proceso. Estas dificultades pueden aparecer por diversos motivos como por ejemplo las condiciones en las que se encuentra el alumno, por situaciones externas a él como la propia naturaleza de las Matemáticas o también debido a la metodología de enseñanza y la condición del profesor (Carrillo, 2009).

En cuanto a las dificultades que pueda crear la naturaleza de las matemáticas tendrá que ver con el nivel de abstracción de los conceptos que se pretenden enseñar y si la introducción de estos está contextualizada o no a situaciones cotidianas y habituales del alumno. Asimismo, la existencia de dificultades en la interiorización y comprensión de los conceptos dependerá en gran medida de la operatividad que tengan en los alumnos, si los pueden aplicar en contextos habituales para ellos.

Otro constituyente a tener en cuenta en estas dificultades sería el lenguaje matemático que se use a la hora de entender un proceso o concepto nuevo. La utilización de

un lenguaje complejo propio de las matemáticas puede tener como consecuencia importantes errores y dificultades en el alumnado. Entonces, es el docente y su condición, el que en gran medida adopte una metodología adecuada para las características de sus estudiantes, partiendo de sus intereses y despertando la curiosidad y motivación por el estudio de conceptos matemáticos.

Dado que el contexto en el que nuestro trabajo de investigación se desarrolla en torno a la multiplicación, a continuación, se presentan diferentes dificultades de aprendizaje que se suelen cometer en la práctica de esta. Martínez (1993, p. 141-142), nos propone estas dificultades desde cuatro perspectivas (citado en Cid, Godino y Batanero, 2003):

- *Vocabulario y conceptos*: una de las palabras o concepto que puede crear mayor confusión es “producto”, ya que el alumnado asocia otro significado diferente a un resultado del cálculo de varios números. Además, los términos “cada”, “a cada uno”, “para cada uno”, etc. tienen un sentido que, normalmente, no ha sido trabajado por los niños con anterioridad.
- *Nivel de abstracción*: Cuando el niño se enfrenta a la multiplicación, se encuentra con dos números o factores, uno de ellos se le identifica como el multiplicando, que es un número que indica la medida de una cantidad de magnitud, mientras que el otro número, el multiplicador nos dice las veces que se repite la cantidad inicial. A esto hay que sumarle que el resultado puede ser una cantidad de un medio diferente de los factores. Todo esto supone un nivel de generalidad o abstracción superior y por tanto de origen de dificultades en el proceso de estudio.
- *Dificultades en operaciones*: al considerar que una multiplicación es un conjunto variado de multiplicaciones que se escalonan y se combinan de acuerdo con unas reglas específicas. Este proceso queda notablemente oscurecido en el algoritmo

habitual al suprimir pasos intermedios, lo que sin duda es una fuente de dificultades y errores.

- *Solución de problemas:* varios estudios confirman que a la hora de buscar una operación en la solución de un problema los alumnos reconocen la suma y la resta con mayor facilidad que la multiplicación debido a los tipos de cantidades que intervienen como factores en el algoritmo. Por otro lado, parece que resuelven mejor las situaciones multiplicativas de razón que las de comparación, resultándoles la de combinación más difíciles de resolver que las otras.

Otro término muy relacionado a las dificultades, y que proviene de ellas, es el concepto de error. Es frecuente, que estos aparezcan de manera sistemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

En referencia al algoritmo de la multiplicación Bermejo (2004) explica que una de las causas de los errores más cometidos en la resolución del mismo, viene de la falta de comprensión por parte del alumnado en los pasos mecánicos que sigue para calcularlo.

Por su parte este autor clasifica en tres los errores más cotidianos que cometen los alumnos:

- *Errores en el valor de la posición del número:* esto ocurre cuando el estudiante no coloca los números en las columnas adecuadas por su falta de comprensión del valor de la posición del número.
- *Errores en los pasos del algoritmo:* omitir algún paso en su realización como por ejemplo no sumar los productos parciales en la multiplicación, o cambios de un paso por otro.

- *Errores de cálculo*: son los cometidos por los alumnos cuando cometen fallos numéricos al operar con las cantidades, como por ejemplo el cálculo de las tablas de multiplicar.

García y Pacheco (2012) formulan otros errores comunes que se cometen en la ejecución del algoritmo de la multiplicación:

- Errores relacionados con contar, como por ejemplo, contar para lograr el producto o repetir la tabla hasta llegar al número que se ha de multiplicar.
- Errores afines a la llevada, como el agregar el número que se lleva o llevar un número erróneamente, olvidarse de la llevada.
- Procedimientos defectuosos, tal que los alumnos usen el multiplicando como multiplicador, o colocar los factores erróneamente o confundir productos cuando el multiplicador tiene dos o más cifras.
- Errores en el proceso, combinar pasos de otros algoritmos como el de la suma o la resta, fallos al escribir o leer los productos, multiplicar dos veces la misma cifra, invertir las cifras de los productos etc.

III.3. OPORTUNIDADES

Varios autores plantean numerosas propuestas y aspectos necesarios en la enseñanza del algoritmo de la multiplicación, hablaremos de los planteamientos que nos ofrecen tres de ellos.

En primer lugar, Fernández (2013) recomienda que antes de empezar con el algoritmo directamente y aprender los pasos a seguir es necesario un trabajo previo, como realizar juegos para aprender la secuencia numérica, ejercicios de agrupamiento, de cálculo mental etc. Seguidamente intentar que los alumnos comprendan el algoritmo de la

multiplicación antes de empezar a automatizar los pasos que lleva. También propone la utilización de materiales concretos, que los alumnos puedan manipular, como por ejemplo juegos de regletas, bloques lógicos, bloques multibase, cubos, ábacos... Por último, el papel del docente es primordial, se encargará de diseñar las tareas progresivamente, analizando detenidamente cada paso del algoritmo para lograr una correcta colocación de los números. Para que los alumnos puedan utilizar las tablas correctamente es conveniente que el docente les enseñe a construirlas más que a memorizarlas, proporcionando al alumnado diferentes procedimientos para la resolución del algoritmo mediante ensayo y error.

Bermejo (2004) aconseja que sean los propios alumnos los que recorran el camino del algoritmo de la multiplicación desde situaciones concretas y fenómenos en los que esta operación está implicada hasta los conceptos más abstractos. Primeramente, con actividades manipulativas usando material concreto, seguidamente actividades en situaciones figuradas como son las representaciones en papel, después expresar conceptos de forma verbal y por último enunciarlos simbólicamente. Siendo siempre el alumnado el protagonista de su aprendizaje participando de manera activa en él. Entre los recursos que plantea, nombra los siguientes “Las regletas de Cuisenaire o números en color que constituyen un modelo de medida para los números, permiten trabajar el producto. Con el ábaco se realizan las operaciones de multiplicar [...] lo que contribuye a dar sentido a dichos números. Juegos de mesa en los que las reglas del juego obligan a realizar los cálculos de multiplicación [...]. El uso adecuado de la calculadora básica puede potenciar la comprensión de los conceptos involucrados en la estructura multiplicativa”.

Finalmente, García y Pacheco (2012) consideran primordial tener en cuenta una serie de principios básicos en la ejecución del algoritmo, entre los que encontramos:

- Secuenciación precisa del contenido.

- Implicación del alumno.
- Control específico del profesor.
- Feedback concreto.
- Enfatizar habilidades prerequisite.
- Instrucción explícita en la autorregulación en el uso de las estrategias.

CAPÍTULO IV: ESTADO DE LA ENSEÑANZA DE ALGORITMOS DE MULTIPLICACIÓN

A lo largo de este capítulo presentaremos cómo se encuentra la enseñanza de la multiplicación en el aula. En primer lugar, encontramos el análisis de la enseñanza que realizan dos libros de texto de diferentes editoriales y cómo presentan los contenidos. Para terminar, mostramos la opinión de varios autores sobre la enseñanza tradicional que todavía sigue en algunas aulas y las propuestas alternativas que proporcionan.

IV.1. ANÁLISIS LIBRO DE TEXTO DEL AULA

Este apartado lo comenzaremos analizando el libro de texto que se usamos en el centro en el que hemos realizado la experimentación y que imparto docencia.

El libro que analizaremos pertenece a la editorial Edelvives, proyecto Superpixépolis, editado en el año 2015. En primer lugar, hablaremos de cómo presenta y trabaja la multiplicación sin llevada y seguidamente hablaremos del trato que le da a la multiplicación con llevada.

En ambos análisis seguiremos una estructura prestando atención a varios puntos importantes. Inicialmente, comenzaremos con una descripción general de la estructura de las páginas y su contenido. Hablaremos también del contexto, situaciones y características en las que se presenta el algoritmo, después de las tareas que propone, por último, una pequeña síntesis sobre lo analizado anteriormente.

El libro de texto de 2º de Educación Primaria hace su presentación del algoritmo de la multiplicación sin llevada en las páginas 188 y 189 del libro, en el tema 10. Esto nos sitúa en el tercer trimestre del curso.

Partiendo de que en los temas anteriores se han presentado y trabajado las tablas de multiplicar, el libro comienza la presentación de la multiplicación sin llevada con un pequeño recuadro, marcando los pasos a seguir para calcularla. Seguidamente nos propone cuatro tareas o ejercicios a resolver y calcular.

Multiplicación sin llevadas

OPERACIONES

Para calcular cuántos ovillos hay, multiplicamos 2×13 .

Multiplico por 2 las unidades. Multiplico por 2 las decenas.

$$\begin{array}{r} \text{DU} \\ 13 \\ \times 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{DU} \\ 13 \\ \times 2 \\ \hline 26 \end{array}$$

Figura 3. Presentación de la multiplicación sin llevada

La presentación se realiza sin un contexto o situación significativa para el alumno, directamente lo hace a través del cálculo de una multiplicación que sale de un dibujo, utilizando un sistema de representación por grupos, en este caso tal y como se ve en la Figura 3 con dos grupos de ovillos, con trece cada uno. Debajo aparecen los pasos a seguir y la multiplicación en vertical con el resultado, utilizando como apoyo, lenguaje escrito y unos círculos con puntitos marcando las unidades y decenas. Al parecer si leemos el título de la página podríamos saber qué es lo que se va a trabajar, pero el resto de información es muy

escueta, no utiliza ningún otro material o recurso que pueda servir de apoyo y el contexto es muy abstracto ya que no se basa en la utilidad y situaciones de la vida cotidiana del alumno.

1. Calcula las siguientes multiplicaciones y explica oralmente los pasos que has seguido.

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$$

2. Coloca en vertical y calcula el resultado de estas multiplicaciones.

$$\begin{array}{r} 34 \times 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \times 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \times 4 \\ \hline \end{array}$$

188 • ciento ochenta y ocho

3. Observa los ejemplos y calcula.

$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ 213 \\ \times 3 \\ \hline 639 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ 143 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ 54 \\ \times 2 \\ \hline 108 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ 72 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 202 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 123 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 41 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 84 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$

4. En una pastelería hay 4 bandejas con 122 bombones cada una. ¿Cuántos bombones hay en esas bandejas?



Solución: _____

Figura 4. Tareas para resolver

Las tareas que propone son cuatro ejercicios que aparentemente parecen del mismo tipo, de cálculo de operaciones, menos la última que es un problema. Aunque el ejercicio uno sí que plantea algo de interacción oral, el resto son muy rígidos siempre usando papel y lápiz, no da alternativa de otro material o de búsqueda de información externa. Son actividades donde la tarea principal es calcular la operación sin un contexto, siguiendo unos pasos repetitivos y el patrón que ofrece el libro. Incluso en el ejercicio tres sin ninguna explicación más que la observación, introduce las multiplicaciones sin llevada de tres cifras y otra multiplicación más con llevada (54x2), ya que, en esta última al multiplicar el dos por el cinco, el 1 del 10 es la llevada a las centenas. Esto puede crear confusión a los alumnos en multiplicaciones con llevada posteriores, como por ejemplo al multiplicar 25x2, escribiendo 410 como resultado, colocando el resultado de 5x2 en las unidades, olvidándose de la llevada a las decenas. El ejercicio cuatro a pesar de ser diferente por plantear un problema, no ofrece ningún apoyo visual u otro material manipulable para poder resolverlo, no utiliza ningún tipo de representación para la multiplicación, como por ejemplo por conjuntos o utilizando la suma reiterada. Todo ello aumenta el nivel de dificultad para interiorizar y comprender el algoritmo de la multiplicación.

En cuanto a la multiplicación con llevada he seleccionado la presentación del libro de la misma editorial, pero de 3º de Educación Primaria, ya que es un contenido que como marca el currículo se trabaja en este nivel. Sigue el mismo patrón que en el algoritmo sin llevada, un recuadro de ejemplificación y después seis ejercicios para practicar calculando multiplicaciones.

Multiplicación

! Elena tiene dos álbumes de fotos de planetas. Si cada álbum tiene 168 fotos, ¿cuántas fotos tiene en total?
 Multiplico 168×2 .

1 Multiplico por 2 las unidades y coloco la decena.

C	D	U
1	6	8
		$\times 2$
<hr/>		
		6

2 Multiplico por 2 las decenas y sumo la que me he llevado. Después, coloco la centena.

C	D	U
1	6	8
		$\times 2$
<hr/>		
	3	6

3 Multiplico por 2 las centenas y sumo la que me he llevado.

C	D	U
1	6	8
		$\times 2$
<hr/>		
3	3	6



Elena tiene 336 fotos en total.

Figura 5. Presentación multiplicación con llevada.

Aunque en esta ocasión comienza por el planteamiento de un problema a resolver, sigue estando descontextualizado, ya que sin saber lo que se va a trabajar expone un problema resuelto con los pasos explicados para solucionar esa operación. Estos pasos omiten información relevante para llegar a comprender por parte de los alumnos de dónde sale ese uno que me lo llevo y lo sumo en la columna que toque, tal y como muestra la Figura 5.

1 Copia en tu cuaderno estas multiplicaciones y calcula el resultado.

$\begin{array}{r} 37 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 65 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 194 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 468 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$
---	---	--	--

2 Coloca los factores en vertical y calcula el producto.

$\bullet 45 \times 8$	$\bullet 67 \times 7$	$\bullet 761 \times 5$	$\bullet 467 \times 4$
$\bullet 42 \times 9$	$\bullet 56 \times 3$	$\bullet 806 \times 6$	$\bullet 932 \times 6$

3 Escribe una multiplicación cuyos factores sean 4755 y 6. Después, calcula el producto.

4 Calcula en tu cuaderno el doble de cada uno de los siguientes números.

42	13	151
902	2 134	31 087

5 Calcula las siguientes multiplicaciones y ordena los resultados de menor a mayor.

$\bullet 1\,353 \times 4$	$\bullet 6\,721 \times 6$	$\bullet 3\,412 \times 3$
$\bullet 2\,567 \times 5$	$\bullet 7\,232 \times 7$	$\bullet 9\,863 \times 8$

6 Continúa esta serie en tu cuaderno.

7 Inventa un rap para explicar cómo se multiplica.

Figura 6. Ejercicios multiplicación con llevada.

Los ejercicios para resolver como muestra la Figura 6, pueden parecer diferentes en su planteamiento, sin embargo, en ejecución todos tienen como objetivo realizar operaciones de multiplicaciones en vertical siguiendo los pasos supuestamente explicados anteriormente. Son tareas repetitivas donde se pretende que los alumnos memoricen y mecanicen los pasos del algoritmo sin ver otras formas, recursos, materiales de resolver ese algoritmo, para llegar a su comprensión y fácil manejo.

IV.2. ANÁLISIS DEL SEGUNDO LIBRO DE TEXTO

Para analizar este segundo libro, vamos a seguir el mismo modelo que en el anterior. Por tanto, este libro corresponde a la editorial Edebé, proyecto pixel, editado en el año 2011. En este caso el libro de 2º de primaria nos presenta ambas la multiplicación sin llevada y con llevada.

La multiplicación sin llevada la presenta en las páginas 140 y 141 en el tema 10, perteneciente al segundo trimestre. En este caso presenta la multiplicación sin haber terminado de presentar todas las tablas de multiplicar, ya que va por la del 5 y el 6 en ese tema.

MULTIPLICAR POR DOS CIFRAS

3. Aprende cómo se multiplica por dos cifras.



En clase hemos colgado 3 murales con 23 astros en cada uno de ellos.

— ¿Cuántos astros hay en total en los murales?

$$23 \times 3$$

2 3	Multiplicamos el 3 por las unidades (3×3).
× 3	Multiplicamos el 3 por las decenas (3×2).
6 9	

En total hay astros.

Figura 7. Presentación de la multiplicación sin llevada.

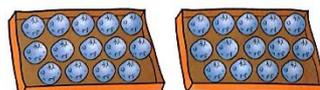
En este caso, la presentación de la multiplicación se sigue haciendo de forma escrita, aunque cambia con el título, este nos informa de lo que vamos a hacer y nos da una pequeña orden de cómo lo vamos a aprender. Aunque parte de una situación de un problema cotidiano, la contextualización de la multiplicación y el problema no es suficiente para ayudar a los alumnos a situarlos en lo que se va a aprender. Siguen apareciendo los pasos escritos de lo que hay que hacer, señalando las decenas en rojo y apoyándose de un dibujo visual que no da pie ni a poder contar o sumar reiteradamente los datos que dan del problema. Con lo que el apoyo visual no les sirve de mucho a los alumnos.

Seguidamente nos proponen cinco ejercicios para practicar la multiplicación, son repetitivos con el único fin de que los alumnos practiquen los pasos aprendidos para calcular las multiplicaciones, usando un aprendizaje memorístico. El único que varía es el ejercicio cinco que utiliza las agrupaciones y apoyo visual, estrategias que pueden ayudar a los alumnos a la comprensión de esas multiplicaciones, tal como se muestra en las Figuras 8 y 9. Son ejercicios que no dan pie a desarrollar otro tipo de estrategias para la comprensión de la multiplicación, ni otorgan otras posibilidades para hacer reflexionar al alumno o utilizar otros medios o recursos diferentes al papel y el lápiz.

4. Resuelve estas multiplicaciones y colorea los resultados con dos centenas.

1 4	7 2	6 1	1 0	4 3	5 2	2 1
× 2	× 3	× 4	× 2	× 2	× 4	× 3
□	□	□	□	□	□	□

5. Calcula el total de elementos de cada grupo de cajas.

	$= 3 \times 12 =$	$\begin{array}{r} 12 \\ \times 3 \\ \hline \square \end{array}$	planetas
	$= 4 \times 10 =$	$\begin{array}{r} 10 \\ \times 4 \\ \hline \square \end{array}$	soles
	$= 2 \times 14 =$	$\begin{array}{r} 14 \\ \times 2 \\ \hline \square \end{array}$	lunas

140 ciento cuarenta

Figura 8. Ejercicios 4 y 5.



6. Mide las cintas con la regla y, a continuación, multiplica el resultado.

	□ cm	□ × 3 = □ cm
	□ cm	□ × 3 = □ cm
	□ cm	□ × 3 = □ cm

7. Calcula las multiplicaciones y relaciona las que tengan el mismo resultado.

$\begin{array}{r} 12 \\ \times 3 \\ \hline \square \end{array}$	$\begin{array}{r} 10 \\ \times 2 \\ \hline \square \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \\ \times 2 \\ \hline \square \end{array}$	$\begin{array}{r} 14 \\ \times 2 \\ \hline \square \end{array}$
3 × 8 = □	4 × 7 = □	4 × 9 = □	4 × 5 = □

8. Resuelve los problemas.

– El juguetero tiene cuatro cajas de naves espaciales. En cada caja hay 12 naves. ¿Cuántas naves tiene en total?

$\begin{array}{r} \square \\ \times 4 \\ \hline \square \end{array}$	
□ × 4 = □	El juguetero tiene □ naves espaciales.

– Un camión recorre 33 kilómetros durante 3 días para transportar una nave espacial. Lo hace durante 3 días. ¿Cuántos kilómetros recorre en total?

$\begin{array}{r} \square \\ \times 3 \\ \hline \square \end{array}$	
□ × 3 = □	El camión recorre □ kilómetros.

ciento cuarenta y uno 141

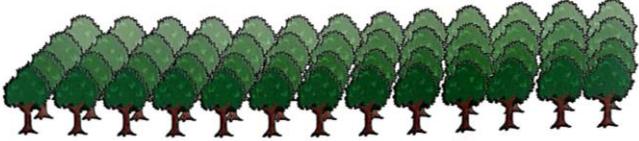
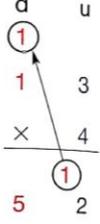
Figura 9. Resto de ejercicios planteados.

Por otro lado, la multiplicación con llevada se presenta en las páginas 186 y 187 en el tema 13, situado en el tercer trimestre, donde ya se han visto todas las tablas de multiplicar y la multiplicación sin llevada de dos y tres cifras de forma escrita.

A diferencia del otro libro de texto en la presentación de la multiplicación con llevada, tenemos primeramente el título con lo que vamos a aprender. Después sigue con el planteamiento de un problema a resolver sin contextualizar. Pero sí añade la diferencia de que el problema, se ayuda con la parte visual, ya que habla de filas y cada fila del dibujo tiene el número de árboles que se utilizan. Es un apoyo que el profesor puede utilizar para ver la multiplicación como suma reiterada y que los alumnos hagan grupos de diez rodeando en el dibujo y ver de dónde sale esa llevada. Está claro que es un planteamiento que dependerá del papel del profesor no tanto del libro, porque, además, seguidamente nos proporcionan los pasos y reglas a seguir numeradas en su ejecución. Sí que es verdad que los pasos son más comprensibles que los del otro libro y añaden uno más.

MULTPLICAR CON LLEVADAS

3. En una finca hay cuatro filas de árboles. En cada fila se han plantado 13 árboles. ¿Cuántos árboles hay en total?

- 1.º. Multiplicamos el 4 por las unidades ($4 \times 3 = 12 = 1 \text{ d } 2 \text{ u}$).
- 2.º. Colocamos la decena sobre las decenas.
- 3.º. Multiplicamos el 4 por las decenas ($4 \times 1 = 4$).
- 4.º. Sumamos el resultado con la decena anterior ($4 + 1 = 5$).

$13 \times 4 = 52$

En total hay árboles.

Figura 10. Presentación de la multiplicación con llevada.

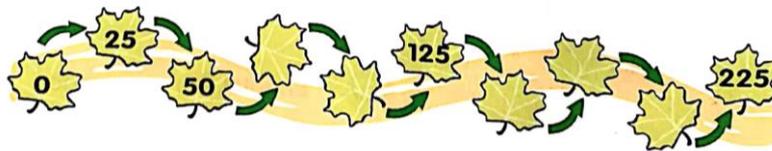
Después, siguiendo el modelo como en los ejemplos anteriores, el libro expone ocho ejercicios para practicar las pautas aprendidas. El ejercicio cuatro trata el cálculo de varias multiplicaciones de manera repetitiva y memorística, indicando dónde escribir la llevada. El ejercicio cinco trabaja la seriación a través del cálculo mental, sin comprender exactamente el fin que tiene este ejercicio en relación a la multiplicación. El resto de ejercicios siguen siendo multiplicaciones para practicar y memorizar. El único que varía un poco es el

ejercicio siete que pretende que los alumnos calculen el número de los factores y no el resultado final. Siguen siendo ejercicios donde limitan las posibilidades de desarrollar el pensamiento crítico en los alumnos y la motivación por aprender nuevos contenidos.

4. Resuelve estas multiplicaciones.

d u 1 5 2 × 2 — 1 □	d u 3 4 3 × 5 — □	d u 1 7 1 × 3 — □	d u 4 8 4 × 6 — □	d u 5 6 5 × 2 — □	d u 7 2 7 × 7 — □
------------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

5. Completa la serie.

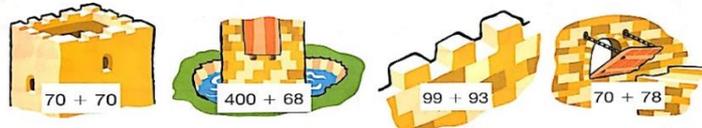


186 ciento ochenta y seis

Figura 11. Ejercicios 4 y 5 multiplicación con llevada.

6. Resuelve estas multiplicaciones y relaciona cada resultado con la zona del castillo correspondiente.

6 4 × 3 — □	3 7 × 4 — □	2 8 × 5 — □	5 2 × 9 — □
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------



7. Completa estas multiplicaciones y resuelve:

2 5 × 6 — □	3 4 × □ — 1 0 2	5 □ × 2 — 1 0 6	6 7 × □ — 3 3 5
----------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

8. Elige el número mayor de cada piscina y calcula las multiplicaciones.

 $\begin{array}{r} \square \\ \times 6 \\ \hline \square \end{array}$	 $\begin{array}{r} 1 3 \\ \times \square \\ \hline \square \end{array}$
--	--

ciento ochenta y siete 187

Figura 12. Ejercicios 6, 7, y 8 de la multiplicación con llevada.

Tras el análisis de las propuestas de ambos libros, observamos que la introducción del algoritmo no parte de un contexto familiar al alumnado. Un ambiente cotidiano y cercano

al alumno nos permitirá despertar la curiosidad y la motivación hacia la adquisición de nuevos contenidos.

Las tareas propuestas por los libros no permiten que los alumnos desarrollen otro tipo de habilidades más que la secuenciación de unos pasos dados sin razonamiento, ni comunicación alguna, utilizando como principal premisa la repetición. Asimismo, son tareas tan generalizadas, que no se adaptan a las características específicas que pueda tener cada alumno.

El planteamiento que nos ofrecen los libros de texto abarca la presentación de un contenido en dos páginas con apoyo únicamente visual a través de imágenes. Contenido que se queda pobre, ya que necesita de mucho más trabajo para que los alumnos lo interioricen dándole significado. Igualmente, no proporciona otras oportunidades de aprendizaje, en el que los alumnos puedan comunicar, ofrecer sus opiniones, ideas e interactuar entre ellos. Así como el poder usar material complementario (manipulable, digital, visual, experimental...). Llegando a la conclusión de que los libros de texto siguen mostrando un enfoque tradicional en la enseñanza y aprendizaje del algoritmo.

IV.3. LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN EN EL AULA

Son varios los autores que coinciden en varias ideas y opiniones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación y su tratamiento en la escuela.

Entre ellos Gregorio (2002, p. 115) cuestiona principalmente el papel del profesor en la enseñanza. Considera que su papel debe ser “más de mediador en la cooperación, de persona que dialoga para aprender, que de simple y tradicional instructor que trata a los alumnos/as como ignorantes a los que debe transmitir sus conocimientos”. Además, añade que explicar es un término en el que los docentes pensamos que significa lo mismo que

enseñar y de ahí los alumnos aprenden. Siendo la realidad muy distinta, los contenidos entran en los alumnos sin sentido alguno y siendo disfuncionales. Por tanto, tienen que ser los propios alumnos los que vayan construyendo poco a poco su aprendizaje para así adquirir los conocimientos nuevos desde un punto de vista práctico y aplicable en la resolución de problemas de su vida cotidiana y diferentes contextos educativos.

En su caso Iglesias (2005) reafirma la opinión anterior postulando las siguientes cuestiones:

¿Existe una realidad escolar y otra realidad sociocultural? Si la escuela debe preparar para la vida, ¿no se da una contradicción en los planteamientos a la hora de trabajar con nuestros alumnos la forma de cálculo en las operaciones básicas, un tanto distante de la vida real? ¿Cuánto tiempo se suele dedicar en los centros escolares a la realización de ejercicios repetitivos, con unas pautas estandarizadas, para terminar el maestro o maestra poniendo una B o una M, nada significativos para nuestros alumnos, en lugar de que trabajen la resolución de problemas, la búsqueda de estrategias funcionales de cálculo y el uso de materiales comunes en la vida diaria, como la calculadora o los programas a través del ordenador? (p.48)

Este autor considera que el rol del profesor debe cambiar, creando contextos y situaciones en el aula que permitan al alumnado desarrollar, buscar, experimentar y descubrir el conocimiento por ellos mismos, preparando a los alumnos para la vida real, utilizando los recursos que tienen a su alrededor, utilizando estrategias nuevas que lo son para el maestro también.

Lotero, Andrade y Andrade (2011) hacen una concreción hacia la enseñanza de la multiplicación, afirmando que los alumnos encuentran grandes dificultades de comprensión cuando la multiplicación se plantea desde la “enseñanza de su operatividad simbólica”. A priori, de esta manera, se consigue rápidamente la ejecución de las reglas pautadas en la

obtención del resultado en la multiplicación. Sin embargo, cuando el alumnado se enfrenta a situaciones o problemas en los que los datos o cantidades no son claramente perceptibles, no son capaces de buscar la operación, en este caso la multiplicación para resolverlo. Es decir, los niños demuestran la ausencia de significado que tiene el algoritmo tradicional escrito.

A estas críticas estos autores proponen unas alternativas a la enseñanza tradicional de la multiplicación.

Gregorio (2002) plantea unas situaciones desde el punto de vista constructivista que se resumen en las siguientes ideas:

- Presentar las operaciones en contextos propios del alumno a través de la resolución de problemas aritméticos y no con la utilización de hojas con operaciones repetitivas sin sentido y totalmente descontextualizadas.
- Utilizar el cálculo mental, las estimaciones y aproximaciones de resultados en las operaciones, como en la multiplicación.
- Prevaler el trabajo práctico, oral y la comprensión, más que el trabajo memorístico y repetitivo.
- Utilizar, manipular, construir y jugar con materiales y recursos del alrededor para crear nuevas estrategias en el cálculo y resolución de algoritmos y problemas aritméticos.
- Crear situaciones en las que el aprendizaje sea significativo para el alumno. A través de la experimentación, observación, reflexión o haciéndose preguntas. Un ambiente de especulación matemática y no de repetición mecánica en la ejecución del algoritmo.

- Considerar el error como punto de partida del aprendizaje, y sean los alumnos conscientes de ello, convirtiéndose en los protagonistas y no meros receptores de información.

Iglesias (2005) nos sugiere la utilización de otros recursos como el caso de la calculadora o el ordenador, como instrumentos cotidianos y al alcance de los alumnos. Su uso no menosprecia el lápiz y el papel, sino que se complementaría y serviría de apoyo en la realización de ciertas operaciones o pasos en los algoritmos, ya que los alumnos reciben gran presión en la ejecución de los algoritmos, como en el de la multiplicación, que deben empezar memorizando las tablas de multiplicar.

En último lugar Lotero, Andrade y Andrade (2011) nos proponen una serie de pasos a seguir para la “construcción conceptual de la multiplicación”. En primer lugar, crean una base para esta conceptualización por medio de agrupaciones. Los alumnos trataran de agrupar objetos para componer y descomponer cantidades. En segundo lugar, los encajamientos. Estos van a permitir que junto con los agrupamientos el alumnado aprende relacionando cantidades con grupos de objetos y probablemente pueda nivelar el invariante parte-todo, haciéndolo desde un punto de vista significativo, siendo consciente de las operaciones que realiza dándoles sentido y significado. En tercer lugar, crear un buen significado de la palabra “veces”, es decir, el alumno gracias a tomar la multiplicación como una acción que consiste en adicionar cantidades iguales de grupos de objetos e ir aumentándolas progresivamente de forma equitativa, el alumno construye y asimila el concepto “veces” como una sucesión progresiva. En cuarto y último lugar, crear correspondencia entre los dos factores que intervienen en la multiplicación. El alumno debe comprender que la multiplicación implica dos cantidades utilizadas en contextos cotidianos. Es importante que el niño logre comprender que la realización de una operación de multiplicación se configura en un contexto de vida en el que hay dos cantidades, utilizando

una de ellas como referencia. De esta manera la multiplicación cobra sentido realizarla y no juntar los dos números que me proporcionan en una multiplicación para obtener un resultado que le dará solución a un problema.

CAPÍTULO V: UNA SECUENCIA DE ENSEÑANZA PARA INTRODUCIR EL ALGORITMO DE LA MULTIPLICACIÓN

V.1. JUSTIFICACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

Este capítulo presenta el diseño de la propuesta que se llevará a cabo. En el marco del Análisis Didáctico el diseño concreto de la propuesta se enmarca, como hemos explicado en el primer capítulo, dentro del análisis de la instrucción.

La propuesta que se plantea a continuación pretende desarrollar y poner en práctica algunas de las ideas que se han ido explicando y postulando en los capítulos anteriores. El diseño de la propuesta surge tras el análisis de contenido y el análisis cognitivo que hemos realizado y que se ha presentado en los capítulos anteriores. Además, pretende presentar el algoritmo de la multiplicación de una manera diferente a la que los alumnos están acostumbrados, es decir, sin tareas repetitivas y memorísticas para la ejecución del mismo, alcanzando algunas de las premisas constructivistas que Gregorio (2002) expone.

Siguiendo las propuestas de varios autores como Bermejo (2004), Fernández (2013) proponen en el capítulo tercero, partiremos de las motivaciones y gustos de los alumnos junto con un contexto coherente en el aula, dándole un significado a este contenido nuevo y que pueda ser usado en la vida cotidiana del alumnado. En concreto se aspira a que los alumnos comprendan el algoritmo de la multiplicación desde un punto de vista donde le asignen significado y también a las diferentes manipulaciones simbólicas a través del uso de material manipulativo, en este caso los billetes de base estrictamente decimal.

Asimismo, la secuencia didáctica se ha diseñado siguiendo un orden en sus sesiones, desarrollándola paso por paso y con coherencia, es un planteamiento basado en las fases de aprendizaje que nos explican Castro, Rico y Castro (1988), en el capítulo segundo.

Por tanto, estos son los motivos por los que he intentado que el diseño sea una alternativa de enseñanza y aprendizaje diferente a la que suelen estar acostumbrados los niños.

El grupo en el que se lleva a cabo la secuencia de enseñanza pertenece al nivel de 2º de primaria y cuenta con 18 alumnos. Es un grupo diverso, y con niveles muy diferenciados. Ya que hay alumnos de diferentes nacionalidades (Rumanía, España, Portugal, Marruecos) y con características específicas, dos alumnos muestran déficit de atención e hiperactividad y dos con capacidad límite. Es un grupo que precisa de mucha atención y están en constante movimiento, de ahí que la secuencia didáctica esté diseñada entorno a sus características y necesidades.

Estamos trabajando en un proyecto, en el que hemos viajado a un país nuevo, inventado por los alumnos. Se pretende que, desde diferentes áreas, trabajemos varios aspectos del país, donde los alumnos vayan creando las tradiciones culinarias típicas, la bandera, festividades propias, patrimonio cultural... Desde la asignatura de matemáticas queremos trabajar la moneda y utilizarla en conjunto con el desarrollo del algoritmo de la multiplicación.

Para ello, los alumnos crearon sus propios billetes e inventaron nombres para el país y la moneda. A través de un proceso de votación popular, el país se llama Lenguido, la moneda son los carios y solo existen billetes de 1 cario y de 10 carios, esta elección se debe a que queremos que el material sea de base decimal, que permite trabajar apropiadamente la

descomposición polinómica decimal de los números y así evitar las bases auxiliares 2 y 5 que nuestro sistema monetario utiliza.

La temporalización se va a llevar a cabo entre el 16 y 24 de mayo durante siete sesiones. En la siguiente tabla se resume la temporalización y objetivo de cada sesión:

	DÍA	OBJETIVO PRINCIPAL
SESIÓN 1	16/5/2019	Repaso hechos numéricos y presentación del material.
SESIÓN 2	17/5/2019	Introducción del algoritmo de la multiplicación sin llevada, con el material manipulativo concreto.
SESIÓN 3	20/5/2019	Colocar los billetes y asociar una cantidad según la disposición de las cifras del algoritmo de la multiplicación, apoyándose en la suma reiterada para calcularlo.
SESIÓN 4	21/5/2019	Creación de enunciados de problemas matemáticos contextualizados, cuya resolución implique el uso de la multiplicación, y la ejecución del algoritmo sin llevada.
SESIÓN 5	22/5/2019	Introducción y reflexión sobre la ejecución del algoritmo con llevada, apoyándose en las estrategias aprendidas en las sesiones anteriores, usando exclusivamente el material concreto, los billetes.
SESIÓN 6	23/5/2019	Conocimiento de las reglas en la ejecución del algoritmo con llevada escrito, de forma tradicional o con los billetes.

SESIÓN 7	24/5/2019	Utilización del algoritmo de la multiplicación con y sin llevada, en un contexto real para los alumnos, ayudándose de las destrezas aprendidas anteriormente.
----------	-----------	---

V.2. METODOLOGÍA UTILIZADA EN LAS SESIONES

La metodología que abarcan todas las sesiones pretende que los alumnos interioricen procedimientos y conceptos matemáticos desde el punto de vista lúdico; partiendo de la base de la flexibilidad teniendo en cuenta los intereses y motivaciones de los alumnos. Además de propiciar la creación de situaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje que respondan a sus experiencias y necesidades desde un punto de vista funcional.

Siguiendo las propuestas que nos proponen los autores del capítulo cuarto (Iglesias, 2005; Gregorio, 2002). La maestra actuará en todo el proceso como guía y mediadora dando lugar a aprendizajes significativos. Su papel fomenta un ambiente de cooperación, tolerancia y apoyo mutuo. Si los estudiantes se sienten cómodos en el grupo, estarán más abiertos a aprender y pueden desarrollar actitudes más positivas hacia la práctica de tareas y conocimientos nuevos. Intentando crear situaciones de experimentación e investigación.

Tal y como se explica en el capítulo tercero, una de las mayores dificultades para los alumnos es el lenguaje matemático utilizado en el aula (Carrillo, 2009). La maestra será la encargada de usar un lenguaje comprensible para los alumnos tanto en explicaciones orales como en las tareas escritas.

Las actividades se han elegido de acuerdo con los intereses de los estudiantes adaptándose a su nivel, edad y gustos. Los propósitos de estas es que sean variadas,

originales y desarrollen la creatividad de los alumnos además de considerarlos como los personajes principales de su propio aprendizaje y desarrollo.

Todas las sesiones tienen una duración de una hora, aunque según se realice la experimentación este tiempo quizá se vea modificado.

El trabajo en grupo es uno de los principios metodológicos de la mayoría de las sesiones. Se pretende con ello que los alumnos trabajen en pequeño grupo o incluso en parejas, de esta manera el aprendizaje es más efectivo ya que incita a que todos los alumnos participen armonizando sus contribuciones y trabajar hacia un objetivo común. Considero que esta idea es esencial para el aprendizaje de los niños, desarrolla algunas estrategias: Cada miembro tiene una función, aprenden a trabajar juntos para lograr el objetivo de la actividad y que cada miembro debe ser responsable de su trabajo.

Además, los estudiantes, se sienten más seguros a la hora de realizar la actividad, cuando comparten sus dificultades, frustraciones e ideas con otros compañeros. Siempre surgen ideas que se complementan entre ellas.

Por último, como hemos visto en los capítulos tercero y cuarto son varios los métodos y autores, como el ABN, Bermejo (2004) o Fernández (2013) que consideran el uso de materiales y recursos manipulativos como gran ayuda en la adquisición y comprensión del algoritmo, de ahí que en esta propuesta hayamos creado nuestro propio material manipulativo, los billetes creados por los alumnos, que nos van a ser de gran utilidad a lo largo de varias sesiones.

V.3. SESIÓN 1

En esta sesión, pretendemos hacer un repaso previo a la introducción de los hechos numéricos. Esta fase, como se indicó en el capítulo segundo es previa a la fase del algoritmo. Por tanto, tiene unos *objetivos* principales que se basan en trabajar estos hechos numéricos a través del uso de las tablas de multiplicar entre otros:

- Repasar las tablas de multiplicar aprendidas con anterioridad a través del juego.
- Valorar el conocimiento de cada alumno sobre los resultados de las tablas de multiplicar y la adquisición de la multiplicación como suma reiterada.
- Repasar la multiplicación como suma reiterada de un mismo número.
- Introducir a los alumnos el material que se va a utilizar posteriormente a lo largo de todas las sesiones.

En cuanto a los *contenidos* a trabajar encontramos las tablas de multiplicar hasta el 10, la revisión de estas operaciones y la comprobación de la coherencia de las soluciones. El concepto de suma reiterada.

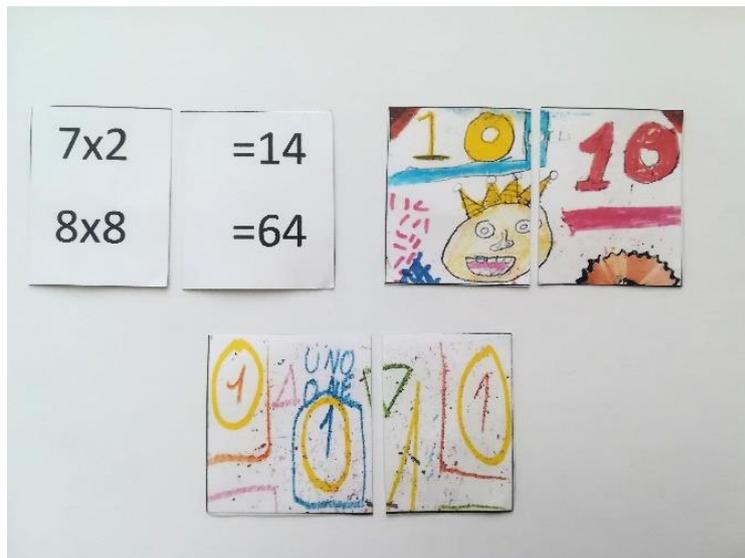
Desarrollo de la sesión:

La actividad se desarrolla a través de un juego. El cual se explicará a los alumnos detenidamente. Se le proporcionará a la mitad de la clase unas tarjetas con varias operaciones de las tablas de multiplicar y a la otra mitad con los resultados de dichas operaciones. Por tanto, cada alumno deberá buscar al compañero que tenga la solución a su carta o, al contrario. Una vez crean que tienen la solución correcta, juntarán sus cartas y si al darles la vuelta ambas cartas forman un billete de 1 o de 10, será válida la solución. Después, en una

hoja de registro, cada alumno anotará las que acierta y las que falla, para así tener constancia del conocimiento que tienen de las tablas. Repetiremos el juego varias veces para repasar le mayor número de tablas posible. Tras terminar el juego haremos una lista con las que han fallado. Las resolverán, pero esta vez, tendrán que utilizar exclusivamente el material manipulativo que son los billetes de 1 y de 10. Una vez las hayan completado, algunos alumnos explicarán que billetes han utilizado y como lo han hecho.

Materiales:

Entre los materiales encontramos las tarjetas necesarias para la realización del juego, con las tablas y con los billetes detrás. También la hoja de registro donde los alumnos apuntarán las que van acertando y fallando (Anexo I).



Tarjetas multiplicaciones.

Evaluación:

En cuanto a la evaluación en esta sesión, la realizarán los propios alumnos. Se autoevaluarán con las hojas de registro quedando constancia del conocimiento que tienen y

donde deben mejorar. Además, que al terminar la sesión la maestra recogerá dichas hojas, teniendo así una valoración específica de sus alumnos.

V.4. SESIÓN 2

Los *objetivos* que abarcan esta sesión consisten en :

- Introducir el algoritmo de la multiplicación sin llevada, utilizando los billetes para llegar a la solución de esta.
- Trabajar en la multiplicación como suma reiterada.
- Resolver problemas contextualizados en situaciones cotidianas a los alumnos.

Siguiendo el método Wiskobas que se plantea en el capítulo segundo (Maza, 1991), esta sesión está basada en una de sus características. Proporcionar a los alumnos un contexto para trabajar a través de la resolución de problemas cercanos a su vida cotidiana, en este caso problemas de compra-venta de productos conocidos por ellos.

Los *contenidos* a trabajar son el algoritmo de la multiplicación sin llevada y por una cifra. La multiplicación como suma reiterada. Resolución de problemas basados en el entorno cotidiano del alumno.

Desarrollo de la sesión:

Basándonos en el objetivo principal de utilizar el algoritmo de la multiplicación para la compra de productos cotidianos, vamos a introducir la resolución de problemas con la compra de productos de alimentación, y usar para ello el dinero de las anteriores sesiones. Por tanto, se les proporcionará tres enunciados con tres problemas en una ficha, con lo que tienen que comprar y el precio que vale cada unidad. Utilizando la suma reiterada y

exclusivamente manipulando los billetes, tendrán que averiguar el precio final. Para ello pueden dibujar debajo del enunciado los billetes que han utilizado o escribir cómo lo han resuelto. Ya que una vez tengan sus soluciones, las pondremos en común para ver qué resultados y soluciones han salido.

Materiales:

Billetes para manipular, fichas con los problemas y enunciados para que los resuelvan los alumnos (anexo II).



Billetes de 1 y 10 carios.

Evaluación:

La evaluación se llevará a cabo a través de los resultados que los alumnos hayan alcanzado en la resolución de los problemas y las estrategias que hayan aprendido. La maestra seguirá utilizando su diario de clase, anotando la evolución y dinámica de la sesión, analizando dichos resultados.

V.5. SESIÓN 3

En el capítulo tercero de este trabajo, en el apartado de oportunidades, hay una cantidad de ideas que se van a manejar de esta sesión en adelante. Tal como nos propone Bermejo

(2004) esta sesión pretende que los alumnos solo manipulen exclusivamente el material concreto antes de las representaciones en papel.

Los **objetivos** que abarcan esta sesión consisten en :

- Asociar la suma reiterada de una cantidad proporcionada con la disposición de los billetes según las cifras del algoritmo de la multiplicación sin llevada. Distinguiendo entre decenas y unidades.
- Resolver el algoritmo con la ayuda de material manipulativo, entendiendo el significado de los pasos que siguen para ello.
- Asociar el resultado final con el precio de un producto dado.

Los **contenidos** a trabajar son el algoritmo de la multiplicación sin llevada y por una cifra. La multiplicación como suma reiterada. Selección de datos para la resolución de problemas.

Desarrollo de la sesión:

La sesión se divide en dos partes, una primera donde en grupos de tres alumnos, realizarán multiplicaciones sin llevada de manera escrita, se les proporcionará varias y las resolverán manipulando billetes y escribirán su resultado. La segunda parte de la sesión consistirá en localizar qué productos se podrían comprar con esas multiplicaciones desde una lista de precios proporcionada por la maestra e incluso pueden crear nuevas multiplicaciones escritas con otros productos. Una vez terminada la actividad pondremos en común las soluciones de cada multiplicación y compararemos los resultados obtenidos entre los alumnos.

Materiales:

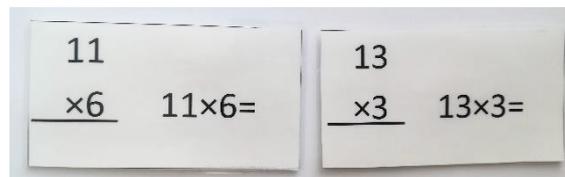
Billetes. Plantilla en A3, con la lista de precios de los productos, las multiplicaciones a resolver y espacio para poner la solución al lado con billetes.



Plantilla en A3, con la lista de precios y multiplicaciones.



Lista de precios.



Multiplicaciones.

Evaluación:

Los registros en esta clase se llevarán a cabo con la plantilla que cada grupo rellene. La maestra hará anotaciones de los pasos que siguen cada grupo de alumnos y analizará estos resultados como evaluación propia, dejando constancia en su diario.

V.6. SESIÓN 4

Los *objetivos* de esta sesión se han planteado en base a las propuestas del capítulo tercero, donde en una vez visto el algoritmo de forma manipulativa en la sesión anterior es el momento de trabajarlo de forma escrita (Fernández, 2013) y presentar las operaciones en

contextos propios del alumno a través de la resolución de problemas aritméticos propuesta del capítulo cuarto (Gregorio, 2002). Estos objetivos son:

- Crear enunciados de problemas dentro del contexto de compra-venta, que se resuelvan con multiplicaciones y utilizar así, el algoritmo de la multiplicación.
- Intercambiar enunciados y dar solución a los problemas creados entre todos.
- Aprender significativamente de los errores cometidos. Considerando el error como punto de partida del aprendizaje, y sean los alumnos conscientes de ello, concepto basado en las propuestas de Gregorio (2002) en el capítulo cuarto.

Los *contenidos* a trabajar son el algoritmo de la multiplicación sin llevada como base para la creación de problemas. La búsqueda de datos para redactar problemas y enunciados.

Desarrollo de la sesión:

En pequeño grupo se le proporcionará una ficha a cada uno con dos multiplicaciones sin llevada, además de la lista de precios que hemos utilizado anteriormente. Con ese contexto deberán crear dos enunciados de compra-venta, que se resuelvan con las multiplicaciones dadas. Una vez hayan terminado sus enunciados deberán, escribirlos en una hoja a parte para compartirla con los otros grupos, que tendrán que resolver. Una vez hayan terminado, haremos una puesta en común para ver qué resultados se han obtenido, haciendo propuestas nuevas para los errores cometidos.

Materiales:

Ficha con las multiplicaciones y escribir los enunciados. Hoja aparte para que copien los enunciados para los demás grupos (Anexo III). Billetes como material de apoyo.

Evaluación:

Como evaluación tanto para la maestra como de autoevaluación para los alumnos se utilizarán las fichas de los alumnos, ya que ahí queda registrado su trabajo, siendo en la puesta en común donde podrán verse los fallos y errores cometidos y como corregirlos.

Además, la maestra hará anotaciones de los pasos que siguen cada grupo de alumnos y analizará estos resultados como evaluación propia, dejando constancia en su diario.

V.7. SESIÓN 5

En el capítulo cuarto, siguiendo los principios básicos de García y Pacheco (2012), nos encontramos en el de crear una secuenciación precisa del contenido. Ya que los contenidos se han ido secuenciando sesión por sesión, paso por paso, para llegar a esta sesión donde se procede a la introducción del contenido principal de nuestro diseño, la multiplicación con llevada.

Los *objetivos* de esta sesión son los siguientes:

- Introducir y conocer la multiplicación con llevada por una cifra.
- Reflexionar durante la ejecución del algoritmo, barajando varias opciones en su cálculo.
- Intentar deducir el cambio de unidades a decenas con los billetes y desarrollar estrategias propias para ello.

Los *contenidos* a trabajar son el algoritmo de la multiplicación con llevada como suma reiterada, sin reglas establecidas y por una cifra. La multiplicación como suma reiterada y el cambio de 10 unidades por 1 decena. Comprensión e interiorización de la llevada en la multiplicación.

Desarrollo de la sesión:

La maestra proporcionará a los alumnos varias fichas con situaciones de problemas de compra-venta donde deberán de utilizar la multiplicación con llevada sin que ellos lo sepan. Para ello, solo podrán usar exclusivamente los billetes de 1 y de 10 y la plantilla manipulados en las sesiones anteriores. Tendrán que resolver el resultado a través de la suma reiterada de la cantidad de cada unidad con los billetes. Empezarán a contar los billetes, será entonces cuando la maestra preguntará a los alumnos por el resultado creando debate, sobre lo que observan y cómo lo han calculado o podrían calcularlo en caso de que no hayan sabido. La idea es que se den cuenta que hay muchos billetes de 1, más de 10, y así piensen en el cambio de 10 billetes de 1 por un billete de 10 y lo reserven. Para llegar al resultado dibujarán y escribirán las unidades que les han quedado, en este caso los billetes de 1, y después las decenas que son los billetes de 10, sin olvidarse del que han cambiado y reservado previamente.

Materiales:

Billetes, plantilla utilizada en sesiones anteriores para los billetes. Fichas con el planteamiento de varios problemas y donde dibujarán el proceso que han llevado a cabo para resolverlos. (Anexo IV).

Evaluación:

Con esta actividad se evaluarán los procesos adquiridos y el nivel de adquisición junto con las estrategias que tienen los alumnos respecto al algoritmo de la multiplicación.

La maestra hará anotaciones de los pasos que sigue el grupo-clase y analizará estos resultados como evaluación propia, dejando constancia en su diario.

V.8. SESIÓN 6

Esta sesión junto con la anterior sigue las premisas propuestas por Bermejo (2004), explicadas previamente en este trabajo. Con la sesión 5 los alumnos, adquieren los conceptos de forma verbal sobre la multiplicación con llevada a través del debate para que posteriormente en esta sesión los alumnos sean capaces de enunciar esos mismos conceptos simbólicamente.

Los *objetivos* de esta sesión son los siguientes:

- Conocer y utilizar el algoritmo de la multiplicación estándar escrito con llevada, siguiendo unas normas.
- Seguir utilizando el material manipulativo para calcular multiplicaciones con llevada.
- Comprender la llevada en las decenas en una multiplicación.

Los *contenidos* a trabajar son el algoritmo de la multiplicación con llevada y por una cifra. El trabajo por escrito de las normas estándar que debemos seguir ante una multiplicación con llevada.

Desarrollo de la sesión:

La maestra proporcionará a los alumnos una ficha con varias multiplicaciones con llevada, tal y como hemos resuelto en la sesión anterior. Se dejará a los alumnos un periodo de tiempo para ver, que estrategias utilizarían para poder resolverlas. Tras ese tiempo y según los pasos que vayan haciendo la maestra les explicará las normas estándar establecidas que se siguen cuando se ejecuta el algoritmo. Una vez vean el proceso a seguir, serán ellos mismos los que hagan el resto de multiplicaciones siguiendo esos pasos o tiene la opción de

hacerlo como han hecho hasta ahora si les resulta más fácil, a través de los billetes. Una vez tenga todos sus resultados tendrán que terminar la ficha escribiendo una lista de la compra con los productos que podrían comprar con esas multiplicaciones y la cantidad de cada uno. Finalmente pondremos en común la lista de compras que han obtenido.

Materiales:

Billetes, ficha con las multiplicaciones y la lista de precios. (Anexo V)

Evaluación:

Con esta actividad se evaluarán los conocimientos de los alumnos hacia la multiplicación, y la adquisición de esta.

La maestra hará anotaciones de los pasos que sigue el grupo-clase y analizará estos resultados como evaluación propia, dejando constancia en su diario.

V.9. SESIÓN 7

Siguiendo las opiniones de Lotero, Andrade y Andrade (2011) del capítulo cuarto, esta sesión tiene como finalidad que los alumnos comprendan que la multiplicación implica dos cantidades utilizadas en contextos cotidianos, utilizando una de ellas como referencia. Por tanto, surge la idea de crear un mercado lo más realista posible donde los alumnos utilicen las multiplicaciones como una parte más del día a día.

Los ***objetivos*** de la última sesión serán los siguientes:

- Crear un mercado donde los alumnos puedan comprar los productos con los que han estado trabajando.
- Utilizar los conceptos y procedimientos aprendidos en las sesiones anteriores.

- Llevar a la practica en un contexto familiar al alumno lo visto anteriormente.
- Resolver multiplicaciones en un contexto lo más real posible de compra-venta.

Los *contenidos* a trabajar son los trabajados en las sesiones anteriores pero llevados a la practica en un contexto real y familiar con el alumno, como es la compra y venta de alimentos con el dinero y precios con los que hemos estado trabajando.

Desarrollo de la actividad:

En parejas tendrán que hacer una lista de la compra, con productos del mercado que quieran comprar. Según los productos que quieran comprar deberán hacer las multiplicaciones necesarias para poder saber cuánto pagar, dispondrán de unas pizarras manejables para poder escribirlas, de cada producto están obligados a comprar como mínimo dos. Una vez tengan la solución hecha con los billetes adecuados pagarán al vendedor. Si han cometido algún error en el precio final deberán volver al sitio a recalcular el precio correcto. Como son varios alumnos, la maestra contará con otra de apoyo para poder atender todas las compras y comprobar que pagan el dinero correcto.

Materiales:

Todos los productos que se pongan a la venta para el mercado, carteles, listas de precios, cajas y material necesario para el mercado. Billetes y dinero necesario para la compra. Pizarras de cálculo y rotuladores para hacer las multiplicaciones.

Evaluación:

Esta actividad es la que nos permitirá si los alumnos han interiorizado los procedimientos utilizados en la resolución de multiplicaciones sin llevar y con llevada sencilla.

Todos los resultados obtenidos en esta actividad servirán de reflexión y de mejora para la maestra viendo donde cometen la mayor cantidad de errores y comprobar si algún concepto no se ha adquirido correctamente. Dejando constancia en el diario propio de ella.

CAPÍTULO VI: ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En este capítulo, se analizarán los resultados tras llevar a cabo la propuesta de enseñanza diseñada en el aula con los alumnos. Por lo que analizaremos de cada sesión el diseño de cada una, el funcionamiento de la metodología de aula, la comprensión por parte de los alumnos de cada proceso y las decisiones de cambio que tomaría sobre cada sesión.

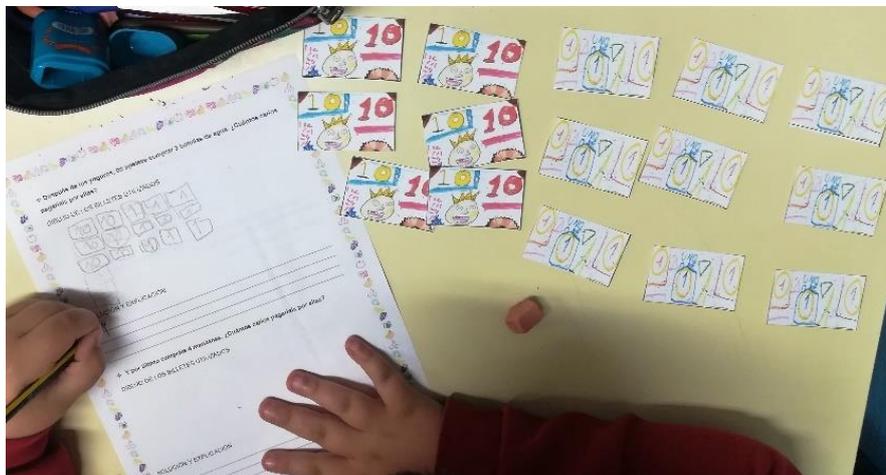
La **primera sesión** que consistía en un juego de parejas se pretendía que los alumnos repasasen las tablas de multiplicar, e introducir el material manipulativo, los billetes, que se utilizarán a lo largo de la secuencia didáctica. Después debían anotar las multiplicaciones que fallaban y resolverlas utilizando y colocando el número de billetes necesario a través de la suma reiterada. Del diseño a lo que se llevó a cabo difirió en que solo cinco alumnos apuntaron las multiplicaciones que fallaban por lo que fueron muy pocas las que se pudieron realizar con la colocación de billetes de forma reiterada y se tuvo que hacer a nivel grupal.

Metodológicamente, resultó una sesión muy motivante para los alumnos, ya que mostraron gran interés por realizar las actividades, su comportamiento al comienzo era algo caótico al no tener muy claro como debían desarrollar la actividad, pero una vez reconducido, han sabido controlarse y organizarse. A pesar de esto, la actividad fue satisfactoria ya que los objetivos principales se alcanzaron, además de que al alumnado le gustó mucho la sesión, pidiendo que repitiéramos el juego en otra ocasión.

La comprensión de las actividades por parte de la clase no fue la deseada al comienzo, ya que han sido varios alumnos los que no tenían claro los pasos que tenían que seguir para poder encontrar a la pareja de su multiplicación o resultado. Por lo que entre las decisiones de aspectos que mejoraría sería, en primer lugar, que la explicación de la actividad debería ser más visual. Es decir, realizar un ejemplo con varios alumnos para que vieran los pasos

que debían seguir a la hora de ejecutar el juego. En cuanto a anotar las multiplicaciones que fallaban, algunos alumnos lo llevaban a cabo, pero otros no, por lo que se debería dejar un tiempo entre cada juego para que las escribieran. Fueron pocas las multiplicaciones que pudimos resolver utilizando exclusivamente los billetes.

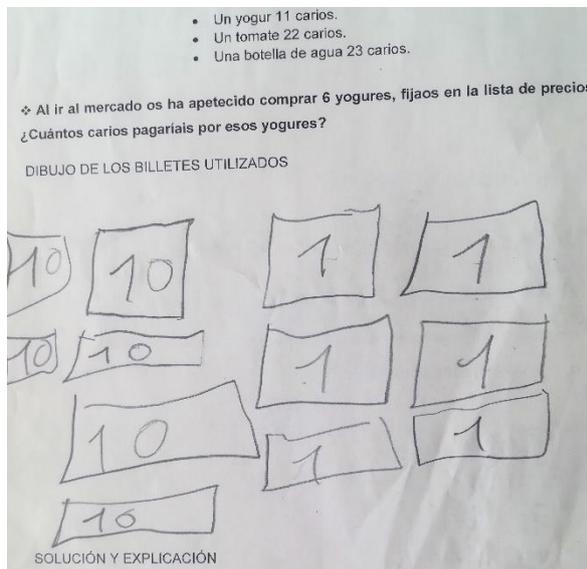
La **segunda sesión** se basó en la resolución de tres problemas utilizando la multiplicación como suma reiterada, manipulando los billetes exclusivamente, sin ver el algoritmo de la multiplicación escrito y dibujando el resultado en una ficha. El diseño primario de la sesión apenas se ha visto modificado ya que se han llevado a cabo todas las tareas propuestas, primeramente, el alumnado ha leído los enunciados a resolver, después ha utilizado los billetes para la resolución del problema y después lo ha trasladado al papel mediante dibujos, escribiendo la solución y explicando también por escrito cómo lo habían hecho.



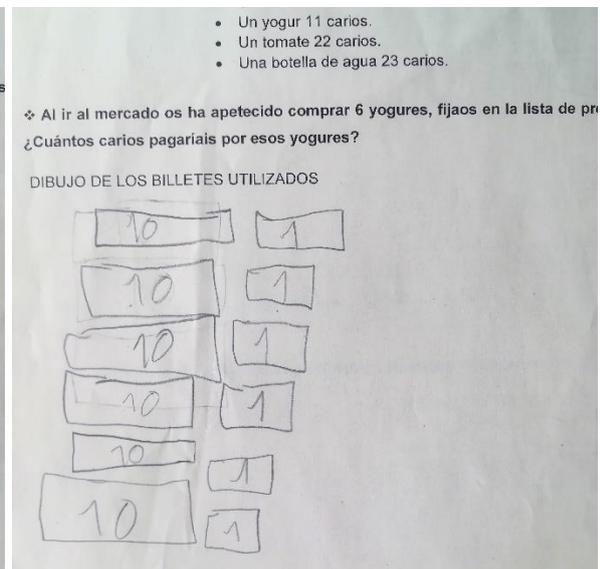
Alumno dibujando los billetes utilizados en la resolución de problemas.

A nivel metodológico, ha sido una sesión de gran concentración, donde los alumnos estaban muy interesados mientras utilizaban los billetes, además de la colaboración entre ellos, ayudándose. El clima en el aula era tranquilo y calmado, cada alumno estaba centrado en su trabajo. Entre las dificultades encontradas al principio resultó difícil entender cómo se colocaban los billetes y cuáles tenían que utilizar, si de 10 o de 1. De hecho, fueron solo 13

niños los que dibujaron y colocaron bien los billetes en el primer problema y 6 que los dibujaban sin distinguir entre las decenas y unidades.



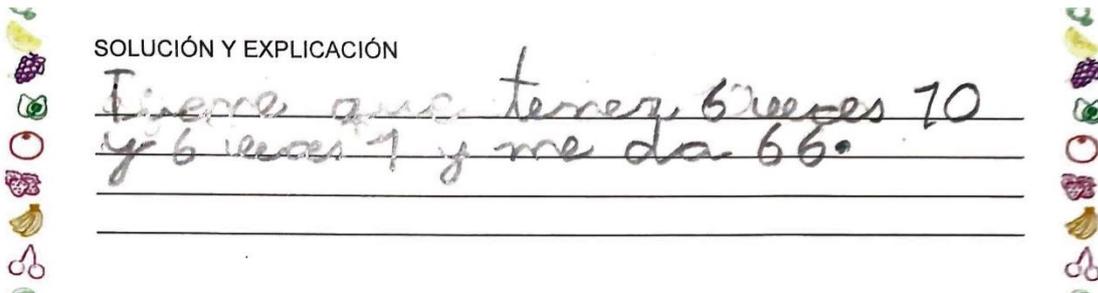
Ejemplo de billetes mal colocados.



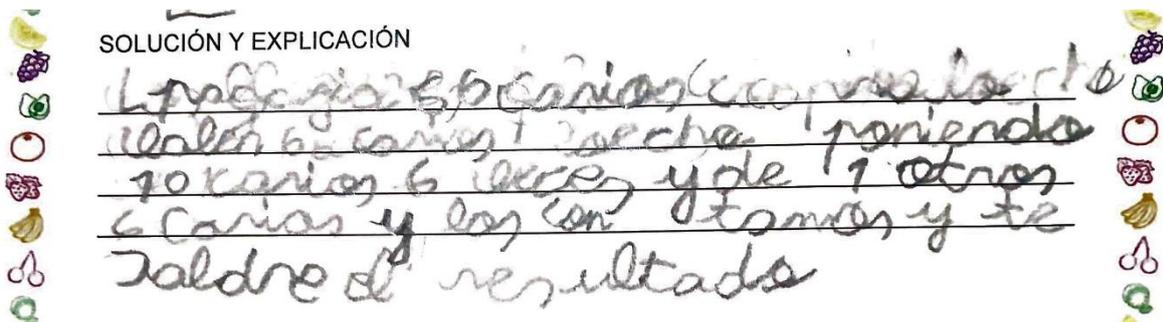
Ejemplo de billetes bien colocados.

Al ver estos resultados en la primera tarea, la maestra tuvo que intervenir para guiar y reconducir a los alumnos a través de preguntas y pistas para que al final sacaran sus conclusiones de los pasos a seguir y cómo debían colocar los billetes. Siguieron surgiendo algunas dudas que se fueron resolviendo durante la ejecución de las tareas. Esta sesión como toma de contacto con la manipulación de billetes, la comprensión de la multiplicación como suma reiterada, y cómo los alumnos entendieron el proceso en sus mentes para poder multiplicar y resolver los enunciados fue muy productiva. Al principio les costó dibujar los billetes en orden, pero una vez entendieron el primer ejemplo, los demás los resolvieron sin dificultades.

Para comprobar si los alumnos habían entendido el procedimiento de sumar reiteradamente, la maestra utilizó el apartado donde explicaban cómo lo hacían; había respuestas variadas, pero la que más se repitió fue el uso correcto de la palabra veces, tal y como muestran los siguientes ejemplos.



Ejemplo de explicación.



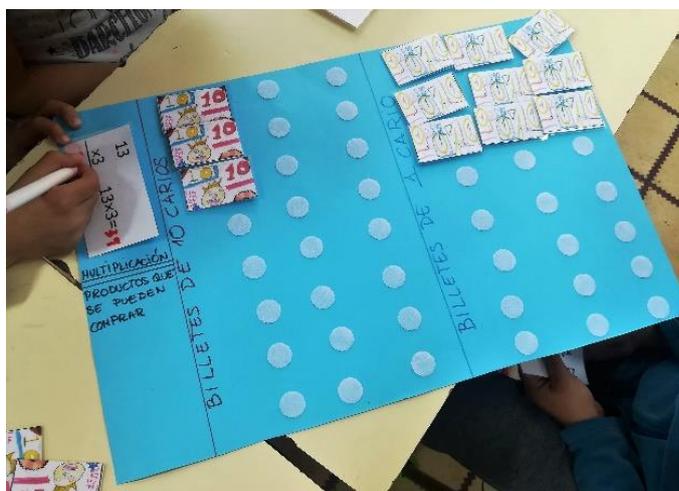
Otro ejemplo de explicación

Una de las apreciaciones que observamos en esta primera tarea de la sesión, es que existe una relación entre cómo se dibujaban los billetes y la explicación de cómo habían resuelto la multiplicación del problema. Los alumnos que habían dibujado y colocado mal los billetes a la hora de hacer la multiplicación reiterada, la gran mayoría no sabían cómo explicar el resultado obtenido, es decir no habían comprendido el proceso. Mientras que, los alumnos que colocaban los billetes bien, sí que explicaban bien los pasos que habían seguido para resolverlo.

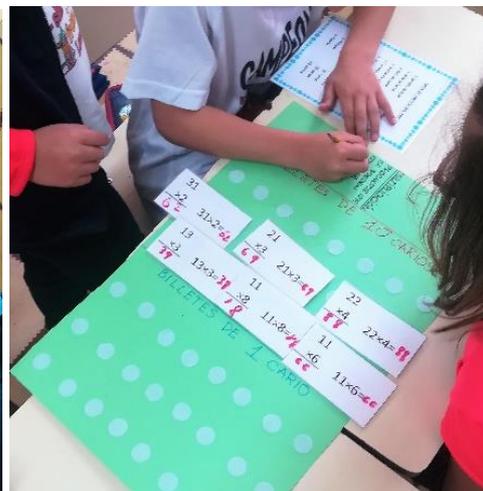
Entre las decisiones tomadas para mejorar la sesión habría que tener en cuenta que después de la primera tarea hubiera sido bueno que los alumnos hubieran explicado colectivamente cómo colocaban los billetes y cómo procedían para resolverlo, y la maestra guiar a los alumnos conjuntamente, para que ellos fueran construyendo los contenidos y conocimientos más fácilmente.

En la primera parte de la **tercera sesión** los alumnos debían resolver el algoritmo de la multiplicación por escrito, y su ejecución se llevaba a cabo apoyándose en la manipulación

de billetes con una plantilla. En la segunda parte de la sesión basándose en una lista de precios y productos debían escribir su propia lista con los productos que podían comprar con las multiplicaciones dadas. Ambas partes programadas de la sesión se realizaron de manera satisfactoria, fue necesario al usar la plantilla recordar la colocación de los billetes y la idea de suma reiterada. Asimismo, la segunda parte donde debían asociar las multiplicaciones con los productos que podían comprar de la lista proporcionada se cumplió en otra sesión por falta de tiempo.



Alumnos resolviendo las multiplicaciones.



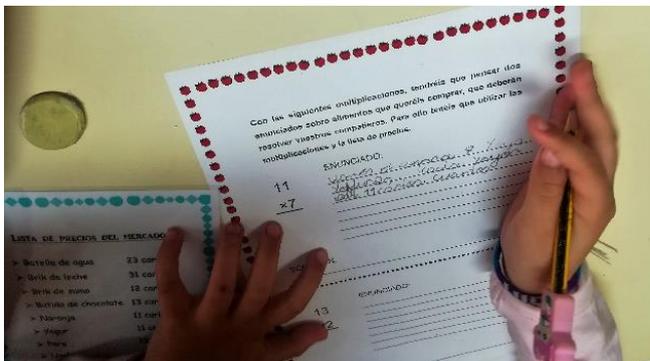
Alumnos escribiendo la lista de compra.

A nivel metodológico, el trabajo en grupos de tres alumnos creó un ambiente de compañerismo bueno, cada alumno adopta una función diferente que luego tienen que cambiar (quién escribe, quién manipula los billetes...) y así aprender a intercambiar roles. Han sido actividades muy divertidas y bien aceptadas por los alumnos. A su vez de que les permite visualizar la multiplicación y llegar a su comprensión sin grandes dificultades, sí que en la segunda parte hubo que hacer más hincapié y reflexión para poder llevarla a cabo.

Como toma de decisiones, la temporalización de la sesión habría que cambiarla, haciendo de esta, dos sesiones una para cada parte. De esta manera, la comprensión,

realización y puesta en común de la segunda parte abarquen tiempo suficiente para alcanzar los objetivos propuestos.

En la **cuarta sesión** los alumnos debían realizar varios ejercicios donde enunciaran ellos unos problemas partiendo de una solución dada. Después copiar estos enunciados en una hoja a parte e intercambiarlos entre los grupos para resolverlos. El diseño de la sesión se vio modificado por la falta de tiempo, ya que se necesitó más tiempo del esperado para inventar los problemas y copiarlos en la hoja aparte, por lo que la resolución de estos se efectuó en otra sesión.



Alumna escribiendo enunciado de un problema.



Resolviendo el problema de otro compañero.

Aunque la metodología de trabajar en pequeño grupo permite desarrollar compañerismo, en esta actividad no ha sido tan satisfactorio. Los componentes del grupo con mayores dificultades de comprensión no han colaborado equitativamente. Estos tienden a abandonar a la primera, perdiendo la atención. Por lo que la maestra se ha encargado de guiarlos paso por paso junto con la colaboración de sus compañeros para motivarlos y realizar la actividad. Como por ejemplo el siguiente grupo de alumnos, que el primer enunciado lo formularon de forma errónea, al no comprender lo que significaban los factores de la multiplicación, una vez aclarado con la maestra hicieron el segundo correctamente.

Con las siguientes multiplicaciones, tendréis que pensar dos enunciados sobre alimentos que queréis comprar, que deberán resolver vuestros compañeros. Para ello tenéis que utilizar las multiplicaciones y la lista de precios.

31	ENUNCIADO:
$\times 3$	Tenemos 31 caries y queremos
<hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 0;"/> 93	comprar 3 litros de leche
	¿cuántos caries tengo
	que pagar?

SOLUCIÓN:
 Erros pagados 93 caries

Ejemplo de enunciado erróneo.

Con las siguientes multiplicaciones, tendréis que pensar dos enunciados sobre alimentos que queréis comprar, que deberán resolver vuestros compañeros. Para ello tenéis que utilizar las multiplicaciones y la lista de precios.

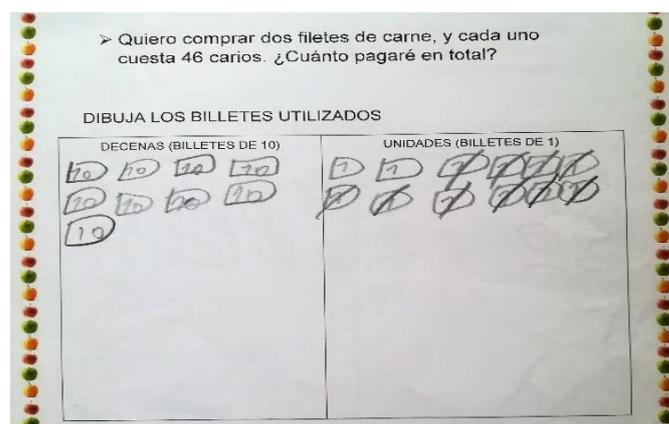
13	ENUNCIADO:
$\times 3$	Queremos comprar 3 botati-
<hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 0;"/> 39	dos de chocolate cada botido
	de chocolate vale 13 caries
	¿cuántos caries tenemos
	que pagar?

SOLUCIÓN:
 tenemos que pagar 39 caries

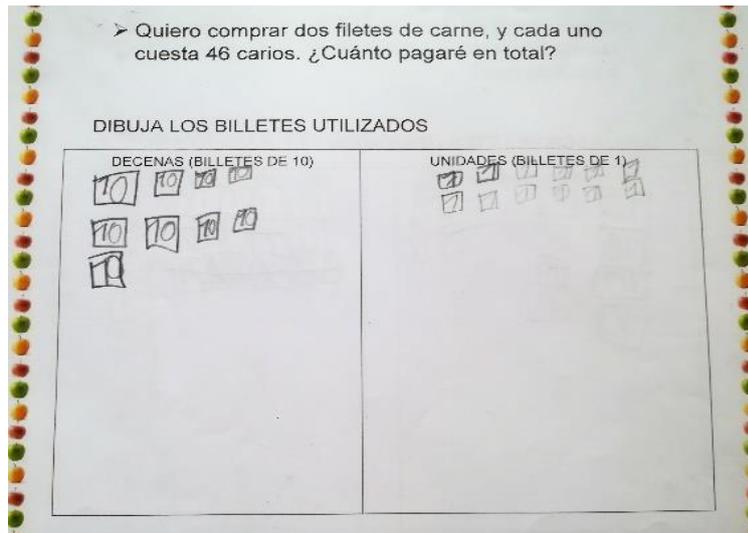
Ejemplo de enunciado correcto.

A pesar de haber sido una actividad enriquecedora y diferente para los alumnos porque de esta manera desarrollan el pensamiento crítico al tener que inventar un enunciado por sí mismos partiendo de unos datos, sí que a los alumnos con dificultades sería conveniente proporcionarles unas pautas y estrategias muy visuales de los pasos a seguir en la creación de problemas a partir de una operación dada, para no perder su motivación. Además de que el tiempo programado no fue el acertado, porque fue necesario hacer una sesión extra de 45 minutos para poder hacer la parte de resolver los problemas que habían inventado y poner en común las soluciones.

La **quinta sesión** consistía en resolver a través de unos enunciados varios problemas que implicaban el uso de la multiplicación con llevada. Dibujando la solución obtenida separando las unidades (billetes de 1 cario) y las decenas (billetes de 10 carios). El diseño de esta se ejecutó tal y como se había planteado, primeramente, los alumnos intentaron resolver la primera situación de multiplicación, con la suma reiterada tal y como habíamos hecho anteriormente, una vez tenían los billetes separados en decenas (los de 10) y en unidades (los de 1) al contar por separado vieron que algo no encajaba, creando así un debate de opiniones, ya que consideraban que había muchas unidades. Es entonces cuando la maestra hizo varias preguntas para poder resolverlo. Tras varias sugerencias, fue entonces cuando una alumna propuso cambiar 10 billetes de 1 por uno de 10, ya que había demasiados. Ese billete lo guardaban y una vez contadas las decenas añadían la del billete que habían guardado. Después resolvieron el resto de ejercicios, siguiendo esta estrategia, y algunos creando nuevas, como la de tachar los billetes de 1 que cambiaban por un billete de 10 o borrarlos. Una vez que el alumnado descubrió de donde salía la llevada, fue necesario repetir varias veces el proceso de reservar el billete de 10 en un lado para después llevarlo con las decenas, además con algunos casos hubo que volver a hacer el proceso individualmente.



Ejemplo donde los billetes están tachados.



Ejemplo donde los billetes están borrados.

El debate en grupo otorga la oportunidad a los alumnos de expresar sus opiniones sintiéndose así los protagonistas de su aprendizaje. Esto conlleva que su predisposición sea buena, con grandes expectativas por ver la actividad nueva a realizar, mostrando gran interés por opinar y compartir sus deducciones y dudas con el resto de la clase. Sí que es necesario adaptarse metodológicamente a los diferentes ritmos de trabajo, cuando hacen los ejercicios y tareas individualmente. Siendo la maestra de gran apoyo para ellos y guía, además que los alumnos son muy colaborativos entre ellos, mostrando su ayuda a quienes más la necesitan. De hecho, los resultados fueron positivos, la adquisición de la llevada por parte de los alumnos fue interiorizada, gracias a la manipulación de los billetes y la visualización del proceso. Incluso los alumnos con mayores dificultades lo llegaron a comprender.

Cambios y decisiones necesarias a tener en cuenta en esta sesión serían las siguientes: la sesión se tendría que dividir en dos, ya que la comprensión y adquisición del proceso de cambio de billetes para después llevárnoslo, llevo bastante tiempo, al haber tantos ejercicios a realizar en las fichas hubo la necesidad de dividirlo en dos sesiones, ya que, al haber diferentes ritmos de trabajo, la gran mayoría no terminaron a tiempo en una sesión.

Por último, crear algunas situaciones de multiplicación con llevada extra para los alumnos con un ritmo de trabajo más elevado, ya que una vez que terminaron tuvieron que esperar y colaborar con los compañeros que iban más lentos.

La **sexta sesión** se ha desarrollado realizando una ficha por parte de los alumnos siguiendo unos pasos. En primer lugar, pensar cómo resolver las multiplicaciones en vertical y escritas, que número va en cada columna (unidades, decenas), que ocurre con la llevada. Una vez escuchadas las propuestas, la maestra las ha usado para encontrar el mejor camino en el cálculo de los algoritmos, que finalmente han resuelto los alumnos individualmente, apoyándose si querían en el material manipulativo. Por último, han hecho la lista de la compra fijándose en las multiplicaciones dadas. Prácticamente el diseño de la sesión se ha desarrollado según lo previsto.

Resuelve las siguientes multiplicaciones y completa la lista de la compra con la cantidad de productos que necesitas.

$\begin{array}{r} 12 \\ \times 7 \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 13 \\ \times 6 \\ \hline 78 \end{array}$	<p>Aquí tienes una lista con varios precios, escoge los correctos y apúntalos junto con la cantidad que comprarás en la lista de abajo.</p> <ul style="list-style-type: none"> • 1 caja de cereales = 38 céntimos • 1 paquete de galletas = 49 céntimos • 1 botell de agua = 23 céntimos • 1 manzana = 21 céntimos • 1 huevo = 12 céntimos • 1 huevo = 26 céntimos • 1 pera = 13 céntimos • 1 tomate = 22 céntimos • 1 plátano = 24 céntimos • 1 naranja = 11 céntimos
$\begin{array}{r} 26 \\ \times 3 \\ \hline 78 \end{array}$	$\begin{array}{r} 24 \\ \times 4 \\ \hline 96 \end{array}$	

Lista de la compra:

- ✓ 7 sumos
- ✓ 6 peras
- ✓ 3 huevos
- ✓ 4 plátanos
- ✓ 2 paquetes de galletas
- ✓ 2 cajas de cereales

Cálculo con la llevada escrita arriba.

Resuelve las siguientes multiplicaciones y completa la lista de la compra con la cantidad de productos que necesitas.

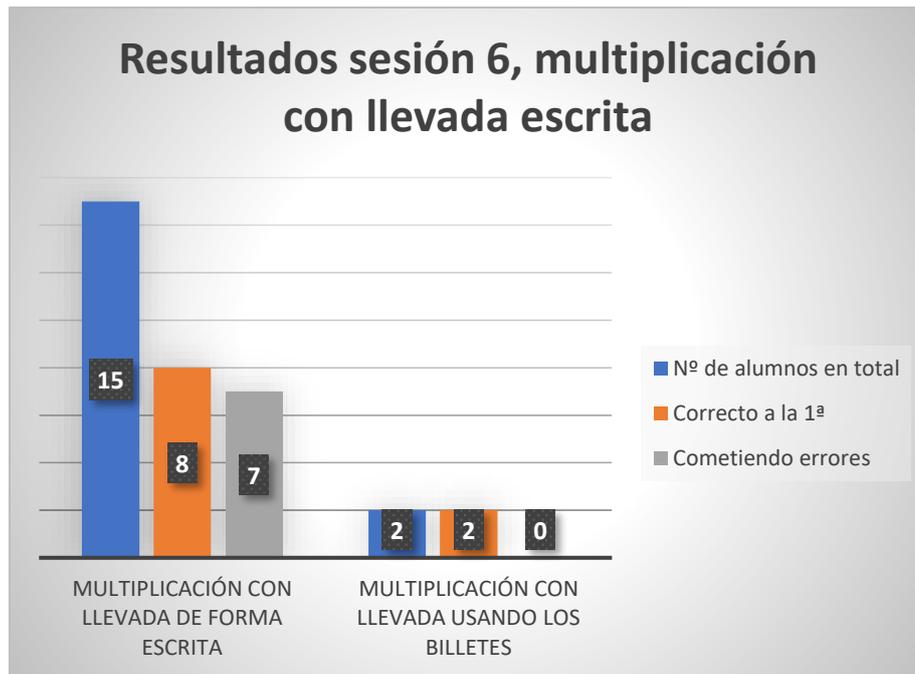
$\begin{array}{r} 12 \\ \times 7 \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 13 \\ \times 6 \\ \hline 78 \end{array}$	<p>Aquí tienes una lista con varios precios, escoge los correctos y apúntalos junto con la cantidad que comprarás en la lista de abajo.</p> <ul style="list-style-type: none"> • 1 caja de cereales = 38 céntimos • 1 paquete de galletas = 49 céntimos • 1 botella de agua = 23 céntimos • 1 manzana = 21 céntimos • 1 huevo = 12 céntimos • 1 huevo = 26 céntimos • 1 pera = 13 céntimos • 1 tomate = 22 céntimos • 1 plátano = 24 céntimos • 1 naranja = 11 céntimos
$\begin{array}{r} 26 \\ \times 3 \\ \hline 78 \end{array}$	$\begin{array}{r} 24 \\ \times 4 \\ \hline 96 \end{array}$	

Lista de la compra:

- ✓ 7 sumos
- ✓ 6 peras
- ✓ 3 huevos
- ✓ 4 plátanos
- ✓ 2 paquetes de galletas
- ✓ 2 cajas de cereales

Cálculo como resultado de utilizar los billetes.

De hecho en el siguiente gráfico se muestran los resultados obtenidos realizando las multiplicaciones de una forma o de la otra. Vemos que hubo una gran cantidad de niños que prefirieron hacerlo de forma tradicional escrita y muy pocos con los billetes. Pero los resultados nos muestran que quienes lo hicieron con billetes calcularon el resultado bien a la primera, mientras que en los que prefirieron de forma escrita hubo casi la mitad que se equivocaron al calcular, ya que muchos se olvidaban de sumar la llevada.



De hecho tal y como se observa de los 15 alumnos que lo hicieron de forma escrita, ocho cometieron errores en su cálculo, mientras que de los 2 que lo hicieron usando los billetes, no cometieron ningún error. Podríamos concluir que la utilización de materiales manipulativos, en este caso los billetes, ayudan a entender y visualizar mejor el proceso, sin cometer prácticamente ningún fallo.

Existe una gran participación por parte del alumnado en exponer sus ideas, siendo muy pocos los que prefieren observar y escuchar, sin intervenir. Ayuda mucho en el clima del aula, la realización de tareas novedosas, ya que son alumnos bastante inquietos y con gran interés por aprender con metodología variada. Una vez conocidos los pasos a seguir, que ellos mismos han ido elaborando y proponiendo, han resultado el resto de la ficha sin mayores dificultades. Ha sido necesaria la intervención de la maestra en algún caso particular, pero sin gran trascendencia.

A través de esta sesión los alumnos han interiorizado el proceso para resolver el algoritmo de la multiplicación desde la comprensión y la manipulación. Esto permite que el

alumnado mantenga esa atención y concentración requerida durante un periodo largo y sin interrupciones.

Como propuesta de mejora para esta sesión, se debería plantear la segunda parte de la ficha, realizarla con todos los alumnos a la vez e ir completándola todos al mismo ritmo. Como no les quedó muy claro qué tenían que apuntar, sería recomendable, poner algún ejemplo en común, con las propuestas que fueran dando los alumnos.

La **séptima y última sesión** radicaba en realizar un mercado con objetos reciclados traídos de casa para comprar con los billetes utilizados. Dando pie a usar multiplicaciones, en algunos casos con llevada y en otros no, ya que no podían comprar un solo producto. Por parejas compraban los productos que quisieran, calculando el precio total correctamente, se han ayudado de pizarra y rotulador, así como de billetes para hacer las operaciones necesarias. Se realizó la sesión según lo establecido, no sería la maestra la encargada de recoger el dinero sino los propios alumnos ya que cada pareja tenía un vendedor (alumno). Después se cambiaron las parejas y los roles, para que todos pudieran ser partícipes en todos los puestos de la actividad. Una vez terminadas las compras, cada pareja mostraba lo que había comprado y el resultado, comprobando así, si las multiplicaciones se habían hecho adecuadamente.



Alumnos comprando y calculando en el mercado.

Desde el primer momento hubo gran participación por parte de los alumnos, ya que implicaba a los alumnos por completo, siendo una sesión dinámica y activa. La metodología utilizada les motiva a participar en todo momento en la actividad, utilizando la multiplicación como algo cotidiano. Los resultados fueron en general bastantes buenos. Existe una buena comprensión de la multiplicación ya que han fallado muy poco y las realizaban con soltura y sin dudar demasiado.

Se valora muy positivamente, a tal punto que los alumnos querían repetir en otra ocasión más, les entusiasmó el hecho de tener varios roles y poder comprar productos como parte de su día a día. Para ser la actividad final me sorprendió la soltura y rapidez con la que se desarrolló, ya que al plantearla pensé que me llevaría bastante tiempo que los alumnos se organizarán y no se perdieran en las operaciones, pero no fue así.

Como mejora, con un poco más de tiempo los carteles con los precios, los podían haber hecho los alumnos, siendo estos más grandes y vistosos. En ciertos momentos había compañeros que los tapaban y se confundían. Además, si hubiéramos tenido alguna otra sesión libre se podría haber repetido la actividad debido a su gran auge.

CAPÍTULO VII: CONCLUSIONES FINALES

Analizando la situación de enseñanza actual de las matemáticas solemos encontrarnos con una disociación por parte de los alumnos entre los contenidos de aprendizaje y la utilidad de estos en su mundo real. Normalmente es difícil que los alumnos encuentren conexiones entre lo que aprenden en el aula y su uso fuera de esta.

El uso del libro de texto sigue muy arraigado en los colegios, tal como hemos analizado anteriormente en el capítulo cuarto, no crean un contexto de enseñanza-aprendizaje significativo. Tanto la presentación como el tratamiento de la información suele estar descontextualizado, con ejercicios repetitivos donde se utiliza la mecanización de ciertas reglas sin llegar a comprender lo que se aprende, ya que muchas veces los alumnos no se leen ni las órdenes de estos ejercicios, porque los consideran que todos se ejecutan del mismo modo.

Esto nos hace pensar que podemos buscar otras alternativas en el tratamiento de los contenidos y objetivos a alcanzar, de ahí que la secuencia didáctica que hemos llevado a la práctica obtengamos estas conclusiones:

- La implantación de la misma creó expectación desde el comienzo, los alumnos se sentían motivados por aprender contenidos nuevos usando otra metodología diferente. Cada sesión la esperaban con emoción, que sería lo nuevo por aprender hoy. Esto junto con la contextualización de la secuencia didáctica hacen la base para la introducción de los contenidos y la consecución de los objetivos que se plantean.
- Claramente los objetivos en mayor o menor medida se han conseguido en cada sesión, así como los contenidos propuestos. Todo ello se ha podido comprobar a lo largo de la evaluación de las tareas y trabajos que los alumnos iban cumpliendo. Creando así una base de trabajo en los alumnos que de cara al curso siguiente van a manejar como

primer recurso, ya que tienen bien interiorizada y comprenden la ejecución de la multiplicación para obtener el resultado.

- El papel de la maestra ha sido primordial a la hora de crear tareas que partieran de los gustos de sus alumnos. Creando un ambiente relajado donde cada alumno ha podido experimentar por sí mismos y equivocarse sin miedo a ello, viendo que de los errores es de donde se aprende. Aunque la temporalización se alargó en el tiempo, esto supuso que la maestra tomara el tiempo necesario en cada tarea, mostrando interés, atendiendo las dificultades que los alumnos iban encontrando y guiarlos hacia la consecución del objetivo final.
- Los alumnos por su parte han sido protagonistas de todo el proceso de aprendizaje, han utilizado con gran iniciativa los recursos proporcionados como el desarrollo de las actividades propuestas. Han transmitido gran motivación por la metodología de aprendizaje y siempre con curiosidad y gran interés.

En relación a la realización del presente trabajo ha resultado ser una experiencia muy enriquecedora por varios aspectos.

Toda la información e investigación desarrollada ha supuesto de gran formación para mí como docente en este ámbito de las matemáticas, en concreto de la multiplicación, de la cantidad de variantes que hay y recursos fuera de lo tradicional. Incluso he obtenido otros recursos y metodologías nuevos que me pueden servir para futuros proyectos que quiera desarrollar en clase con los alumnos, fuera del ámbito de la multiplicación también.

De hecho, mi visión en la enseñanza de las matemáticas ha cambiado totalmente. He descubierto que existen muchas posibilidades en la enseñanza y el aprendizaje de las mismas.

Además, he podido comprobar que es importante adaptarse a las circunstancias que van surgiendo en el momento, ya que yo escogí la temática del algoritmo de la

multiplicación, sin saber conscientemente qué suponía. Cuando empecé a indagar sobre él, mis ideas y opiniones han ido cambiando constantemente, al conocer otras perspectivas. Asimismo, de la implantación de estas nuevas ideas con mis alumnos, ya que en ocasiones tiendes a resolver tareas o dificultades que surgen de la manera a la que estás acostumbrado. Por eso este trabajo me ha proporcionado una visión diferente a la que tenía concebida.

Por último, me gustaría recalcar que los objetivos propuestos al comienzo del trabajo se han logrado alcanzar en mayor o menor medida, y con más dificultades o menos, pero a parte de esos objetivos, también se han alcanzado otros nuevos, muy beneficiosos, que no pensé que pudieran surgir.

REFERENCIAS

- Bermejo, V. (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: CCS.
- Braga, G., & Belver, J. L. (2016). Análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación*, 27(1), 199-218.
- Castro Martínez, E., Rico Romero, L., & Castro Martínez, E. (1988). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. Granada: Síntesis.
- Cid, E., Godino, J., & Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Granada: Edumat-Maestros.
- Fernández Carreira, C. (30 de Enero de 2013). Principales dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. Pautas para maestros de Educación Primaria. Barcelona.
- Gallardo Romero, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*. Málaga.
- García Martín, J., & Pacheco Sanz, D. I. (2012). Dificultades de aprendizaje en las matemáticas, prevención y actuación. En J. N. García Sanchez, *Prevención en dificultades del desarrollo y del aprendizaje* (págs. 237-252). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Garín, J., & Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos*. Madrid: Síntesis.
- Gómez Alfonso, B. (1999). *Numeración y cálculo*. Valencia: Síntesis.

González Astudillo, M. T., & Sierra Vázquez, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo xx. *Enseñanza de las ciencias*, 22(3), 389-408.

Gregorio Guirles, J. (2002). El constructivismo y las matemáticas. *Sigma 21*, 113-129.

Grupo Edebé. (2011). *Matemáticas 2*. Barcelona: Edebé.

Grupo Editorial Luis Vives. (2014). *Matemáticas 2, Superpixépolis*. Zaragoza: Edelvives.

Grupo Editorial Luis Vives. (2014). *Matemáticas 3, Superpixépolis*. Zaragoza: Edelvives

Iglesias Pérez, J. M. (2005). Los algoritmos tradicionales y otros algoritmos. *Unión*(4), 47-49.

Lotero Botero, L., Andrade Londoño, E., & Andrade Lotero, L. (2011). La crisis de la multiplicación: Una propuesta para la estructuración conceptual. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, 2, 38-64.

Lupiáñez Gómez, J. (2013). Capítulo 4 análisis didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, & J. L. Lupiáñez, *Análisis didáctico en educación matemática* (págs. 81-101). España: Comares.

Martínez Montero, J. (2011). El método de cálculo abierto basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). *Bordón*, 63(4), 95-102.

Maza Gómez, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división*. Sevilla: Síntesis.

Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su

aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. (BOA de 20 de junio de 2014).

Rico, L. (1990). *Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural*. Sevilla: Ediciones Alfar.

Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *Unión*(33), 11-27.

Rico, L., Lupiáñez, J., & Molina, M. (2013). Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular. En J. L. Lupiáñez, *Capítulo 4: Análisis didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular* (págs. 81-101). Granada: Comares.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J., & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *Suma* 58, 7-23.

Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M. T., & López Esteban, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda. *Educación Matemática*, 15(1), 21-49.

ANEXOS

Anexo I

TABLAS DE MULTIPLICAR

He acertado estas multiplicaciones:

-
-
-
-
-
-
-
-
-
-

He fallado estas multiplicaciones: **X**

-
-
-
-
-
-
-
-
-
-

Teniendo en cuenta la lista de precios resuelve las siguientes preguntas, dibuja los billetes que has utilizado y explica como lo has hecho.

LISTA DE PRECIOS

- Un zumo 12 carios.
- Una manzana 21 carios.
- Un yogur 11 carios.
- Un tomate 22 carios.
- Una botella de agua 23 carios.

❖ Al ir al mercado os ha apetecido comprar 6 yogures, fijaos en la lista de precios.
¿Cuántos carios pagaríais por esos yogures?

DIBUJO DE LOS BILLETES UTILIZADOS

SOLUCIÓN Y EXPLICACIÓN

❖ Después de los yogures, os apetece comprar 3 botellas de agua. ¿Cuántos carios pagaríais por ellas?

DIBUJO DE LOS BILLETES UTILIZADOS

SOLUCIÓN Y EXPLICACIÓN

❖ Y por último compráis 4 manzanas. ¿Cuántos carios pagaríais por ellas?

DIBUJO DE LOS BILLETES UTILIZADOS

SOLUCIÓN Y EXPLICACIÓN

Con las siguientes multiplicaciones, tendréis que pensar dos enunciados sobre alimentos que queréis comprar, que deberán resolver vuestros compañeros. Para ello tenéis que utilizar las multiplicaciones y la lista de precios.

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$$

ENUNCIADO:

SOLUCIÓN:



ENUNCIADO:

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$$

SOLUCIÓN:

Con las siguientes multiplicaciones, tendréis que pensar dos enunciados sobre alimentos que queréis comprar, que deberán resolver vuestros compañeros. Para ello tenéis que utilizar las multiplicaciones y la lista de precios.

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

ENUNCIADO:

SOLUCIÓN:



ENUNCIADO:

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$

SOLUCIÓN:

Con las siguientes multiplicaciones, tendréis que pensar dos enunciados sobre alimentos que queréis comprar, que deberán resolver vuestros compañeros. Para ello tenéis que utilizar las multiplicaciones y la lista de precios.

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$$

ENUNCIADO:

SOLUCIÓN:



$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$$

ENUNCIADO:

SOLUCIÓN:



Copia el enunciado de vuestro problema:









Resuelve el problema:



Solución: _____



Presta atención a las siguientes situaciones. ¿Cómo las resolverías?

- Quiero comprar dos filetes de carne, y cada uno cuesta 46 carios. ¿Cuánto pagaré en total?

DIBUJA LOS BILLETES UTILIZADOS

DECENAS (BILLETES DE 10)	UNIDADES (BILLETES DE 1)

ESCRIBE CON NÚMEROS LA OPERACIÓN Y EL RESULTADO OBTENIDO.

- Quiero comprar tres barras de pan y cada una cuesta 26 carios. ¿Cuánto tengo que pagar por las barras de pan?

DIBUJA LOS BILLETES UTILIZADOS

DECENAS (BILLETES DE 10)	UNIDADES (BILLETES DE 1)

ESCRIBE CON NÚMEROS LA OPERACIÓN Y EL RESULTADO OBTENIDO.

- Si compro ocho briks de zumo y cada uno cuesta 12 carios, ¿cuánto pagaré en total por ellos?

DIBUJA LOS BILLETES UTILIZADOS

DECENAS (BILLETES DE 10)	UNIDADES (BILLETES DE 1)

ESCRIBE CON NÚMEROS LA OPERACIÓN Y EL RESULTADO OBTENIDO.

- Voy a comprar cuatro limones, y cada uno cuesta 13 carios. ¿Cuántos carios necesito para pagar todos los limones?

DIBUJA LOS BILLETES UTILIZADOS

DECENAS (BILLETES DE 10)	UNIDADES (BILLETES DE 1)

ESCRIBE CON NÚMEROS LA OPERACIÓN Y EL RESULTADO OBTENIDO.

Resuelve las siguientes multiplicaciones y completa la lista de la compra con la cantidad de productos que necesitas.

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$$

Aquí tienes una **lista con varios precios**, escoge los correctos para hacer tu lista de la compra.

- 1 caja de cereales = 38 carios
- 1 paquete de galletas = 49 carios
- 1 botella de agua = 23 carios
- 1 manzana = 21 carios
- 1 zumo = 12 carios
- 1 huevo = 26 carios
- 1 pera = 13 carios
- 1 tomate = 22 carios
- 1 plátano = 24 carios
- 1 naranja = 11 carios

Lista de la compra:

