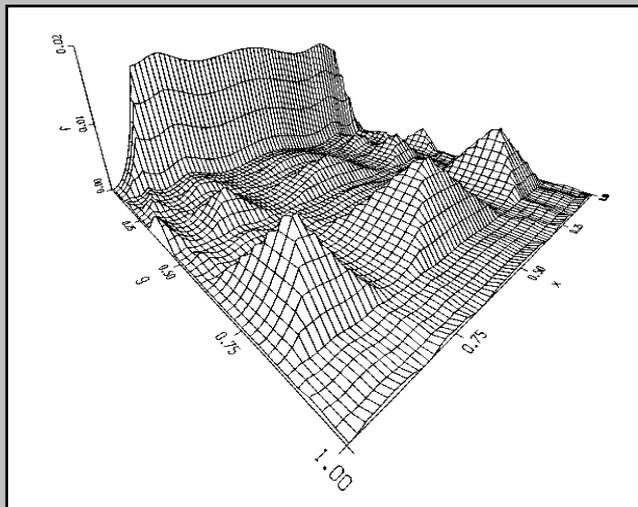


# Dos modelos de la teoría no lineal de la Física de la Materia Condensada: la cadena Frenkel-Kontorova y la escalera de uniones Josephson



Juan José Mazo Torres



---

Dos modelos de la teoría no lineal de la Física de la  
Materia Condensada: la cadena Frenkel-Kontorova  
y la escalera de uniones Josephson

---

**Colección de Estudios de Física**

**Vol. 31**

*Esta colección recoge las tesis presentadas en el Departamento de Física de la Materia Condensada de la Universidad de Zaragoza desde su constitución en 1987.*

Colección de Estudios de Física

Vol. 31

Dos modelos de la teoría no lineal de la  
Física de la Materia Condensada: la cadena  
Frenkel-Kontorova y la escalera de uniones  
Josephson

Juan José Mazo Torres



Prensas Universitarias de Zaragoza

FICHA CATALOGRÁFICA

MAZO TORRES, Juan José

Dos modelos de la teoría no lineal de la Física de la Materia Condensada : la cadena Frenkel-Kontorova y la escalera de uniones Josephson / Juan José Mazo Torres. — Zaragoza : Prensas Universitarias de Zaragoza, 2007

XIII, 193 p. ; 24 cm. —(Colección de Estudios de Física ; 31)

Tesis-Universidad de Zaragoza

ISBN 978-84-7733-928-1

1. Materia condensada—Tesis doctorales. I. Universidad de Zaragoza. II. Título. III. Serie: Colección de Estudios de Física (Prensas Universitarias de Zaragoza) ; 31

538.9(043.2)

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, ni su préstamo, alquiler o cualquier forma de cesión de uso del ejemplar, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

© Juan José Mazo Torres  
© De la presente edición, Prensas Universitarias de Zaragoza  
1.ª edición, 2007

Prensas Universitarias de Zaragoza. Edificio de Ciencias Geológicas, c/ Pedro Cerbuna, 12,  
50009 Zaragoza, España. Tel.: 976 761 330. Fax: 976 761 063  
puz@unizar.es <http://puz.unizar.es>

Impreso en España  
Imprime: Servicio de Publicaciones. Universidad de Zaragoza  
D.L.: Z-3182/2007

*A mis padres*



# Índice

<b>Prólogo</b>	<b>XI</b>
<b>I Modelo Frenkel-Kontorova</b>	<b>1</b>
<b>Resumen de la primera parte</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Estructuras espacialmente moduladas . . . . .	7
1.2. Dinámica de estructuras espacialmente moduladas . . . . .	9
1.2.1. Ondas de densidad de carga . . . . .	10
<b>2. Propiedades de equilibrio del modelo Frenkel-Kontorova</b>	<b>17</b>
2.1. Definiciones y propiedades básicas . . . . .	17
2.2. Estados fundamentales conmensurados, disconmensuraciones elementales y transición Conmensurada - Inconmensurada . . . . .	25
2.3. Estados fundamentales inconmensurados y transición de Aubry (TBA) . . . . .	33
2.4. Defectos, interfases, estados metaestables y límite anti-integrable	40
<b>3. Dinámica disipativa del modelo Frenkel-Kontorova bajo fuerzas constantes</b>	<b>47</b>
3.1. Propiedades básicas de la dinámica disipativa: regla “prohibido adelantar” de Middleton y sus consecuencias . . . . .	48
3.2. Caracterización del régimen deslizando: función <i>hull</i> dinámica .	51
3.3. La transición de desanclaje . . . . .	59
3.3.1. Desanclaje del sistema de una partícula . . . . .	60
3.3.2. Estructuras conmensuradas . . . . .	63
3.3.3. Estructuras inconmensuradas . . . . .	65
3.3.4. Disconmensuraciones . . . . .	71
<b>4. Dinámica disipativa del modelo Frenkel-Kontorova bajo fuerzas alternas</b>	<b>79</b>

4.1. Pulsos . . . . .	81
4.2. Fases conmens. bajo fuerza sinusoidal. Transición de desincronización. . . . .	85
4.3. Estructuras inconmensuradas impulsadas por fuerzas sinusoidales. Transición de Aubry dinámica . . . . .	95
4.4. Disconmensuraciones, sincronización y metaestabilidad dinámica	103
<b>Bibliografía I</b>	<b>113</b>
<b>II La escalera de uniones Josephson</b>	<b>117</b>
<b>Resumen de la segunda parte</b>	<b>119</b>
<b>5. Introducción</b>	<b>121</b>
5.1. El efecto Josephson . . . . .	121
5.2. Redes de uniones Josephson . . . . .	124
5.2.1. Estados fundamentales y transiciones de fase en redes de uniones Josephson . . . . .	128
5.2.2. Redes de uniones Josephson sometidas a corrientes externas . . . . .	131
5.3. Red unidimensional de uniones Josephson en paralelo . . . . .	135
<b>6. Propiedades de equilibrio de la escalera de uniones Josephson</b>	<b>137</b>
6.1. El modelo . . . . .	137
6.2. Estados fundamentales . . . . .	139
6.3. Metaestabilidad . . . . .	148
<b>7. Efectos de apantallamiento de campo en la escalera de uniones Josephson</b>	<b>155</b>
7.1. El modelo y los métodos empleados . . . . .	155
7.2. Estados fundamentales . . . . .	159
7.3. Metaestabilidad . . . . .	167
7.4. Apéndice: matriz de inducciones . . . . .	170
<b>8. Algunos aspectos dinámicos en la escalera de uniones Josephson</b>	<b>173</b>
8.1. Dinámica de relajación al equilibrio . . . . .	173
8.2. Dinámica en presencia de corrientes externas . . . . .	179
8.2.1. Ecuaciones del movimiento . . . . .	179
8.2.2. Algunos resultados de dinámica peculiares de la escalera de uniones Josephson bajo intensidades continuas . . . . .	182
<b>Bibliografía II</b>	<b>189</b>

# Prólogo

Un conjunto importante de los sistemas que son estudiados por la Física de la Materia Condensada, están caracterizados por la competencia entre diferentes escalas de longitud y de tiempo. De entre los resultados de estas competencias, podemos citar algunos fenómenos tan interesantes como la existencia de fases moduladas en sólidos o los fenómenos dinámicos de sincronización de frecuencias; todos ellos han sido en los últimos años, y son hoy, objeto del trabajo teórico y experimental de una parte de los físicos de la Termodinámica, la Materia Condensada y la Mecánica Estadística.

El objetivo de este trabajo de Tesis Doctoral ha sido realizar un estudio de diferentes estructuras espaciotemporales en sistemas macroscópicos. Estas estructuras son fruto de los fenómenos de competencia entre escalas, que resultan en una diversidad de transiciones de fase, fenómenos críticos y comportamientos complejos, algunos de los cuales son estudiados en esta memoria (la transición Conmensurada-Inconmensurada, la transición de desanclaje, las transiciones de Aubry estática y dinámica, la transición de desincronización, transiciones de estabilidad de fases moduladas, o fenómenos de relajación lenta). Para llevar a cabo este estudio hemos escogido la cadena Frenkel-Kontorova y una escalera de uniones Josephson. A lo largo de esta memoria nos mantenemos dentro de los límites de validez del tratamiento clásico del problema y, por lo tanto, más allá de las ecuaciones de la Mecánica Cuántica que describen el comportamiento de la materia y la energía a las escalas más pequeñas. Así mismo, al considerar estos sistemas como macroscópicos los hemos estudiado en el límite termodinámico de los mismos. Por último, ambos sistemas son discretos. Tener en cuenta esta discretitud es clave para entender un número de resultados que no aparecen en las aproximaciones continuas a los sistemas.

Una segunda, y no por ello menos importante, característica de la Física de la que estamos hablando es la no linealidad presente en la descripción matemática de todos estos fenómenos. Podríamos afirmar que, históricamente, la Física ha puesto su frontera en la linealidad. Por ello, materias de conocimiento tales como la Sociología, la Biología o la Economía, por citar algunas de las

más representativas, han permanecido, y esto sigue siendo así hoy en día para muchos, ajenas al interés de los físicos y, sobre todo, fuera del alcance de sus métodos. Si algo tienen en común estas disciplinas, es la complejidad y la no linealidad. La situación que acabamos de describir está cambiando rápidamente y de hecho, complejidad y no linealidad forman parte de un conjunto de conceptos que son básicos para entender parte de la Física de este final de siglo. De este modo, el creciente interés de la Física en problemas no lineales y los logros de los métodos de análisis que emplea deben ser los mejores avales para la irrupción de nuevas técnicas e ideas en los campos citados anteriormente.

Los sistemas estudiados a lo largo de esta memoria tienen la semilla de la competición entre escalas y la no linealidad; sólo desde la comprensión de estos fenómenos a los niveles más básicos se pueden intentar logros mayores.

El modelo Frenkel-Kontorova ha sido estudiado durante mucho tiempo como un modelo paradigmático para la caracterización de fases moduladas. Podemos separar dos aspectos fundamentales de nuestra aportación al estudio de este sistema. Primero el estudio de la dinámica disipativa del mismo, especialmente bajo la acción de fuerzas alternas. Estas introducen una escala temporal nueva en el sistema, escala que entra en competencia con la frecuencia típica del movimiento del mismo. Dicha competencia resulta en el fenómeno de sincronización. Segundo, hemos realizado una visión integradora de las propiedades de equilibrio y las propiedades dinámicas del sistema. Por esto, toda la primera parte de esta memoria debe ser vista como un esfuerzo de revisión e integración de las principales propiedades de equilibrio y dinámicas no disipativas del modelo Frenkel-Kontorova, dentro del marco de dos descripciones opuestas y complementarias: la analítica frente a la fractal.

La segunda parte de esta memoria estudia un sistema experimental concreto de la materia condensada: una red de uniones Josephson, con una distribución geométrica peculiar, la de una escalera. Las redes de uniones Josephson están entre aquellos sistemas físicos donde todo el conjunto de conceptos de los que estamos hablando pueden ser comprobados teóricamente y experimentalmente del mejor modo. Por ello, la literatura sobre el estudio de múltiples fenómenos estáticos y dinámicos no lineales en redes de uniones Josephson es amplísima y sigue creciendo hoy en día. De entre las diferentes redes de uniones Josephson, la escalera es un sistema particularmente interesante. Contiene los ingredientes más representativos de la física de las redes de uniones Josephson y, por su carácter casi unidimensional, es susceptible de un estudio más riguroso. Nosotros hemos realizado un estudio de las propiedades estáticas de la red en dos aproximaciones distintas físicamente relevantes, así como de aquellas propiedades de dinámica restringida que son resultado de su peculiar espacio de configuraciones.

Por último, no puedo dejar de enumerar un conjunto de técnicas cuya explicación no he desarrollado explícitamente en la memoria, pero que han sido fundamentales en distintos momentos del trabajo: son los métodos de integración numérica de sistemas deterministas y estocásticos de ecuaciones diferenciales; la utilización del método de potenciales efectivos para el cálculo de diagramas de fases de estados fundamentales; el cálculo de exponentes de Lyapunov, secciones de Poincaré y espectros de potencias; la búsqueda de soluciones de equilibrio del sistema y el análisis de estabilidad de las mismas; y el análisis de Floquet de la estabilidad de soluciones dinámicas periódicas.

Este libro es el resultado del trabajo de investigación que he llevado a cabo en el Departamento de Física de la Materia Condensada de la Universidad de Zaragoza con un conjunto de excelentes científicos y mejores personas a las que quiero expresar mi agradecimiento.

Zaragoza, Marzo de 1996



Parte I

Modelo Frenkel-Kontorova



## Resumen de la primera parte

La primera parte de esta memoria recoge los avances más recientes de la teoría de la **dinámica disipativa de las fases moduladas en el modelo Frenkel-Kontorova**. A nuestro juicio, las conclusiones más importantes – integradoras de las propiedades de equilibrio y dinámicas del modelo Frenkel-Kontorova estándar – son las siguientes:

- Las **modulaciones conmensuradas** poseen una longitud de coherencia finita, que está directamente relacionada con el carácter discreto del grupo de simetría de sus propiedades de invariancia. Las implicaciones físicas de este hecho son la capacidad de admitir defectos (**defectibilidad**) y la abundancia de estados metaestables de energías arbitrariamente próximas (**metaestabilidad**).

- Las **modulaciones inconmensuradas** cerca del límite integrable ( $K = 0$ ) son invariantes bajo transformaciones de un grupo de simetría continuo y tienen una longitud de coherencia infinita. Por lo tanto, no son defectibles y el paisaje de energías del espacio de configuraciones no presenta metaestabilidad. Sin embargo, la situación en las cercanías del límite anti-integrable ( $1/K \rightarrow 0$ ) es similar a la de las estructuras conmensuradas. El cambio entre ambos regímenes no es suave, sino crítico y está descrito por una **transición de Aubry**. A un lado de la transición de Aubry la descripción de la modulación inconmensurada es analítica, mientras que al otro lado es no analítica, fractal de hecho. De este modo, el término **fractalidad** como opuesto a **analiticidad** es el recomendado. Ambas descripciones, la continua (integrable) y la fractal (anti-integrable) tienen su propio dominio de validez y son complementarias.

- El juego entre la descripción continua y la fractal se extiende a la dinámica disipativa de las estructuras moduladas. Las estructuras conmensuradas y las inconmensuradas no analíticas, bajo un campo de fuerzas constante evolucionan hacia el dominio de validez de la descripción continua. El grado de defectibilidad y metaestabilidad decrece progresivamente conforme el campo externo se incrementa, hasta que ocurre la **transición de desanclaje**. Desde ese momento es adecuada una descripción continua, en la que desaparecen la defectibilidad y la metaestabilidad.

- Por encima de la transición de desanclaje hay un único atractor de la dinámica disipativa, descrito por una función analítica unidimensional. La transición de desanclaje es un fenómeno crítico cuyo análisis es reducible a una bifurcación *saddle-node*, una situación mucho más sencilla que la de la transición de Aubry. Sin embargo, la transición de Aubry aparece como el punto

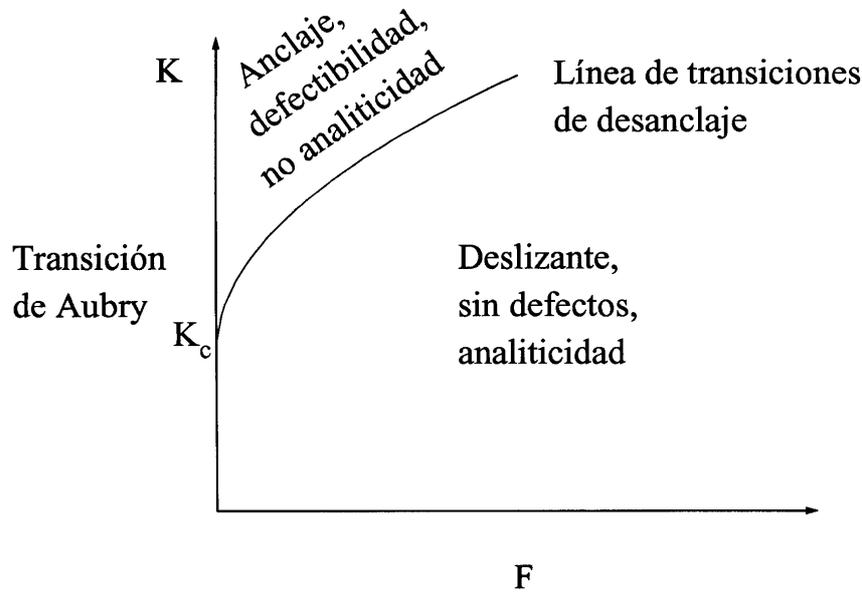


Figura C.1: Imagen que representa la transición de Aubry como el punto final de una línea de transiciones de desanclaje de las estructuras incommensuradas.

final de la línea de transiciones de desanclaje de las estructuras incommensuradas (figura C.1), esta es una perspectiva interesante nueva, no totalmente desarrollada.

- La inclusión de un campo de fuerzas periódico en la dinámica disipativa de las fases moduladas introduce la ruptura de la invariancia continua bajo traslación temporal, que es entonces reemplazada por una invariancia discreta. Entonces, en la descripción de la dinámica del sistema aparecen los conceptos de movimiento **resonante** y **sincronización**. En un movimiento resonante la frecuencia asociada con el desplazamiento de la estructura modulada está sincronizada a múltiplos racionales de la frecuencia de forzado. Las estructuras commensuradas espacialmente moduladas, en el régimen resonante poseen el carácter de atractores estables de la dinámica ya que cualquier pequeña fluctuación espacio-temporal relaja exponencialmente. El carácter discreto del grupo de simetría del conjunto de los estados estacionarios da cabida a la existencia de metaestabilidad y defectibilidad. La variación del valor medio de la fuerza cambia la velocidad del movimiento y se produce una **transición de desincronización** a valores no resonantes de la velocidad o a nuevas resonancias. Esta multiplicidad de fases resonantes estables de la dinámica puede ser observada como resultado del desdoblamiento de la transición de desanclaje a fuerzas constantes (que entonces aparece como un punto multicrítico).

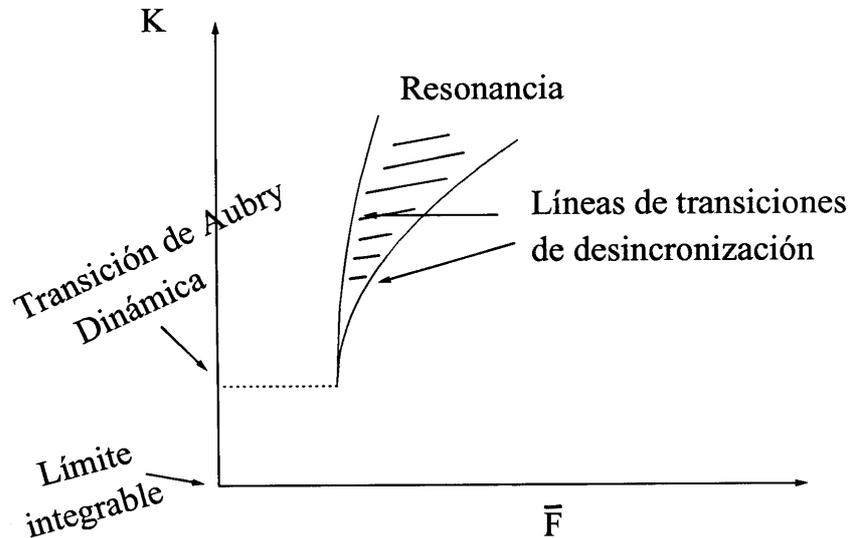


Figura C.2: Imagen que representa la transición de Aubry dinámica como el punto final de líneas de transiciones de desincronización en estructuras inconmensuradas.

- La transición de desincronización está caracterizada como una transición de periodicidad temporal a cuasiperiodicidad. Fenomenológicamente, puede describirse por medio de la generación de estructuras coherentes, localizadas y regularmente distribuidas en el tiempo, que llamamos **instantones**, y que producen un incremento de la velocidad de las partículas. Cada instantón es portador de una carga topológica, cuyo origen es el carácter discreto del grupo de transformaciones de simetría del estado estacionario resonante.

- Las estructuras inconmensuradas, cerca del límite continuo (integrable) se mueven sin sincronización a los valores resonantes de la velocidad, ya que el atractor mantiene una simetría continua. En este régimen analítico, los estados estacionarios son indefectibles y no hay lugar para la metaestabilidad. El atractor de la dinámica está descrito por una **función hull bidimensional analítica**. El tránsito desde este comportamiento analítico al no analítico que caracteriza el régimen anti-integrable está marcado por una **transición de Aubry dinámica**, por encima de la cual encontramos sincronización, defectibilidad y metaestabilidad. La transición de Aubry dinámica puede ser vista como el punto final de líneas de transiciones de desincronización de las fases inconmensuradas (figura C.2).

- Se ha estudiado la posibilidad de la supervivencia de estructuras metaestables como estados estacionarios de la dinámica disipativa del modelo Frenkel-Kontorova. En el caso de un campo de fuerzas constante no ocurre tal

supervivencia, dada la unicidad del estado estacionario final. Por el contrario, cuando el sistema está impulsado por un campo de fuerzas externas periódicas, la sincronización del movimiento con la frecuencia de la fuerza posibilita, bajo ciertas condiciones, el movimiento estable de estructuras metaestables.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Estructuras espacialmente moduladas

Estructuras espacialmente moduladas han sido observadas experimentalmente en muchos sistemas físicos [1, 2, 3]. En todos ellos el vector de onda que caracteriza la modulación cambia con parámetros externos tales como la temperatura, la presión o el campo magnético. En ocasiones este cambio es continuo, pero a menudo antes de cambiar a otro valor el vector permanece constante, e igual a un número racional, a lo largo de un intervalo de valores del parámetro externo. A las modulaciones con vector de onda racional las llamamos **conmensuradas** y a aquellas con vector de onda irracional, **inconmensuradas**.

El origen físico de este comportamiento tan peculiar es la competición entre las distintas interacciones que dan cuenta de la energía libre del sistema. Uno de los modelos mejor entendidos entre aquellos que presentan este tipo de comportamiento es el **modelo ANNNI** [1, 2] (axial next-nearest neighbour Ising). Su estudio ha sido fundamental para entender el comportamiento de las estructuras espacialmente moduladas. Es un modelo Ising ferromagnético con interacción antiferromagnética a segundos vecinos situados en una determinada dirección  $z$ . La competición entre la interacción a primeros vecinos ( $J_1 > 0$ ) y la interacción a segundos ( $J_2 < 0$ ), que depende de la temperatura, puede estudiarse a través del siguiente hamiltoniano:

$$H = -\frac{1}{2}J_0 \sum_{ijj'} S_{i,j} S_{i,j'} - J_1 \sum_{ij} S_{i,j} S_{i+1,j} - J_2 \sum_{ij} S_{i,j} S_{i+2,j}, \quad (1.1)$$

donde  $i$  señala planos perpendiculares al eje  $z$  mientras que  $j$  y  $j'$  son espines vecinos próximos. A temperatura cero, sólo son estados de equilibrio dos distribuciones de espines en la dirección  $z$ : (... + + + + + + + ...)

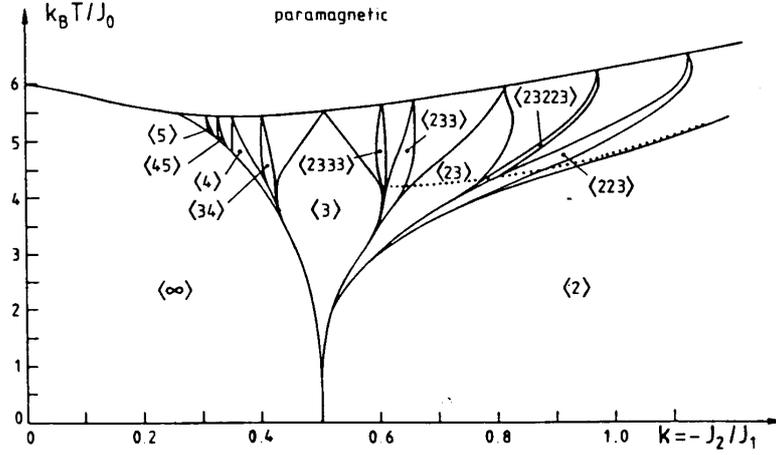


Figura 1.1: Diagrama de fases de campo medio del modelo ANNNI mostrando las principales fases conmutadas [1].

$\kappa = -J_2/J_1 < 1/2$ , y  $(\dots + + - - + + - - \dots)$  si  $\kappa > 1/2$ . Conforme  $T$  aumenta el diagrama de fases se abre en una flor a partir del punto de coexistencia de fases a temperatura cero,  $\kappa = 1/2$ , flor cuyos pétalos se asocian a las diferentes fases moduladas.

La espectacularidad de este diagrama de fases (figura 1.1) es característica de los muchos modelos diferentes de la Mecánica Estadística para fases moduladas. Dada la complejidad de incluso los más simples de estos modelos, una aproximación tipo Landau al problema puede dar las características fundamentales del comportamiento de equilibrio. Siguiendo a Griffiths [4], una forma sensata de proceder es asumir la evidencia experimental de que la cantidad promedio  $M$  que está modulada (la magnetización en el caso del modelo ANNNI) es constante a lo largo de los planos perpendiculares a la modulación, y suponer una energía libre fenomenológica de la forma:

$$F = \sum_j [\Phi_1(M_j) + \Phi_2(M_j, M_{j+1}) + \Phi_3(M_j, M_{j+1}, M_{j+2}) + \dots], \quad (1.2)$$

donde  $\Phi_1, \Phi_2$ , etc. . . son energías libres fenomenológicas que dependen de algún modo de parámetros intensivos como la temperatura, la presión o algún campo. El promedio  $M_j$  en cada plano puede ser tratado como una variable clásica y, al estar ya incluidas en este promedio las fluctuaciones térmicas, es posible determinar la modulación en el equilibrio calculando el valor mínimo de  $F$  sobre todas las configuraciones posibles  $\{M_j\}$ .

En esta aproximación variacional resulta conveniente acudir a las posibilidades más simples de las energías libres fenomenológicas,  $\Phi_1, \Phi_2$ , etc. . . Cuando

en (1.2)  $\Phi_1(u) = \Phi_1(u + 1)$ ,  $\Phi_2(u_j, u_{j+1}) \neq 0$  y  $\Phi_j = 0$  para todo  $j > 2$ , se obtiene la **clase de modelos Frenkel-Kontorova**, que pueden ser vistos como la opción más sencilla entre aquellos cuyo comportamiento no es trivial. El modelo **Frenkel-Kontorova estándar** corresponde a la elección

$$\begin{aligned}\Phi_1(u) &= \frac{K}{(2\pi)^2}[1 - \cos(2\pi u)], \\ \Phi_2(u, v) &= \frac{1}{2}(v - u - \mu)^2.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Ambas contribuciones a la energía libre compiten para determinar la modulación de la estructura  $\{u_j\}$  de equilibrio, la solución de este problema variacional requirió de considerable genialidad [5, 6].

En el capítulo 2 presentamos un resumen de las propiedades más relevantes del problema del estado fundamental del modelo Frenkel-Kontorova. Los trabajos de Griffiths [4] y Selke [2] son dos excelentes trabajos de revisión introductorios a este tema. Los lectores más ambiciosos, encontraran en las lecciones de Aubry [5] una exposición de las principales ideas y resultados. El resumen de las propiedades de equilibrio del modelo Frenkel-Kontorova, que presentamos en el capítulo 2, está encaminado a proporcionar a los no especialistas las nociones y definiciones básicas que serán usadas posteriormente en los capítulos 3 y 4, que abordan la dinámica disipativa del modelo Frenkel-Kontorova estándar.

## 1.2. Dinámica de estructuras espacialmente moduladas

En los últimos años ha crecido el interés en el comportamiento dinámico de las estructuras espacialmente moduladas cuando son sometidas a la acción de campos de fuerzas [7]. Una muestra sencilla de este tipo de situación es el análisis de Prigodin y Samukhin [8] de la red de Abrikosov de vórtices en una película superconductora de tipo II corrugada periódicamente y sometida a un campo magnético perpendicular. En este sistema el periodo de la corrugación compite con la distancia natural entre vórtices a ese valor del campo magnético, lo que se traduce en distribuciones moduladas de los vórtices. Al aplicar corrientes externas en la dirección perpendicular a la corrugación, la fuerza de Lorentz tiende a desplazar la red de Abrikosov a lo largo de la dirección de la corrugación, lo que plantea el problema de la dinámica de la red de vórtices sobre un potencial substrato periódico. Un análisis similar ha sido aplicado por Burkov al caso de superconductores laminares de tipo II [9]. En ambas situaciones puede argumentarse que el movimiento de los vórtices es disipativo; esto es, podemos despreciar los efectos inerciales [10].

Siempre que pueda argumentarse la irrelevancia de la inercia en el sistema, el límite disipativo de la dinámica es una aproximación adecuada al problema. Tal aproximación está justificada en muchas situaciones físicas, como el transporte en sistemas con una onda de densidad de carga en presencia de un campo eléctrico, o la dinámica de muchas redes de uniones Josephson. El resto de este capítulo de introducción lo dedicaremos a las ondas de densidad de carga ya que el interés en este fenómeno ha sido el principal impulso a los estudios de la dinámica del modelo Frenkel-Kontorova, el objeto de esta primera parte de la memoria. En la segunda parte de la misma estudiamos algunos aspectos estáticos y dinámicos de redes de uniones Josephson.

### 1.2.1. Ondas de densidad de carga

En los últimos 25 años, la Física de la Materia Condensada ha prestado gran atención al fenómeno de las ondas de densidad de carga en sólidos. Predichas previamente por la teoría, las propiedades de transporte anómalas observadas en cadenas lineales de ciertos compuestos inorgánicos fueron la evidencia experimental de un nuevo fenómeno de transporte colectivo, donde el mecanismo de conducción eléctrica deriva de las propiedades de un estado fundamental peculiar, llamado onda de densidad de carga.

En este apartado no pretendemos realizar una revisión minuciosa de este importante fenómeno. Las referencias [11, 12, 13, 14] son excelentes trabajos de recopilación sobre el tema, a los que el lector interesado se debe dirigir. Nuestro ánimo es describir la fenomenología asociada a la dinámica de las ondas de densidad de carga en sólidos, e introducir algunos de los modelos más usados para estudiarla. Algunos de estos modelos están relacionados con la dinámica disipativa del modelo Frenkel-Kontorova, estudiada en los capítulos 3 y 4 de esta tesis.

### Dinámica de las ondas de densidad de carga

Peierls [15] mostró que un metal unidimensional acoplado a la red atómica subyacente es inestable a bajas temperaturas y sufre una transición de fase a un estado no conductor. A causa de las interacciones electrón-fonón, el estado fundamental está caracterizado por una distorsión periódica de la red acompañada de la apertura de un *gap* en el diagrama de bandas situado al nivel de Fermi, lo que provoca un decrecimiento de la energía de los electrones del sistema, decrecimiento que compite con el coste en energía elástica asociado a la distorsión de la red. A bajas temperaturas la distorsión es energéticamente ventajosa.

El estado fundamental también está caracterizado por un modo colectivo formado por pares electrón-hueco con un vector de ondas  $\vec{q} = 2\vec{k}_F$ , y por una modulación de la densidad electrónica de carga, **la onda de densidad de carga**,

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 + \rho_1 \cos(2\vec{k}_F \vec{r} + \varphi), \quad (1.4)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad media de electrones en el metal,  $\rho_1$  la amplitud de la onda y  $\varphi$  (la fase) describe la localización de esta con respecto a la red. El periodo  $\lambda$  de la modulación está relacionado con el vector de ondas de Fermi  $\vec{k}_F$ ,  $\lambda = \frac{\pi}{k_F}$ , y en la mayoría de los casos es inconmensurado con la red subyacente. Más adelante veremos que muchas de las propiedades dinámicas del sistema pueden ser descritas en términos de la fase de la onda.

Las primeras evidencias experimentales de este fenómeno se encontraron algunos años después del trabajo de Peierls. Muchos materiales con una estructura de bandas muy anisótropa a bajas temperaturas desarrollan una onda de densidad de carga. Algunos ejemplos son los conductores orgánicos TTF-TCNQ, algunos compuestos semiorgánicos (KCP), compuestos inorgánicos con una estructura laminar (que poseen una onda de densidad de carga bidimensional) y compuestos inorgánicos de cadena lineal ( $NbSe_3$ ,  $TaSe_3$ ,  $K_{0,3}MoO_3$ , etc. . . ), los más estudiados. Estos materiales sufren una transición de segundo orden de metal a aislante, que está asociada con la aparición de distorsiones periódicas de la red, las cuales son en general inconmensuradas con la red subyacente.

A temperaturas inferiores a la transición de Peierls estos materiales deberían ser semiconductores y sus propiedades eléctricas estar asociadas a las excitaciones a través del *gap* en la estructura de bandas. Sin embargo, en 1954 Fröhlich [16] apuntó que debido a la posible invariancia traslacional de los sistemas inconmensurados, el estado de la onda de densidad de carga es capaz de portar una corriente continua sin resistencia. El estudio de la dinámica de los modos colectivos muestra que en el sistema existe un modo cero traslacional. Este modo está asociado con la fase de la onda y lleva una corriente que resulta del movimiento traslacional del condensado de electrones mientras los iones oscilan en torno sus posiciones de equilibrio. Por otro lado la relación de dispersión para la amplitud del modo presenta un *gap*, por lo que la mayoría de las descripciones de la dinámica del modo colectivo están hechas en términos de la fase del condensado tan sólo, como ocurre en el caso de un superconductor. En la ausencia de amortiguamiento, el condensado es un conductor perfecto y las densidades de corriente  $j_{CDW}$  y de portadores  $n_c$  son funciones de las variaciones de la fase:

$$j_{CDW} = -\frac{e}{\pi} \frac{d\varphi}{dt} \quad ; \quad n_c = \frac{e}{\pi} \frac{d\varphi}{dx}. \quad (1.5)$$

Un concepto central para comprender la dinámica de la onda en este marco teórico es el del anclaje por impurezas. Todos los fenómenos de transporte dependen crucialmente de las interacciones entre el modo colectivo y las impurezas y defectos de la red. Tales interacciones destruyen la invariancia traslacional de la onda incommensurada y conducen a un anclaje de la fase a la red. Por esto, a valores muy pequeños del campo los experimentos sobre las propiedades conductoras de una onda de densidad de carga, no revelan señales de movimiento colectivo y tan sólo se encuentra una contribución óhmica a la conductividad (definida como el cociente  $j/E$ , donde  $j$  es la densidad de corriente total y  $E$  el campo eléctrico).

Una aproximación teórica muy diferente a las ondas de densidad de carga, en la que las impurezas no juegan un papel significativo, ha sido avanzada recientemente por Aubry y sus colaboradores [17]. Estos autores, usando las ideas del límite anti-integrable en hamiltonianos electrón-fonón llegan a una caracterización rigurosa (para valores altos del acoplamiento electrón-fonón) de la onda como una red de bipolarones, cuyo anclaje es consecuencia de la transición de Aubry en el modelo. Esta prometedora perspectiva aún está siendo desarrollada y, en particular, la dinámica de ondas bipolarónicas permanece sin ser estudiada.

Las primeras observaciones de dinámica de ondas de densidad de carga fueron hechas en los años setenta [18, 19], cuando se estudiaron compuestos muy anisótropos como  $K_{0.3}MoO_3$ ,  $NbSe_3$  y  $TaS_3$ . En estos trabajos se encontró una conductividad continua no lineal con un claro campo umbral. Por encima de este campo umbral la onda de densidad de carga desliza en el cristal y, además de una contribución óhmica (debida a los electrones no condensados), se encuentra una contribución no lineal a la conductividad. Esta contribución es mayor que la primera y está asociada a los electrones condensados. Los detalles sobre la conductividad no lineal cambian fuertemente como función de la temperatura, las inhomogeneidades, el número y extensión de los centros de impureza, el tamaño y calidad de la muestra, etc. . . En muchos casos el desanclaje de la onda de densidad de carga es bastante abrupto y está acompañado por un salto y efectos de histéresis, cuyo origen es usualmente atribuido a la existencia de fuertes centros de anclaje en la muestra [20].

Uno de los hallazgos más espectaculares en este campo fue la detección de Fleming y Grimes en 1979 [21] de oscilaciones en las corrientes dentro de la región no lineal de la conductividad. La frecuencia fundamental de tales oscilaciones es proporcional a la corriente llevada por el movimiento colectivo y las corrientes pueden ser resueltas en dos componentes: oscilaciones coherentes, que generan un ruido de banda estrecha (*narrow band noise*); y oscilaciones aleatorias, que generan un ruido de banda ancha (*broad band noise*). La detec-

ción, origen y caracterización de ambas componentes ha sido objeto de especial atención en los estudios de la dinámica de ondas de densidad de carga.

Monceau et al. en 1980 [22] encontraron fenómenos de interferencia cuando a la muestra se le aplica un campo alterno con una componente continua. La curva intensidad-campo muestra peldaños en los que la corriente media de la onda permanece constante frente a variaciones de la componente continua del campo. Este fenómeno es el resultado de la sincronización de la frecuencia interna de la onda  $\omega_n$ , asociada a las oscilaciones de la corriente, con la frecuencia  $\omega$  del campo externo. Se encuentran peldaños armónicos ( $\omega_n/\omega$  entero) y subharmónicos ( $\omega_n/\omega$  fraccional).

### Modelos de la dinámica de las ondas de densidad de carga

Han sido propuestos muchos modelos para explicar los distintos resultados experimentales sobre el desanclaje y la dinámica de una onda de densidad de carga. Sin embargo, el interés en todos ellos trasciende sus aplicaciones a los fenómenos de transporte en ondas de densidad de carga, al constituirse en sistema prototipo para el estudio de las propiedades dinámicas de sistemas de muchos grados efectivos de libertad.

Podemos distinguir entre dos aproximaciones distintas, que difieren a nivel microscópico: los modelos clásicos y los modelos de túnel. Los primeros tratan la onda como un medio elástico moviéndose sobre un potencial de anclaje debido a las impurezas. Los modelos de túnel tratan al conductor como un sistema cuántico macroscópico. La mayoría de los modelos asumen que la fase del parámetro de orden es la única variable dinámica relevante y que el anclaje surge del acoplamiento directo entre las inhomogeneidades y la fase.

El modelo fenomenológico más sencillo de la dinámica de una onda de densidad de carga es el **modelo de una partícula** [23, 24]. En este modelo la fase de la onda es tratada como una variable clásica bajo la acción de tres fuerzas diferentes: a) el campo externo. b) Fuertes amortiguamientos, que producen un término inercial despreciable. c) El efecto de anclaje de un potencial debido a las impurezas, que es periódico y por sencillez se asume sinusoidal. Siguiendo esta descripción

$$I_{\text{CDW}} \propto \frac{d\varphi}{dt} = E - k \sin \varphi, \quad (1.6)$$

donde  $E$  es el campo externo,  $k$  es la intensidad del potencial de anclaje y el tiempo ha sido debidamente escalado.

A pesar de su sencillez, este modelo de un único grado de libertad es capaz de reproducir algunas de las características cualitativas del transporte de la onda de densidad de carga:

- La existencia de una conductividad no lineal con un campo umbral.
- La presencia de oscilaciones de corriente en respuesta a un campo continuo, con una frecuencia que es proporcional a la corriente media.
- Sincronización de fase en los armónicos, en respuesta a campos eléctricos alternos.

Junto con estos logros, el modelo de una partícula presenta deficiencias cualitativas en otros aspectos importantes; así, la comprensión de la transición de desanclaje o la explicación de la existencia de peldaños subarmónicos requieren el estudio de modelos más sofisticados.

El modelo de túnel desarrollado por Bardeen [25, 26] está basado en la asunción de que los responsables del transporte del condensado son procesos de túnel tipo Zener. El modelo ha podido explicar muchos resultados experimentales. Siguiendo esta descripción, y tras algunas suposiciones simplificadoras, la dinámica de una onda de densidad de carga está descrita por la ecuación de movimiento de una partícula sobreamortiguada en un potencial substrato no sinusoidal  $V(\theta)$ :

$$V(\theta) \propto \begin{cases} -\cos \theta & \text{si } -\pi/2 < \theta \leq \pi/2 \pmod{2\pi} \\ \cos \theta & \text{si } \pi/2 < \theta \leq 3\pi/2 \pmod{2\pi}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Este modelo de una única coordenada para la onda de densidad de carga muestra un buen acuerdo cualitativo y cuantitativo con las principales características de transporte bajo campos continuos y/o alternos [27].

El primer modelo microscópico realista fue propuesto por Fukuyama y Lee [28]. Estos autores desarrollaron, dentro del marco de una descripción Ginzburg-Landau, el hamiltoniano de una onda elástica incommensurada de densidad de carga (1.4), con una fase lentamente variable  $\varphi(\vec{r})$  que interactúa con las impurezas localizadas en posiciones aleatorias  $\vec{R}_j$  del substrato.

$$H = \int d\vec{r} \left[ \frac{K}{2} (\nabla \varphi(\vec{r}))^2 - \sum_j V_j \delta(\vec{r} - \vec{R}_j) \rho_1 \cos(2\vec{k}_F \vec{r} + \varphi(\vec{r})) \right]. \quad (1.8)$$

El primer término da la energía elástica asociada con las distorsiones de la fase, el segundo describe la interacción de la onda de densidad de carga con el potencial de anclaje,  $V(\vec{r} - \vec{R}_j) = V_j \delta(\vec{r} - \vec{R}_j)$ , debido a una impureza situada en  $\vec{R}_j$ .

En la mayoría de las situaciones la dinámica de la onda de densidad de carga está fuertemente amortiguada, lo que permite despreciar la inercia de

los modos colectivos. Los modelos también asumen que el acoplamiento de la fase al campo eléctrico es lineal; entonces, la ecuación dinámica para ésta se deduce de

$$\frac{d\varphi(\vec{r})}{dt} = \Gamma \left[ -\frac{\delta H}{\delta\varphi(\vec{r})} + \frac{neE}{2k_F} \right]. \quad (1.9)$$

Las ecuaciones (1.8) y (1.9) definen un problema no lineal muy complejo y para el cual no hay solución analítica. Su estudio ha sido realizado usando distintas aproximaciones (teorías de perturbaciones [29] y de campo medio [30]) y simulaciones numéricas, que se realizan discretizando la ecuación continua. Fisher [31] introdujo la siguiente versión estándar de discretización del modelo continuo clásico:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{[ij]} J_{ij} (\varphi_i - \varphi_j)^2 - \sum_j h_j \cos(\varphi_j - \beta_j), \quad (1.10)$$

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta\varphi_j} + F. \quad (1.11)$$

Aquí  $\varphi_j = \varphi(\vec{R}_j)$  es el valor de la fase en el sitio de la impureza  $\vec{R}_j$ , que trata fijar, con fuerza  $h_j$ , la fase al valor  $\beta_j$ . La elasticidad está representada por las interacciones  $J_{ij}$  entre fases en los sitios de impureza  $\vec{R}_i, \vec{R}_j$ . Observamos que el caso de sólo un centro de impurezas reproduce el modelo de una partícula. Los parámetros que describen las impurezas,  $h_j$  y  $\beta_j$ , son variables distribuidas aleatoriamente.

Generalmente, se cree que el desorden congelado (*quenched disorder*) es una característica esencial en la descripción Fukuyama-Lee de la dinámica de la onda de densidad de carga. Ciertamente, tiene importantes consecuencias en algunos aspectos relacionados con la existencia y naturaleza de muchos estados metaestables o los efectos de histéresis por debajo del campo umbral. Sin embargo, muchas de las propiedades del modelo son ciertamente reproducidas si se asume  $h_j = \text{constante}$ , y  $\beta_j = j\frac{\alpha}{2\pi}$ , donde  $\alpha$  es algún número real. Bajo estas asunciones el modelo Fukuyama-Lee se identifica con el modelo Frenkel-Kontorova estándar, describiendo el parámetro  $\alpha$  el espaciado promedio. A este respecto, los trabajos pioneros de Sneddon [32, 33] contribuyeron a fortalecer el modelo Fukuyama-Lee discreto como el marco teórico en el cual los resultados experimentales de la dinámica de ondas de densidad de carga podían ser satisfactoriamente entendidos. De este modo, el modelo Frenkel-Kontorova comenzó a interesar a los expertos en ondas de densidad de carga [34].

La caracterización de la onda de densidad de carga en las cercanías del campo umbral y el desanclaje de ésta fueron discutidas por Fisher [30, 31] como un fenómeno crítico dinámico. El señaló el fallo de la aproximación perturbativa

cerca del umbral y desarrolló una teoría de campo medio, que es válida en el límite de interacciones de alcance infinito entre las fases. Los resultados de Fisher proporcionan cierta intuición sobre la transición de desanclaje en el caso de interacciones de corto alcance, y son los precedentes directos de una serie de trabajos sobre el desanclaje de las estructuras incommensuradas del modelo Frenkel-Kontorova [35] y el desanclaje de la onda de densidad de carga con desorden congelado [36, 37].

La mayoría de la actividad teórica en la dinámica de la onda a campos superiores al umbral está centrada en las simulaciones numéricas del modelo Fukuyama-Lee con desorden. Cuando la onda de densidad de carga es impulsada por voltajes con componente alterna se obtienen sincronizaciones armónicas y subarmónicas de la corriente con la frecuencia externa [38]. El trabajo de revisión de Littlewood [39] estudia en profundidad el fenómeno de la sincronización en ondas de densidad de carga. También, se han estudiado diversos autómatas celulares [40, 41], que son diseñados para imitar el comportamiento dinámico del modelo Fukuyama-Lee discreto bajo fuerzas periódicas.

Más recientemente Middleton [42, 43, 44] ha probado algunos resultados rigurosos, que proporcionan una base firme para una comprensión teórica satisfactoria de la dinámica disipativa de medios elásticos discretos en potenciales de anclaje. En las secciones 3.1 y 3.2 consideraremos estos resultados cuidadosamente.

Ya hemos señalado que la descripción Fukuyama-Lee de la dinámica de la onda de densidad de carga es esencialmente la dinámica disipativa del modelo Frenkel-Kontorova con el ingrediente añadido de la aleatoriedad en el potencial substrato. Aunque este ingrediente es importante, los avances en la teoría de la dinámica de la cadena Frenkel-Kontorova han contribuido de modo significativo a la teoría de la física de los sistemas con una onda de densidad de carga. Recíprocamente, el interés en la dinámica de ondas de densidad de carga ha sido siempre el principal impulso para los estudios dinámicos del modelo Frenkel-Kontorova.

Sin embargo, existen efectos encontrados en ondas de densidad de carga que no pueden ser entendidos en el marco de estos modelos clásicos. Muestras que han sido deliberadamente desordenadas presentan un tipo de fenomenología, conocida como *switching*, que generalmente se asocia con las fluctuaciones de la amplitud. Algunos modelos, que consideran los grados de libertad de la fase y de la amplitud han conseguido reproducir estos efectos [45, 46]. Estos modelos, basados en una generalización del hamiltoniano Fukuyama-Lee, muestran importantes diferencias con respecto a la clase de modelos Frenkel-Kontorova.

## Capítulo 2

# Propiedades de equilibrio del modelo Frenkel-Kontorova

### 2.1. Definiciones y propiedades básicas

Una imagen usual del modelo Frenkel-Kontorova, que proporciona una intuición mecánica útil sobre el mismo, es la de una cadena lineal de partículas sometidas a la acción de un potencial periódico y conectadas entre sí por muelles (ver figura 2.1). Sea  $u_j$  la posición de la partícula  $j$ , la energía potencial total del sistema es

$$H = \sum_j [V(u_j) + W(u_{j+1} - u_j)], \quad (2.1)$$

donde  $V(u)$  es el potencial periódico ( $V(u+1) = V(u)$ ) y  $W(\Delta u)$  el potencial del muelle, que depende de la distancia entre partículas vecinas. El modelo **Frenkel-Kontorova estándar** está definido por las siguientes funciones para los potenciales:

$$V(u) = \frac{K}{(2\pi)^2} [1 - \cos(2\pi u)], \quad (2.2)$$

$$W(y) = \frac{1}{2}(y - \mu)^2.$$

Aquí las unidades de longitud y energía son el periodo del potencial  $V$  y la constante elástica del muelle. Esta elección reduce el número de parámetros relevantes en el modelo a dos: la intensidad  $K$  del potencial periódico y la longitud natural del muelle,  $\mu$ . El potencial de interacción entre las partículas favorece una separación homogénea entre las mismas. Por el contrario, el potencial periódico tiende a situarlas en sus mínimos, favoreciendo por lo tanto una separación nula o entera entre partículas. La competición entre ambas

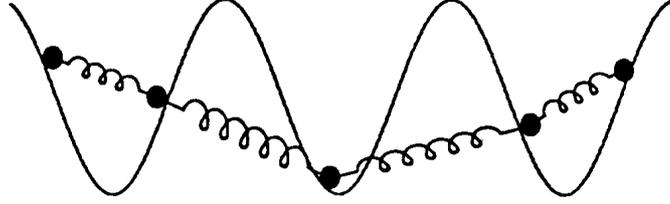


Figura 2.1: La figura muestra una imagen sencilla del modelo Frenkel-Kontorova estándar: un conjunto de átomos en una dimensión conectados por muelles y situados en un potencial substrato periódico.

interacciones produce la frustración del sistema – también se habla de competición entre escalas de longitud – que es la característica esencial del modelo y se traduce en una fascinante complejidad de estructuras espacialmente moduladas.

Aunque existe algún interés en sistemas finitos [47], lo normal es estudiar las propiedades del modelo en el límite termodinámico, en el cual el número de partículas tiende a  $\infty$ . Definimos una **configuración**  $\{u_j\}$  del modelo por la sucesión de infinitos números reales que dan las posiciones de las partículas.

Una **configuración de equilibrio** es aquella para la que la fuerza total sobre cada una de las partículas es nula. En tal caso, esa configuración  $\{u_j\}$  es solución del siguiente conjunto de ecuaciones,

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = V'(u_j) + \frac{\partial[W(u_{j+1} - u_j) + W(u_j - u_{j-1})]}{\partial u_j} = 0 \quad (-\infty < j < \infty). \quad (2.3)$$

Introducimos la tensión  $p_j$  del muelle situado a la izquierda de la partícula  $j$ ,

$$p_j = \frac{\partial W(u_j - u_{j-1})}{\partial u_j}. \quad (2.4)$$

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas (2.3) quedan entonces escritas de la siguiente manera

$$p_{j+1} = p_j + V'(u_j); \quad (2.5)$$

y en el caso de que exista una solución única de  $u_{j+1}$  en la ecuación

$$p_{j+1} = \frac{\partial W(u_{j+1} - u_j)}{\partial u_{j+1}}; \quad (2.6)$$

se cumple que las ecuaciones (2.5) y (2.6) definen sin ambigüedad una aplicación bidimensional  $T$  del plano real en sí mismo:

$$(u_{j+1}, p_{j+1}) = T(u_j, p_j). \quad (2.7)$$

Si las funciones  $V$  y  $W$  tienen derivada continua y  $W$  es una función estrictamente convexa, entonces la aplicación  $T$  está bien definida, es continua, preserva el área, tiene inversa  $T^{-1}$  continua, y satisface la condición de *twist*:

$$\left( \frac{\partial u_{j+1}}{\partial p_j} \right)_{u_j} > 0. \quad (2.8)$$

Las aplicaciones que preservan el área y cumplen la condición de *twist* han sido estudiadas en profundidad [48] por ser ejemplos de sistemas dinámicos hamiltonianos que presentan un amplio conjunto de dinámicas posibles (del movimiento regular al caótico), y surgen en una gran variedad de contextos físicos distintos, desde la física de aceleradores a la de fluidos o la de procesos químicos. La teoría de estas aplicaciones está bien desarrollada, ya que la condición de *twist* permite la prueba de importantes resultados de amplia repercusión. El caso mejor estudiado es el de la aplicación estándar, que corresponde al problema del equilibrio en el modelo Frenkel-Kontorova estándar (2.2):

$$\begin{aligned} p_{j+1} &= p_j + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi u_j). \\ u_{j+1} &= u_j + p_j + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi u_j). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Podemos ver que el parámetro  $\mu$  no aparece en (2.9), por lo que, en el modelo de Frenkel-Kontorova estándar, la propiedad de ser una configuración de equilibrio es independiente de este parámetro.

Muchas situaciones en la Física de la Materia Condensada requieren modelos del tipo (2.1) que no satisfacen todas las condiciones necesarias para asegurar la existencia de la aplicación  $T$ . En particular, muchos sistemas no cumplen la condición de la convexidad del potencial  $W$ . Esto es especialmente frecuente en sistemas en los que aparecen espines. Aunque Sasaki y Griffiths [49] han probado la equivalencia de ciertos modelos convexos y no convexos, tal equivalencia no es de carácter general. A partir de ahora asumiremos que en los sistemas que estudiamos la aplicación  $T$  está bien definida.

Partiendo de cualquier punto arbitrario  $(u_0, p_0)$  del plano real, las iteraciones de  $T$  y su inversa  $T^{-1}$  producen una **órbita** de la aplicación. Cualquier órbita corresponde a una configuración de equilibrio del modelo (2.1) y, recíprocamente, cualquier configuración de equilibrio del modelo tiene asociada una órbita de la aplicación (2.7). Las configuraciones de equilibrio pueden ser físicamente estables o inestables. La estabilidad física de una configuración  $\{u_j\}$  implica que ningún desplazamiento pequeño de las partículas disminuye la energía del sistema, y se determina desarrollando la energía de la configuración cercana  $\{u_j + \delta_j\}$  (donde  $\{\delta_j\}$  son desviaciones arbitrarias) hasta el

segundo orden en las desviaciones :

$$H(\{u_j + \delta_j\}) = H(\{u_j\}) + \sum_n \frac{\partial H(\{u_j\})}{\partial u_n} \delta_n + \frac{1}{2} \sum_n \sum_m \frac{\partial^2 H(\{u_j\})}{\partial u_n \partial u_m} \delta_n \delta_m. \quad (2.10)$$

El segundo término de la derecha se anula, por ser  $\{u_j\}$  una configuración de equilibrio. De este modo, la configuración  $\{u_j\}$  es estable si la forma cuadrática definida por la matriz (de orden infinito)  $\mathbf{M}(\{u_j\}) = \{M_{n,m}\}$ :

$$M_{n,m} = \frac{\partial^2 H(\{u_j\})}{\partial u_n \partial u_m}, \quad (2.11)$$

es positiva o cero. Los valores propios de esta matriz son los cuadrados de las frecuencias de las oscilaciones de pequeña amplitud en torno a la configuración de equilibrio  $\{u_j\}$  (asumiendo que las partículas son de masa uno). Como consecuencia, la estabilidad física de la estructura es equivalente a la condición de que las frecuencias de estos fonones sean reales. Es importante indicar el hecho de que en el modelo Frenkel-Kontorova estándar la estabilidad física de las configuraciones de equilibrio no dependen del parámetro  $\mu$ .

Como fue señalado por Aubry [5, 50] y Coppersmith y Fisher [34], la noción de estabilidad física de una configuración difiere de la noción de estabilidad dinámica de la órbita asociada a la aplicación  $T$ . Que la forma cuadrática  $\mathbf{M}(\{u_j\})$  sea estrictamente positiva implica un exponente de Lyapunov positivo para la órbita correspondiente, y por lo tanto inestabilidad dinámica. Por esto, entre todas las configuraciones de equilibrio estables, sólo aquellas con un modo fonón de frecuencia cero podrían corresponder a una órbita estable de la aplicación.

Es necesario tener cierto cuidado al hablar de energía de una configuración, ya que (2.1) contiene una suma infinita. Sin embargo, no hay ningún problema en usar (2.1) para definir diferencias de energía entre configuraciones que sólo difieren en un número finito de las  $u_j$ . Aubry [5] define una **configuración de mínima energía**  $\{u_j\}$  como aquella para la cual cualquier desplazamiento arbitrario  $\{\delta_j\}$  de un segmento finito de la configuración produce siempre un cambio de energía no negativo. Esta definición incluye la propiedad de que las configuraciones de mínima energía son estados de equilibrio estable.

La **energía media por partícula**  $\epsilon$  de una configuración  $\{u_j\}$  está definida por el siguiente límite:

$$\epsilon = \lim_{(N-M) \rightarrow \infty} \frac{1}{N-M} \sum_{j=M}^{N-1} [V(u_j) + W(u_{j+1} - u_j)] \quad (2.12)$$

siempre que este exista para cualquier par  $M < N$ . Es fácil ver que esto no ocurre para todas las configuraciones imaginables  $\{u_j\}$ . Sin embargo, las configuraciones de mínima energía tienen una energía media por partícula  $\epsilon$  bien

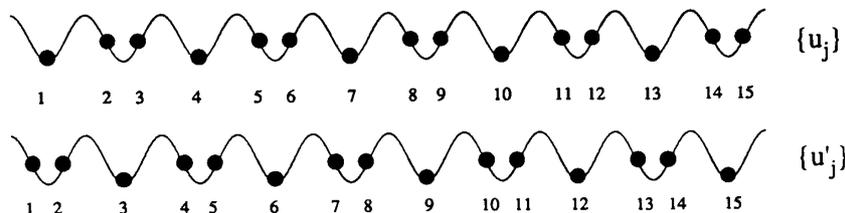


Figura 2.2: Ejemplo de una transformación  $\sigma_{r,m}$  (con  $r = 1$  y  $m = -1$ ) sobre un estado  $\{u_j\}$  de espaciado promedio  $\omega = 2/3$ .  $\{u'_j\} = \{u_{j+1} - 1\}$ .

definida. Para evitar posible equívocos, es importante señalar que la energía por partícula de una configuración de mínima energía no es necesariamente el mínimo valor posible de  $\epsilon$ .

El **espaciado promedio**  $\omega$  de una configuración, frecuentemente llamado *winding number* es

$$\omega = \langle u_{j+1} - u_j \rangle = \lim_{(N-M) \rightarrow \infty} \frac{u_N - u_M}{N - M}. \quad (2.13)$$

Aquí también se aplica la advertencia hecha al definir (2.12). Aubry [6] ha probado que para los modelos convexos cada configuración de mínima energía tiene un espaciado promedio bien definido y, a la inversa, para cada número real  $\omega$  existe al menos una configuración de mínima energía con espaciado promedio  $\omega$ . Pueden existir configuraciones de mínima energía diferentes con idéntico espaciado promedio. En este caso éstas también tienen un mismo valor de energía por partícula. Dicho de otro modo, la energía por partícula de las configuraciones de mínima energía  $\epsilon(\omega)$  es una función bien definida y continua del espaciado promedio. Esta función también depende de los valores de los parámetros del modelo.

Cuando los potenciales  $V$  y  $W$  en (2.1) no dependen del índice de partícula  $j$ , se dice que el modelo es homogéneo. Entonces, un cambio de etiqueta de las partículas no cambia las propiedades físicas de la configuración. De igual manera, la periodicidad de  $V$  y el hecho de que  $W$  dependa tan sólo de distancias relativas tiene como consecuencia la invariancia del modelo bajo traslaciones enteras. Por esto, si  $\{u_j\}$  es una configuración de mínima energía, la transformación  $\sigma_{r,m}$  definida por

$$\sigma_{r,m}\{u_j\} = \{u_{j+r} + m\} = \{u'_j\} \quad (2.14)$$

( $r$  y  $m$  números enteros arbitrarios) da lugar a otra configuración de mínima energía (ver figura 2.2).

Dadas dos configuraciones  $\{u_j\}$  y  $\{v_j\}$  decimos que una es **menor que** la otra,  $\{u_j\} < \{v_j\}$ , cuando para todo  $j$ ,  $u_j < v_j$ . Una configuración  $\{u_j\}$  es

**rotacionalmente ordenada** [51] si para cualquier transformación de simetría  $\sigma_{r,m}$ , la configuración transformada  $\{u'_j\} = \sigma_{r,m}\{u_j\}$  es menor que  $\{u_j\}$ , mayor que ella, o ambas coinciden. Si  $\omega$  es el espaciado promedio de una configuración rotacionalmente ordenada  $\{u_j\}$ , entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} \sigma_{r,m}\{u_j\} < \{u_j\} & \quad \text{si } r\omega + m < 0. \\ \sigma_{r,m}\{u_j\} > \{u_j\} & \quad \text{si } r\omega + m > 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Hacemos notar que en una configuración arbitraria de mínima energía con espaciado promedio  $\omega$ , la condición  $r\omega + m = 0$  no corresponde, en general, a  $\sigma_{r,m}\{u_j\} = \{u_j\}$ . Las configuraciones de mínima energía son siempre rotacionalmente ordenadas. Esta propiedad tiene importantes consecuencias; en particular a partir de (2.15) podemos ver que una configuración rotacionalmente ordenada  $\{u_j\}$ , para cualquier par de enteros  $j, r$ , cumple la siguiente desigualdad:

$$|u_{j+r} - u_j - r\omega| < 1, \tag{2.16}$$

la cual fija una cota restrictiva a las fluctuaciones en longitud de una porción finita de la configuración.

Una configuración  $\{u_j\}$  es **periódica** si existe una transformación  $\sigma_{r,m}$  bajo la cual es invariante; así que, para todo  $j$ ,

$$u_{j+r} + m = u_j. \tag{2.17}$$

El espaciado promedio de una configuración periódica es el número racional  $\omega = -\frac{m}{r}$ .

Una configuración  $\{u_j\}$  se llama recurrente si existen sucesiones de transformaciones  $\sigma_{r,m}$ , con  $r \rightarrow \pm\infty$ , tales que  $\sigma_{r,m}\{u_j\} \rightarrow \{u_j\}$  en el sentido apropiado (topología débil). La idea es que cualquier segmento de una configuración recurrente reaparece con precisión arbitraria en otro lugar de la configuración. Obviamente, una configuración periódica es recurrente.

Siguiendo a Aubry, un **estado fundamental** se define como una configuración recurrente de mínima energía. Para cada número real  $\omega$  hay al menos un estado fundamental con espaciado promedio  $\omega$  y la energía por partícula de este está dada por la función  $\epsilon(\omega)$  definida anteriormente. Frecuentemente se habla del estado fundamental correspondiente a unos valores determinados de los parámetros del modelo (e.g.:  $K$  y  $\mu$  en el modelo estándar). Esto debe entenderse como la configuración estado fundamental que cumple

$$\epsilon = \min_{\omega} \epsilon(\omega), \tag{2.18}$$

para esos valores de los parámetros. El mínimo  $\epsilon$ , que depende de los parámetros del modelo, define la **energía del estado fundamental** y el valor de  $\omega$

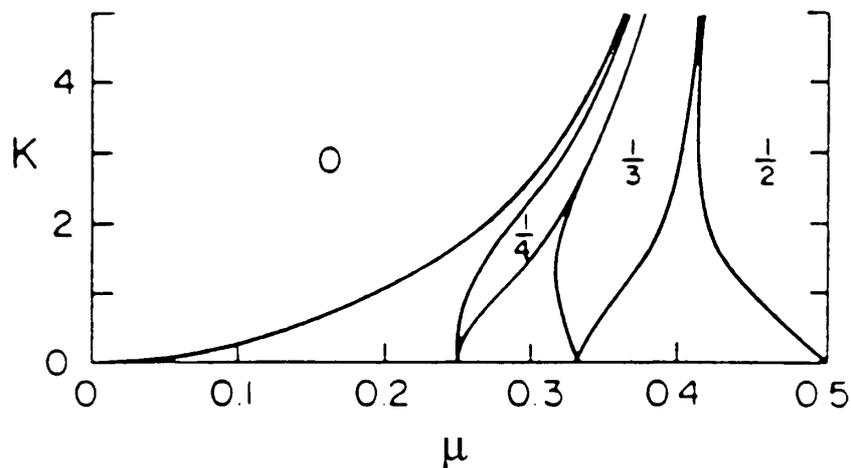


Figura 2.3: Diagrama de fases de los estados fundamentales del modelo Frenkel-Kontorova estándar [4]. Cada punto  $(K, \mu)$  del diagrama está caracterizado por el valor del espaciado promedio  $\omega$  del estado fundamental. Los números de la figura indican valores de  $\omega$ . Sólo hemos dibujado algunas fases commensuradas sencillas, entre dos cualquiera de ellas existen infinitas fases commensuradas e incommensuradas.

para el cual se da ese mínimo es el espaciado promedio del estado fundamental, que también depende de los parámetros del modelo. La determinación de la configuración estado fundamental a un valor determinado de los parámetros del modelo es un problema complicado. El método más eficiente para hacerla es el **método de los potenciales efectivos** (también llamado *minimization eigenvalue method*), desarrollado por Griffiths [52, 53]. Este método está basado en la computación de ciertas funciones, los potenciales efectivos, que contienen toda la información relevante acerca de la relajación de fluctuaciones locales de la configuración estado fundamental. Además del estado fundamental, el método proporciona las discommensuraciones elementales (definidas más adelante) y sus energías de creación y de anclaje, así como información importante sobre las transiciones entre diferentes estados fundamentales. La posibilidad de aplicar el método de los potenciales efectivos no se restringe a ningún tipo particular de interacciones, por esto se ha convertido en el método más usual para calcular los diagramas de fase de estados fundamentales de los modelos clásicos de sistemas con estructuras espacialmente moduladas [54]. Una presentación excelente de este método se encuentra en [4].

La figura 2.3 muestra el conocido **diagrama de fases** de los estados fundamentales del modelo Frenkel-Kontorova estándar. Este está constituido por regiones en el espacio de parámetros  $(K, \mu)$  que corresponden a un mismo valor del espaciado promedio de la configuración de estado fundamental. En la

figura, por claridad, sólo mostramos algunas de las regiones (también llamadas “lenguas de Arnold”) del diagrama. Entre cualquiera dos de ellas hay un número infinito de otras fases commensuradas e incommensuradas. La figura 2.4 muestra el espaciado promedio  $\omega$  del estado fundamental como función de  $\mu$  cuando  $K = 1$ . Esta función es continua y posee peldaños para cada valor racional de  $\omega$ , que corresponden a las lenguas de la figura 2.3. Esta función es llamada “Escalera del Diablo”, aunque ya la conocían los matemáticos bajo el nombre de “función de Cantor”. Se dice que una Escalera del Diablo es completa cuando la suma de las anchuras de los peldaños es la medida total; en caso de que no sea así la Escalera del Diablo es incompleta.

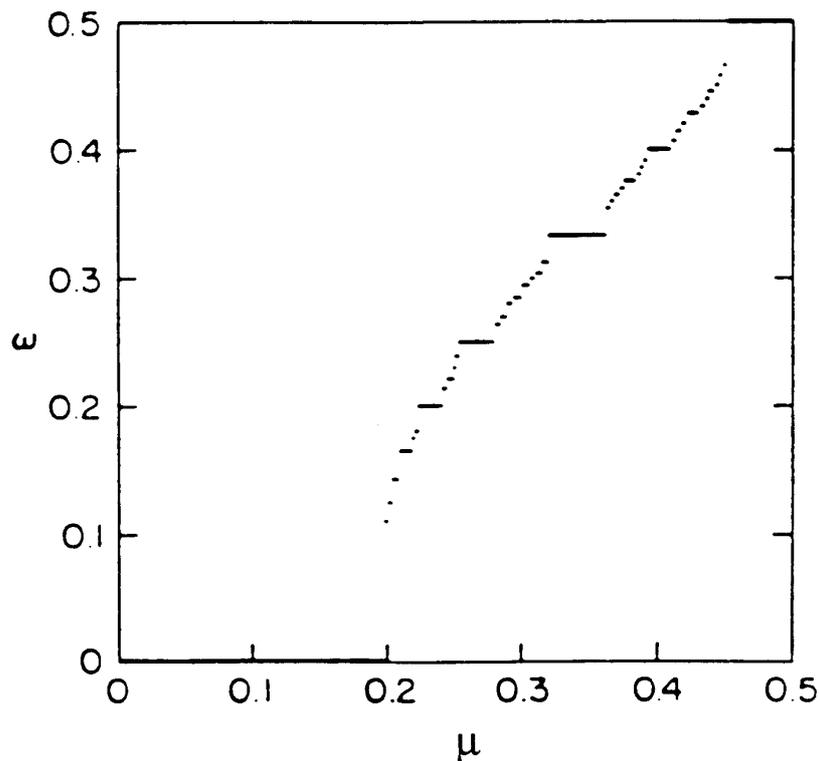


Figura 2.4:  $\omega$  como función de  $\mu$  a  $K = 1$  [4]. Esta función, conocida como “Escalera del Diablo”, es continua y tiene un escalón a cada valor racional de  $\omega$ .

## 2.2. Estados fundamentales conmensurados, disconmensuraciones elementales y transición Conmensurada - Inconmensurada

Los estados fundamentales para los cuales el espaciado promedio es un número racional se llaman **conmensurados**. Satisfacen la propiedad de que si  $p$  y  $q$  son números primos entre sí y tales que  $\omega = \frac{p}{q}$ , entonces cualquier estado conmensurado con el mismo espaciado promedio es invariante bajo la transformación  $\sigma_{q,-p}$ :

$$u_{j+q} - p = u_j \tag{2.19}$$

para todo  $j$ . En otras palabras, cualquier estado fundamental conmensurado es periódico con periodo el mínimo compatible con el valor de  $\omega$ . Las estructuras con el mismo valor de  $\omega$  pero periodicidad mayor no cumplen la propiedad de orden rotacional que toda configuración de mínima energía debe satisfacer (para un ejemplo, ver la figura 2.5); por esto, gracias a (2.19), con conocer las posiciones  $\{u_j\}$  ( $j = 1, \dots, q$ ) de  $q$  partículas consecutivas de un estado fundamental conmensurado (la **celda unidad**) se conoce la configuración completa.

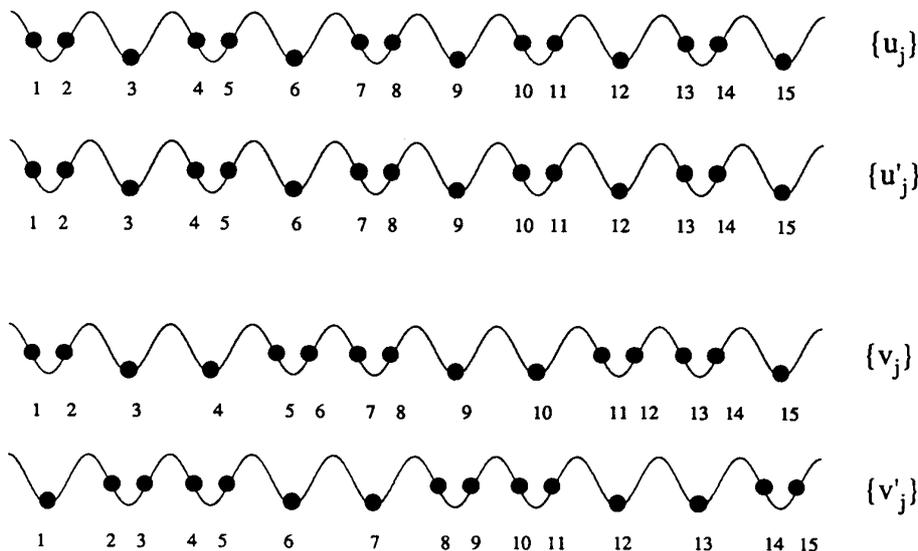


Figura 2.5: La configuración  $\{u_j\}$  es un estado fundamental conmensurado de  $\omega = 2/3$ . La existencia de una celda unidad se aprecia claramente. Esta estructura es invariante bajo la transformación  $\sigma_{3,-2}$ :  $\{u'_j\} = \sigma_{3,-2}\{u_j\} = \{u_j\}$ .  $\{v_j\}$  es una configuración de  $\omega = 2/3$  con una celda unidad mayor. Se ve claramente que  $\{v_j\}$  no satisface la propiedad de orden rotacional:  $\{v'_j\} = \sigma_{3,-2}\{v_j\}$  con  $v_3 < v'_3$  pero  $v_4 > v'_4$ .

La celda unidad de un estado fundamental conmensurado puede ser determinada a través de la minimización global de la energía de la misma, que es la siguiente función de  $q$  variables:

$$\phi(\{u_j\}_{j=1}^q) = \sum_{j=1}^q [V(u_j) + W(u_{j+1} - u_j)] \quad (2.20)$$

donde  $u_{q+1} = u_1 + p$ . En el caso del modelo Frenkel-Kontorova estándar (con  $K \neq 0$ ) este mínimo es único, salvo traslaciones; pero, en general, pueden existir dos o más mínimos globales no equivalentes [55]. En algunos casos excepcionales el conjunto de mínimos globales de (2.20) es un continuo. Un ejemplo trivial de tal situación es el caso  $K = 0$  del modelo estándar donde el fenómeno es el resultado de la invariancia traslacional continua de la energía. Sin embargo, Chou y Griffiths [52] han mostrado ejemplos no triviales en un modelo en el que el potencial  $V(u)$  es parabólico a trozos, con signos alternos para la curvatura.

Por consiguiente, el conjunto  $\mathcal{G}_\omega$  de estados fundamentales conmensurados con espaciado promedio  $\omega$  puede ser tanto discreto como continuo. En todo caso, siempre está bien ordenado; esto es, para dos configuraciones  $\{u_j\}, \{v_j\} \in \mathcal{G}_\omega$ , se tiene que  $\{u_j\} < \{v_j\}$  o  $\{v_j\} < \{u_j\}$ . También,  $\mathcal{G}_\omega$  es invariante bajo el grupo de transformaciones de simetría  $\sigma_{r,m}$ .

Vamos a considerar primeramente el caso excepcional de  $\mathcal{G}_\omega$  continuo. Sean  $\{u_j\}$  y  $\{v_j\}$  dos estados fundamentales arbitrarios de  $\mathcal{G}_\omega$  y asumamos que  $\{u_j\} < \{v_j\}$  (la propiedad de orden), entonces siempre existe otro estado fundamental  $\{w_j\}$  entre ambos,  $\{u_j\} < \{w_j\} < \{v_j\}$ . Consecuencia de esto es que no es necesario aportar energía al sistema para desplazarlo: la configuración de estado fundamental es **deslizante**. En este caso, la matriz de estabilidad lineal  $\mathbf{M}(\{u_j\})$  definida en (2.11) tiene un valor propio nulo.

En general,  $\mathcal{G}_\omega$  ( $\omega$  racional) es un conjunto discreto, por ello tiene sentido hablar de estados fundamentales **contiguos**; esto es, con ningún otro estado fundamental entre ellos. Como consecuencia, para conseguir un desplazamiento de un estado fundamental es necesario superar una barrera de energía: la configuración de estado fundamental está **anclada**. Esa energía extra mínima  $E_{PN}$  que debe ser proporcionada al estado fundamental para desplazarlo hasta el estado fundamental contiguo es la **barrera de energía de Peierls-Nabarro**. En general debería distinguirse entre barreras de energía a izquierdas y a derechas, pero en el modelo estándar ambas coinciden.

Una magnitud que está fuertemente relacionada con la barrera de energía de Peierls-Nabarro es la **fuerza de desanclaje**,  $F_d$ . Asumamos la presencia de un campo uniforme de fuerzas  $F$ , entonces las ecuaciones de equilibrio de

fuerzas son:

$$V'(u_j) + \frac{\partial[W(u_{j+1} - u_j) + W(u_j - u_{j-1})]}{\partial u_j} - F = 0. \quad (2.21)$$

Sea  $\{u_j\}$  un estado fundamental anclado – de modo que es solución del sistema anterior con  $F = 0$  – entonces, hasta un valor umbral del campo de fuerzas, existe una continuación única del estado que es solución de (2.21). Este valor umbral es la fuerza de desanclaje  $F_d$ . Para valores de la fuerza por encima de éste en el modelo de Frenkel-Kontorova estándar no ninguna existe solución de (2.21) con las condiciones de contorno impuestas por  $\omega$ .

Los estados fundamentales  $\{u_j\}$  anclados tienen una **longitud de coherencia** finita, definida del siguiente modo: supongamos que la posición de una partícula arbitraria  $n$  se fija a  $u_n + \delta_n$ , con  $\delta_n$  pequeño, y el resto de las partículas relajan a una nueva configuración de mínima energía  $\{u_j + \delta_j\}$  que es compatible con esta restricción. Entonces los desplazamientos se comportan como:

$$\delta_j \sim \exp \left[ -\frac{|j - n|}{\xi} \right] \quad (2.22)$$

(ver figura 2.6). La longitud de coherencia  $\xi$  es llamada en ocasiones “inverso del exponente de Lyapunov”, porque  $\xi^{-1}$  es el exponente de Lyapunov de la órbita de la aplicación  $T$  asociada al estado anclado  $\{u_j\}$ . En este caso, el cero no pertenece al espectro de la matriz de estabilidad lineal  $\mathbf{M}(\{u_j\})$  de una configuración anclada.

Si el conjunto  $\mathcal{G}_\omega$  es continuo – estado fundamental deslizante –, los estados fundamentales son las únicas configuraciones de mínima energía de espaciado promedio  $\omega$ . Contrariamente, cuando  $\mathcal{G}_\omega$  es un conjunto discreto existen configuraciones de mínima energía con espaciado promedio  $\omega$  que no son recurrentes. Estas son llamadas disconmensuraciones elementales. Dados dos estados fundamentales contiguos en  $\mathcal{G}_\omega$ ,  $\{u_j\} < \{v_j\}$ , una **disconmensuración elemental avanzada** es una configuración de mínima energía  $\{w_j^+\}$ , tal que

$$\begin{aligned} w_j^+ &\rightarrow u_j && \text{con } j \rightarrow -\infty, \\ w_j^+ &\rightarrow v_j && \text{con } j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Una **disconmensuración elemental retardada**  $\{w_j^-\}$  es una configuración de mínima energía, tal que

$$\begin{aligned} w_j^- &\rightarrow v_j && \text{con } j \rightarrow -\infty, \\ w_j^- &\rightarrow u_j && \text{con } j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.24)$$

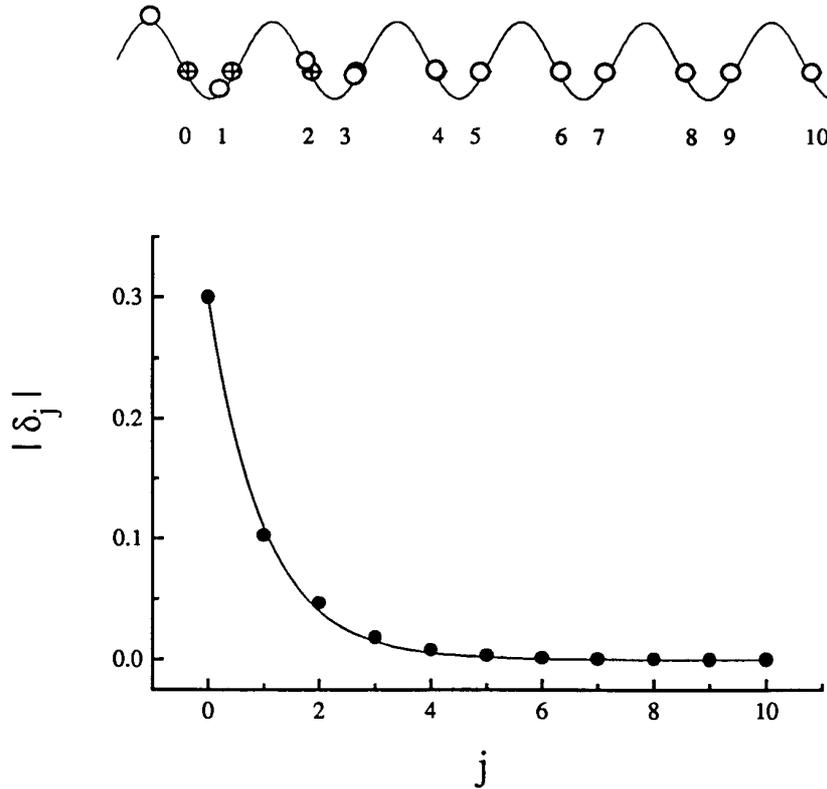


Figura 2.6: Hemos perturbado la configuración  $\{u_j\}$  del estado fundamental de  $\omega = 1/2$  (círculos con cruz), desplazando la partícula cero, que es fijada a  $u_0 + \delta_0$  ( $\delta_0 = -0,3$ ). El resto de la cadena relaja a una nueva configuración  $\{u_j + \delta_j\}$  (círculos en blanco) cuyos desplazamientos se comportan según:  $\delta_j \sim e^{-j/\xi}$  (en este caso  $\xi \simeq 1,0$ ). La existencia de una longitud de coherencia finita está asociada al carácter anclado de la configuración.

Por sencillez, vamos a asumir que (2.20) tiene un único mínimo global, salvo traslaciones, como ocurre en el modelo Frenkel-Kontorova estándar. Entonces, el conjunto  $\mathcal{G}_\omega$  está formado por todas las configuraciones transformadas,  $\sigma_{r,m}\{u_j\}$ , de un estado fundamental  $\{u_j\}$  cualquiera de  $\mathcal{G}_\omega$ . En tal caso una disconmensuración elemental avanzada (retardada) consiste en una expansión (compresión) localizada de la configuración de estado fundamental (figura 2.7). El **exceso de longitud**  $\Delta$  de la disconmensuración elemental se define como la cantidad media en la cual  $w_N - w_M$  ( $M < N$ ) en la disconmensuración excede a la cantidad correspondiente  $u_N - u_M$  en el estado fundamental en el límite  $(N - M) \rightarrow \infty$ . Esto es el desplazamiento promedio por partícula,  $\langle v_j - u_j \rangle$ , entre estados fundamentales contiguos. Si  $\omega = \frac{p}{q}$  ( $p$  y  $q$  números primos entre sí), una disconmensuración elemental avanzada (atrasada) tiene un exceso de

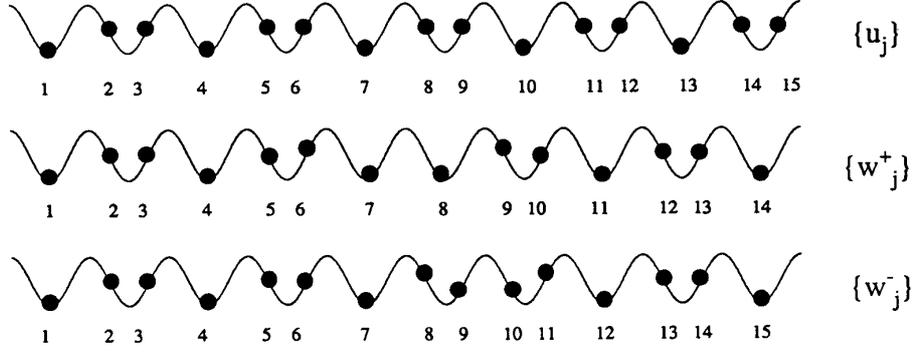


Figura 2.7: Ejemplos de disconmensuraciones elementales.  $\{u_j\}$  es un estado fundamental con  $\omega = 2/3$  and  $\{w_j^+\}$  ( $\{w_j^-\}$ ) una disconmensuración adelantada (retardada) que tiende a  $\{u_j\}$  cuando  $j$  tiende a  $-\infty$ . Cuando  $j$  tiende a  $+\infty$ ,  $\{w_j^+\}$  tiende a un estado fundamental  $\{u_j^1\}$  que es contiguo a  $\{u_j\}$ , con  $\{u_j\} < \{u_j^1\}$ . Cuando  $j$  tiende a  $+\infty$ ,  $\{w_j^-\}$  tiende a un estado fundamental  $\{u_j^2\}$  contiguo a  $\{u_j\}$  con  $\{u_j\} > \{u_j^2\}$ .

longitud  $\Delta = +\frac{1}{q}$  ( $-\frac{1}{q}$ ). Este resultado es fácil de obtener: el desplazamiento medio por partícula producido por la transformación  $\sigma_{r,m}$  es  $r\omega + m = \frac{rp+mq}{q}$ . Si  $p$  y  $q$  son primos entre sí, existen enteros  $r$  y  $m$  tales que  $rp + mq = 1$  (el menor entero positivo) y por lo tanto el desplazamiento medio por partícula entre estados fundamentales contiguos es  $\pm\frac{1}{q}$ .

Una variable conveniente para representar disconmensuraciones es la **fase relativa local**. La sucesión  $\{\varphi_j\}$  de fases relativas locales que corresponde a la disconmensuración  $\{w_j^\alpha\}$  ( $\alpha = +, -$ ) está definida por:

$$\varphi_j = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} (w_{j+i}^\alpha - u_{j+i}). \quad (2.25)$$

Para disconmensuraciones avanzadas esta sucesión tiende a cero cuando  $j \rightarrow -\infty$  y a  $\Delta = \frac{1}{q}$  cuando  $j \rightarrow \infty$  y, como se aprecia en la figura 2.8, es esencialmente constante excepto en una región localizada donde adquiere forma de  $s$  y que coincide con la expansión localizada mencionada anteriormente.

El tamaño de la región donde la disconmensuración es apreciablemente distinta del estado fundamental, esto es, la anchura de la disconmensuración, es del orden de la longitud de coherencia  $\xi$ . Es natural definir como **centro** de la disconmensuración el índice de la partícula para la cual la desviación con respecto al estado fundamental es máxima, haciendo uso de alguna convención si esta definición fuese ambigua.

Aunque las transformaciones  $\sigma_{lq,-lp}$  (con  $l$  un entero arbitrario) dejan invariantes a los estados fundamentales de  $\mathcal{G}_\omega$ , producen un desplazamiento del

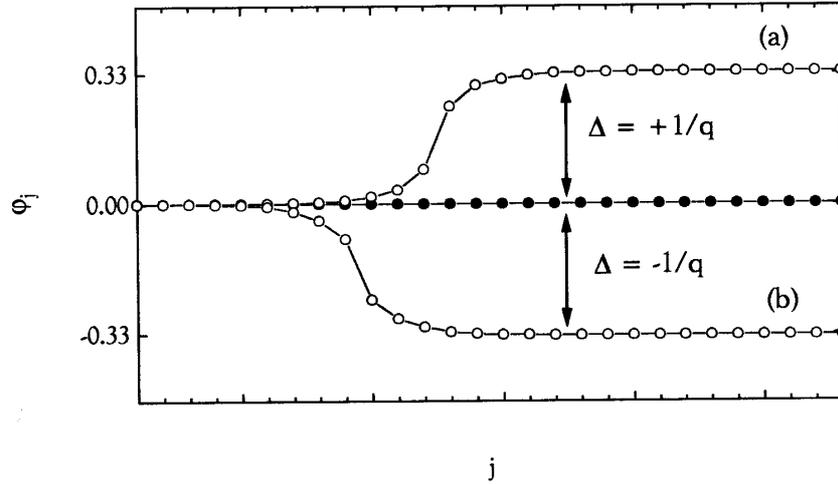


Figura 2.8: Sucesión de fases relativas locales ( $\varphi_j$ ) de una disconmensuración avanzada (a) y una retardada (b) sobre un estado fundamental de  $\omega = 2/3$  (círculos en negro). El exceso de longitud  $\Delta$  de la disconmensuración elemental es  $+1/q$  para la avanzada y  $-1/q$  para la retardada.

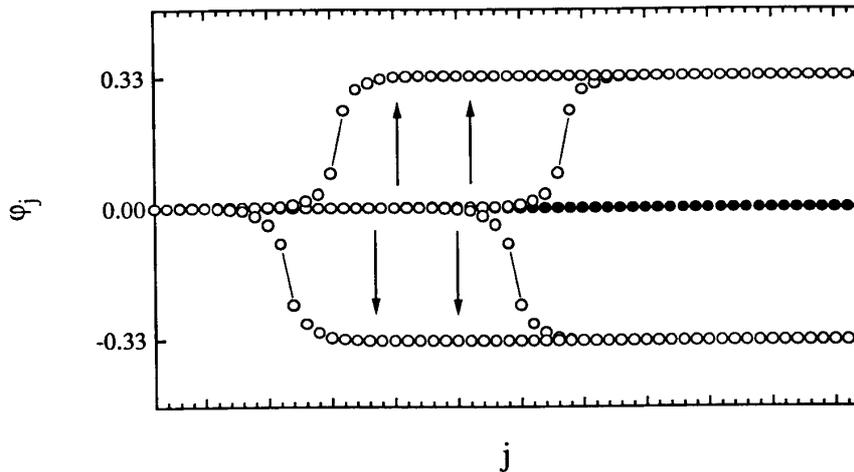


Figura 2.9: La imagen muestra el efecto de una transformación de simetría  $\sigma_{lq,-lp}$  sobre disconmensuraciones elementales. Representamos la fase relativa local de cada configuración. Aquí  $\omega = p/q = 2/3$  y  $l = 6$ . Vemos que el efecto de  $\sigma_{18,-12}$  es un desplazamiento hacia atrás del centro de la disconmensuración que es igual a 6 periodos del estado fundamental commensurado, lo que, en este caso, corresponde a 12 periodos del potencial substrato o 18 partículas de la configuración.

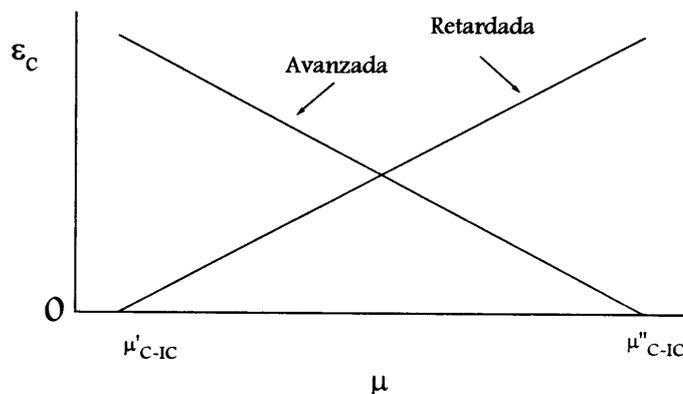


Figura 2.10: Energía de creación  $\epsilon$  de los dos tipos de disconmensuraciones elementales a valores  $\mu$  interiores a una lengua conmensurada. A un cierto valor de  $\mu$  esta energía se hace negativa y entonces tiene lugar una transición Conmensurada-Inconmensurada, lo que cambia el valor del espaciado promedio del estado fundamental.

centro de las disconmensuraciones elementales (ver figura 2.9) que es igual a  $-lq$  ( $-lp$  en unidades de longitud). Al ser  $l$  un número finito, sólo un número finito de partículas sufren un cambio no despreciable en su posición. El desplazamiento total de la posición de las partículas que corresponde a este desplazamiento relativo de la disconmensuración avanzada (retardada) es  $l(-l)$ . El desplazamiento mínimo es el de  $|l| = 1$  y la mínima energía extra que es necesario proporcionar a una disconmensuración para desplazarla a la configuración contigua es la “barrera de Peierls-Nabarro” o **energía de anclaje** de la disconmensuración (ver [56] para una definición precisa).

La **energía de creación** de la disconmensuración es la diferencia entre la energía de la disconmensuración y la del estado fundamental conmensurado, promediada de la manera adecuada sobre la celda unidad. En el caso de una configuración que contenga dos disconmensuraciones superpuestas a un estado fundamental conmensurado, la diferencia de energía con el estado fundamental es entendida como la suma de las energías de las disconmensuraciones y la **energía de interacción** [56, 57, 58]. Si ambas disconmensuraciones son de un mismo tipo la energía de interacción decrece con la distancia entre sus centros y la interacción es repulsiva. La interacción es atractiva entre disconmensuraciones de diferente tipo. Es importante señalar que una configuración que contiene dos disconmensuraciones nunca es una configuración de mínima energía, ya que su energía siempre puede ser disminuida variando la distancia entre las disconmensuraciones. Las únicas configuraciones de mínima energía para un valor racional de espaciado promedio  $\omega$  son los estados fundamentales conmensurados y sus disconmensuraciones elementales.

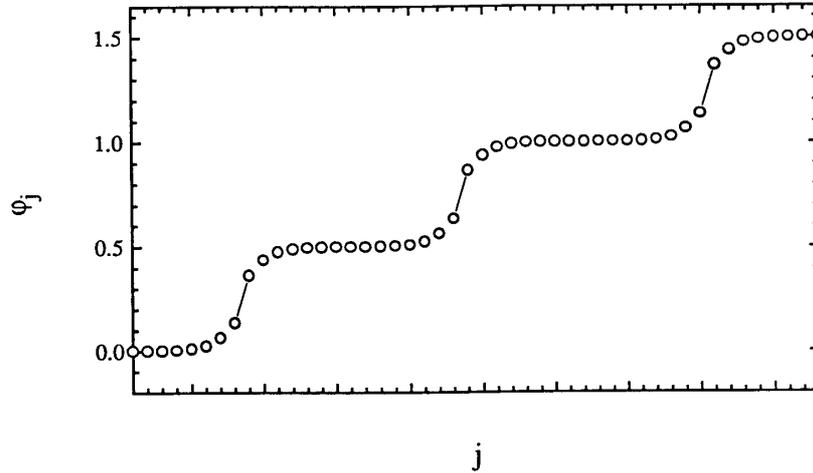


Figura 2.11: En el borde de una transición C-IC la nueva estructura puede verse como un conjunto de disconmensuraciones sobre la anterior. La figura muestra la celda unidad del estado fundamental con  $\omega = 26/49$ , que puede ser visto como tres disconmensuraciones avanzadas sobre la configuración de  $\omega = 1/2$ . Hemos usado la fase relativa local (2.25), con la estructura  $\omega = 1/2$  como referencia. El uso de la fase relativa local permite comparar de manera simple dos configuraciones diferentes, con una de ellas, que tiene que ser periódica para tener un valor de  $q$  en (2.25) bien definido, usada como referencia. Nótese que igualmente podríamos haber elegido representar la fase relativa local del estado con  $\omega = 1/2$  y usar la configuración con  $\omega = 26/49$  como referencia.

Las transiciones que ocurren en los extremos de las lenguas del diagrama de fases de estados fundamentales del modelo Frenkel-Kontorova (figura 2.3) son llamadas transiciones **Commensurada-Incommensurada** y pueden entenderse como producidas por disconmensuraciones. Sean los parámetros  $K$  y  $\mu$  los correspondientes a un punto en el interior de una lengua asociada a un racional  $\omega$ . Allí la energía de creación de los dos tipos de disconmensuraciones elementales es estrictamente positiva y crece (decrece) linealmente con  $\mu$  para una disconmensuración retardada (avanzada), ver figura 2.10. Más allá del valor de  $\mu_{C-IC}$  para el cual la energía de creación correspondiente se anula, entran en competencia dos efectos: la energía para la creación de una disconmensuración (negativa), que favorece la formación de tantas como sea posible; y la interacción repulsiva entre ellas, que favorece una densidad de disconmensuraciones tan baja como sea posible. El compromiso entre ambas tendencias determina la estructura del nuevo estado fundamental en las cercanías de  $\mu_{C-IC}$ , que puede ser visto como un conjunto de disconmensuraciones superpuestas al estado fundamental anterior (figura 2.11). Una discusión autorizada sobre esta útil imagen de la transición Commensurada-Incommensurada

en el modelo Frenkel-Kontorova puede encontrarse en el artículo de revisión de Griffiths [4]. Allí se deduce el siguiente comportamiento para el espaciado promedio de los estados fundamentales en la transición,

$$|\omega - \omega_C| \sim -(\ln |\mu - \mu_{C-IC}|)^{-1}. \quad (2.26)$$

La creación de “distorsiones” localizadas es un mecanismo conocido de las transiciones de fase en sistemas modulados [1, 2], hay una amplia literatura sobre la aplicación de estas ideas al análisis de transiciones de fase en modelos no convexos como el modelo ANNNI, reloj quiral y modelo XY quiral [59, 60, 61, 62].

### 2.3. Estados fundamentales inconmensurados y transición de Aubry (TBA)

Llamamos estados fundamentales **inconmensurados** a aquellos cuyo espaciado promedio  $\omega$  es un número irracional. Estos estados fundamentales son los límites de sucesiones de estados fundamentales conmensurados cuyo espaciado promedio tiende a algún valor irracional. La propiedad más importante de los estados fundamentales inconmensurados deriva de la propiedad de orden rotacional: es la existencia [5, 6] de una **función hull**  $f_\omega(x)$  (ver figuras 2.12 y 2.13) que da la configuración de estado fundamental. Se puede demostrar que esta función *hull* tiene las siguientes propiedades:

1. La función  $f_\omega(x)$  es estrictamente creciente.
2. Cumple que

$$f_\omega(1+x) = 1 + f_\omega(x) \quad (2.27)$$

o, equivalentemente, la función  $g_\omega(x) = f_\omega(x) - x$  es periódica de periodo la unidad.

3. Si es continua, para todo real  $\alpha$  la configuración  $\{u_j\}$  definida como

$$u_j = f_\omega(j\omega + \alpha) \quad (2.28)$$

es una configuración de estado fundamental, y a su vez cualquier configuración estado fundamental con espaciado promedio  $\omega$  es de la forma (2.28).

4. Si  $f_\omega$  es discontinua en algún punto  $x_0$ , lo es en un conjunto numerable infinito de puntos:  $x = x_0 + m + r\omega$ , ( $r$  y  $m$  enteros arbitrarios). En este caso es posible definir la versión **continua a derechas** de  $f_\omega$ :

$$f_\omega^+(x) = \inf_{y>x} f_\omega(y), \quad (2.29)$$

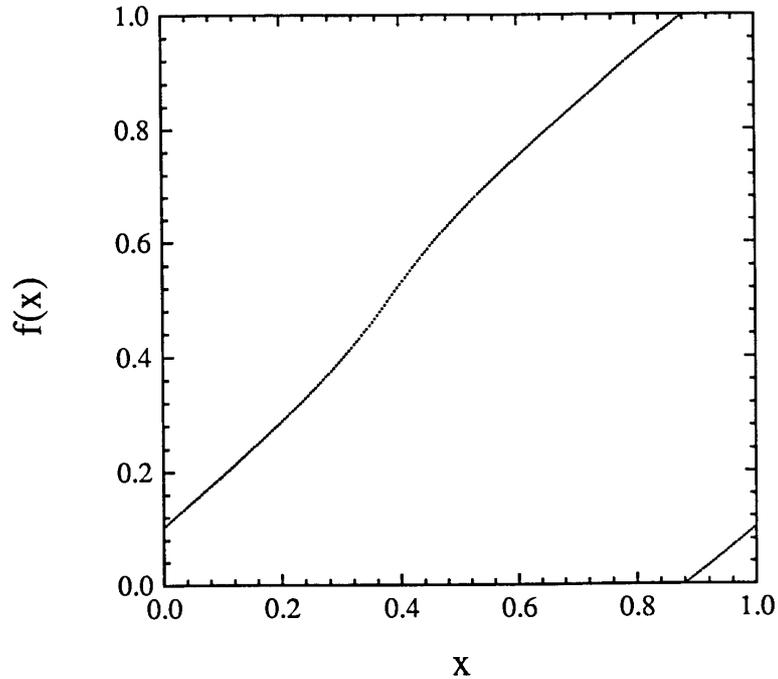


Figura 2.12: Los estados fundamentales incommensurados del modelo Frenkel-Kontorova estándar están descritos por una función *hull* continua  $f_\omega(x)$  cuando  $K$  está por debajo del punto de la transición de Aubry. Aquí empleamos una estructura con  $\omega = 144/233$  como una buena aproximación al irracional  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . En la figura  $K = 0,7 < K_c \simeq 0,97$  y  $f_\omega(x)$  se representa mód1.

y la versión **continua a izquierdas**:

$$f_\omega^-(x) = \sup_{y < x} f_\omega(y). \quad (2.30)$$

Entonces, cualquier estado fundamental  $\{u_j\}$  es de la forma

$$u_j = f_\omega^+(j\omega + \alpha) \quad (2.31)$$

o de la forma

$$u_j = f_\omega^-(j\omega + \alpha) \quad (2.32)$$

para algún valor de  $\alpha$ ; y recíprocamente, para cualquier  $\alpha$ , las configuraciones (2.31) y (2.32) son estados fundamentales. Nótese que para la mayoría de los valores de  $\alpha$  (todos excepto un conjunto numerable infinito)  $f_\omega(\alpha)$  es continua, de modo que (2.31) y (2.32) coinciden.

5. La función *hull*  $f_\omega$  es única (con tal que se considere  $f_\omega^+$  y  $f_\omega^-$  como las versiones continua a derechas y a izquierdas de  $f_\omega$ ).

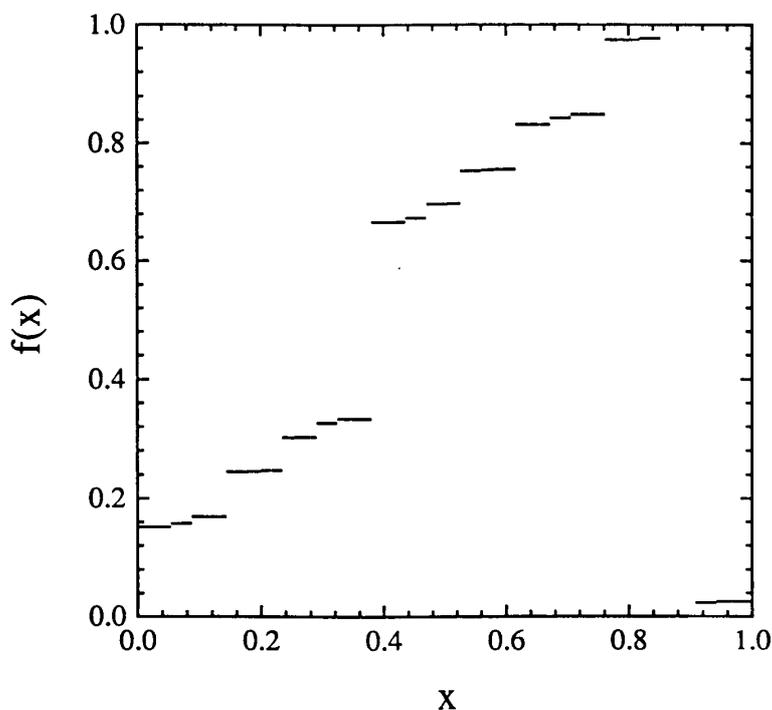


Figura 2.13: Los estados fundamentales incommensurados del modelo Frenkel-Kontorova estándar están descritos por una función *hull* discontinua  $f_\omega(x)$  cuando  $K$  está por encima del punto de la transición de Aubry. El dibujo es similar al de la figura 2.12, ahora  $K = 1,5 > K_c$ .

Si la función *hull* es continua (figura 2.12), el conjunto de estados fundamentales  $\mathcal{G}_\omega$  con espaciado promedio  $\omega$  es continuo y el estado fundamental es deslizante. En este caso, la órbita de la aplicación estándar asociada al estado fundamental es densa en una curva analítica, llamada “toro de KAM”. La existencia de estas curvas está predicha por el conocido teorema de “Kolmogorov-Arnold-Moser” para valores de  $K$  suficientemente bajos y para valores irracionales de espaciado promedio  $\omega$  que satisfagan una condición (diofántica) que resulta ser satisfecha por la mayoría de los irracionales [54].

Las estructuras incommensuradas analíticas (deslizantes) tienen una energía de Peierls-Nabarro igual a cero y fuerza de desanclaje nula. El espectro de la matriz de estabilidad lineal  $\mathbf{M}(\{u_j\})$  tiene un valor propio nulo (figura 2.14) y la longitud de coherencia diverge; la respuesta a fluctuaciones locales es un acomodamiento del total de la cadena. De modo equivalente, para cualquier posición hay un estado fundamental con una partícula en esa posición particular (figura 2.15). El efecto del potencial  $V(u)$  es tan sólo el de una leve modulación periódica en las posiciones de las partículas con respecto a

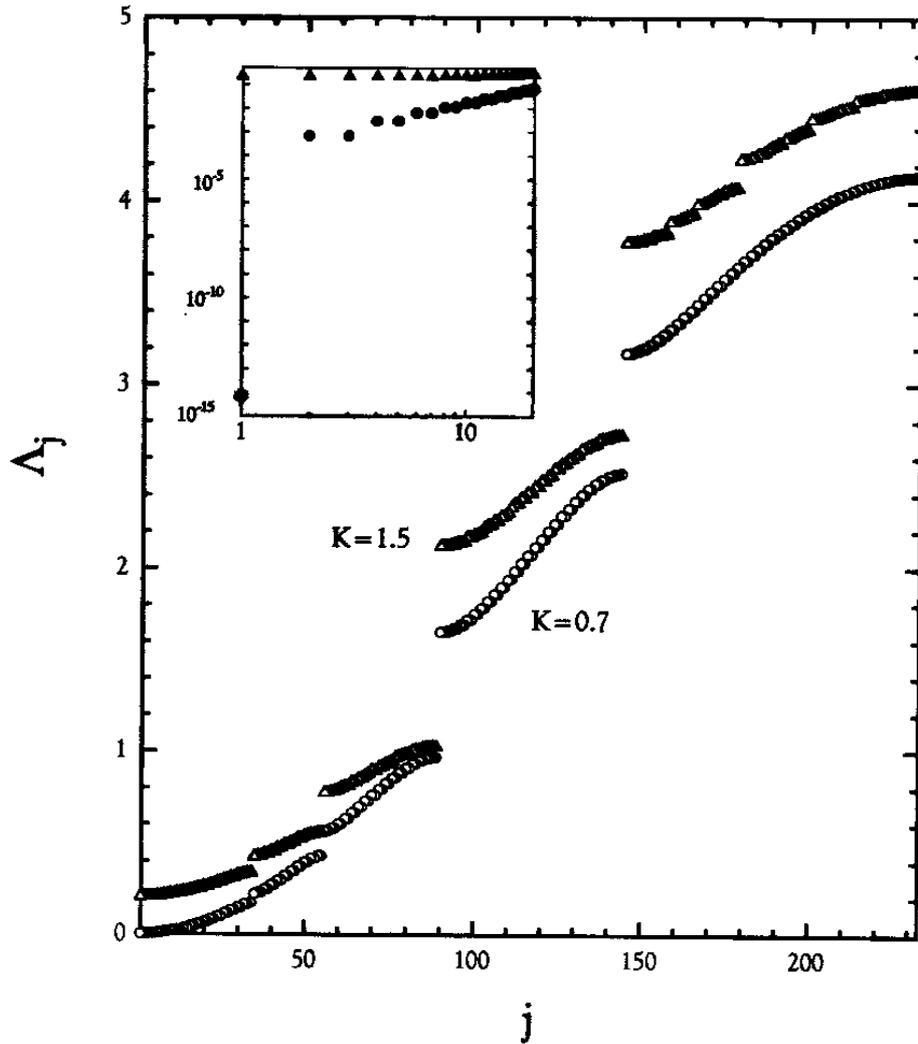


Figura 2.14: La figura muestra el espectro de valores propios del estado fundamental con  $\omega = 144/233$  – usado como aproximación de un estado fundamental incommensurado – a ambos lados de la transición de Aubry:  $K = 1,5 > K_c$  para los triángulos y  $K = 0,7 < K_c$  para los círculos. En pequeño se muestra claramente la existencia de un valor propio nulo por debajo de la transición, que refleja el carácter deslizante de la estructura incommensurada a ese valor de  $K$ . Por encima de la transición de Aubry el espectro es muy similar al de las estructuras commensuradas, existe un *gap* y la estructura está anclada al potencial substrato.

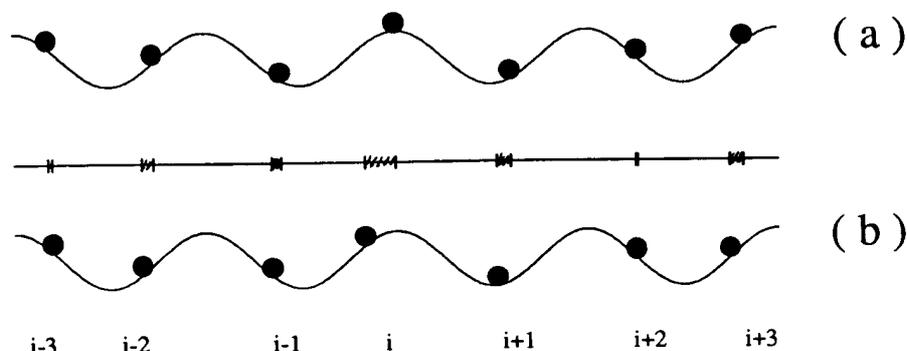


Figura 2.15: Un segmento de un estado fundamental inconmensurado a ambos lados de la transición de Aubry. Si  $K < K_c$  la función *hull* es continua e invertible (ver la figura 2.12). A consecuencia de esto cualquier valor posible de  $u$  puede describir la posición de una partícula del estado fundamental. Cuando  $K > K_c$  existen discontinuidades en la función *hull*. El mayor gap de  $f(x)$  se abre en torno  $f = 0,5$  (ver figura 2.13); que corresponde a los máximos del potencial substrato. (a) muestra un segmento de un estado fundamental inconmensurado deslizante, en el que la partícula  $i$  ocupa una posición que es un máximo del potencial  $V$ . (b) muestra la situación cuando  $K$  está por encima de la transición de Aubry, la partícula  $i$  ha caído hacia uno de los valles vecinos y ninguna partícula del estado fundamental ocupa alguno de los máximos. La energía necesaria para sobrepasar tales máximos del potencial es la barrera de Peierls-Nabarro.

la configuración uniformemente espaciada  $\{j\omega + \alpha\}$ , que es la configuración de equilibrio en ausencia de  $V(u)$ . A pesar de que  $V(u)$  rompe la invariancia continua traslacional de la energía, las estructuras inconmensuradas analíticas mantienen, en cierto sentido, esta invariancia.

Intuitivamente parece claro que las estructuras inconmensuradas analíticas no pueden existir cuando el potencial  $V(u)$  es mucho mayor que el potencial de interacción entre las partículas. Por ejemplo, si se piensa en una partícula situada en la cima de un pozo de potencial, a valores pequeños del parámetro  $K$  si la partícula de la cima es desplazada ligeramente la energía elástica de los vecinos crece más rápidamente de lo que  $V(u)$  disminuye. Sin embargo, a valores suficientemente altos de  $K$  la distancia entre partículas necesaria para contrarrestar este decrecimiento violaría las restricciones impuestas por la propiedad de orden rotacional (ver (2.16) con  $r = 1$ ). De este modo, hay un intervalo en torno a la cima donde no puede localizarse ninguna partícula de un estado fundamental inconmensurado (figuras 2.13 y 2.15) y la función *hull* no puede ser continua. Este argumento puede usarse para dar una cota cuantitativa al valor de  $K$  por encima del cual no puede darse ningún estado fundamental inconmensurado analítico. La órbita de la aplicación estándar

asociada a un estado fundamental inconmensurado y no analítico es densa en un conjunto invariante con la estructura de un conjunto de Cantor, usualmente llamado “cantorus”.

El valor del parámetro  $K$  al cual un estado fundamental inconmensurado se hace no analítico depende del espaciado promedio irracional  $\omega$ . Este valor crítico  $K_c(\omega)$  es el punto de frontera entre dos regímenes en los cuales las estructuras inconmensuradas exhiben propiedades físicas drásticamente diferentes. Para  $K > K_c(\omega)$ , la estructura inconmensurada es anclada. Por lo tanto, tiene un valor no nulo de energía de Peierls-Nabarro y fuerza de desanclaje, una longitud de coherencia finita y el cero no pertenece al espectro de su matriz de estabilidad lineal (figura 2.14). El elemento distintivo de esta transición es el cambio de la función *hull* de analítica a no analítica, por ello Aubry la ha llamado **transición por ruptura de analiticidad** (TBA, del inglés *transition by breaking of analyticity* o del francés *transition par brisure de l'analyticité*), un término en cierto modo bastante técnico. Aunque Coppersmith y Fisher [34] usaron “transición de anclaje” es más adecuado el empleo de este término para la “transición de desanclaje” que sufren las estructuras conmensuradas y las inconmensuradas no analíticas al valor de la fuerza de desanclaje  $F_d$ . Villain [63] ha sugerido el término **transición de Aubry**, que es el que nosotros adoptaremos aquí.

El valor de  $K_c(\omega)$  depende esencialmente de las propiedades aritméticas del irracional  $\omega$  y es máximo para la media áurea  $\zeta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  (y su inverso). La mejor estimación de  $K_c(\zeta) = 0,971635406$  ha sido obtenida por MacKay [64].

La caracterización de la transición de Aubry como un fenómeno crítico, mediante la determinación numérica de los **exponentes de escalado** para diversas cantidades críticas, ha sido hecha por Coppersmith y Fisher [34], Peyrard y Aubry [65], de Seze y Aubry [66] y Aubry y Quemerais [67]. Ellos utilizan una sucesión de estados fundamentales conmensurados con espaciados promedios que se aproximan al inverso de la media áurea para calcular numéricamente las cantidades críticas de la estructura inconmensurada. MacKay [64, 68] desarrolló una aproximación usando el método de renormalización (ver también el trabajo de Kadanoff [69] y Shenker y Kadanoff [70]), que da las mejores estimaciones para los exponentes de escalado en la transición de Aubry para los irracionales áureos.

- La longitud de coherencia  $\xi$  es finita para estructuras inconmensuradas no analíticas y diverge en la transición de Aubry;

$$\xi(K) \sim (K - K_c)^{-\nu}, \quad \nu \simeq 0,9874624. \quad (2.33)$$

- La energía de la barrera de Peierls-Nabarro  $E_{PN}$  es positiva para estruc-

turas ancladas y se anula a  $K_c$ :

$$E_{PN}(K) \sim (K - K_c)^\psi, \quad \psi \simeq 3,0117222. \quad (2.34)$$

- La fuerza de desanclaje,  $F_d$ , escala según

$$F_d(K) \sim (K - K_c)^{\psi'}, \quad \psi' \simeq 3,0117222. \quad (2.35)$$

Ver que  $\psi' = \psi$ . Esta relación de escalado puede ser justificada en base a consideraciones físicas ya que el trabajo hecho por la fuerza de desanclaje para superar la barrera de Peierls-Nabarro debe ser del orden de  $E_{PN}$ .

- El gap de fonones,  $\Omega_{min}$  es la raíz cuadrada positiva del menor valor propio de la matriz de estabilidad lineal  $\mathbf{M}(\{u_j\})$ . Se comporta como:

$$\Omega_{min}(K) \sim (K - K_c)^\chi, \quad \chi \simeq 1,0268803. \quad (2.36)$$

- En el régimen no analítico, el mayor gap,  $\Delta_f$ , en la función *hull* está centrado en torno a la posición de máximo del potencial  $V(u)$  y se anula en la transición de Aubry:

$$\Delta_f(K) \sim (K - K_c)^\sigma, \quad \sigma \simeq 0,7120835. \quad (2.37)$$

Mackay llamó **cantidades supercríticas** a las expuestas anteriormente, ya que ellas valen cero cuando  $K < K_c$ , y por lo tanto son de interés en el régimen no analítico. **Cantidades subcríticas** son aquellas de interés en el régimen analítico. Una de ellas es la **constante elástica** o inverso de la compresibilidad. Si  $\omega(\mu)$  es el espaciado promedio del estado fundamental a un valor fijo de  $K$  (figura 2.4), la constante elástica  $C$  puede definirse como:

$$C = \left( \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \right)_K, \quad (2.38)$$

si la derivada existe. Obsérvese que para cualquier valor racional de  $\omega$  hay un intervalo de valores de  $\mu$  donde  $\omega(\mu)$  no cambia, de modo que la compresibilidad de los estados commensurados es nula y la constante elástica no está definida. A  $K = 0$ ,  $\omega(\mu) = \mu$ , y la constante elástica es  $C = 1$ . Para un estado fundamental inconmensurado analítico la constante elástica decrece con  $K$  y se anula en el régimen no analítico. Para  $K > K_c(\zeta)$ , cuando las estructuras inconmensuradas son todas no analíticas, la escalera del diablo es completa; esto es,  $\omega(\mu)$  tiene pendiente cero en todo punto, o lo que es lo mismo, los estados fundamentales inconmensurados tienen medida cero en el eje  $\mu$ , aunque tienen medida completa en el eje  $\omega$ .

Otra cantidad subcrítica es la **viscosidad efectiva**  $\Gamma$ . Si se aplica un campo constante de fuerzas a una estructura inconmensurada analítica en la presencia

de un medio de amortiguamiento viscoso, alcanza un estado estacionario de movimiento caracterizado por una velocidad media  $v$ . Entonces, la viscosidad efectiva se define como:

$$\Gamma = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{F}{v}, \quad (2.39)$$

y puede demostrarse que es proporcional al valor medio del cuadrado de la derivada de la función  $hull \langle f'_{\omega} \rangle$ .

Para irracionales áureos, el comportamiento de estas cantidades subcríticas en la transición de Aubry ha sido determinado por de Seze y Aubry [66] y MacKay [64, 68]:

- La constante elástica se anula en la transición de Aubry:

$$C(K) \sim (K_c - K)^{\zeta}, \quad \zeta \simeq 0,049328. \quad (2.40)$$

- La viscosidad efectiva crece con  $K$ , y diverge en la transición de Aubry:

$$\Gamma(K) \sim (K_c - K)^{-\eta}, \quad \eta \simeq 0,029500. \quad (2.41)$$

Por último, los exponentes críticos satisfacen las siguientes **relaciones de escalado**:

$$2\chi + \nu = \eta + \psi, \quad (2.42)$$

$$\zeta = \psi - 3\nu.$$

## 2.4. Defectos, interfases, estados metaestables y límite anti-integrable

Una propiedad característica de los estados anclados es su **defectibilidad**; con ello queremos decir que admiten **defectos** como configuraciones físicamente estables. La configuración  $\{u'_j\}$  es un defecto en la configuración de referencia  $\{u_j\}$  si existen enteros  $n$  y  $m$ , tales que

$$\begin{aligned} u'_j &\rightarrow u_j && \text{si } j \rightarrow -\infty \\ u'_j &\rightarrow u_{j+r} + m && \text{si } j \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.43)$$

En el caso de que los dos enteros  $r$  y  $m$  sean iguales a cero conviene decir que  $\{u'_j\}$  es un defecto respecto de  $\{u_j\}$  sólo si ambas configuraciones son diferentes.

En el modelo de Frenkel-Kontorova estándar las disconmensuraciones elementales (figuras 2.7 y 2.8) son ejemplos de defectos en relación con estados

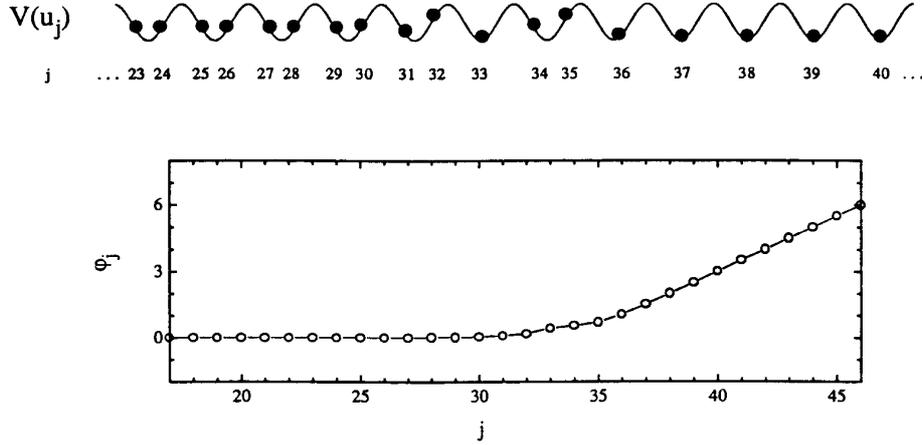


Figura 2.16: Ejemplo de una interfase entre dos estados conmensurados. La figura superior muestra la interfase usando una representación del potencial; la inferior lo hace en términos de la fase relativa local con una estructura de  $\omega = 1/2$  como referencia.

fundamentales conmensurados. Son especiales por ser configuraciones de mínima energía, y ningún otro defecto relativo a los estados fundamentales conmensurados cumple esta propiedad.

Una **interfase** (figura 2.16) entre dos configuraciones  $\{u_j\}$  y  $\{v_j\}$  es una configuración  $\{w_j\}$  tal que:

$$\begin{aligned} w_j &\rightarrow u_j & \text{si } j &\rightarrow -\infty \\ w_j &\rightarrow v_j & \text{si } j &\rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Se puede ver que un defecto, definido según (2.43), es un caso particular de interfase entre dos configuraciones  $\{u_j\}$  y  $\{v_j\}$  relacionadas por una transformación de simetría  $\sigma_{r,m}$ .

El **exceso de longitud**,  $\Delta$ , de un defecto arbitrario del mismo modo que el exceso de longitud de una disconmensuración elementales (ver sección 2.2). Si la configuración de referencia  $\{u_j\}$  tiene un espaciado promedio  $\omega$ , el exceso de longitud del defecto (2.43) es

$$\Delta = r\omega + m. \tag{2.45}$$

Muchas veces es conveniente pensar en un defecto como el agregado de defectos más simples (ver figura 2.17). El exceso de longitud del defecto es entonces la suma de los excesos de longitud de sus componentes. Si la configuración de referencia es un estado fundamental conmensurado, entonces lo más

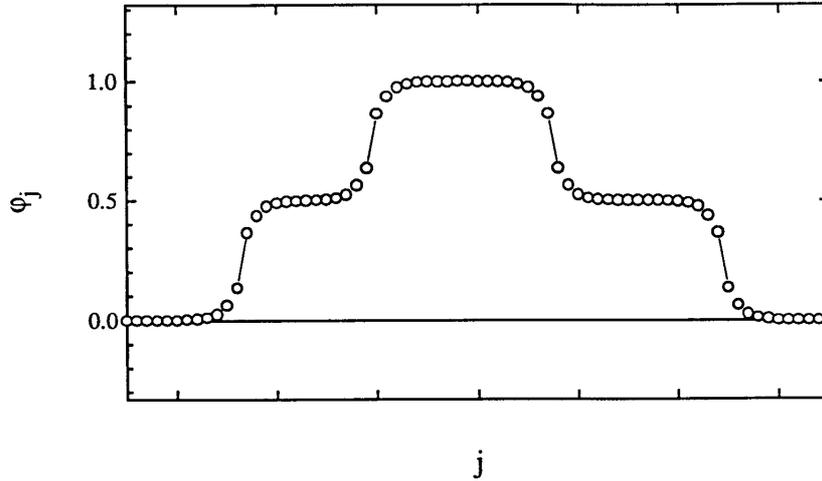


Figura 2.17: La figura muestra una estructura de  $\omega = 1/2$  con defectos. En este caso tal configuración es fácilmente imaginable si se describe en términos de la agregación de discommensuraciones elementales.

natural es ver el defecto como el agregado de discommensuraciones elementales. Si el defecto es una configuración físicamente estable su estabilidad está debida a las barreras de Peierls-Nabarro de las discommensuraciones elementales, que evitan que los defectos se separen o aniquilen.

Diremos que una configuración  $\{u_j\}$  es un **estado metaestable** si es físicamente estable pero no es una configuración de mínima energía. La existencia en el modelo Frenkel-Kontorova de muchos estados metaestables es conocida y está físicamente entendida, desde hace tiempo. Valiéndose de un análisis perturbativo en el parámetro  $\frac{1}{K}$ , Coppersmith [40] ha dado evidencias convincentes de la existencia de estados metaestables, cuyo número crece al menos exponencialmente con el tamaño del sistema. Esta aproximación puede considerarse precursora del concepto de **anti-integrabilidad** introducido por Aubry y desarrollado por Aubry y otros [71, 72, 73, 74]; concepto que ha resultado ser de gran utilidad en la prueba de un buen número de teoremas matemáticos, no sólo en el modelo Frenkel-Kontorova, sino también en modelos de interacción electrón-fonón [17, 75], sistemas dinámicos hamiltonianos de muchos cuerpos con oscilaciones localizadas (*breathers*) [74, 76], y otros sistemas no lineales.

Un modelo es anti-integrable cuando la energía (2.1) es separable, esto es, puede escribirse como:

$$H = \sum_j V(u_j). \quad (2.46)$$

Si la energía (2.1) está escalada a la intensidad del potencial  $V(u)$ , el lí-

límite anti-integrable del modelo Frenkel-Kontorova corresponde al límite de constante elástica de los muelles igual a cero (partículas no interaccionantes),  $\frac{1}{K} \rightarrow 0$ . Las configuraciones de equilibrio  $\{u_j^{AI}\}$  del modelo Frenkel-Kontorova estándar en el límite anti-integrable están dadas por

$$u_j^{AI} = \frac{1}{2}m_j \quad (2.47)$$

donde  $\{m_j\}$  es una sucesión arbitraria de enteros. Bajo algunas condiciones técnicas sobre la sucesión  $\{m_j\}$ , no muy restrictivas, puede probarse que para valores suficientemente altos del parámetro  $K$  hay una única configuración de equilibrio estable  $\{u_j\}$ . Esta es continuación de la configuración anti-integrable estable  $\{u_j^{AI}\}$ . Como las condiciones técnicas sobre las sucesiones  $\{m_j\}$  no excluyen las sucesiones caóticas, puede concluirse la existencia de estados metaestables caóticos a valores altos de  $K$  en el modelo Frenkel-Kontorova [72]. Otros resultados rigurosos interesantes son obtenidos a partir de la idea del límite anti-integrable, por ejemplo la completitud de la Escalera del Diablo [71] y la caracterización de la función *hull* de los estados fundamentales incommensurados no analíticos como medida puramente discreta [73].

Como ejemplos sencillos de estructuras metaestables, sobre las que trataremos más adelante en el capítulo 4, consideraremos los siguientes tipos:

1. Si una configuración estable consiste en una estructura commensurada de espaciado promedio  $\omega_0 = \frac{p_0}{q_0}$  sobre la que se superpone un conjunto de discommensuraciones elementales del mismo tipo, su espaciado promedio está dado por

$$\omega = \omega_0 + c\Delta \quad (2.48)$$

donde  $c$  es el inverso del número medio de partículas entre discommensuraciones contiguas (la densidad), y  $\Delta$  es el exceso de longitud de cada una de ellas. Si el espaciado entre discommensuraciones es regular, ésta es una descripción fenomenológica correcta de un estado fundamental de espaciado promedio  $\omega$ , siempre que la densidad sea baja,  $c \ll 1$ . Pero si las discommensuraciones no están separadas regularmente, la estructura es metaestable. A estas estructuras las llamaremos estructuras metaestables de **tipo I** (ver figura 2.18).

2. Supongamos que la red de discommensuraciones contiene un número igual de discommensuraciones avanzadas y retardadas. En este caso el espaciado promedio de la estructura es  $\omega_0$ , el mismo que el del estado fundamental subyacente. Esta es la estructura metaestable que llamaremos de **tipo II** (figura 2.19).
3. Las estructuras metaestables de **tipo III** (figura 2.20) están formadas por dos bloques de estados fundamentales commensurados de espaciados

promedios diferentes,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , separados por la interfase apropiada. Si  $\lambda$  denota la proporción, medida en unidades de longitud, de la primera estructura conmensurada, el espaciado promedio  $\omega$  del estado metaestable es

$$\frac{1}{\omega} = \frac{\lambda}{\omega_1} + \frac{1-\lambda}{\omega_2}. \quad (2.49)$$

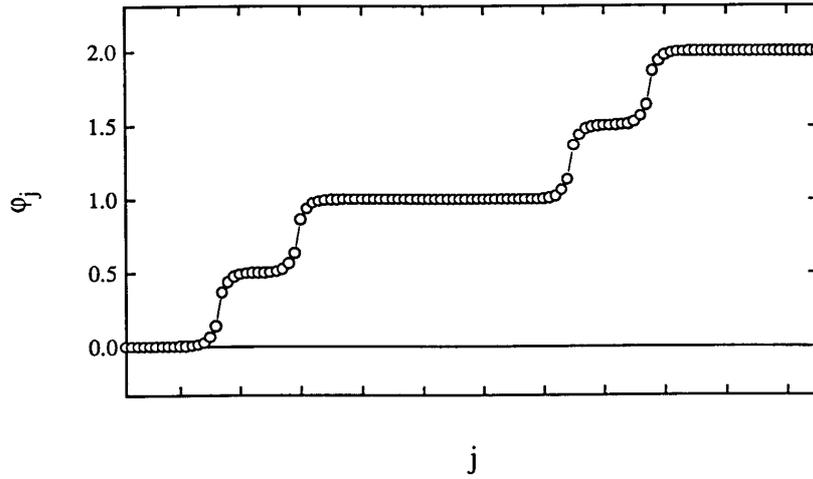


Figura 2.18: Un ejemplo de las estructura metaestables de tipo I a las que se refiere el texto. Aquí hemos introducido disconmensuraciones elementales avanzadas ( $\Delta = +\frac{1}{2}$ ) con una densidad  $c = 1/29$  en un estado fundamental de  $\omega = 1/2$ . Tales disconmensuraciones no están regularmente espaciadas, por ello el resultado es una configuración metaestable. Por claridad, mostramos dos periodos ( $58 \times 2$  partículas) de la estructura metaestable.

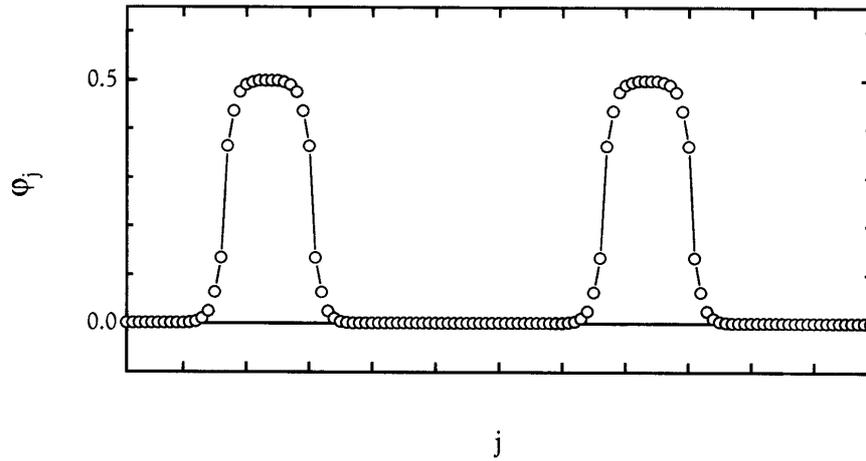


Figura 2.19: Fase relativa local de una estructura metaestable de tipo II. La estructura tiene una celda unidad de 60 partículas que ocupan 30 periodos del potencial substrato y contiene dos discommensuraciones de signo opuesto. Mostramos dos periodos de tal celda unidad.

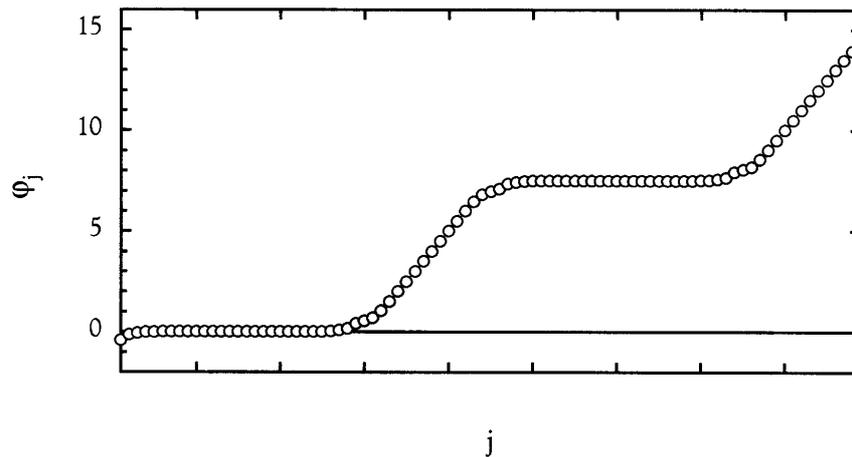


Figura 2.20: Las estructura metaestable de tipo III están formadas por bloques de estados fundamentales de diferente espaciado promedio  $\omega$ . Mostramos dos periodos ( $45 \times 2$  partículas) de una configuración de  $\omega = 2/3$  formada por 30 partículas distribuidas según un estado de  $\omega = 1/2$  y 15 siguiendo la sucesión de un estado con  $\omega = 1$ . Representamos la variable fase relativa local con el estado fundamental de  $\omega = 1/2$  como configuración de referencia.



## Capítulo 3

# Dinámica disipativa del modelo Frenkel-Kontorova bajo fuerzas constantes

Este capítulo discute el comportamiento dinámico, en el límite disipativo (sobreamortiguado), del modelo Frenkel-Kontorova bajo la acción de un campo de fuerzas constante. Primero introduciremos algunas características y propiedades generales que son también válidas en el caso de fuerzas que varían en el tiempo. Prestaremos especial atención a la regla “**prohibido adelantar**” (*no-passing*) de Middleton, ya que esta propiedad sencilla es la base de casi todos los resultados que siguen. En 3.2 nos centraremos en la caracterización del comportamiento de las configuraciones moviéndose bajo fuerzas constantes y llegaremos a mostrar la existencia de una función *hull* dinámica que describe el conjunto de estados estacionarios posibles. Aunque esta sección es bastante técnica, hemos intentado evitar en lo posible aquellos detalles que pudieran desviar la atención de las ideas principales de la derivación, que son simples e intuitivas. Finalmente, en 3.3 discutimos la transición de desanclaje, un tema de gran interés físico. Haciendo uso de técnicas no muy sofisticadas, en el modelo Frenkel-Kontorova es posible llevar a cabo una caracterización precisa de algunos de los aspectos de este fenómeno crítico dinámico.

### 3.1. Propiedades básicas de la dinámica disipativa: regla “prohibido adelantar” de Middleton y sus consecuencias

Consideremos un campo uniforme de fuerzas, posiblemente dependiente del tiempo,  $F(t)$  actuando en el sistema Frenkel-Kontorova en presencia de un medio de amortiguamiento fuertemente viscoso, de tal modo que las partículas pueden considerarse sin inercia. En el límite disipativo las ecuaciones del movimiento son las siguientes:

$$\dot{u}_j = u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi u_j) + F(t) \quad (-\infty < j < \infty), \quad (3.1)$$

donde  $\{u_j(t)\}$  es la configuración dependiente del tiempo de las posiciones de las partículas y, al modo usual, el punto sobre la variable significa su derivada temporal. A cada configuración de condiciones iniciales  $\{u_j(t_0)\}$  le corresponde una solución  $\{u_j(t)\}$ .

La configuración de condiciones iniciales fija el espaciado promedio  $\omega$ , que permanece constante conforme el tiempo evoluciona. Si la configuración de condiciones iniciales es periódica,

$$\{u_{j+r}(t_0) + m\} = \{u_j(t_0)\}, \quad (3.2)$$

entonces la correspondiente solución  $\{u_j(t)\}$  permanece periódica en el tiempo.

Utilizaremos la siguiente propiedad de simetría de las ecuaciones del movimiento (3.1): si  $\{u_j(t)\}$  es la solución de (3.1) que corresponde a la configuración  $\{u_j(t_0)\}$  de condiciones iniciales y  $r, m$  son enteros arbitrarios, entonces  $\sigma_{r,m}\{u_j(t)\}$  (2.14) es la solución que corresponde a la configuración  $\sigma_{r,m}\{u_j(t_0)\}$  de condiciones iniciales.

El resultado general más importante sobre las ecuaciones de movimiento (3.1) es, sin lugar a dudas, la **regla “prohibido adelantar” de Middleton** [36, 42, 43, 44]. Esta regla establece que la dinámica preserva la relación de orden parcial (ver sección 2.1) entre configuraciones de condiciones iniciales; esto es, si  $\{u_j(t_0)\} < \{v_j(t_0)\}$ , entonces  $\{u_j(t)\} < \{v_j(t)\}$  para todo  $t > t_0$ . Este resultado, reminiscente de las propiedades de orden del problema de equilibrio ya era conocido por algunos matemáticos, ver por ejemplo [77, 78, 79]. La propiedad de orden es, como en el problema del equilibrio, una consecuencia de la convexidad del potencial entre las partículas y no es cierta en el caso general de interacciones no convexas. Sin embargo, siempre que esta se pueda asegurar, la regla es una propiedad muy útil para el análisis del sistema.

En vez de una derivación formal del resultado, introduciremos el siguiente argumento que abunda de modo intuitivo en los fundamentos físicos de la regla.

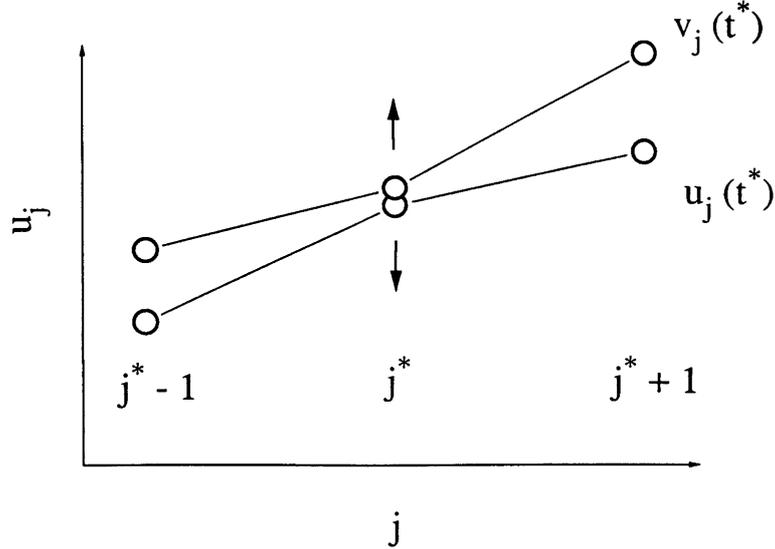


Figura 3.1: La imagen presenta una representación simple de la regla “prohibido adelantar”. Inicialmente,  $t = t_0$ ,  $\{u_j(t_0)\} < \{v_j(t_0)\}$ . La figura muestra la situación cuando  $t = t^* > t_0$ , el primer momento en el cual alguna partícula de  $\{u_j\}$  alcanza a una de  $\{v_j\}$ . Entonces  $u_{j^*} \simeq v_{j^*}$  y la dinámica está dominada por la convexidad de la interacción entre las partículas ( $(u_{j^*-1} - 2u_{j^*} + u_{j^*+1}) < (v_{j^*-1} - 2v_{j^*} + v_{j^*+1})$ ) lo que conduce a  $\dot{u}_{j^*}(t^*) < \dot{v}_{j^*}(t^*)$ , de modo que las configuraciones se alejan sin cruzarse.

Supongamos que esta no se cumple, y llamemos  $t^*$  al primer instante en el que una partícula  $j^*$  de la configuración “menor”  $\{u_j\}$ , alcanza a la partícula  $j^*$  de la “mayor”  $\{v_j(t)\}$ ; esto es:

$$u_{j^*}(t^*) = v_{j^*}(t^*)$$

(ver figura 3.1). A partir de las ecuaciones de movimiento es sencillo obtener la siguiente desigualdad para la velocidad relativa:

$$\dot{u}_{j^*}(t^*) - \dot{v}_{j^*}(t^*) = u_{j^*+1}(t^*) - v_{j^*+1}(t^*) + u_{j^*-1}(t^*) - v_{j^*-1}(t^*) < 0;$$

que impide el cruce de las configuraciones. Los dos ingredientes esenciales del argumento son los siguientes: primero, el carácter **disipativo** de la dinámica (ausencia de inercia), causante de que las velocidades estén determinadas únicamente por las fuerzas. Segundo, la **convexidad** de la interacción entre las partículas (armónica en este caso), que determina el signo para la velocidad relativa en la ecuación anterior. El argumento no hace uso de ninguna de las propiedades de simetría de las ecuaciones de movimiento, así que la validez de la regla alcanza a los casos de potenciales substrato que no sean periódicos.

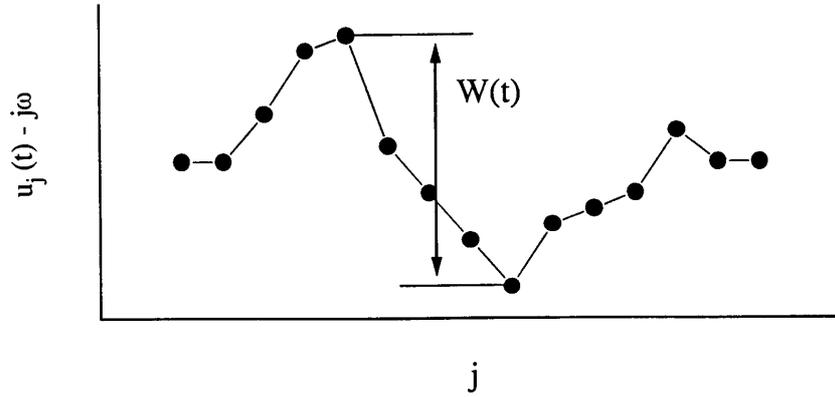


Figura 3.2: Se puede demostrar que  $W(t) = \max_j \{u_j(t) - j\omega\} - \min_j \{u_j(t) - j\omega\}$ .  $W(t)$  (3.3) es una medida de las desviaciones de la configuración  $\{u_j(t)\}$  respecto a la “red promedio”  $u_j = j\omega$ .

El enunciado de la regla puede hacerse más fuerte, en el sentido siguiente: si para todo  $j$ ,  $u_j(t_0) \leq v_j(t_0)$  y ambas configuraciones no coinciden asintóticamente en  $j \rightarrow \infty$  ni en  $j \rightarrow -\infty$ , entonces para cualquier tiempo posterior  $t > t_0$ ,  $\{u_j(t)\} < \{v_j(t)\}$ . En otras palabras, si dos configuraciones iniciales se tocan una a otra en algún punto – pero sin cruzarse – ellas se separaran más tarde. Para llegar a este enunciado más fuerte es necesario considerar derivadas temporales de mayor orden en las diferencias  $u_j(t) - v_j(t)$  [42].

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la aplicación de la regla de Middleton al caso de potencial substrato  $V(u)$  periódico: una configuración de condiciones iniciales rotacionalmente ordenada (ver sección 2.1) permanece rotacionalmente ordenada en el tiempo.

Definimos la **anchura**  $W(t)$  de una configuración  $\{u_j(t)\}$  de espaciado promedio  $\omega$  del siguiente modo,

$$W(t) = \sup_{j,r} (|u_{j+r}(t) - u_j(t) - r\omega|); \quad (3.3)$$

esto es, la desviación máxima de la longitud de un segmento finito de la configuración respecto de la longitud promedio (ver la figura 3.2). Puede considerarse que es una manera simple de medir el grado de regularidad espacial de una configuración. A partir de la ecuación (2.16) vemos que la anchura de una configuración rotacionalmente ordenada es  $W(t) < 1$ .

Una consecuencia sencilla de la regla “prohibido adelantar” es que si una configuración de condiciones iniciales  $\{u_j(t_0)\}$  tiene una anchura acotada, entonces la solución  $\{u_j(t)\}$  tendrá una anchura acotada para todo  $t > t_0$  (y siem-

pre es posible acotar superior e inferiormente la configuración, por medio de configuraciones rotacionalmente ordenadas relacionadas por una transformación de simetría). Dicho de otro modo, podemos afirmar que bajo la dinámica (3.1) una estructura no evoluciona hacia menos regularidad, o más rugosidad, de la que ya posee. La convexidad y la disipación suavizan cualquier incremento de la complejidad espacial del sistema.

Sea  $v(t)$  la **velocidad instantánea media** de una solución  $\{u_j(t)\}$

$$v(t) = \langle \dot{u}_j(t) \rangle = \lim_{(N-M) \rightarrow \infty} \frac{1}{N-M} \sum_{j=M}^{N-1} \dot{u}_j(t). \quad (3.4)$$

La **velocidad media**  $\bar{v}$  de la solución  $\{u_j(t)\}$  es el promedio temporal de  $v(t)$

$$\bar{v} = \overline{v(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) dt = \overline{\langle \dot{u}_j(t) \rangle}. \quad (3.5)$$

El resultado más importante que se obtiene a a partir de la regla “prohibido adelantar” de Middleton es la unicidad de la velocidad media  $\bar{v}$  de todas las configuraciones con un mismo espaciado promedio  $\omega$ . Consideremos dos configuraciones de condiciones iniciales  $\{u_j(t_0)\}$  y  $\{v_j(t_0)\}$ , con un mismo espaciado promedio  $\omega$ , ambas con anchuras acotadas, y tales que  $\{u_j(t_0)\} < \{v_j(t_0)\}$ . Gracias a estas dos últimas propiedades siempre es posible encontrar un par de enteros  $(r, m)$  tales que  $\{u'_j(t_0)\} = \sigma_{r,m} \{u_j(t_0)\} > \{v_j(t_0)\}$ . Entonces, como consecuencia de la regla, para todo  $t > t_0$

$$\{u_j(t)\} < \{v_j(t)\} < \{u'_j(t)\}$$

concluyéndose que la velocidad media  $\bar{v}$  de las dos soluciones es la misma. En este razonamiento hemos asumido que la fuerza externa  $F(t)$  se comporta razonablemente bien, de modo que la velocidad media de una configuración esté bien definida. También es necesario fijar un valor del espaciado promedio  $\omega$ , ya que configuraciones de espaciado promedio diferentes tienen en general valores diferentes para la velocidad media, para el mismo valor del resto de los parámetros

### 3.2. Caracterización del régimen deslizante: función hull dinámica

Hasta ahora no hemos asumido ninguna forma particular para la función  $F(t)$ , así que los resultados expuestos anteriormente son de carácter general. De aquí en adelante y a lo largo de este capítulo asumiremos que el campo de

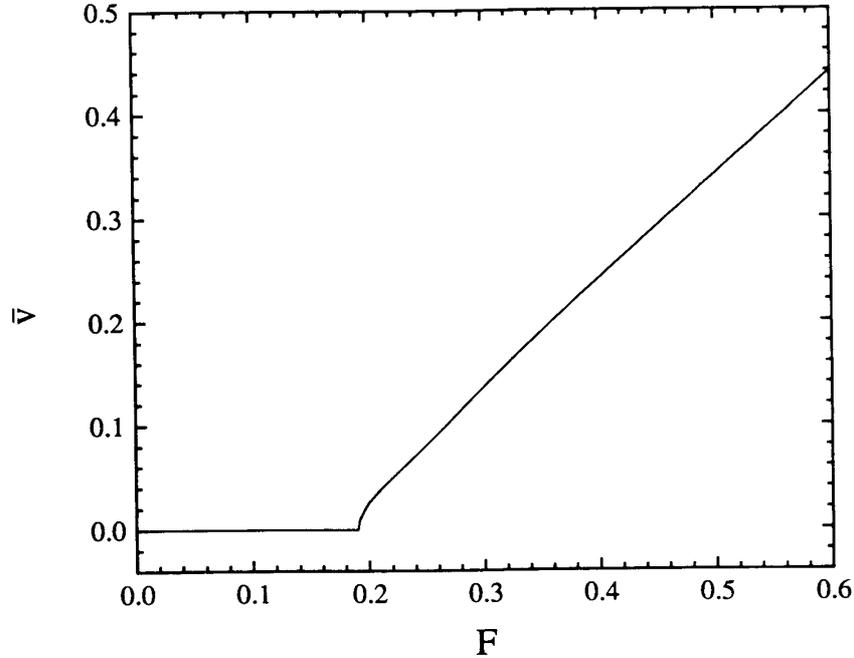


Figura 3.3: Ejemplo de la curva  $\bar{v}(F)$  de un estado fundamental commensurado de  $\omega = 3/5$ .  $K = 4,0$ , allí la fuerza de desanclaje es  $F_d \simeq 0,191$ .

fuerzas es una constante  $F > 0$ . En este caso el miembro derecho de la ecuación (3.1) no depende explícitamente del tiempo. Esto incrementa el grupo de transformaciones de simetría de las ecuaciones del movimiento, incorporando la invariancia bajo traslación temporal. Sean  $r$  y  $m$  enteros arbitrarios y  $\tau$  un número real; definimos la transformación  $\sigma_{r,m,\tau}$  por:

$$\sigma_{r,m,\tau}\{u_j(t)\} = \{u_{j+r}(t - \tau) + m\} = \{u'_j(t)\} \quad (3.6)$$

Si  $\{u_j(t)\}$  es la solución que corresponde a las condiciones iniciales  $\{u_j(t_0)\}$ , entonces  $\sigma_{r,m,\tau}\{u_j(t)\}$  es la solución que corresponde a las condiciones iniciales  $\sigma_{r,m,\tau}\{u_j(t_0)\}$ .

En el capítulo anterior introdujimos la noción de **fuerza de desanclaje**  $F_d$  de los estados fundamentales no analíticos, como el valor umbral de la fuerza para el cual existe una solución estática ( $\dot{u}_j = 0$ , para todo  $j$ ) de (3.1), que es la continuación única de la configuración de estado fundamental ( $F = 0$ ). La unicidad de la velocidad media  $\bar{v}$ , fijado el valor de  $\omega$ , asegura que para  $F < F_d$  toda solución  $\{u_j(t)\}$  de las ecuaciones del movimiento tiene velocidad media nula (siempre que, como pide la regla, la configuración de condiciones iniciales tenga anchura acotada). Asimismo, en el modelo Frenkel-Kontorova estándar no existen soluciones estáticas de (3.1) para fuerzas externas superiores a la

de desanclaje.  $F_d$  separa dos regímenes dinámicos diferenciados, el régimen **anclado** ( $F < F_d$ ) y el régimen **deslizante** ( $F > F_d$ ), ver figura 3.3.

No toda solución  $\{u_j(t)\}$  del régimen anclado es estática (velocidad cero para todas las partículas). Como ejemplo de esta afirmación aparentemente paradójica consideremos como condición inicial una disconmensuración elemental en un estado fundamental de espaciado promedio  $\omega$ , y una fuerza externa por debajo de la de desanclaje,  $F_d$ , del estado fundamental pero superior a la fuerza de desanclaje de la disconmensuración que, como veremos más adelante, es siempre menor que  $F_d$ . La solución que corresponde a esta condición inicial es una disconmensuración moviéndose y que no para nunca. De todos modos, la velocidad media es  $\bar{v} = 0$ , ya que sólo un número microscópico de partículas contribuyen en cualquier tiempo al promedio de la velocidad. Esta solución está acotada superiormente por alguna solución estática a la que nunca cruzará (ver figura 3.4).

Siempre que se cumplan algunas condiciones técnicas, no muy restrictivas, se puede demostrar que, en el régimen deslizante, la solución de las ecuaciones del movimiento es **asintóticamente única** salvo translaciones temporales. Esto fue deducido a partir de las observaciones numéricas [30, 35, 39], pero Middleton [42, 44] ha mostrado una derivación rigurosa para el caso de sistemas finitos; derivación que puede ser fácilmente extendida a sistemas infinitos. La idea de la prueba es muy simple y proporciona un buen ejemplo de la aplicación de la regla de Middleton: primero es necesario construir una solución para la cual las velocidades de todas las partículas sean siempre positivas, entonces esta solución es empleada para acotar superior e inferiormente cualquier solución arbitraria; y finalmente se demuestra que esas cotas se aproximan mutuamente cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Para construir una solución con velocidades positivas tomamos como condición inicial el estado fundamental  $\{u_j^p(t_0)\}$  de espaciado promedio  $\omega$ . A  $t = t_0$  la fuerza neta sobre cada partícula es el campo externo  $F > 0$  y entonces para todo  $j$ ,  $\dot{u}_j^p(t_0) > 0$ . Usando un argumento similar al empleado anteriormente para la regla “prohibido adelantar”, pero ahora aplicado a las velocidades, es fácil ver que para cualquier tiempo posterior  $t > t_0$  todas las velocidades  $\dot{u}_j^p(t)$  permanecen positivas. A partir de  $\{u_j^p(t)\}$  podemos definir una familia uniparamétrica bien ordenada de configuraciones:  $\{w_j^s(t)\} = \{u_j^p(s + t)\}$  ( $s > 0$ ,  $t \geq t_0$ ). Para todo  $t \geq t_0$

$$\{w_j^{s_1}(t)\} < \{w_j^{s_2}(t)\} \quad \text{si y sólo si} \quad s_1 < s_2.$$

Dada cualquier configuración arbitraria de condiciones iniciales  $\{u_j(t_0)\}$  con espaciado promedio  $\omega$  y anchura acotada, siempre es posible elegir (usando la transformación  $\sigma_{r,m}$  apropiada) la configuración estado fundamental

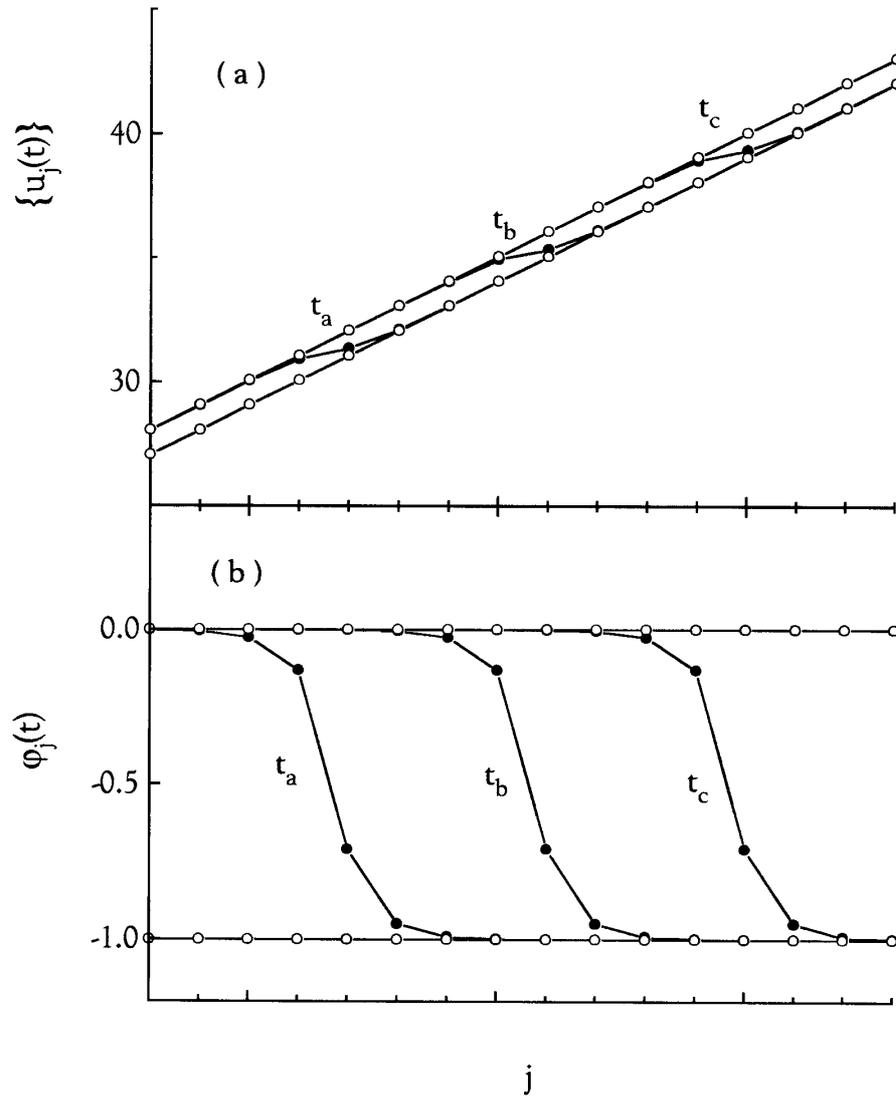


Figura 3.4: La figura muestra una solución de velocidad media  $\bar{v} = 0$  pero con algunas velocidades locales no nulas. Los círculos en negro marcan posiciones de las partículas de una discommensuración retardada de  $\omega = 1$ . Los círculos en blanco son las posiciones del estado fundamental de  $\omega = 1$ . Mostramos, en tres instantes distintos  $t_a < t_b < t_c$ , la porción de la configuración que contiene a la discommensuración y usamos dos representaciones:  $\{u_j(t)\}$  en (a) y  $\varphi_j(t)$  en (b). La fuerza externa es mayor que la fuerza de desanclaje de la discommensuración pero menor que la fuerza de desanclaje de la fase  $\omega = 1$ , de modo que  $\bar{v} = 0$ .

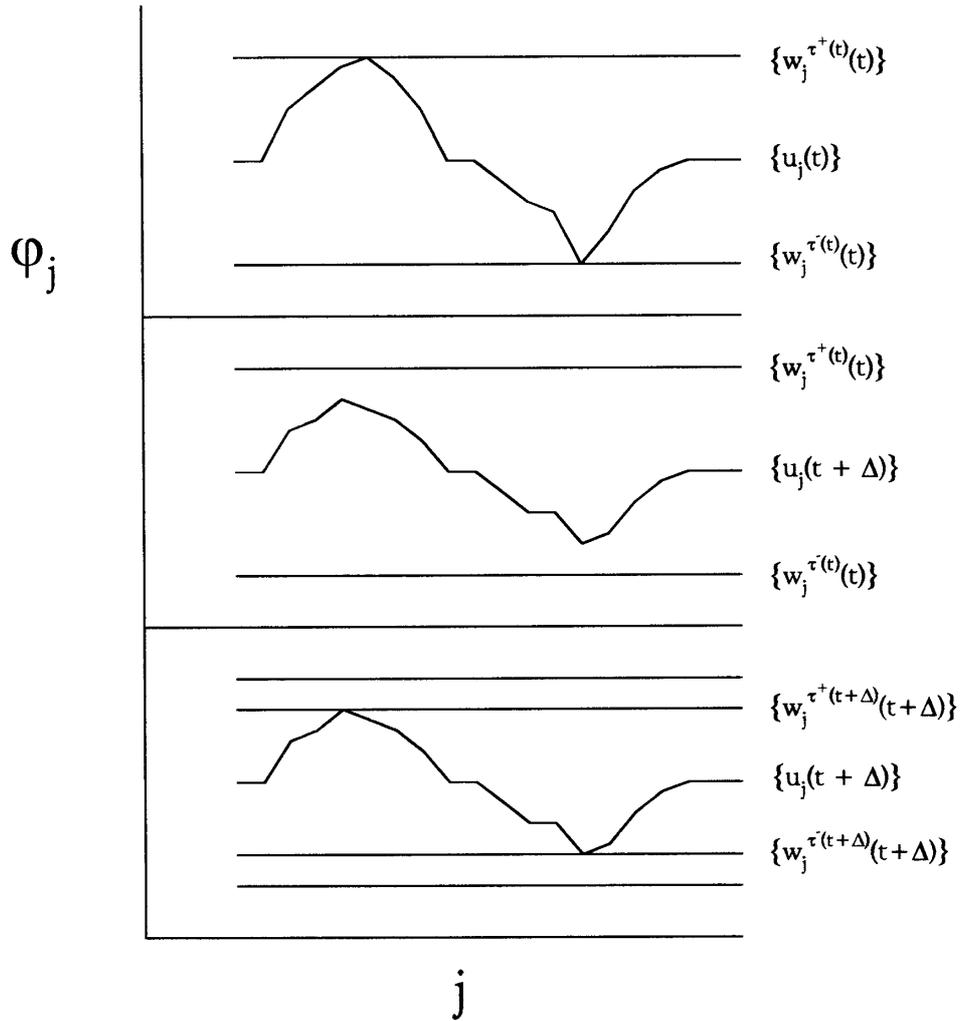


Figura 3.5: La figura es una imagen sencilla de la discusión que conduce a la unicidad asintótica de las soluciones móviles bajo fuerzas constantes. Usamos la variable fase relativa local de la configuración.  $\{w_j^s(t)\}$  es la familia continua bien ordenada de configuraciones que sirve para acotar  $\{u_j(t)\}$ . La figura superior muestra una situación posible a un tiempo  $t$ . Como consecuencia de la versión fuerte de la regla “prohibido adelantar”,  $\{u_j(t)\}$  se aparta de sus cotas y evoluciona a  $\{u_j(t + \Delta)\}$  (figura intermedia). En ese instante, dos nuevas configuraciones acotan la configuración (figura inferior).

$\{u_j^p(t_0)\}$  de la construcción anterior tal que  $\{u_j^p(t_0)\} < \{u_j(t_0)\}$ . Entonces, está asegurado que las siguientes funciones del tiempo están bien definidas para todo  $t \geq t_0$ :

$$\tau^+(t) = \inf \left\{ s \mid \{w_j^s(t)\} \geq \{u_j(t)\} \right\},$$

$$\tau^-(t) = \sup \left\{ s \mid \{w_j^s(t)\} \leq \{u_j(t)\} \right\}.$$

Debido a la propiedad de buen orden de la familia  $\{w_j^s(t)\}$ , tenemos que  $\tau^-(t) \leq \tau^+(t)$ . A cada tiempo  $t \geq t_0$ , las configuraciones  $\{w_j^{\tau^+(t)}(t)\}$  y  $\{w_j^{\tau^-(t)}(t)\}$  son, respectivamente, las mejores cotas inferior y superior de  $\{u_j(t)\}$  dentro de la familia:

$$\{w_j^{\tau^-(t)}(t)\} \leq \{u_j(t)\} \leq \{w_j^{\tau^+(t)}(t)\}$$

(fig. 3.5). Como consecuencia de la versión fuerte de la regla “prohibido adelantar”, se sigue que  $\tau^+(t)$  es una función monótona decreciente del tiempo y  $\tau^-(t)$  es una función monótona creciente del tiempo. Como  $\tau^-(t) \leq \tau^+(t)$ , existe el siguiente límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tau^+(t) - \tau^-(t))$$

y este límite debe ser necesariamente igual a cero, cualquier otro valor es excluido por la versión fuerte de la regla. La conclusión es que existe un límite  $\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \tau^+(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tau^-(t)$ , tal que para todo  $j$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [u_j(t) - w_j^\tau(t)] = 0, \quad (3.7)$$

lo que establece la unicidad asintótica de la solución salvo traslaciones temporales.

En el argumento hemos necesitado asumir dos condiciones técnicas sobre la, de otro modo arbitraria, solución  $\{u_j(t)\}$ : **anchura acotada** (ya mencionada) y **exceso de longitud cero**. La segunda condición asegura la aplicabilidad de la regla “prohibido adelantar” fuerte en los últimos pasos del argumento. Para ver esto, basta pensar en una disconmensuración elemental como condición inicial,  $\{u_j(t_0)\}$ ; en este caso las configuraciones que acotan son asintóticas a izquierda o derecha a la configuración, móvil, de la disconmensuración y esto nos impide la aplicación de la versión fuerte de la regla. De hecho, en este caso la solución permanece acotada por dos elementos distintos de la familia. A partir de este ejemplo resulta clara la necesidad de imponer cuando se trabaja en el límite termodinámico alguna restricción a las condiciones de contorno de la configuración arbitraria. No estamos seguros de que imponer exceso de longitud cero sea la asunción menos restrictiva, pero asegura la unicidad asintótica.

Debido al procedimiento usado para construir la familia  $\{w_j^s(t)\}$ , el único, salvo traslaciones temporales, **estado estacionario** – la solución asintótica –

es rotacionalmente ordenado, y todas las partículas tienen velocidad positiva en cualquier instante de tiempo.

Sea  $\{u_j(t)\}$  una solución de estado estacionario y  $r$  un entero arbitrario. Debido a que  $\{u_{j+r}(t)\}$  es también una solución de estado estacionario, existe algún  $\tau$  tal que para todo  $t$   $\{u_{j+r}(t)\} = \{u_j(t + \tau)\}$ . La velocidad media instantánea  $v(t)$  es entonces periódica con periodo  $\tau$  (o menor), y a partir de las siguientes igualdades

$$\bar{v}\tau = \langle u_j(t + \tau) - u_j(t) \rangle = \langle u_{j+r}(t) - u_j(t) \rangle = r\omega$$

se concluye que:

$$\left\{ u_{j+r} \left( t - \frac{r\omega}{\bar{v}} \right) \right\} = \{u_j(t)\} \quad \text{para todo } t. \quad (3.8)$$

Del mismo modo se deriva el siguiente resultado para cualquier solución de estado estacionario  $\{u_j(t)\}$ , y cualquier entero  $m$ :

$$\left\{ u_j \left( t - \frac{m}{\bar{v}} \right) + m \right\} = \{u_j(t)\} \quad \text{para todo } t. \quad (3.9)$$

Ambos resultados (3.8) y (3.9) son condensados en el siguiente enunciado: si  $r$  y  $m$  son números enteros arbitrarios, cualquier solución de estado estacionario  $\{u_j(t)\}$  de espaciado promedio  $\omega$  y velocidad media  $\bar{v}$  es invariante bajo la transformación  $\sigma_{r,m,\frac{r\omega+m}{\bar{v}}}$ :

$$\sigma_{r,m,\frac{r\omega+m}{\bar{v}}} \{u_j(t)\} = \{u_j(t)\} \quad \text{para todo } t. \quad (3.10)$$

Dada una solución de estado estacionario  $\{u_j(t)\}$ , asignemos al real  $x$  el valor  $f(x) = u_j(t)$ , donde  $x = j\omega + \bar{v}t$ . Debido a la propiedad (3.8) el número  $f(x)$  es único para cada valor de  $x$ , de modo que  $f(x)$  es una función real unívocamente definida. A partir de (3.9) vemos que  $f(x+1) = 1 + f(x)$ , para todo  $x$ ; además  $f(x)$  es una función analítica y monótona creciente. De la unicidad del estado estacionario concluimos que para cualquier estado estacionario dado  $\{v_j(t)\}$  existe un número real  $\alpha$  tal que

$$v_j(t) = f(j\omega + \bar{v}t + \alpha) \quad \text{para todo } j \text{ y } t \quad (3.11)$$

y recíprocamente, para cualquier real  $\alpha$ , (3.11) define una solución de estado estacionario. La existencia de la **función hull dinámica**  $f(x)$  (ver figura 3.6) resume todas las propiedades de los estados estacionarios en el régimen deslizante, mencionadas anteriormente.

Sneddon [32] y Coppersmith y Fisher [35] han dado las primeras evidencias numéricas sobre la existencia de una función *hull* analítica que describe el

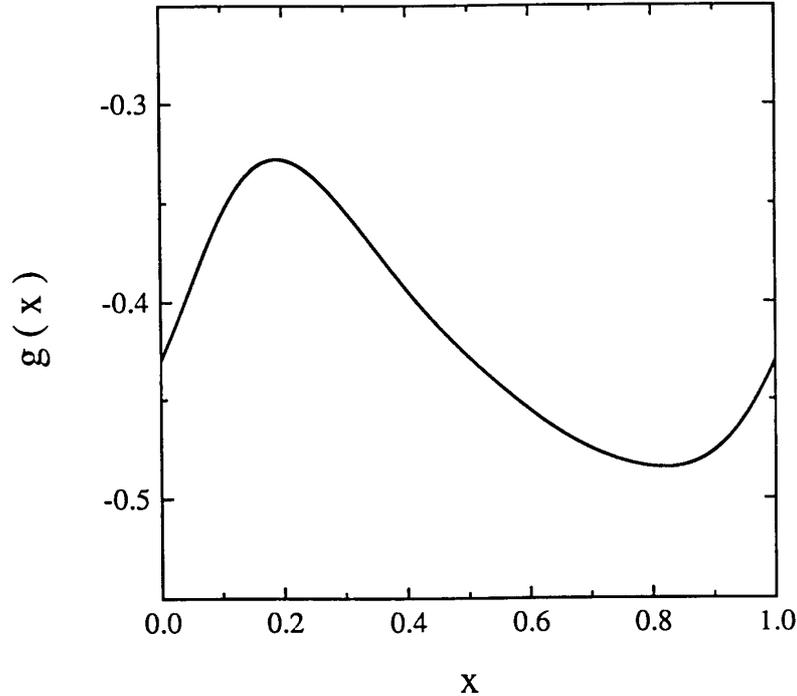


Figura 3.6: Ejemplo de una función *hull* dinámica (3.11). Hemos dibujado  $g(x) = f(x) - x$ , que cumple  $g(x + 1) = g(x)$ . Se ha usado el estado conmensurado con espaciado promedio  $\omega = 3/5$  con  $K = 2,0$  y  $F = 0,3$ . En este caso  $\bar{v} \simeq 0,263358$ .

estado estacionario en el régimen deslizante de una estructura inconmensurada impulsada por una fuerza constante y en el caso disipativo. Sin embargo, como hemos visto, este resultado se deriva tanto para las estructuras conmensuradas como para las inconmensuradas, a partir de las propiedades de invariancia de las ecuaciones del movimiento (3.1) y la aplicación de la regla “prohibido adelantar” de Middleton.

El comportamiento de la velocidad instantánea media de los estados estacionarios también se obtiene fácilmente a partir de las propiedades de la función *hull* dinámica: para una estructura conmensurada con  $\omega = \frac{p}{q}$  ( $p$  y  $q$  primos entre sí)  $v(t)$  es una función periódica de periodo  $\frac{1}{q\bar{v}}$  (fig. 3.7). Para una estructura inconmensurada  $v(t) = \bar{v}$  es una constante.

Es importante remarcar que en el régimen deslizante el conjunto de estados estacionarios forma un continuo. Como analizaremos en la siguiente sección, esto causa que las estructuras deslizantes sometidas a fuerzas constantes no admitan defectos.

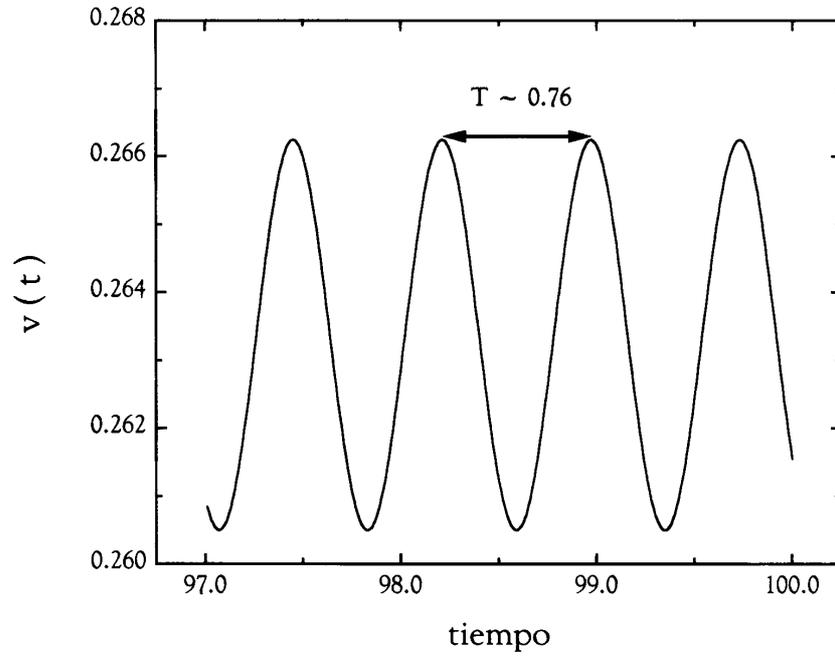


Figura 3.7: Función  $v(t)$  de una estructura commensurada donde se aprecian claramente las oscilaciones de la velocidad (las oscilaciones de corriente de las ondas de densidad de carga o las oscilaciones de voltaje de las redes de uniones Josephson). Aquí  $\omega = 3/5$ ,  $K = 2,0$ ,  $F = 0,3$  y  $\bar{v} \simeq 0,263358$ . El periodo de las oscilaciones es  $T = \frac{1}{q\bar{v}} \simeq 0,759$ .

### 3.3. La transición de desanclaje

El problema general del desanclaje de un medio elástico extenso sometido a una fuerza externa y la acción de un potencial substrato es de gran interés en muchas situaciones físicas: mojado (dinámica de líneas de contacto), dinámica de interfases en medios porosos, transporte de ondas de densidad de carga o la transición resistiva en superconductores de tipo II, por mencionar alguno de ellos. En la mayoría de estos sistemas físicos el potencial substrato está descrito de mejor manera por un desorden congelado, y por ello la caracterización de este nuevo tipo de fenómenos críticos (**transición de desanclaje**) requiere el uso de algunas técnicas [37, 80] que son bastante diferentes de las utilizadas aquí, donde el potencial substrato es una función periódica. Los lectores interesados podrían comenzar por los procedimientos básicos de estas técnicas descritos en el reciente libro de Barabasi y Stanley [81], y por las referencias que contiene.

Primero consideraremos el caso más sencillo y revelador, de la transición

de desanclaje de una única partícula, para después avanzar hacia los casos más complejos de las estructuras conmensuradas e inconmensuradas. La transición de desanclaje es un ejemplo de bifurcación *saddle-node*, un concepto básico dentro de la teoría de sistemas dinámicos de pocos grados de libertad. Veremos que en el caso de las fases inconmensuradas, un caso de infinitos grados de libertad, el exponente para la velocidad media en el desanclaje difiere del exponente de los sistemas conmensurados, con un número finito de grados de libertad. Finalmente, consideraremos la transición de desanclaje de disconmensuraciones y su dinámica cerca del valor de la fuerza para la transición de la estructura conmensurada subyacente.

### 3.3.1. Desanclaje del sistema de una partícula

Es instructivo analizar la transición de desanclaje en la situación más simple, aquella en la cual el espaciado promedio  $\omega$  es un número entero, en la que el problema se reduce al de un sistema de una partícula, cuya ecuación del movimiento es

$$\dot{u} = -V'(u) + F, \quad (3.12)$$

donde  $V(u) = V(u+1)$  es el potencial substrato periódico, que hemos asumido que es una función analítica. La fuerza de desanclaje,  $F_d$ , viene dada por la pendiente máxima de  $V(u)$ :

$$F_d = \text{máx } V'(u) = V'(u_0) \quad (3.13)$$

Por sencillez, asumiremos que hay un sólo máximo local  $u_0$  de  $V'(u)$  por periodo. Para valores de la fuerza por debajo del valor de desanclaje,  $0 < F < F_d$ , hay dos soluciones estáticas ( $\dot{u} = 0$ ) de (3.12) por periodo (ver la figura 3.8): una es estable,  $u_s$  ( $V''(u_s) > 0$ ), y es un atractor para las trayectorias del sistema que comienzan en un intervalo finito del espacio unidimensional de fases. La otra solución estática  $u_u$  es inestable ( $V''(u_u) < 0$ ) y cualquier trayectoria que comience en sus cercanías acaba alejándose de él.  $u_u$  es la frontera que separa las bases de atracción de los atractores  $u_s$  y  $u_s + 1$ . Toda trayectoria del sistema converge a alguno de los atractores equivalentes cuando  $t \rightarrow \infty$ ,

$$u(t) - u_s \propto \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) \quad (3.14)$$

donde el tiempo de relajación  $\tau'$  es  $[V''(u_s)]^{-1}$ .

Conforme incrementamos  $F$ ,  $u_s(F)$  y  $u_u(F)$  se aproximan al valor  $u_0$  y cuando  $F = F_d$  el sistema sufre una bifurcación *saddle-node*, por encima de la cual no pervive ninguna solución estática. Suficientemente cerca de la bifurcación la solución estática estable  $u_s(F)$  se comporta según

$$u_s(F) - u_0 \sim (F_d - F)^{\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

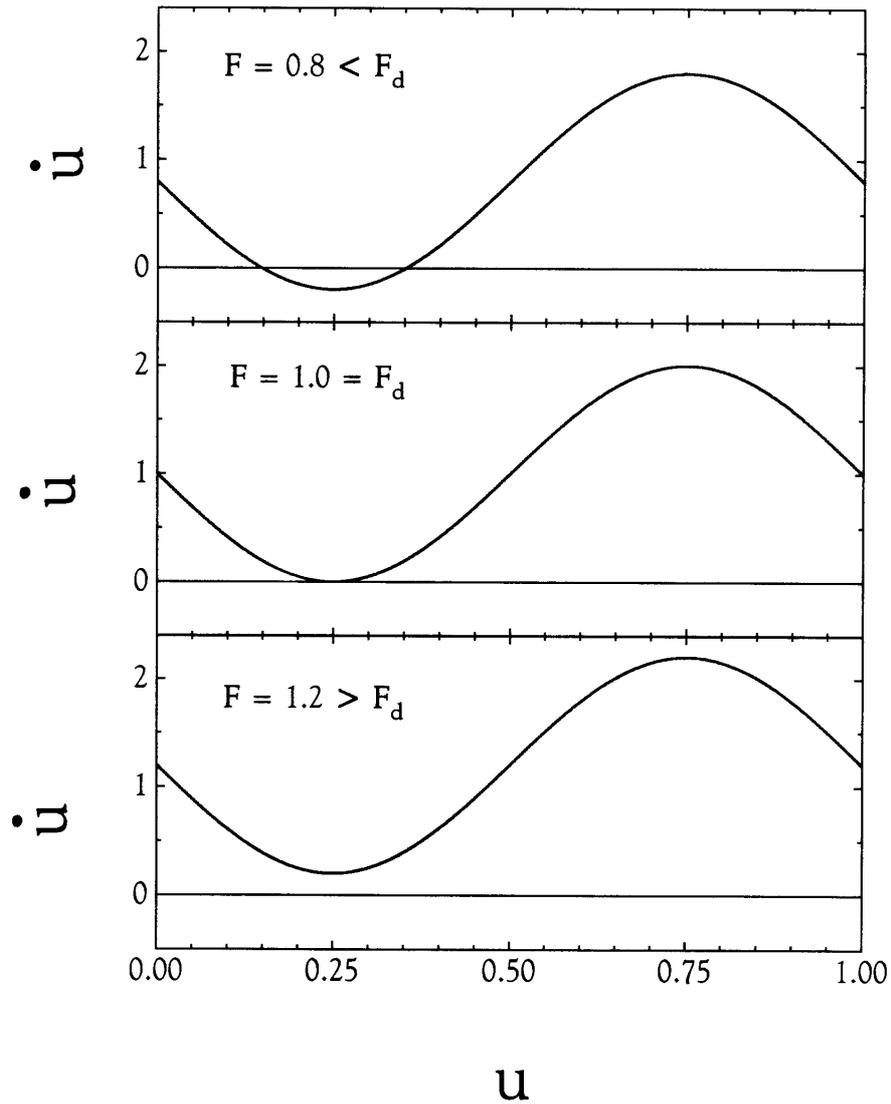


Figura 3.8: Transición de desanclaje del sistema de una partícula. Dibujamos la función  $\dot{u} = h(u) = -\sin(2\pi u) + F$  a tres valores distintos de la fuerza externa. Para valores bajos de  $F$  existen dos soluciones con  $\dot{u} = 0$ . Esta situación es la mostrada en la imagen superior, allí la solución de la izquierda es estable y la de la derecha inestable. Cuando  $F = F_d$  la solución es única y está asociada con el valor máximo de  $F = \sin(2\pi u)$ ; que en este caso es  $F = F_d = 1,0$  (cuando  $u = 1/4$ ). A valores de la fuerza  $F > F_d$  no hay soluciones estáticas de la ecuación.

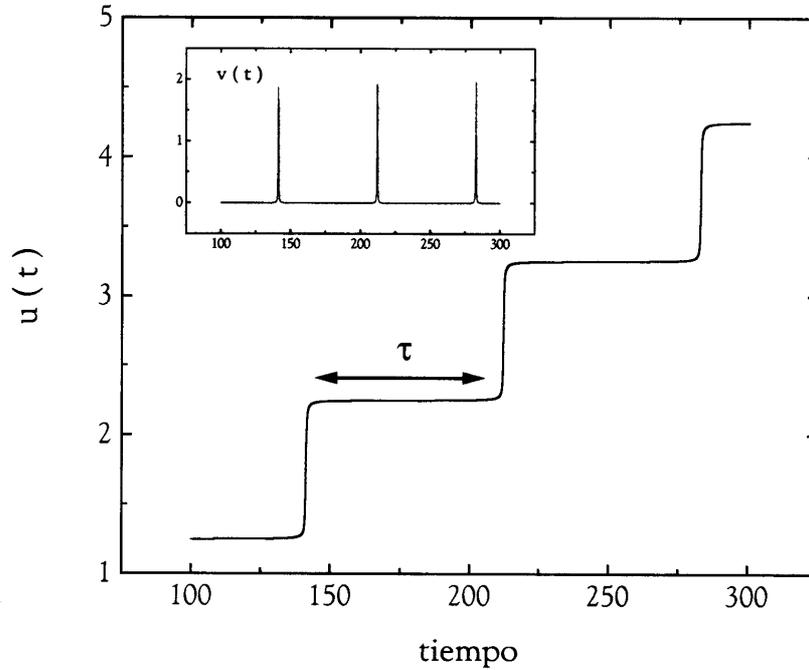


Figura 3.9: El movimiento de la partícula justo por encima de la transición de desanclaje es del tipo “pegar y deslizar”. El tiempo de pegado  $\tau$  diverge cuando  $F$  tiende a  $F_d$ . Al igual que en el caso de la figura 3.7  $v(t)$  es una función periódica y  $\bar{v} = \frac{1}{\tau}$ . En esta ocasión  $F_d = 1$  y  $(F - F_d) = 0,0001$ .

(asumiendo la situación genérica de  $V'''(u_0)$  distinto de cero). Entonces, el tiempo de relajación  $\tau'$  diverge en la transición de desanclaje:

$$\tau' \sim (F_d - F)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.16)$$

Por encima de la transición, y para valores del campo de fuerzas cercanos a  $F_d$ , las trayectorias del sistema pasan la mayor parte del tiempo en las cercanías de  $u_0$ , donde la velocidad de las partícula es cercana a cero (ver figura 3.9).

Desarrollando  $V'(u)$  en torno al “punto de pegado”  $u_0$  se tiene que el tiempo  $\tau$  empleado en las cercanías de este punto diverge según

$$\tau = \int_{u_0 - \delta}^{u_0 + \delta} \frac{du}{\dot{u}} \sim (F - F_d)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.17)$$

En consecuencia, en la transición de desanclaje la velocidad media  $\bar{v}$  tiende a cero como

$$\bar{v} \propto \tau^{-1} \sim (F - F_d)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.18)$$

Para valores del campo de fuerzas ligeramente superiores  $F_d$  el movimiento es una sucesión de pasos de “pegar y deslizar”, con un tiempo de pegado que diverge conforme nos aproximamos a la transición, y un tiempo de deslizamiento que es del orden de la unidad (figura 3.9).

La transición de desanclaje del sistema de una partícula ( $\omega$  entero) se caracteriza por dos tiempos característicos:  $\tau'$  (por debajo de la transición) y  $\tau$  (por encima de esta), divergiendo ambos con un exponente  $\mu = \frac{1}{2}$ . Este valor es consecuencia de la analiticidad del potencial substrato periódico en el punto de pendiente máxima  $u_0$ .

### 3.3.2. Estructuras conmensuradas

Para valores racionales de espaciado promedio  $\omega = \frac{p}{q}$ , el problema se reduce al de un sistema con un número finito,  $q$ , de grados de libertad. Por debajo de la transición de desanclaje, la configuración estática estable  $\{u_j^s\}$  ( $j = 1, \dots, q$ ) se aproxima a la configuración marginalmente estable  $\{u_j^0\}$  cuando  $F \rightarrow F_d^-$ . El menor valor propio,  $\Lambda_0$ , de la matriz de estabilidad lineal (2.11)  $\mathbf{M}(\{u_j^s\})$  determina el tiempo de relajación  $\tau'$  de trayectorias del sistema que convergen a la configuración estática  $\{u_j^s\}$ . Como en el sistema de una única partícula, la asunción de la analiticidad del potencial substrato conduce a un comportamiento de  $\Lambda_0$  de raíz cuadrada cuando  $F \rightarrow F_d^-$ :

$$\Lambda_0 \sim (F_d - F)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.19)$$

y el tiempo característico  $\tau'$  en la transición de desanclaje diverge,

$$\tau' \sim \Lambda_0^{-1} \sim (F_d - F)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.20)$$

En el régimen deslizante, la existencia de una función *hull* dinámica,  $f(x)$ , permite el análisis de la transición de desanclaje de una estructura conmensurada en términos de un único grado de libertad:

$$\dot{u} = h(u) \quad (3.21)$$

donde  $h(u) = \bar{v} f'(x)$  y  $x = f^{-1}(u)$ . La monotonía de la función *hull* dinámica asegura la existencia de la inversa  $f^{-1}$ . La configuración  $h(u)$  es una función periódica  $h(u + 1) = h(u)$  y, en las cercanías de la transición, tiene  $q$  mínimos locales por periodo (figura 3.10), asociados a las posiciones de las partículas  $\{u_j^0\}$  ( $j = 1, \dots, q$ ) de la configuración estática en el umbral  $F = F_d$ . Cerca de la transición de desanclaje ( $F - F_d \ll 1$ ) el movimiento de las partículas es lento en la proximidad de estas posiciones y la analiticidad de  $h(u)$  asegura que el tiempo de pegado  $\tau$  diverge según

$$\tau \sim (F - F_d)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.22)$$

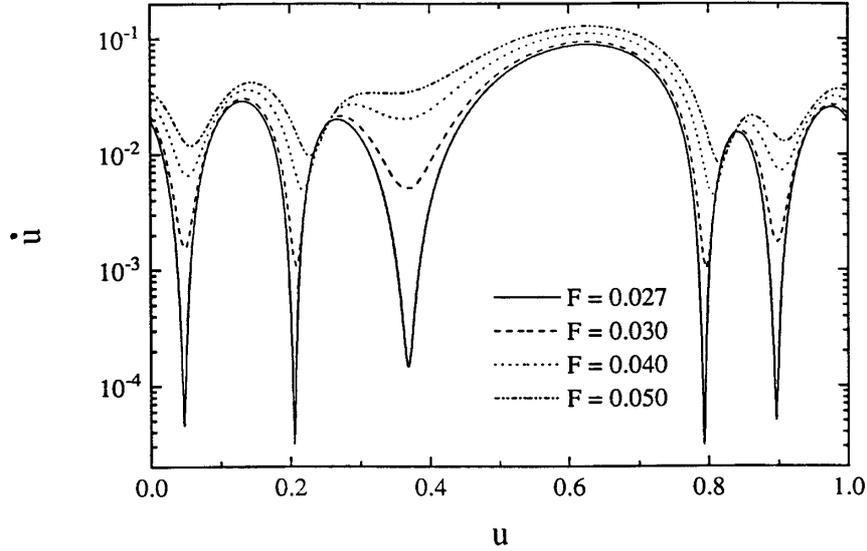


Figura 3.10: Esta figura es análoga a la figura 3.8 cuando  $\omega = 3/5$  (por claridad, usamos escala logarítmica en el eje  $y$ ). La función  $\dot{u} = h(u)$  (3.21) está directamente relacionada con la función *hull* dinámica,  $\dot{u} = \bar{v}f'(f^{-1}(u))$ , de modo que conserva toda la información básica del régimen deslizante.  $h(u)$  desarrolla algunos mínimos conforme  $F$  se acerca a  $F_d$ , ver detalles en el texto. Dibujamos  $h(u)$  para cuatro valores distintos de  $F$  superiores a la fuerza de desanclaje.  $K = 2,0$  y  $F_d \simeq 0,026908$ .

Por lo tanto, cerca de la transición de desanclaje, la velocidad media de una estructura conmensurada se comporta como

$$\bar{v} \sim (q\tau)^{-1} \sim (F - F_d)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.23)$$

Justo por encima de la transición, el avance de un periodo de la estructura conmensurada está caracterizado por la existencia de  $q$  intervalos de tiempo, de velocidad casi nula de las partículas, que divergen. Estos intervalos alternan con intervalos muy cortos de deslizamiento durante los que una partícula de cada celda unidad supera un máximo del potencial y la posición del centro de masas de la celda unidad avanza  $1/q$ . Esto es un ejemplo de lo que en lenguaje de la teoría de sistemas dinámicos no lineales se conoce por intermitencia de tipo I [82, 83]. En este caso, el comportamiento intermitente es completamente regular y el movimiento del sistema periódico. Como es de esperar, y encontramos numéricamente, la intermitencia es empujada por el vector propio  $\mathbf{M}(\{u_j^0\})$  asociado al valor propio nulo (ver figura 3.11): esto es, el responsable de la inestabilidad (lineal) de la configuración estática umbral en el desanclaje. Esta es una ilustración reveladora de cómo el análisis de estabilidad lineal puede proporcionar información útil en problemas no lineales.

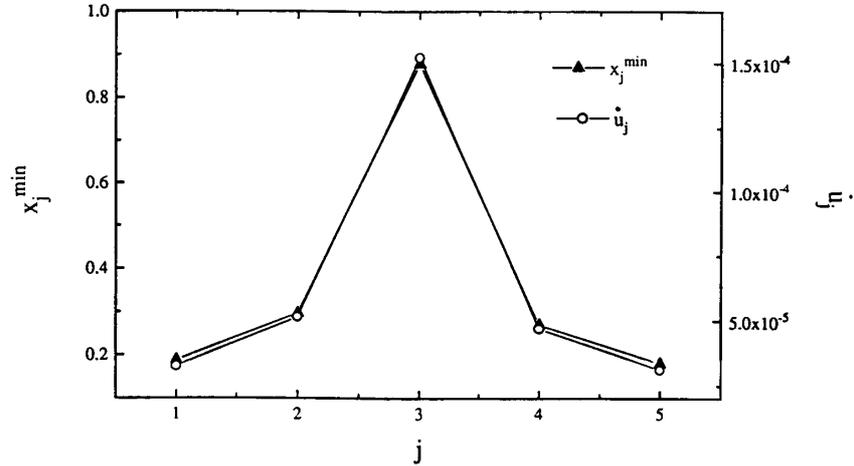


Figura 3.11:  $\{x_j^{\min}\}$  es el vector propio asociado al menor valor propio de  $\mathbf{M}(\{u_j^s\})$ , donde  $\{u_j^s\}$  es la única configuración estática a  $F = F_d$ . Justo por encima de la fuerza de desanclaje el movimiento es intermitente (ver la figura 3.9) y las intermitencias son impulsadas por este vector propio. La figura también muestra que las velocidades de las partículas  $\dot{u}_j$  durante los tiempos de “pegado” están distribuidas según este vector propio. ( $\omega = 3/5$ ,  $K = 2,0$  y  $F - F_d \simeq 0,0001$ ).

### 3.3.3. Estructuras inconmensuradas

La dinámica disipativa de la estructura inconmensuradas por debajo de la transición de Aubry (régimen no anclado) carece de transición de desanclaje. Bajo cualquier campo de fuerzas  $F > 0$  la estructura inconmensurada se mueve con velocidad instantánea media constante  $v(t) = \bar{v} \propto F$  [35].

La transición de desanclaje de configuraciones inconmensuradas en el régimen no analítico (anclado) ha sido estudiada numéricamente por Coppersmith y Fisher [35, 40]. Este problema tiene un número infinito de grados de libertad y, a priori, no se puede excluir un exponente crítico para la velocidad media en la transición distinto de aquel del sistema de una partícula.

Por debajo de la transición de desanclaje la herramienta clave es el análisis de estabilidad lineal de las soluciones estáticas rotacionalmente ordenadas. Nos podemos acercar al límite inconmensurado a través del estudio de una sucesión de sistemas conmensurados con espaciados promedio  $\omega_n$  que sea la aproximación racional óptima al número irracional deseado  $\omega$ . Es tradicional elegir la media áurea  $\zeta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , cuya mejor aproximación racional está formada por cocientes de números de Fibonacci consecutivos:  $\omega_n = \dots, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \dots$ . Como observaron Coppersmith y Fisher, el valor de la fuerza de desanclaje  $F_d$  es bastante insensible al aproximante usado, siempre que el valor del parámetro

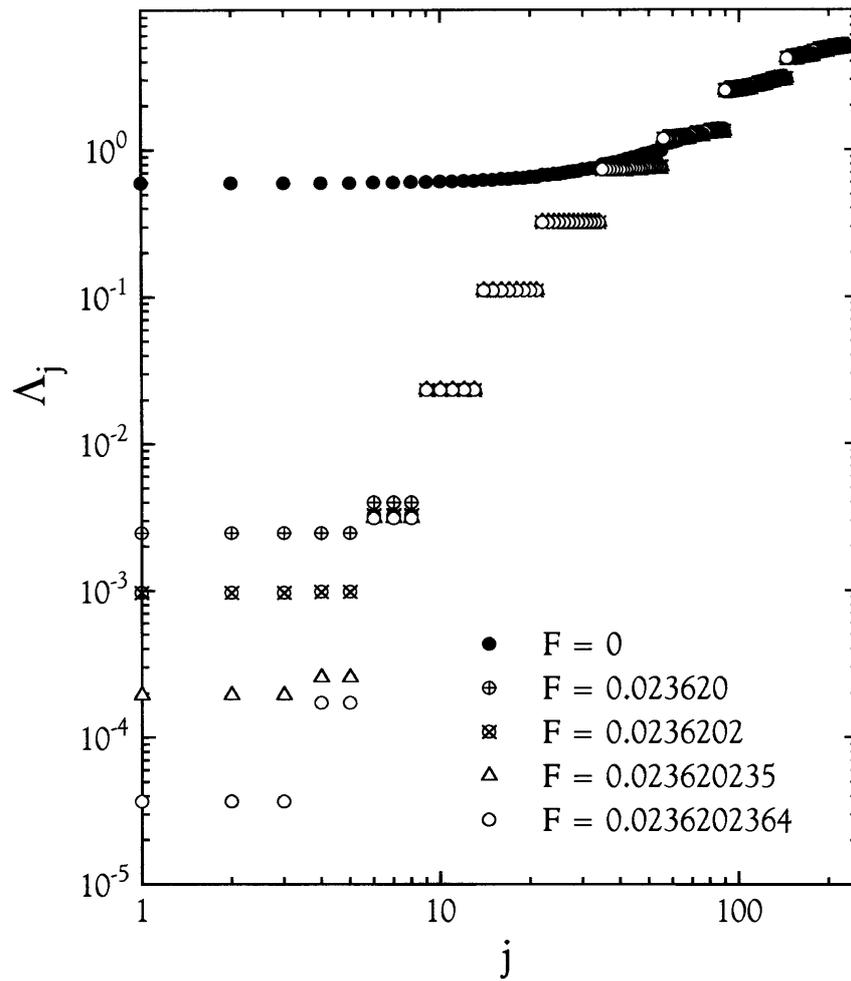


Figura 3.12: Espectro de valores propios  $\{\Lambda_j\}$  de  $\mathbf{M}(\{u_j^s\})$  para el aproximante  $\omega = 144/233$  al inverso de la media áurea y a diferentes valores de la fuerza externa. Las estructuras inconmensuradas ancladas se comportan de modo diferente a las conmensuradas por causa de la existencia de una densidad finita de valores propios que en la transición de desanclaje tienden a cero ( $K = 2,0 > K_c$  y  $F_d \simeq 0,0236202364$ ).

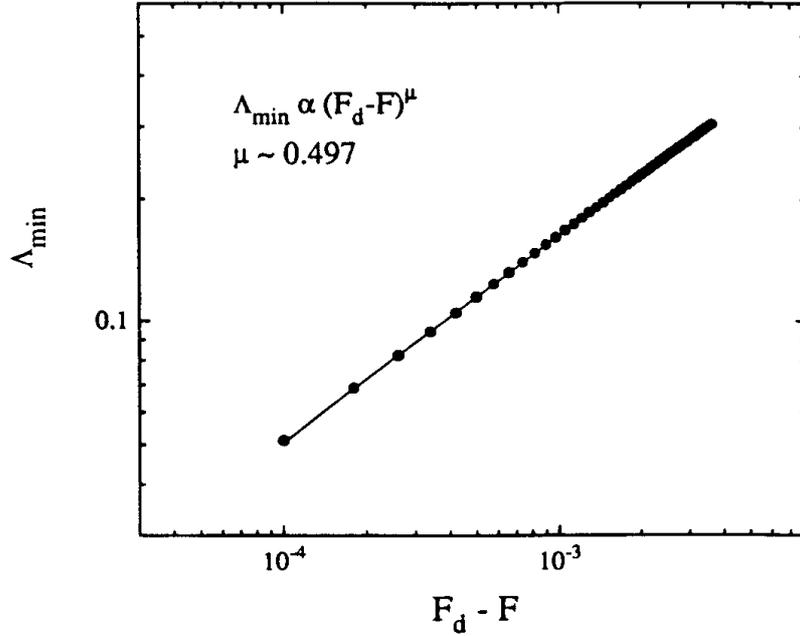


Figura 3.13: El menor de los valores propios de la matriz de estabilidad lineal (ver figura 3.12) de las estructuras incommensuradas ancladas se aproxima a cero cuando  $F \rightarrow F_d$  con un exponente  $\mu = 1/2$ . Hemos confirmado numéricamente este comportamiento, obteniendo  $\mu \simeq 0,497$ , valor muy cercano al esperado.

$K$  del modelo no sea muy cercano al valor crítico de la transición de Aubry  $K_c(\varsigma)$ .

La figura 3.12 representa los valores propios de la matriz de estabilidad lineal  $\mathbf{M}(\{u_j^s\})$  (para el aproximante  $\omega_n = \frac{144}{233}$  al inverso de la media áurea), a diferentes valores del campo de fuerzas cerca de la transición de desanclaje. Como ocurre para el caso commensurado, el menor de los valores propios tiende a cero con exponente  $\mu = 1/2$  cuando  $F$  se acerca a  $F_d^-$  (ver la figura 3.13), pero en esta ocasión cuando nos aproximamos a la transición existe una distribución de vectores propios con valores propios tendiendo a cero (**modos blandos**). Estos modos blandos están muy localizados (ver figura 3.14), y corresponden a partículas a punto de saltar sobre un máximo del potencial y a sus vecinas más próximas. La existencia de una densidad finita de modos blandos localizados es reflejo del carácter recurrente (cuasiperiódico, de hecho) de la estructura. Coppersmith y Fisher [35] conjeturaron la siguiente forma de escalado para los valores propios de  $\mathbf{M}(\{u_j^s\})$ :

$$\Lambda_m \sim (F_d - F)^\mu D \left( \frac{m}{(F_d - F)^{\delta'}} \right), \quad (3.24)$$

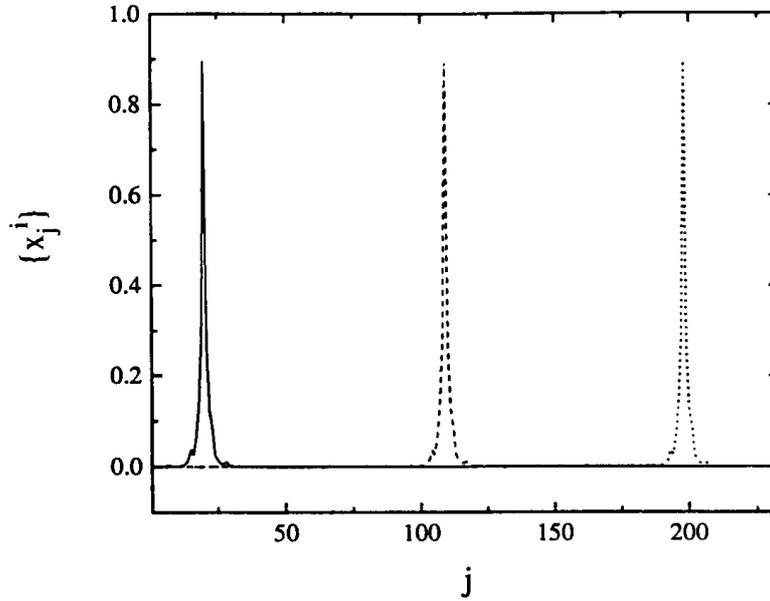


Figura 3.14: Representación de los vectores propios  $\{x_j^i\}$  asociados con los tres valores propios menores de la matriz de estabilidad cuando  $F \simeq F_d$  (ver figura 3.12). Estos modos están altamente localizados.

donde la función de escalado  $D$  sería suave e invariante bajo cambios discretos de escala, aunque no continua. El exponente  $\delta'$  describiría entonces la densidad de modos blandos. El exponente  $\mu = 1/2$  es independiente del parámetro  $K$  (siempre que estemos por encima de la transición de Aubry) y del espaciado promedio irracional  $\omega$ ; sin embargo, el exponente  $\delta'$  podría muy plausiblemente depender de ambos parámetros  $K$  y  $\omega$ . Importantes limitaciones en la precisión numérica de las rutinas de diagonalización en las cercanías de la transición, impiden una determinación directa satisfactoria de  $\delta'$ . Haciendo algunas asunciones, Coppersmith y Fisher dan una estimación indirecta del valor de  $\delta' \simeq 1/6$  para irracionales áureos y  $K = 4$ .

Por encima de la transición de desanclaje el análisis se reduce al de la ecuación de una variable (3.21), debido a la existencia de una función *hull*  $f(x)$  monótona y analítica. Al igual que en el caso conmensurado la función  $h(u)$  (figura 3.15) presenta mínimos locales con valores que se aproximan a cero linealmente en  $F - F_d$ . Entonces, asociado a cada mínimo local de  $h(u)$ , hay un tiempo de pegado que diverge con  $(F - F_d)^{1/2}$ . El punto importante de diferencia con el caso conmensurado es que ahora el número de mínimos locales involucrados en la transición diverge cuando  $F \rightarrow F_d^+$  según

$$(F - F_d)^{-\delta}. \quad (3.25)$$

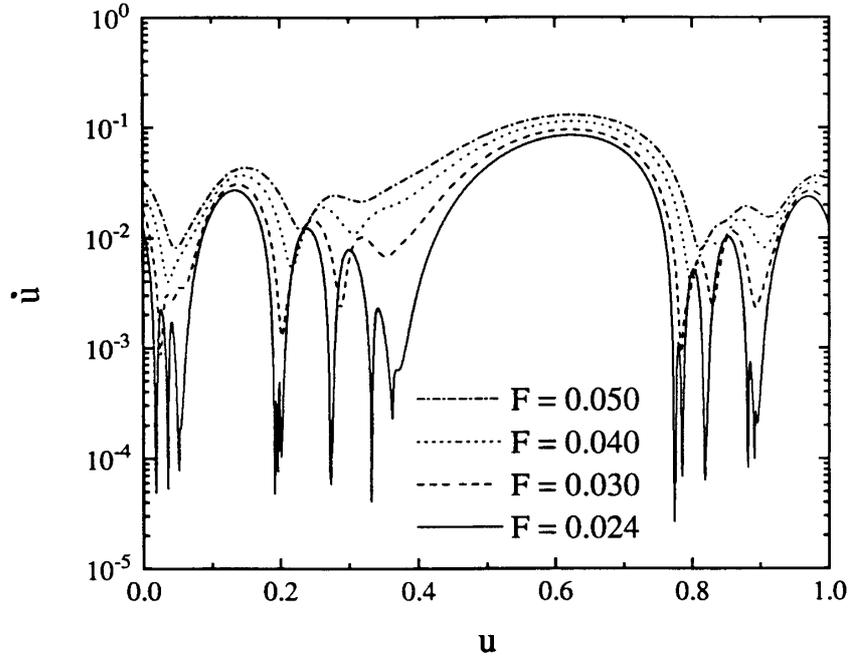


Figura 3.15: Figura análoga a 3.8 y 3.10 calculada para una configuración de  $\omega = 144/233$  ( $K = 2,0$  y  $F_d \simeq 0,023620$ ). La función  $\dot{u} = h(u)$  en el caso de las estructuras inconmensuradas ancladas desarrolla un número de mínimos que diverge cuando  $F$  tiende a  $F_d$ .

Hablando de un modo intuitivo, podríamos decir que el número de mínimos locales de  $h(u)$  corresponde a las posiciones de las partículas de la configuración inconmensurada estática  $\{u_j^0\}$  en la transición. Como esas posiciones están más uniformemente distribuidas cuando  $K$  es más cercano a la transición de Aubry, uno espera que el exponente  $\delta$  crezca conforme  $K$  decrece. Las mismas consideraciones conducen a esperar que  $\delta$  sea mayor para irracionales áureos.

El comportamiento de la velocidad media  $\bar{v}$  de una estructura inconmensurada en la transición de desanclaje (ver figura 3.16) se caracteriza por el exponente crítico  $\zeta$

$$\bar{v} \sim (F - F_d)^\zeta. \quad (3.26)$$

Los argumentos de los párrafos precedentes conducen a la siguiente relación:

$$\zeta = \mu + \delta \quad (3.27)$$

con  $\mu = 1/2$  y  $\delta$  dependiente de  $K$  y  $\omega$ . Es de esperar que, conforme  $K$  se aproxima a la transición de Aubry,  $\delta$  tienda de forma monótona al valor  $1/2$ , que es consistente con el comportamiento lineal ( $\bar{v} \propto F$ ) de la velocidad media de las estructuras conmensuradas por debajo de la transición de Aubry. Según

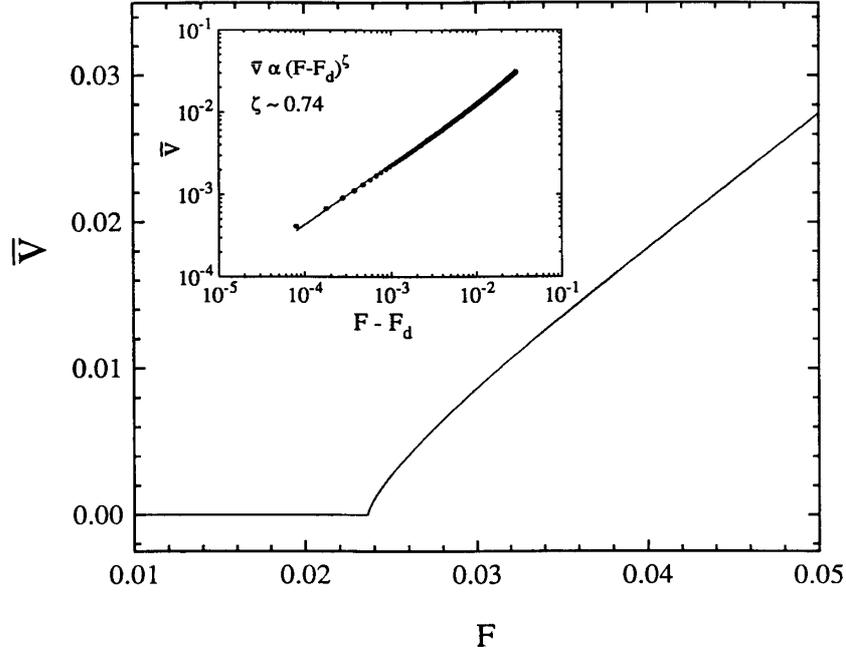


Figura 3.16: Velocidad media de una fase inconmensurada no analítica. La velocidad tiende a cero cuando  $F \rightarrow F_d$  con un exponente  $\zeta$  que difiere del caso conmensurado y depende de  $K$ . Aquí  $K = 2,0$ .

esto, puede conjeturarse la siguiente desigualdad:

$$1/2 < \zeta < 1. \quad (3.28)$$

Las estimaciones numéricas de  $\zeta$  a diferentes valores de  $K$  son compatibles con esta conjetura.

Prigodin y Samukhin [8] estudiaron la transición de desanclaje de estructuras conmensuradas e inconmensuradas en un modelo Frenkel-Kontorova convexo con el siguiente potencial substrato:

$$V(u) = \frac{K}{2} \left[ u - \text{Int} \left( u + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \quad (3.29)$$

donde  $\text{Int}(x)$  es la parte entera de  $x$ . El problema del estado fundamental de este modelo fue resuelto de manera exacta por Aubry [84]. Las no analiticidades del potencial substrato (3.29) causan que todas las estructuras inconmensuradas estén ancladas para todo  $K > 0$ . Más aún, el comportamiento de la velocidad media cerca de la transición de desanclaje está dominado por esas no analiticidades, de modo que difiere substancialmente del analizado a lo largo de los párrafos anteriores. Por otro lado, el hecho de que el potencial substrato

sea parabólico a trozos permite hacer un análisis exacto de la transición, como ocurre para el problema del estado fundamental.

### 3.3.4. Disconmensuraciones

En la sección 3.2 hemos mencionado brevemente algún aspecto referente al movimiento de disconmensuraciones. El tema es interesante por sí mismo y merecedor de alguna atención ya que, desde un punto de vista físico, la comprensión fenomenológica de las estructuras espacialmente moduladas descansa en el concepto de disconmensuración.

Primeramente introduciremos la noción,  $\tilde{v}$ , de **velocidad relativa** a la estructura conmensurada subyacente, de una disconmensuración elemental. Consideremos una configuración de disconmensuración elemental  $\{w_j\}$ , y asumamos que a un tiempo  $t = t_0$  está centrada en la partícula  $j_0$ . Si en algún tiempo

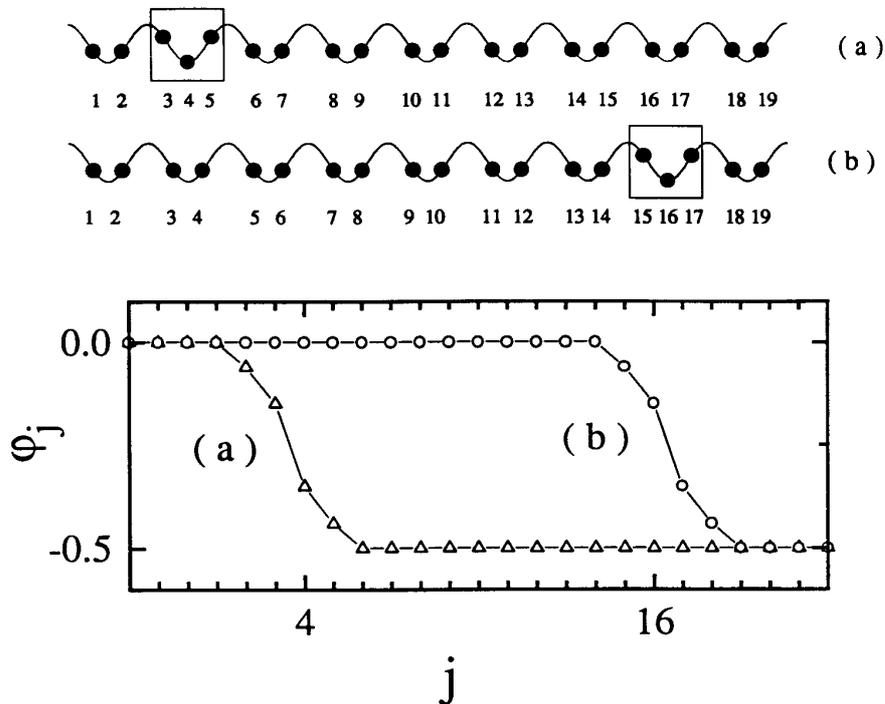


Figura 3.17: El concepto de la velocidad relativa de una disconmensuración es muy útil para el análisis del movimiento de estas configuraciones. Se entiende fácilmente como el avance (retraso) de la disconmensuración medido en número de partículas por unidad de tiempo. La figura muestra dos imágenes de una disconmensuración retardada moviéndose sobre la fase de  $\omega = 1/2$  anclada. En la imagen, la disconmensuración ha avanzado 14 partículas de (a) a (b). De este modo  $\tilde{v} = 14/(t_b - t_a)$ .

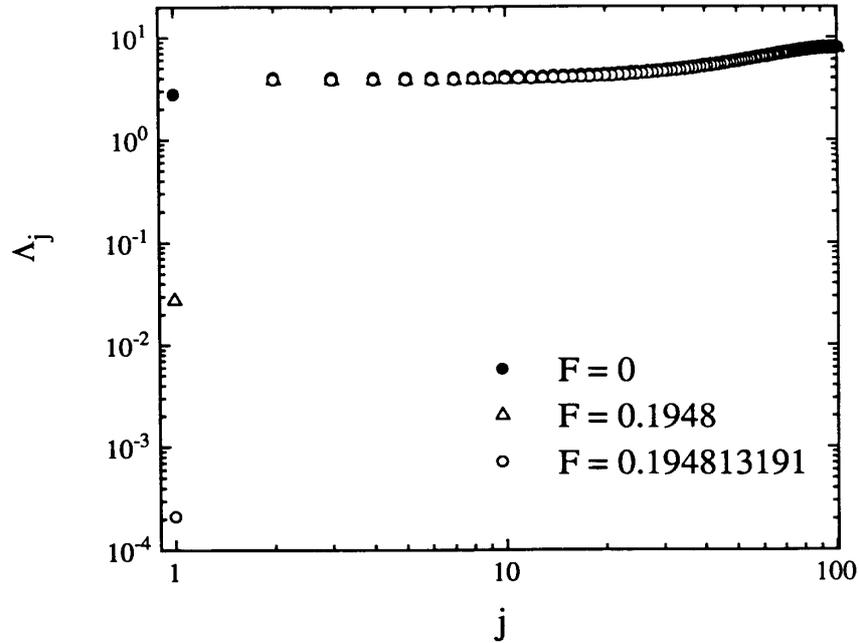


Figura 3.18: Espectro de valores propios  $\{\Lambda_j\}$  de  $\mathbf{M}(\{u_j^s\})$  para una disconmensuración elemental a la fuerza de desanclaje de la disconmensuración. Tan sólo uno de los valores propios tiende a cero, una situación que es similar a la de las fases conmensuradas. Hemos empleado una configuración de  $\omega = 100/101$ , como aproximación a una disconmensuración retardada, y  $K = 4,0$  ( $F_d \simeq 0,194813191$ ).

posterior  $t = t_0 + \tau$  la configuración está relacionada con la inicial por medio de algún cambio de etiqueta de las partículas y alguna traslación espacial entera, y el centro de la disconmensuración es ahora la partícula  $j_0 + N$ , entonces diremos que la velocidad relativa (media)  $\tilde{v}$  de la disconmensuración es:

$$\tilde{v} = \frac{N}{\tau}. \quad (3.30)$$

Dicho de otro modo, la velocidad relativa es definida como el avance, medido en número de partículas por unidad de tiempo, de la disconmensuración (ver figura 3.17). Puede verse que esta definición requiere la periodicidad del movimiento. El desplazamiento total de la estructura, que resulta del movimiento de una disconmensuración elemental de velocidad relativa  $\tilde{v}$  y exceso de longitud  $\Delta$  (ver sección 2.2) durante un intervalo de tiempo  $\tau$ , es  $-\tilde{v}\tau\Delta$ . El signo del desplazamiento refleja el hecho de que el movimiento de una disconmensuración avanzada (retardada) con  $\tilde{v} > 0$  conlleva un movimiento hacia atrás (adelante) de las partículas.

La fuerza de desanclaje,  $F_d$ , de una disconmensuración elemental  $\{w_j\}$ , es

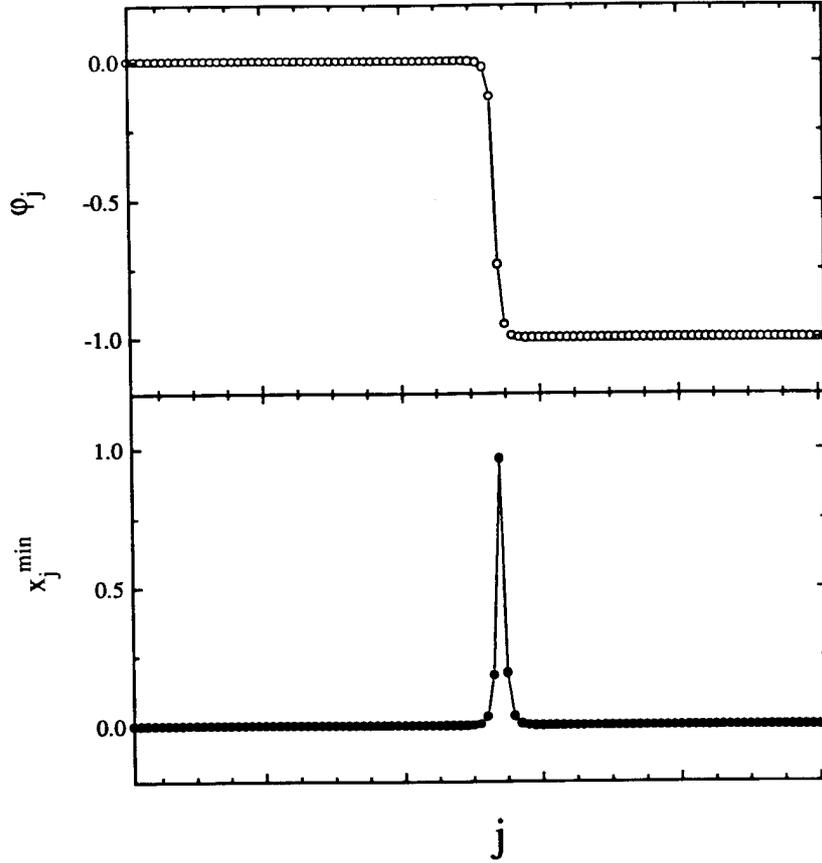


Figura 3.19: El menor de los valores propios de una discommensuración elemental (ver la figura 3.17) a la fuerza de desanclaje corresponde a un vector propio  $\{x_j^{\min}\}$  que está localizado en el centro de la discommensuración. Este es el único modo que participa en el desanclaje de la discommensuración.

menor que la fuerza de desanclaje,  $F_d^0$ , de la estructura commensurada subyacente,  $\{u_j\}$ . Para valores del campo de fuerzas  $F < F_d$  existe una solución estática  $\{w_j^s\}$  a las ecuaciones (3.1) del movimiento, que es continuación de la discommensuración elemental a  $F = 0$ . La figura 3.18 muestra un ejemplo típico del espectro de la matriz de estabilidad lineal  $\mathbf{M}(\{w_j^s\})$ . El menor de los valores propios,  $\Lambda_0$ , corresponde a un vector propio que está localizado exponencialmente en el centro de la discommensuración (ver figura 3.19). Conforme  $F \rightarrow F_d^-$ , nos acercamos a una bifurcación de *saddle-node* y el menor de los valores propios tiende a cero,

$$\Lambda_0 \sim (F_d - F)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.31)$$

Físicamente, la naturaleza localizada del modo desestabilizador puede ser entendida a partir del hecho que  $F_d < F_d^0$  y del valor finito de la longitud de cohe-

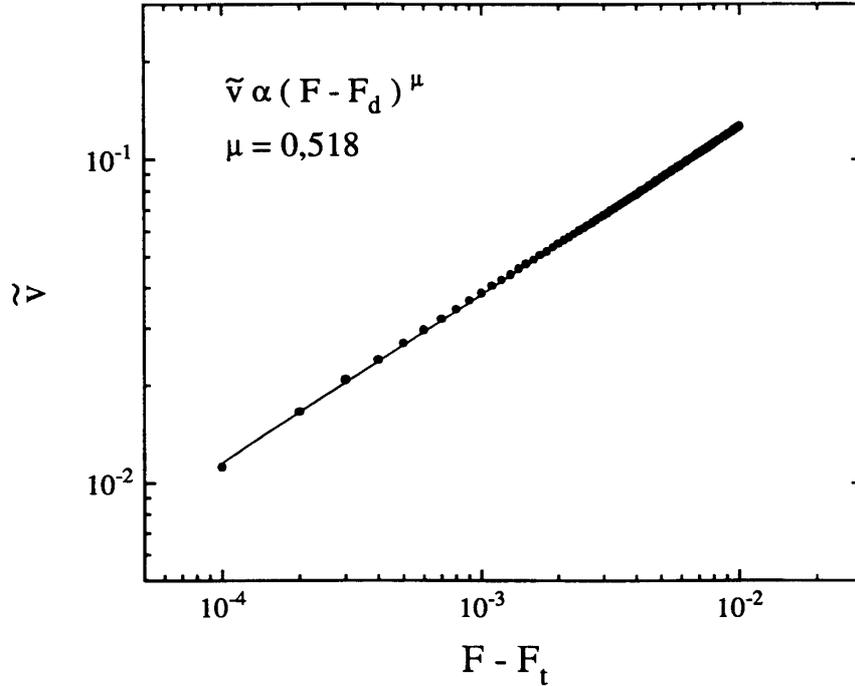


Figura 3.20: Estimación numérica del exponente crítico de la velocidad relativa  $\tilde{v}$  de la disconmensuración elemental,  $\mu = 1/2$ .

rencia de la estructura conmensurada, que evita una participación macroscópica en la inestabilidad. Suficientemente lejos del centro de la disconmensuración, las partículas permanecen esencialmente ajenas a la inestabilidad.

En el desanclaje de la disconmensuración participa un único modo, por ello el exponente crítico para la velocidad relativa  $\tilde{v}$  es  $\mu = 1/2$ ,

$$\tilde{v} \sim (F - F_d)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.32)$$

Las estimaciones numéricas del exponente son totalmente consistentes con esta predicción (ver figura 3.20).

Para valores del campo de fuerzas superiores al desanclaje de la disconmensuración, pero aún inferiores al desanclaje de la estructura conmensurada subyacente, el movimiento puede ser descrito como una disconmensuración móvil con velocidad relativa  $\tilde{v}$  sobre la configuración conmensurada estática (ver figura 3.21). La velocidad media de la estructura es  $\bar{v} = 0$ , ya que el desplazamiento total por unidad de tiempo,  $-\tilde{v}\Delta$ , es una cantidad microscópica.

Una sucesión de disconmensuraciones del mismo tipo, regularmente espaciadas, con una densidad pequeña  $c \ll 1$  y sobre un estado conmensurado de

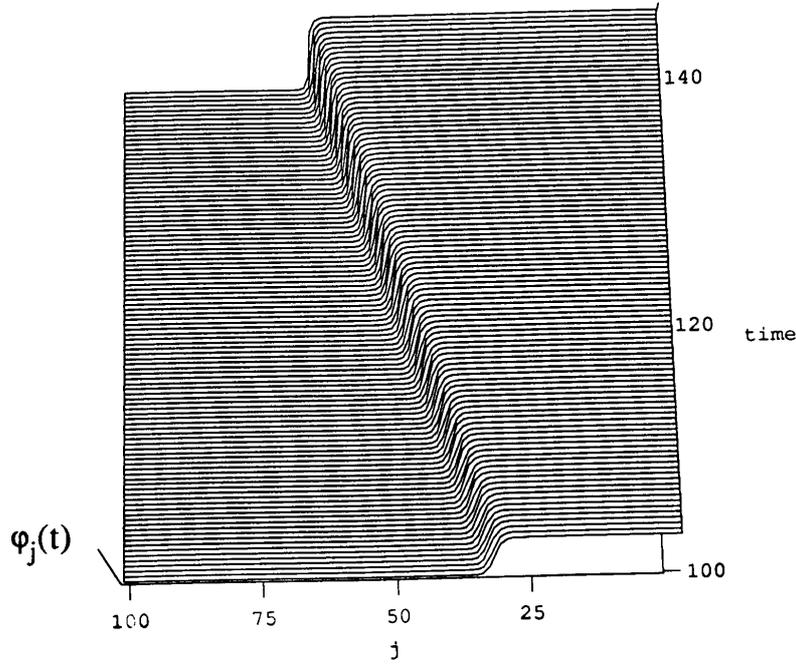


Figura 3.21: Imagen tridimensional de la fase relativa local de una disconmensuración móvil cuando  $F_d < F < F_d^0$ . La velocidad media de la estructura es  $\bar{v} = 0$ , pero no todas las partículas tienen velocidad cero. Esta situación es similar a la mostrada en las figuras 3.4 y 3.17.

espaciado promedio  $\omega_0$ , es una descripción adecuada del estado fundamental de espaciado promedio  $\omega = \omega_0 + c\Delta$  (2.48). Dado el carácter localizado del modo de desanclaje de una única disconmensuración es de esperar que la fuerza de desanclaje de la estructura anterior tenga lugar para valores de la fuerza cercanos al valor de la fuerza de desanclaje,  $F_d$ , de la disconmensuración. También es de esperar que cuando  $F_d < F < F_d^0$  el movimiento de la estructura esté descrito por una red regular de disconmensuraciones móviles con velocidad relativa  $\tilde{v}$ , moviéndose sobre una estructura estática con espaciado promedio  $\omega_0$ . La base física para que esta descripción sea válida es que la longitud de coherencia  $\xi$  de la estructura estática subyacente sea suficientemente pequeña en comparación con el espaciado entre disconmensuraciones

$$\xi \ll c^{-1} \quad , \quad (3.33)$$

entonces el comportamiento de cada disconmensuración no está influenciado por la presencia de las otras, de modo que la velocidad relativa de cada una de ellas coincide con la de la disconmensuración elemental aislada. En este caso la velocidad media  $\bar{v}$  de la estructura conmensurada de espaciado promedio  $\omega$

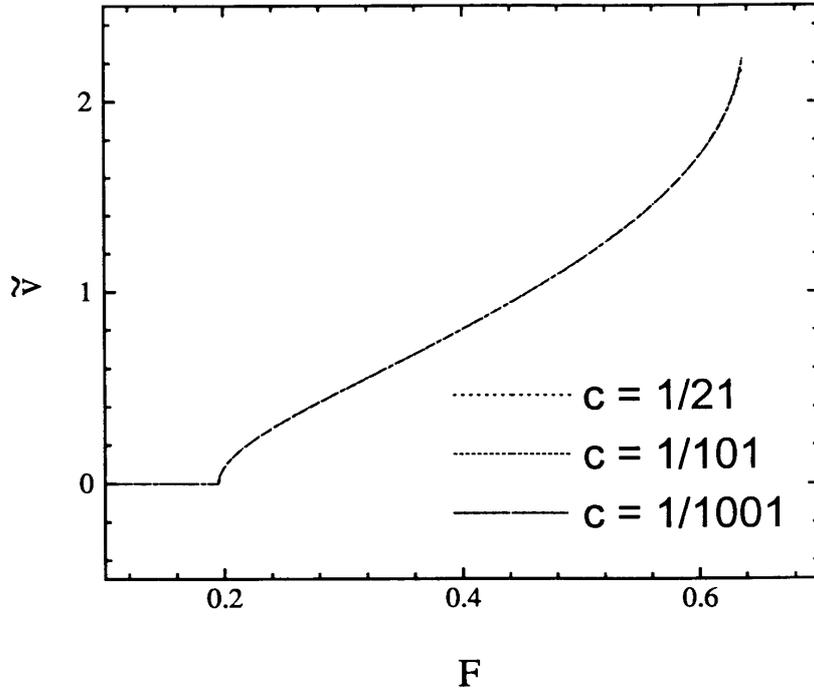


Figura 3.22: Las estimaciones numéricas sobre el comportamiento de disconmensuraciones elementales son hechas por medio de simulaciones de la dinámica de fases conmensuradas de  $\omega = \omega_0 + c\Delta$  donde la concentración  $c$  es pequeña. La figura muestra la velocidad relativa  $\tilde{v}$  de la disconmensuración, calculada usando tres valores distintos de  $c$  ( $\frac{1}{21}$ ,  $\frac{1}{101}$  y  $\frac{1}{1001}$ ) y una disconmensuración retardada con  $\Delta = -1$ . Las tres curvas colapsan perfectamente, lo que da validez a las estimaciones numéricas de  $\tilde{v}$ . Ahora  $K = 4,0$ ,  $F_d \simeq 0,1948$  y  $F_d^0 \simeq 0,6366$ .

( $= \omega_0 + c\Delta$ ) es

$$\bar{v} = -c\tilde{v}\Delta, \quad (3.34)$$

Estas expectativas son confirmadas totalmente por los datos numéricos mostrados en la figura 3.22.

Cuando  $F$  tiende a  $F_d^0$ , la longitud de coherencia  $\xi$  de la estructura conmensurada subyacente crece – diverge en  $F_d^0$ , donde el valor propio más pequeño de la matriz de estabilidad lineal de la estructura conmensurada se hace cero – y llega un momento en el que la anchura de cada disconmensuración es del orden del espaciado entre ellas, sus interacciones ya no pueden ser despreciadas y la imagen anterior, basada en disconmensuraciones casi no interaccionantes, deja de ser válida.

Volviendo al caso de una única disconmensuración, su anchura diverge en

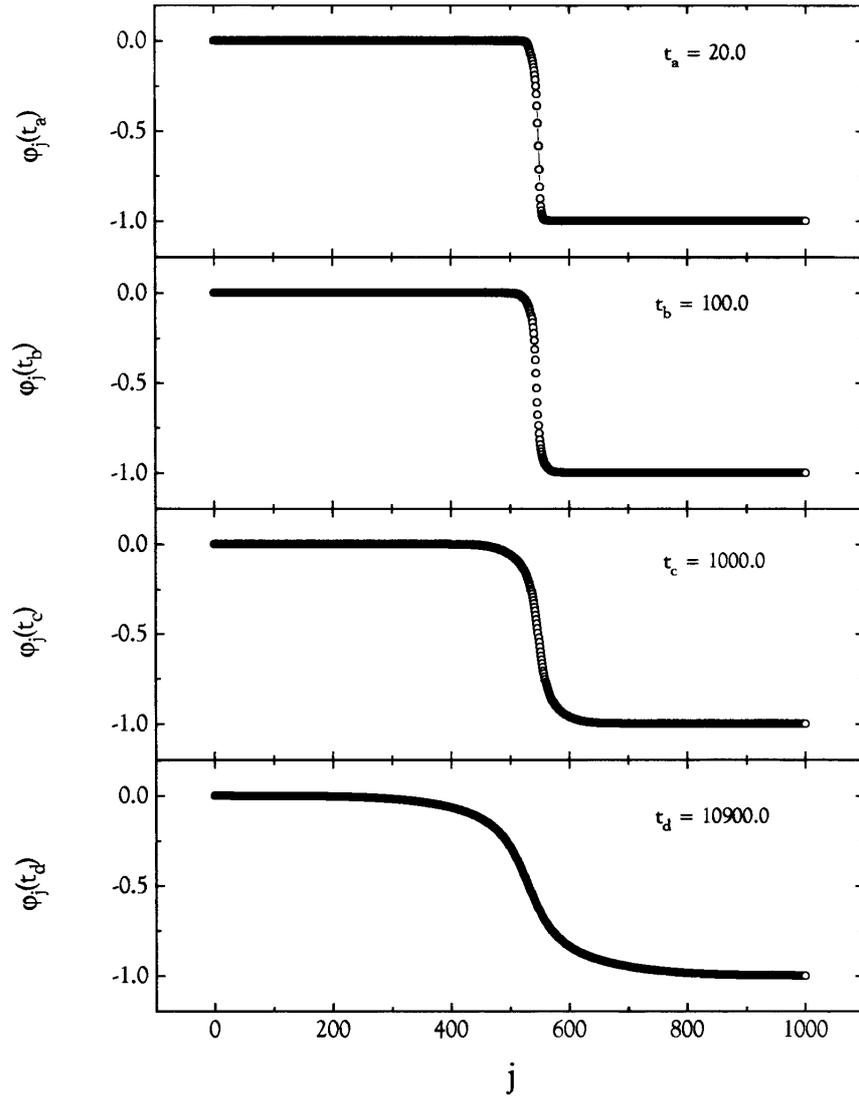


Figura 3.23: La imagen capta cuatro instantáneas del transitorio del movimiento de una disconmensuración para valores de la fuerza superiores a los de la transición de desanclaje de la estructura conmensurada subyacente,  $F > F_d$ . La estructura es ahora deslizante y defectible. Se observa como la disconmensuración, inicialmente localizada, se ensancha paulatinamente y finalmente se disuelve en el espacio cuando  $t \rightarrow \infty$ . Usamos  $F = 0,8$  y una configuración de  $\omega = 1000/1001$ .

la transición de desanclaje de la estructura conmensurada. En otras palabras, la estructura conmensurada es entonces indefectible. La evolución temporal de una disconmensuración elemental bajo la acción de un campo de fuerzas constante y por encima de la fuerza de desanclaje de la estructura conmensurada subyacente, muestra un continuo ensanchamiento (figura 3.23) de la disconmensuración. El exceso en longitud, que inicialmente está concentrado en una región pequeña, finalmente se disuelve en todo el espacio.

De nuevo, como hemos discutido al estudiar la transición de Aubry, encontramos una conexión fuerte entre **anclado** y **defectibilidad**. El mejor modo de comprender la relación entre ambos conceptos es darse cuenta de que los dos son consecuencia del carácter discreto del conjunto de configuraciones relevantes (los estados fundamentales y otras configuraciones estáticas que sean estables bajo un campo de fuerzas constante). Y contrariamente, debido al carácter continuo del conjunto de estados estacionarios, las estructuras deslizantes, tanto las conmensuradas como las inconmensuradas, son indefectibles bajo fuerzas constantes.

## Capítulo 4

# Dinámica disipativa del modelo Frenkel-Kontorova bajo fuerzas alternas

En este capítulo vamos a considerar la dinámica disipativa del modelo Frenkel-Kontorova impulsado por un campo de fuerzas periódico:  $F(t) = F(t + T)$ . Las ecuaciones de movimiento del sistema,

$$\dot{u}_j = u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi u_j) + F(t), \quad (4.1)$$

tienen la siguiente simetría: si  $\{u_j(t)\}$  es la solución de (4.1) que corresponde a la configuración de condiciones iniciales  $\{u_j(t_0)\}$ , entonces la configuración  $\sigma_{r,m,s}\{u_j(t)\}$ , definida por:

$$\sigma_{r,m,s}\{u_j(t)\} = \left\{ u_{j+r} \left( t - \frac{s}{\nu_0} \right) + m \right\}, \quad (4.2)$$

es la solución que corresponde a la configuración de condiciones iniciales definida por  $\sigma_{r,m,s}\{u_j(t_0)\}$ . En la definición de  $\sigma_{r,m,s}$ ,  $(r, m, s)$  forman una tripleta de números enteros arbitrarios y  $\nu_0 = T^{-1}$  es la frecuencia de la fuerza periódica  $F(t)$ .

Decimos que  $\{u_j(t)\}$  es una **solución resonante** de las ecuaciones de movimiento si es invariante bajo alguna operación de simetría  $\sigma_{r,m,s}$ :

$$\{u_j(t)\} = \sigma_{r,m,s}\{u_j(t)\}. \quad (4.3)$$

Se puede deducir fácilmente que la velocidad media de una solución resonante siempre puede ser escrita de la forma siguiente:

$$\frac{\bar{v}}{\nu_0} = \frac{r\omega + m}{s} \quad (4.4)$$

donde  $\omega$  es el espaciado promedio y  $(r, m, s)$  la **tripleta de invariancia** de la solución. Para una **velocidad resonante** (4.4) dada, la tripleta de invariancia no es única. Si  $\omega$  es un número irracional existe una única tripleta, que llamaremos **tripleta minimal**, con la propiedad de que  $r$ ,  $m$  y  $s$  no tienen factores comunes. Para un valor racional de  $\omega = p/q$  ( $p$  y  $q$  primos entre sí), una tripleta  $(r, m, s)$  es minimal si cumple que  $rp + mq$  y  $s$  no tienen factores comunes, pero esta condición no fija la tripleta de manera única, ya que  $(r' = r + lq, m' = m - lp, s)$  con  $l$  cualquier entero también es minimal. Sin embargo, esta condición sí que determina de manera única el valor del entero  $s$  de la tripleta minimal. Entonces, podemos hablar sin ambigüedad de los siguientes términos: una velocidad resonante es llamada **armónica** si  $s = 1$  y **subarmónica** siempre que  $s > 1$ , para tripletas minimales. Por último, diremos que un estado estacionario es **minimalmente invariante** o **de invariancia minimal** cuando sea invariante bajo una operación de simetría (4.2) con  $(r, m, s)$  una tripleta minimal.

Un resultado bien conocido de la teoría de osciladores no lineales es la **estabilidad estructural** (esto es, robustez frente a cambios paramétricos) del fenómeno de **sincronización** (*mode-locking* o *phase-locking*). Basándonos en este resultado es de esperar que las soluciones resonantes (4.3), las cuales están sincronizadas con la fuerza externa, posean alguna robustez, de modo que la velocidad media a valores resonantes no cambie frente a cambios en el valor medio de la fuerza impulsora.

Buscando ganar intuición en el problema de la sincronización en el modelo Frenkel-Kontorova impulsado por fuerza periódicas, vamos a considerar el caso particular de una fuerza pulsada, que permite un análisis simple del fenómeno. Según este análisis, las estructuras incommensuradas por debajo de la transición de Aubry no muestran sincronización; sin embargo, por encima de la transición la sincronización es predicha, y encontrada mediante simulaciones numéricas. En 4.2 estudiamos la sincronización de las estructuras commensuradas sometidas a la acción de un campo de fuerzas sinusoidal. La transición de **desincronización** se caracteriza como una bifurcación *saddle-node* y se presenta una imagen fenomenológica del mecanismo de desincronización. En 4.3 estudiamos la dinámica de las estructuras incommensuradas bajo una fuerza periódica y, en particular, discutimos la existencia de una transición de Aubry dinámica. Por debajo de esta transición, el estado estacionario es descrito por una función *hull* analítica bidimensional y no hay sincronización. Por encima de la transición de Aubry dinámica, que ocurre a un valor de la fuerza del potencial que depende de la velocidad resonante, aparece la sincronización de la dinámica a valores resonantes de la velocidad media y ya no es posible una descripción analítica del estado estacionario. Por último, en 4.4 analizamos las cuestiones de la defectibilidad y la metaestabilidad de estructuras resonantes.

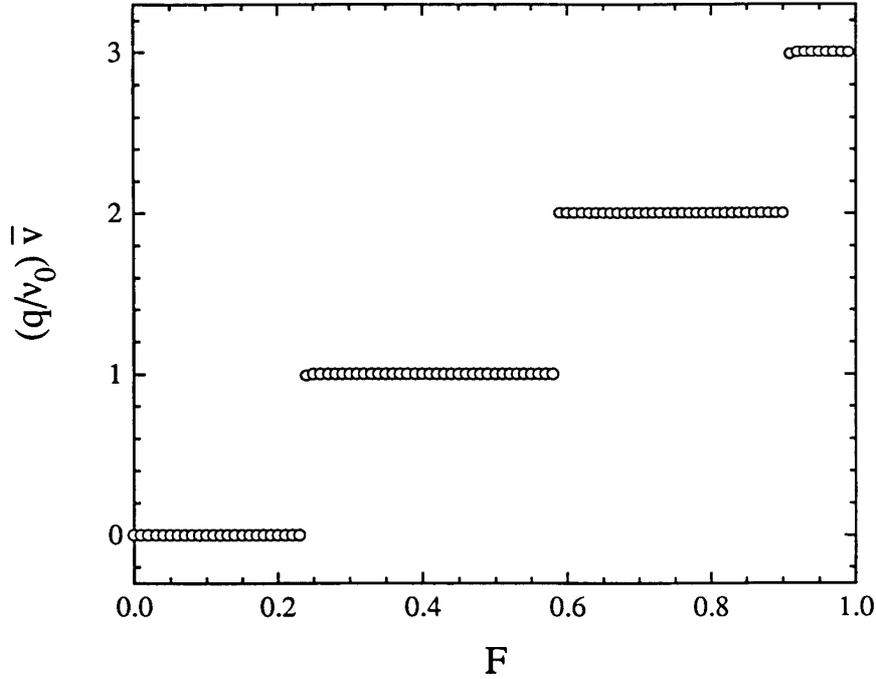


Figura 4.1: Cuando un estado conmensurado ( $\omega = p/q$ ) es impulsado por una fuerza periódica pulsada, los únicos valores posibles de  $\bar{v}$  son los dados por  $\bar{v} = n(\nu_0/q)$ , donde  $n$  es un entero. Hemos calculado  $\bar{v}(F)$  para el estado  $\omega = 2/3$  a  $K = 2,0$  y bajo la fuerza periódica definida en (4.5) ( $t_{on} = 1$  y  $t_{off} = 20$ ).

## 4.1. Pulsos

En esta sección vamos a considerar el caso de un campo de fuerzas uniforme y periódico  $F(t)$  consistente en un conjunto de pulsos de duración  $t_{on}$  seguidos de intervalos de tiempo de fuerza nula y duración  $t_{off}$ ,

$$F(t) = \begin{cases} F & \text{si } 0 < t \leq t_{on}, \\ 0 & \text{si } t_{on} < t \leq t_{on} + t_{off} = T, \\ F(t - T) & \text{si } t > T. \end{cases} \quad (4.5)$$

Para simplificar el análisis posterior, es conveniente asumir que  $t_{off}$  es suficientemente largo, de modo que durante este tiempo el sistema tiene tiempo para relajarse a alguna configuración estática estable antes de que el nuevo pulso aparezca. Como  $F(t)$  es constante a trozos podremos utilizar algunos de los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

Algunos autores [38, 40, 85, 86] han considerado la dinámica disipativa, ba-

jo este tipo de fuerzas, de una cadena de osciladores acoplados armónicamente y situados en un potencial substrato desordenado. La aleatoriedad del potencial substrato genera diferencias importantes en el comportamiento dinámico de este sistema con respecto al del modelo Frenkel-Kontorova; sin embargo, algunos comparten ciertas fenomenologías, como la existencia de sincronización.

Sabemos que, para un determinado valor del espaciado promedio de una configuración, la velocidad media  $\bar{v}$  es independiente de las condiciones iniciales elegidas, lo que nos da total libertad a la hora de realizar esta elección, siempre que nos restrinjamos al análisis de  $\bar{v}$ . Primero estudiaremos el caso de las estructuras conmensuradas. Elijamos como condiciones iniciales un estado fundamental  $\{u_j\}$  de espaciado promedio  $\omega = p/q$  ( $p$  y  $q$  primos entre sí). Si  $F < F_d$  (donde  $F_d$  es la fuerza de desanclaje de la estructura) cuando el pulso finalice, la configuración relajará a las condiciones iniciales y la velocidad media será  $\bar{v} = 0$ . Este será también el caso de  $F > F_d$  pero sin que  $t_{\text{on}}$  sea lo suficientemente grande como para llevar la configuración fuera de la base de atracción (en el correspondiente espacio de fases  $q$ -dimensional a fuerza cero) del estado fundamental inicial.

Siempre que  $F > F_d$  y  $t_{\text{on}}$  sea suficientemente largo, el sistema relajará a alguna configuración estable diferente,  $\{u_j^s\}$ , durante el intervalo  $t_{\text{off}}$ . En el modelo Frenkel-Kontorova estándar esa configuración,  $\{u_j^s\}$ , debe ser de la forma:

$$\{u_j^s\} = \{u_{j+r} + m\} \quad (4.6)$$

con  $r$  y  $m$  enteros. Esto es consecuencia de que la dinámica conserva el orden rotacional y de la unicidad, salvo operaciones de simetría, del estado fundamental. Por esto, el desplazamiento total por partícula durante un periodo  $T$  de la fuerza externa es  $r\omega + m$  y la velocidad media es necesariamente la de una resonancia armónica,

$$\frac{\bar{v}}{\nu_0} = r\omega + m \quad (4.7)$$

donde  $\nu_0 = T^{-1}$  es la frecuencia de la fuerza externa. Podemos concluir que la velocidad media de las estructuras conmensuradas sometidas a pulsos del tipo (4.5) sólo puede tomar valores dentro del conjunto discreto definido por (4.7). La figura 4.1 muestra un ejemplo de  $\bar{v}$  como función de  $F$  para un estado conmensurado con espaciado promedio  $\omega = 2/3$ . Vemos que  $\bar{v}(F)$  es una función no decreciente y constante a valores de la velocidad separados por:

$$\frac{1}{\nu_0} \Delta \bar{v} = \frac{1}{q}. \quad (4.8)$$

Entre las discontinuidades la velocidad media permanece localizada a valores resonantes armónicos. Ningún otro valor de la velocidad (ni siquiera resonancias subharmónicas) es posible.

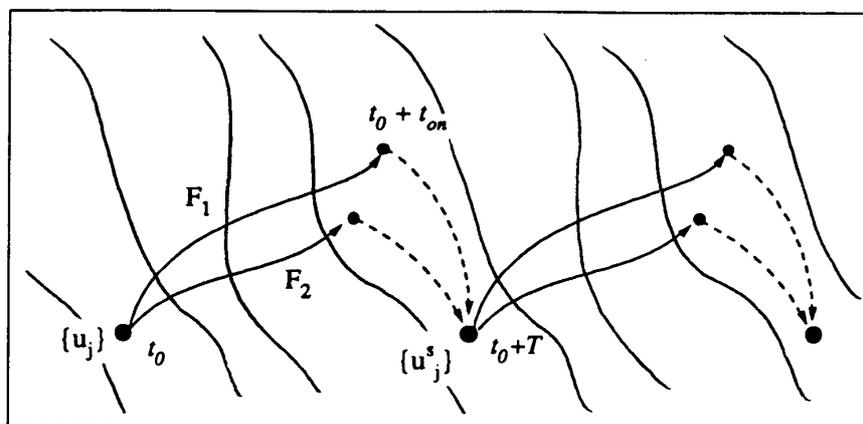


Figura 4.2: La figura es un diagrama de un espacio de fases  $q$ -dimensional dividido en las bases de atracción asociadas a cada estado fundamental. La sincronización bajo una fuerza pulsada se entiende fácilmente en esta descripción.

Resulta muy productivo estudiar esta sincronización dinámica dentro del marco del espacio de fases  $q$ -dimensional de las estructuras conmensuradas, que puede imaginarse dividido en las bases de atracción de cada uno de los estados fundamentales (figura 4.2). Durante un pulso de fuerza  $F_1$  el sistema describe una cierta trayectoria en el espacio de fases. Cuando el pulso finaliza el sistema relaja al estado fundamental asociado a la base de atracción a la que el último punto de la trayectoria pertenece, digamos que es  $\{u_j^s\}$ . Consideremos ahora una fuerza diferente  $F_2$  muy cercana a  $F_1$ ; entonces el punto final de la trayectoria a  $t = t_{on}$  pertenece a la misma base de atracción que el punto del caso  $F_1$ , y la velocidad media no cambia  $\bar{v}(F_1) = \bar{v}(F_2)$ . El punto esencial en el argumento es que la trayectoria bajo la fuerza constante pasa una cantidad finita de tiempo en cada una de las bases de atracción. Esto es posible sólo si el conjunto de estados fundamentales  $\mathcal{G}_\omega$ , es discreto. En el caso de  $\mathcal{G}_\omega$  continuo, la variedad estable de cada estado fundamental es  $(q-1)$ -dimensional, de modo que  $\bar{v}(F)$  debe ser una función estrictamente creciente y no se observa sincronización dinámica alguna bajo pulsos.

Consideremos una estructura inconmensurada por debajo de la transición de Aubry. El conjunto de estados fundamentales es un continuo y, aunque el espacio de fases es infinito dimensional, es de esperar, basándonos en el argumento expuesto en el párrafo anterior, que en este caso no aparezca ninguna sincronización. Esto es plenamente confirmado por las simulaciones numéricas, ver figura 4.3 (a).

Por encima de la transición de Aubry la situación es muy diferente. Restringiendo el análisis a las proximidades de un estado fundamental, sabemos que

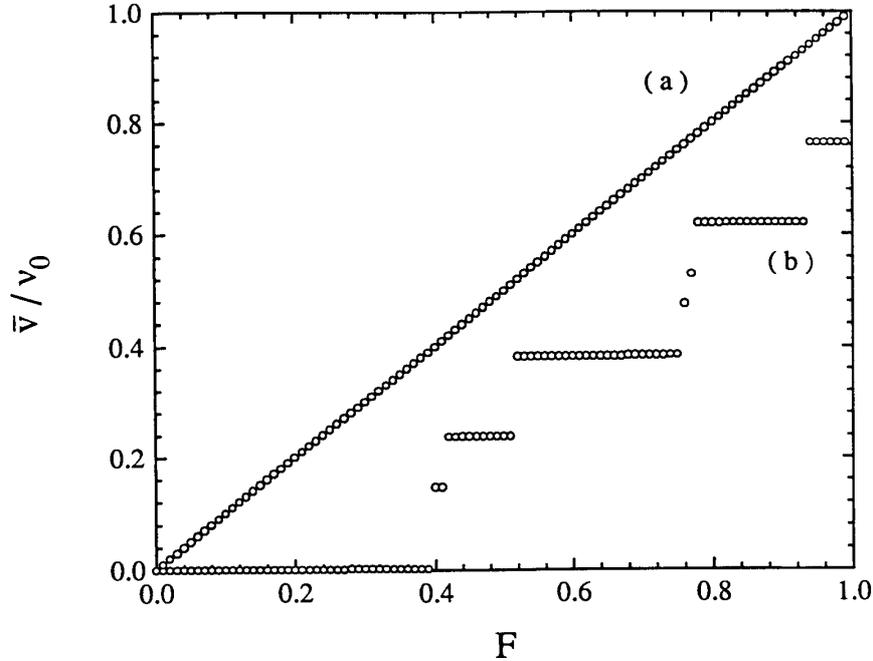


Figura 4.3: El caso de la figura 4.1 para una estructura inconmensurada. Tales estados se comportan de modo diferente a ambos lados de la transición de Aubry. (a)  $K = 0,1 < K_c$ , no hay sincronización; (b)  $K = 4,0 > K_c$  sólo se encuentran velocidades resonantes. En las simulaciones hemos usado el aproximante  $\omega = 34/55$  a la media áurea.

todos los valores propios de la matriz de estabilidad lineal de la configuración estado fundamental son positivos. Esto refleja que cada estado fundamental es un punto interior de su base de atracción (en otras palabras, está rodeado en todas las direcciones por su base de atracción) y por lo tanto cada trayectoria emplea una cantidad finita de tiempo en cruzar esta región del espacio de fases. La conclusión es para una estructura inconmensurada por encima de la transición de Aubry se debe observar sincronización en la curva  $\bar{v}(F)$  (figura 4.3(b)).

La transición de Aubry, que desde el punto de vista del problema del equilibrio separa dos regímenes físicos distintos de las estructuras inconmensuradas (anclaje y defectibilidad frente a deslizamiento e indefectibilidad), se muestra como la frontera entre dos regímenes dinámicos diferentes cuando una estructura inconmensurada es impulsada por pulsos del tipo (4.5). Por debajo de la transición de Aubry la velocidad media,  $\bar{v}$ , es una función monótona estrictamente creciente de la intensidad de los pulsos,  $F$ . Por el contrario, por encima de la transición de Aubry aparece sincronización y  $\bar{v}(F)$  es una escalera: existen

intervalos finitos de valores de la fuerza  $F$  para los cuales la velocidad media permanece constante e igual a un valor resonante.

## 4.2. Estructuras commensuradas impulsadas por una fuerza sinusoidal. Transición de desincronización.

En lo que sigue vamos a asumir que el campo periódico homogéneo de fuerzas  $F(t)$  en (4.1) es del siguiente tipo:

$$F(t) = \bar{F} + F_{ac} \cos(2\pi\nu_0 t). \quad (4.9)$$

En la ausencia de potencial sustrato ( $K = 0$ ) la solución para cualquier configuración arbitraria de condiciones iniciales, independientemente del valor del espaciado promedio, converge al estado estacionario:

$$u_j(t) = j\omega + \bar{v}t + \alpha + \frac{F_{ac}}{2\pi\nu_0} \sin(2\pi\nu_0 t) \quad (4.10)$$

donde  $\alpha$  es una fase arbitraria (el sistema tiene invariancia traslacional) y  $\bar{v} = \bar{F}$  es la velocidad media. En este caso, en el cual no hay no linealidad, el movimiento es simplemente una superposición del movimiento uniforme causado por  $\bar{F}$  y las oscilaciones impuestas por la fuerza alterna.

Cuando  $K > 0$ , hay dos escalas de frecuencia que compiten: el inverso ( $\nu_0$ ) del periodo de la fuerza externa y la frecuencia característica ( $1/\bar{v}$ ) asociada al movimiento de la cadena, impulsada por una fuerza de valor medio  $\bar{F}$ , sobre el potencial sustrato periódico. La competencia entre las dos frecuencias puede resultar en fenómenos de sincronización.

A valores enteros del espaciado promedio  $\omega$ , el problema se reduce a la ecuación del movimiento de una sola partícula

$$\dot{u} = -\frac{K}{2\pi} \sin(2\pi u) + \bar{F} + F_{ac} \cos(2\pi\nu_0 t). \quad (4.11)$$

Los primeros estudios numéricos [87] sobre esta ecuación mostraron que la velocidad media  $\bar{v}(\bar{F})$  presenta sincronización para resonancias armónicas y subharmónicas. Por el contrario, los cálculos mediante simulaciones analógicas [88, 89] revelaron peldaños armónicos pero no peldaños subharmónicos. La situación fue clarificada por Renné y Polder [90] quienes transformaron la ecuación (4.11) en una ecuación diferencial lineal de segundo orden de coeficientes periódicos, a partir de la cual se encontró la existencia de armónicos y la ausencia de subharmónicos. Waldram y Wu [91] llegaron al mismo resultado usando una técnica de aplicación estroboscópica.

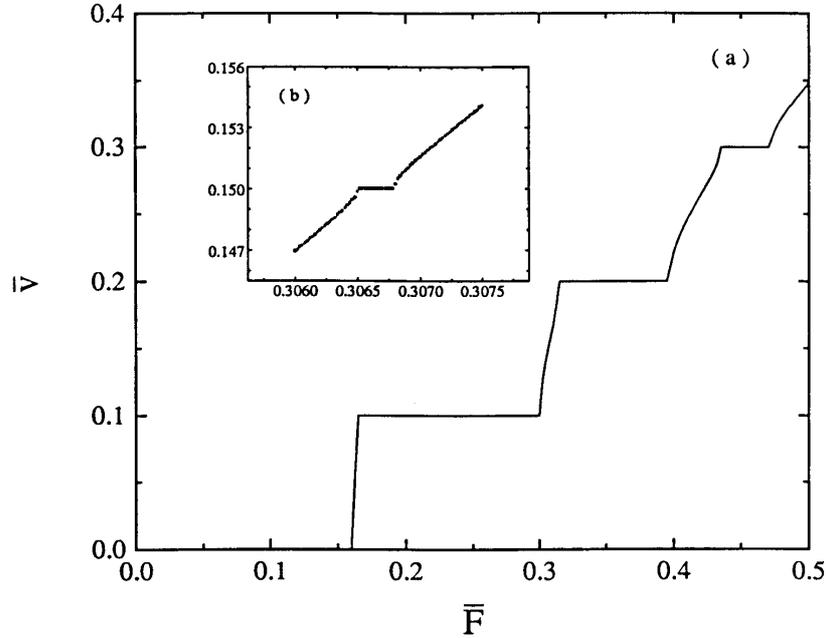


Figura 4.4: Ejemplo de la escalera  $\bar{v}(\bar{F})$  de una fase conmensurada bajo una fuerza externa sinusoidal ( $F_{ac} = 0,2$ ,  $\nu_0 = 0,2$ ). La resolución de (a) sólo permite apreciar peldaños harmónicos. En pequeño, en (b) mostramos un peldaño subarmónico ( $s = 2$ ), ( $\omega = 1/2$  y  $K = 4,0$ ).

Para los casos de valores racionales no enteros de  $\omega$ , Inui and Doniach [92] han dado algunas evidencias y argumentos de plausibilidad para la existencia de peldaños subarmónicos. Hemos comprobado cuidadosamente este punto [93] para varios valores racionales diferentes de  $\omega$  y siempre hemos encontrado evidencias numéricas de peldaños subarmónicos (así como la no existencia de subarmónicos para valores enteros de  $\omega$ ). La figura 4.4 representa un ejemplo de la escalera,  $\bar{v}(\bar{F})$ , de una estructura conmensurada. Asimismo, hemos señalado [93] que el cálculo del mayor exponente de Lyapunov del estado estacionario revela del modo más sensible la existencia de subarmónicos. El exponente de Lyapunov tiene valores negativos en los peldaños y va a cero en los extremos de estos. Un exponente de Lyapunov negativo de una trayectoria  $\{u_j(t)\}$  refleja que la trayectoria es dinámicamente **estable**; esto es, que para tiempos grandes las pequeñas desviaciones  $\{\delta u_j(t)\}$  de la trayectoria en promedio decaen exponencialmente [82]. La figura 4.5 muestra la variación del mayor exponente de Lyapunov  $\lambda$  con la fuerza externa  $\bar{F}$  en el caso de una fase conmensurada; claramente se aprecian muchos subarmónicos como pequeños picos en la curva.

Los estudios numéricos avalan la existencia de sincronización armónica y

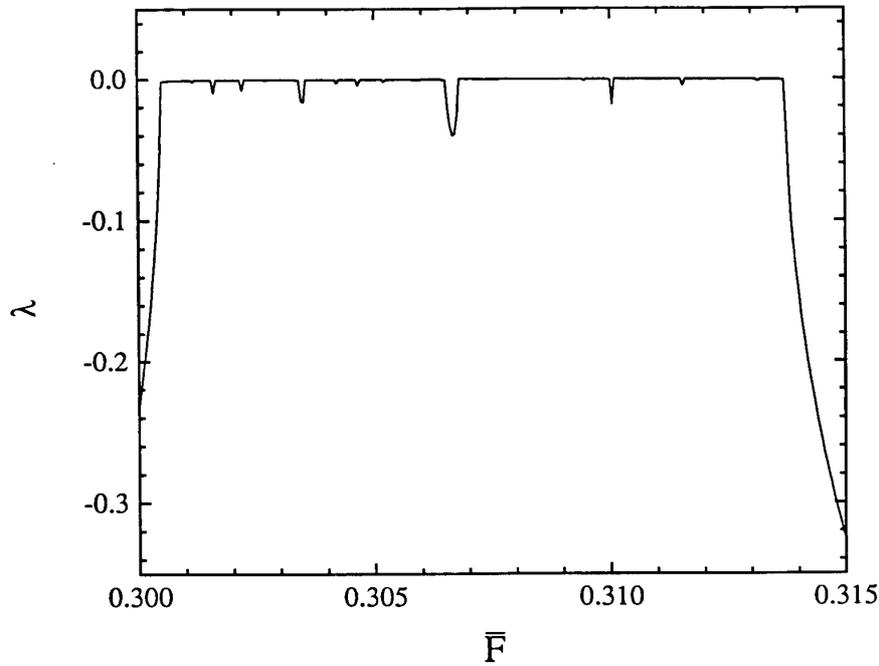


Figura 4.5: El exponente de Lyapunov es el modo más sensible de detectar la existencia de resonancias subarmónicas. Los valores de  $\bar{F}$  se han elegido entre el primer y el segundo peldaño no nulos de la figura 4.4 (a).

subarmónica en la dinámica de las estructuras commensuradas (con espaciado promedio no entero) impulsadas por fuerzas periódicas. Sin embargo, los estudios numéricos son probablemente incapaces de dar una respuesta definitiva a si hay peldaños para todas las resonancias subarmónicas (de modo que  $\bar{v}(\bar{F})$  sea una Escalera del Diablo) y, si este fuera el caso, si la Escalera del Diablo es completa o incompleta.

La **transición de desincronización** puede ser caracterizada como un fenómeno crítico dinámico de un modo muy parecido al utilizado para la transición de desanclaje. De hecho, como veremos, ambas transiciones muestran muchas similitudes. Nuestro trabajo [93] es un intento numérico de caracterizar la transición de desincronización, centrándonos en los mecanismos de esta.

Dada la unicidad, para unos parámetros fijos, de la velocidad media, es posible elegir cualquier condición inicial para determinar  $\bar{v}$ . Con este fin, la elección más eficiente es cualquier configuración rotacionalmente ordenada (por ejemplo un estado fundamental o una configuración equiespaciada) de  $q$  posiciones distribuidas a lo largo de  $p$  pozos del potencial substrato ( $\omega = p/q$ ). Entonces, imponiendo condiciones de contorno periódicas, integramos numé-

ricamente las ecuaciones del movimiento usando Runge-Kutta o algún otro método y desechamos el transitorio inicial a la hora de calcular los promedios. Debe observarse que la conservación del orden rotacional implica que la aproximación numérica al estado estacionario es, para todo tiempo, rotacionalmente ordenada.

En un peldaño el estado estacionario obtenido numéricamente a partir de una condición inicial rotacionalmente ordenada, es siempre resonante; esto es, invariante bajo una transformación de simetría  $\sigma_{r,m,s}$  con  $r$ ,  $m$  y  $s$  cumpliendo (4.4). Como la tripleta  $(r, m, s)$  asociada a una velocidad resonante no es única, surge la pregunta de si la transformación de invariancia de la solución obtenida es o no minimal (sin tener  $rp + mq$  y  $s$  factores comunes). Las observaciones numéricas indican que en general hay muchos estados estacionarios rotacionalmente ordenados asociados a diferentes transformaciones de invariancia, aunque en la mayoría de los casos lo más fácil es encontrar el estado estacionario rotacionalmente ordenado asociado a una tripleta minimal (el estado minimalmente invariante). Debe señalarse que, aunque para un estado resonante, cuando  $\omega$  es racional, hay un conjunto numerable infinito de tripletas minimales, un estado estacionario espacialmente periódico que es invariante bajo una transformación minimal, necesariamente lo es bajo todas ellas. Más aún, numéricamente también observamos que el rango (intervalo de valores de  $\bar{F}$ ) de existencia de estados estacionarios rotacionalmente ordenados asociados a transformaciones de invariancia no minimales es menor que el intervalo de sincronización, que coincide con el rango de existencia del estado estacionario invariante bajo el conjunto de transformaciones de invariancia minimales. Cerca de la transición de desincronización, parece ser que sólo persiste el estado estacionario resonante minimalmente invariante.

La **teoría de Floquet** [82] del análisis de estabilidad de soluciones periódicas de flujos puede ser utilizada para analizar la estabilidad de los estados estacionarios resonantes. Asumamos que una solución resonante particular  $\{u_j^0(t)\}$ , de espaciado promedio  $\omega = p/q$ , es invariante bajo la transformación  $\sigma_{r,m,s}$ :

$$\left\{ u_{j+r}^0 \left( t - \frac{s}{\nu_0} \right) + m \right\}_{j=1}^q = \{u_j^0(t)\}_{j=1}^q. \quad (4.12)$$

Linealizando las ecuaciones del movimiento en torno a la solución  $\{u_j^0(t)\}$ , se encuentra que una condición inicial  $\{u_j^0(t_0) + \eta_j(t_0)\}$  (con  $\{\eta_j(t_0)\}$  infinitesimal) cambia tras  $s$  periodos de la fuerza ( $\Delta t = s/\nu_0$ ) a:

$$\{u_{j+r}^0(t_0) + m\}_{j=1}^q + \mathbf{PM}\{\eta_j(t_0)\}_{j=1}^q \quad (4.13)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de las ecuaciones del movimiento linealizadas integradas

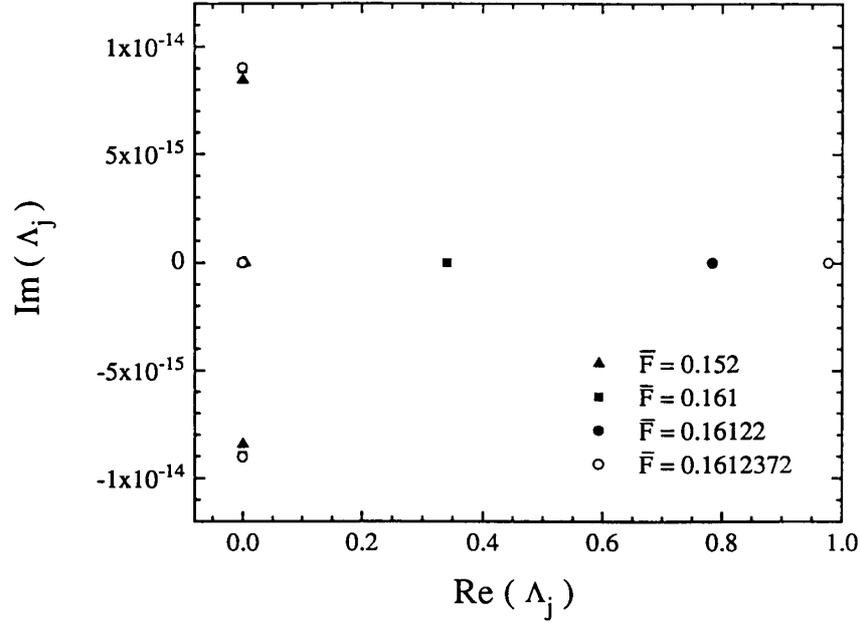


Figura 4.6: Valores propios de la matriz de Floquet de una solución resonante a cuatro valores de  $\bar{F}$  ( $\omega = 3/5$  y  $\bar{v}/\nu_0 = 1/5$ ) El mayor de los valores propios tiende a  $+1$  cuando  $\bar{F} \rightarrow \bar{F}_u$ , donde tiene lugar una bifurcación *saddle-node*

$s$  periodos, y  $\mathbf{P}$  es la matriz de permutaciones cíclicas:

$$\mathbf{P} = \{\delta_{j,l(j)}\} \quad \text{con } l(j) = j + r \text{ mód } q . \quad (4.14)$$

El problema de la estabilidad lineal de una solución resonante se reduce de este modo al estudio de los valores propios de la **matriz de Floquet**

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}\mathbf{M}. \quad (4.15)$$

Los valores propios de la matriz  $\mathbf{Q}$  son independientes de la elección de  $t_0$ . La solución resonante  $\{u_j^0(t)\}$  es linealmente estable si todos los valores propios están localizados dentro del círculo unidad del plano complejo. La inestabilidad de la solución resonante ocurre al valor de  $\bar{F}$  para el cual alguno de los valores propios cruza el círculo unidad.

La figura 4.6 muestra los valores propios de la matriz de Floquet de una solución resonante minimalmente invariante, a distintos valores del valor medio de la fuerza  $\bar{F}$ , cuando ésta se aproxima a la transición de desincronización.

Cuando nos acercamos a la transición desde la zona sincronizada, uno de los valores propios,  $\Lambda_0$ , de la matriz de Floquet de la solución resonante mini-

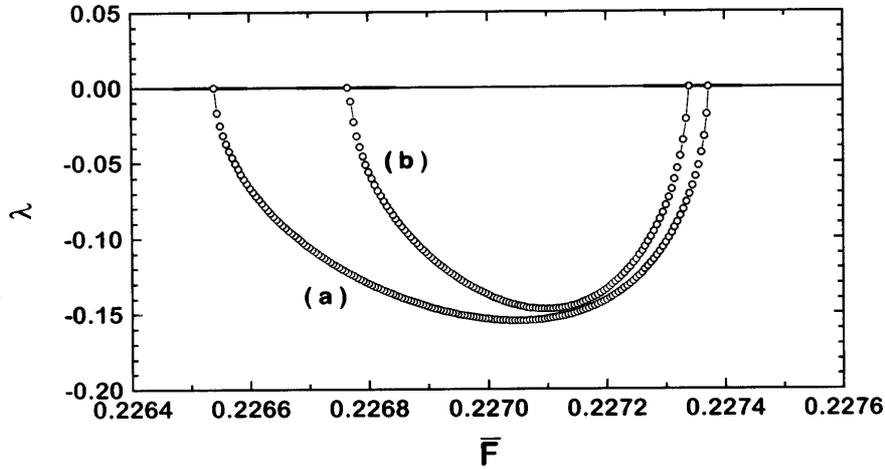


Figura 4.7: La figura muestra el exponente de Lyapunov de dos estados estacionarios ( $\{u_j^{a,b}(t)\}$ ) rotacionalmente ordenados con espaciado promedio  $\omega = 13/21$ . El exponente se ha calculado a partir del mayor valor propio de la matriz de Floquet (ecuaciones (4.15) y (4.16)). Para el caso estudiado  $\bar{\nu}/\nu_0 = 9/21$ . El estado estacionario minimalmente invariante  $\sigma_{-9,6,1}\{u_j^a(t)\} = \{u_j^a(t)\}$  ( $s = 1$ ) es estable en todo el peldaño (a). Estados estacionarios de invariancia no minimal muestran un rango de estabilidad menor, caso (b), donde  $\sigma_{3,-1,2}\{u_j^b(t)\} = \{u_j^b(t)\}$  ( $s = 2$ ).

malmente invariante, cruza el círculo unidad por (+1); entonces, acontece una bifurcación de *saddle-node* (ver la figura 4.6). El tiempo de relajación desde trayectoria cercanas a la solución resonante,  $\tau'$ , diverge, cuando nos aproximamos a la transición, con un exponente 1/2, que es el característico de este tipo de bifurcación:

$$\tau' \sim -(\ln(\text{Re}\Lambda_0))^{-1} \sim |\bar{F} - \bar{F}_u|^{-1/2} \quad (4.16)$$

donde  $\bar{F}_u$  es el valor de  $\bar{F}$  al cual se da la transición de desincronización. El tiempo de relajación  $\tau'$  es de hecho el inverso del exponente de Lyapunov de las trayectorias resonantes minimalmente invariantes.

La pérdida de estabilidad de los estados estacionarios resonantes no minimalmente invariantes es anterior a la transición de desincronización, como puede apreciarse en la figura 4.7.

En la transición de desincronización la mayoría de los valores propios de la matriz de Floquet del estado estacionario resonante permanecen en el interior del círculo unidad. Por ello, es de esperar que en la región donde el movimiento no es resonante, pero suficientemente cerca del punto de transición, la región del espacio de fases donde se encontraba el estado estacionario resonante, todavía sea un atractor de las trayectorias cercanas, que después de algún tiempo de “pegado”, escapan siguiendo el vector propio desestabilizador de la matriz de

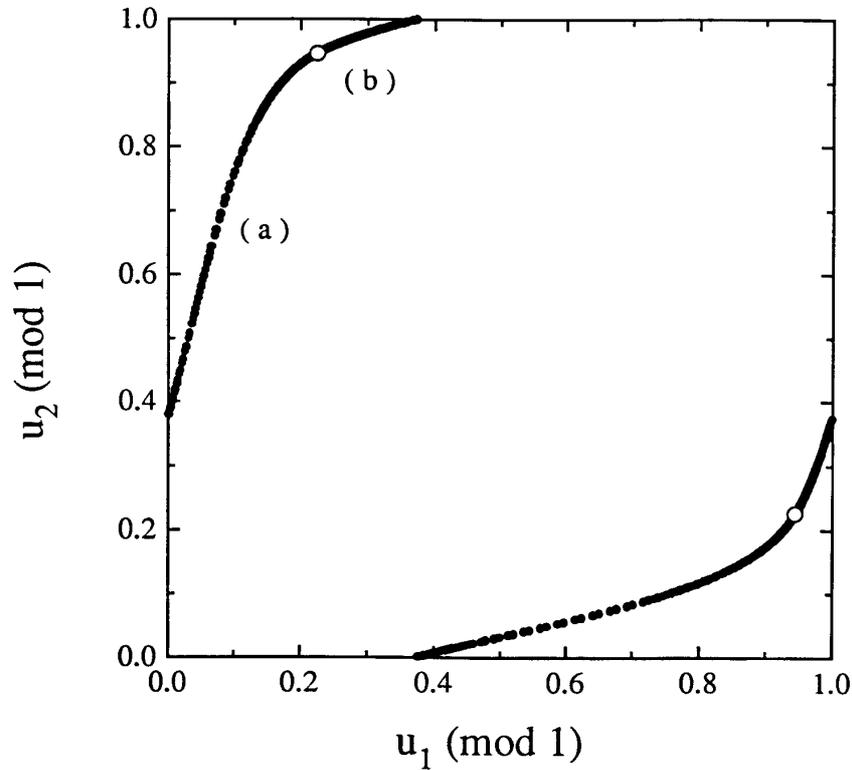


Figura 4.8: Secciones de Poincaré a  $t = t_0 + n/\nu_0$  del estado estacionario con  $\omega = 1/2$  a ambos lados de la transición de desincronización ( $\bar{F}_u \simeq 0,30047$ ). (a)  $\bar{F} = 0,3006$ , estado no resonante; (b)  $\bar{F} = 0,3004$  estado resonante.

Floquet. Estas asunciones son confirmadas por el análisis de las soluciones no resonantes en las cercanías de la transición de desincronización:

- La figura 4.8 muestra la sección de Poincaré (para un intervalo temporal entre secciones de  $\nu_0^{-1}$ ) de trayectorias a ambos lados de la transición; la trayectoria no resonante (a), que tiene la topología de un círculo, permanece durante intervalos largos de tiempo en las cercanías del ciclo periódico resonante (b).
- La figura 4.9 muestra la velocidad instantánea media  $v(t)$  de trayectoria a ambos lados de la transición; en el caso de trayectoria no resonantes (a), durante intervalos largos de tiempo,  $v(t)$  es indistinguible de (b) (trayectoria resonante), pero esos intervalos son interrumpidos por disturbios (**intermitencias**) de corta duración, después de los cuales se recuperan las oscilaciones resonantes.
- El espectro de potencias de la velocidad media  $v(t)$  (figura 4.10) de la

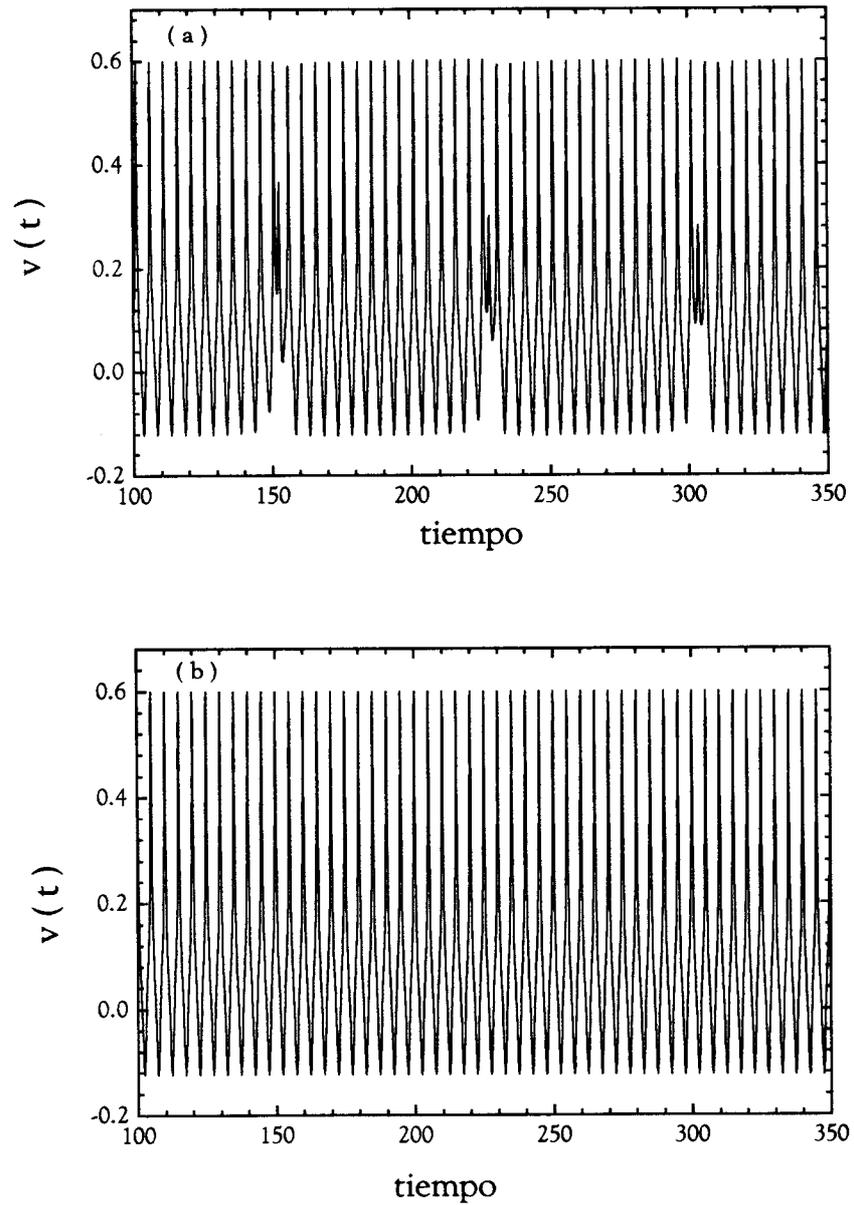


Figura 4.9: Velocidad instantánea  $v(t)$  a ambos lados de la transición de desincronización.

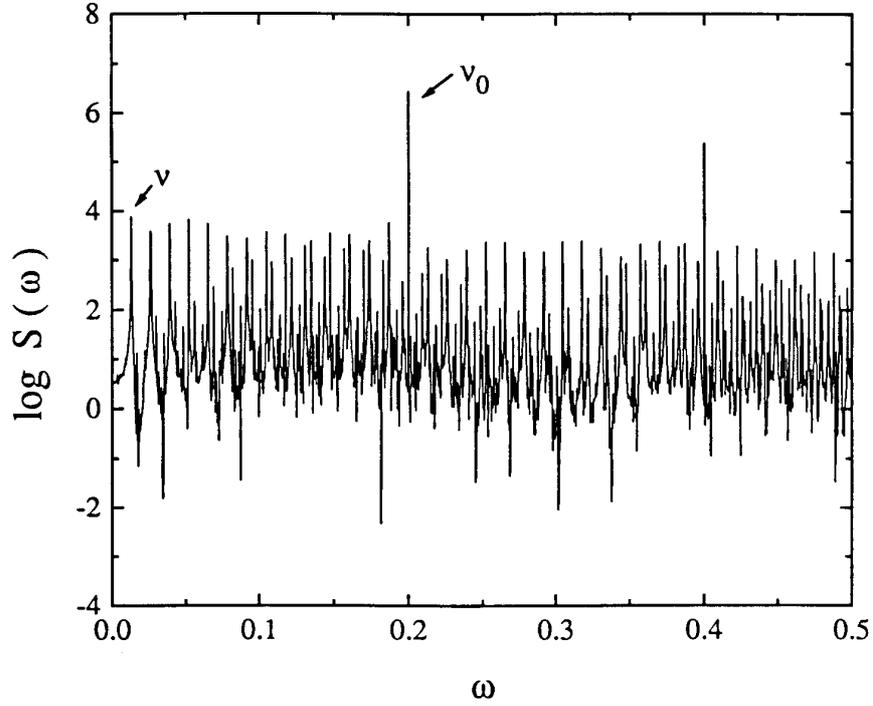


Figura 4.10: Espectro de potencias de la velocidad instantánea  $v(t)$  de un estado no resonante (fig. 4.9 (a)).

trayectoria no resonante muestra picos a valores de la frecuencia que son combinaciones enteras de dos frecuencias:  $\nu_0/s$  (que corresponde a las resonancias) y  $\nu$  que corresponde a los intervalos de tiempo entre intermitencias (que aparecen periódicamente).

El comportamiento **intermitente** es una característica bien conocida de los sistemas dinámicos no lineales en las cercanías de bifurcaciones *saddle-node* (intermitencia de tipo I [83]). A diferencia del comportamiento observado en la transición intermitente a la turbulencia en fluidos convectivos o al caos en algunos sistemas dinámicos no lineales disipativos de pocos grados de libertad, las intermitencias en este sistema conducen a un atractor cuasiperiódico.

Llamemos  $x(t)$  a la posición a tiempo  $t$  del centro de masas (centroide) de una celda unidad de la estructura  $\{u_j(t)\}$ , calculado respecto a un sistema inercial moviéndose con velocidad constante e igual a la velocidad resonante  $\bar{v}_{\text{step}} = \nu_0(r\omega + m)/s$ , con  $(r, m, s)$  una tripleta minimal:

$$x(t) = q^{-1} \left[ \sum_{j=1}^q u_j(t) \right] - \bar{v}_{\text{step}} t. \quad (4.17)$$

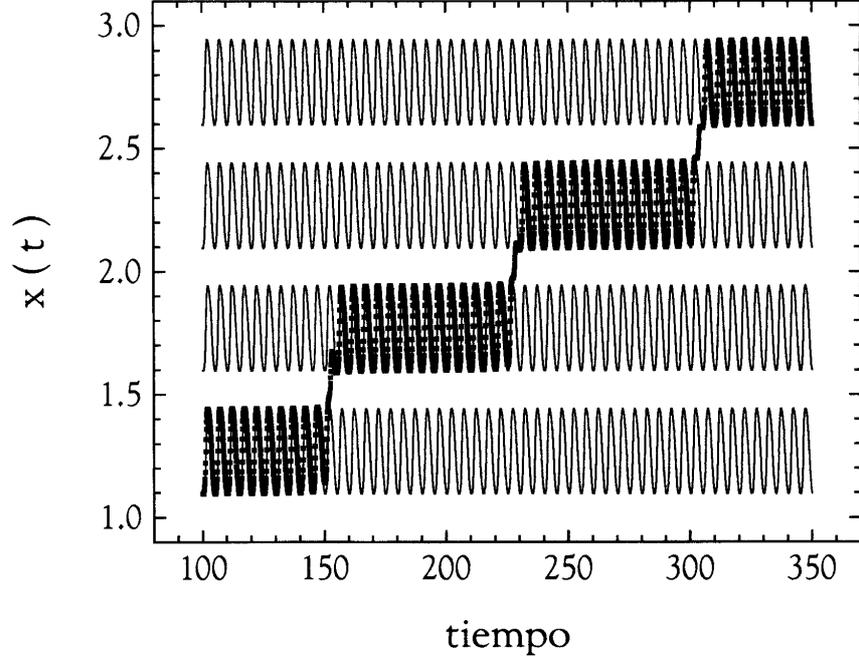


Figura 4.11: Trayectoria del centroide  $x(t)$  de un estado conmensurado no resonante (línea de puntos). Los instantones aparecen como saltos en la figura. Las líneas continuas corresponden a varios estados estacionarios resonantes.

Para una solución resonante minimalmente invariante,  $\{u_j^{\text{step}}\}$ ,  $x(t)$  es una función periódica de periodo  $s/\nu_0$  y valor medio  $\bar{x}$ . Cualquier transformación de simetría arbitraria,  $\sigma_{r',m',s'}$ , sobre  $\{u_j^{\text{step}}\}$  genera otro estado estacionario resonante minimalmente invariante  $\{u_j'^{\text{step}}\}$  cuyo centroide  $x'(t)$  tiene un valor medio  $\bar{x}'$ , tal que

$$\Delta_{r',m',s'} \equiv \bar{x}' - \bar{x} = r'\omega + m' - \bar{v}_{\text{step}}s'/\nu_0. \quad (4.18)$$

Entonces, el mínimo valor positivo de  $\Delta_{r',m',s'}$  es  $(qs)^{-1}$ . La figura 4.11 muestra la función  $x(t)$  de varios estados estacionarios resonantes minimalmente invariantes en las cercanías de la transición de desincronización y también de una trayectoria no resonante calculada muy cerca de  $\bar{F}_u$ . Como puede verse, cada intermitencia lleva a la trayectoria no resonante de una solución resonante a la contigua, lo que produce un incremento discreto, de valor  $(qs)^{-1}$ , en  $\bar{x}$ . Esta característica, unida al hecho de que las intermitencias están localizadas en el tiempo, motivó que Falo *et al.* [93] las llamaran **instantones**. Si  $\nu^{-1}$  es el intervalo temporal entre instantones, la velocidad media de la trayectoria no resonante es:

$$|\bar{v} - \bar{v}_{\text{step}}| = \nu(qs)^{-1}. \quad (4.19)$$

La caracterización de la transición de desincronización como una bifurcación de *saddle-node*, conlleva que el tiempo característico  $\nu^{-1}$  (tiempo de “pegado” a una resonancia cercana) diverge,  $|\bar{F} - \bar{F}_u|^{-1/2}$ , cuando nos aproximamos a la transición desde el lado de la no resonancia y, por lo tanto,

$$|\bar{v} - \bar{v}_{\text{step}}| \sim |\bar{F} - \bar{F}_u|^{1/2}. \quad (4.20)$$

La descripción de las trayectorias cuasiperiódicas no resonantes en las cercanías de la transición de desincronización como una distribución (temporal) regular de instantones superpuestos a la trayectoria resonante cercana, es similar a la descripción fenomenológica de las estructuras inconmensuradas como una distribución (espacial) regular de disconmensuraciones cada una de las cuales porta un exceso de longitud discreto. La analogía, sin embargo, no debe ensombrecer una diferencia importante entre ambas situaciones. La transición Commensurada-Inconmensurada no se reduce a una bifurcación de *saddle-node*. Las estructuras commensuradas persisten, y son estables, después de la transición. Por el contrario, tras una transición de desincronización, que es una bifurcación de *saddle-node*, los estados estacionarios resonantes desaparecen. También, el comportamiento de escalado del espaciado promedio  $\omega$  de los estados fundamentales, en la transición Commensurada-Inconmensurada (2.26), es distinto del escalado de la velocidad media en la transición de desincronización (4.20).

### 4.3. Estructuras inconmensuradas impulsadas por fuerzas sinusoidales. Transición de Aubry dinámica

Floría y Falo [94] han estudiado numéricamente el comportamiento dinámico de las estructuras inconmensuradas del modelo Frenkel-Kontorova, impulsadas por fuerzas sinusoidales (4.9). Ellos escogieron el número irracional  $\varsigma^{-1} = (\sqrt{5} - 1)/2$ , el inverso de la media áurea, como valor del espaciado promedio  $\omega$  para realizar sus estudios. Observaron la convergencia de la función  $\bar{v}(\bar{F})$  al aumentar el orden de las aproximaciones racionales al irracional de interés. Finalmente, de la aproximación 21/34 en adelante las diferencias observadas eran del orden de la precisión numérica del cálculo. La figura 4.12 resume los resultados obtenidos, cuando  $F_{\text{ac}} = 0,2$  y  $\nu_0 = 0,2$ , de la velocidad media,  $\bar{v}(\bar{F})$ , en el plano  $(K, \bar{F})$ .

Para valores pequeños de la intensidad del potencial substrato,  $K$ , la velocidad media es una función creciente del valor medio de la fuerza externa:

$$\bar{v} \propto \bar{F} \quad (4.21)$$

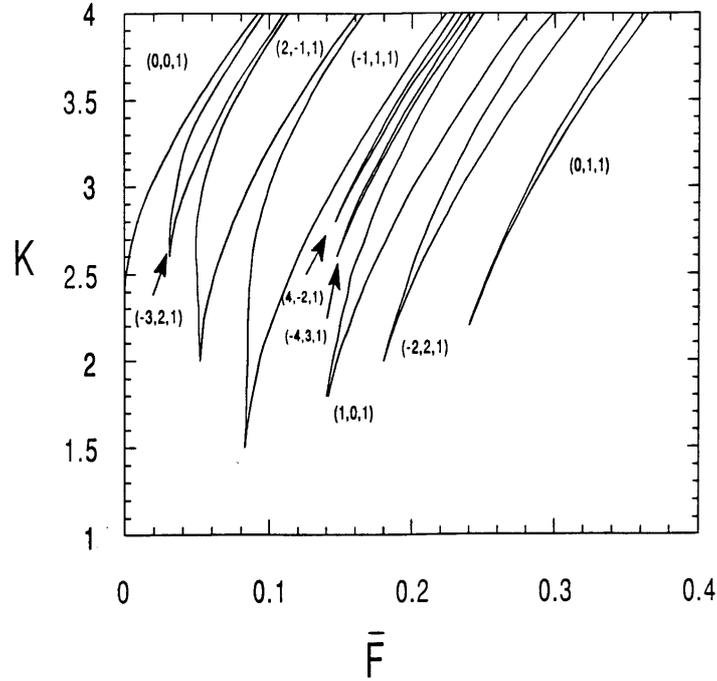


Figura 4.12: Diagrama de fases en el plano  $(K, \bar{F})$  de varios estados estacionarios de una fase incommensurada bajo una fuerza periódica sinusoidal ( $F_{ac} = 0,2$  y  $\nu_0 = 0,2$ ). Las tripletas  $(r, m, s)$  caracterizan los valores resonantes de la velocidad a los cuales ocurren los peldaños.

(ver figura 4.13(a)). En este régimen, en el que no se observan intervalos de estabilidad para las velocidades resonantes, a cualquier valor de la velocidad media las trayectorias calculadas pueden expresarse en términos de una función *hull* bidimensional  $f(x, y)$  (ver figura 4.14 (a)):

$$u_j(t) = f(j\omega + \bar{\nu}t + \alpha, \nu_0 t + \beta) \quad (4.22)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son fases arbitrarias. La función  $f(x, y)$  es periódica con periodo 1 en la segunda variable y periódica a trozos en la variable  $x$ :

$$f(x+1, y+1) = f(x+1, y) = 1 + f(x, y) \quad (4.23)$$

o, lo que es lo mismo, la función  $g(x, y)$  definida por:

$$g(x, y) = f(x, y) - x \quad (4.24)$$

es periódica en ambas variables.

La función *hull* dinámica  $f(x, y)$  cambia de modo continuo con los parámetros  $K$ ,  $\bar{F}$ ,  $F_{ac}$  y  $\nu_0$ , y en particular cuando  $K \rightarrow 0$ ,  $f(x, y)$  tiende a

$$f^0(x, y) = x + \frac{F_{ac}}{2\pi\nu_0} \sin(2\pi y) \quad (4.25)$$

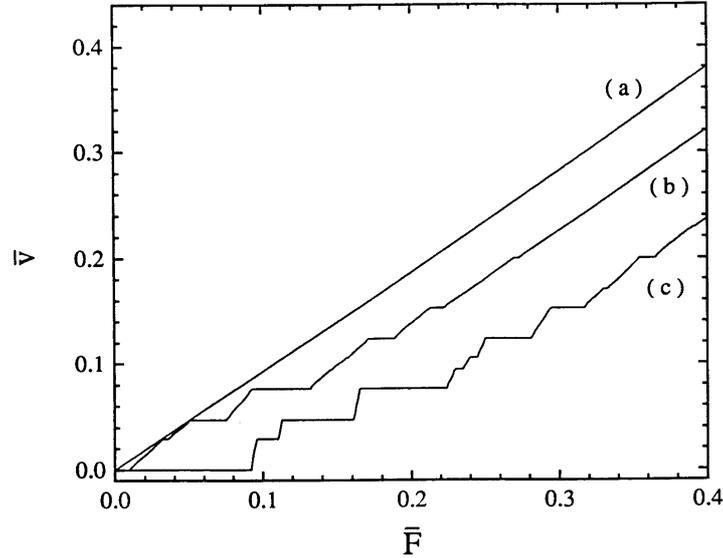


Figura 4.13: Velocidad media  $\bar{v}(\bar{F})$  de una fase inconmensurada a tres valores distintos de  $K$ . (a)  $K = 1,4$ , (b)  $K = 2,8$  y (c)  $K = 4,0$ .

que es la solución analítica a  $K = 0$  (4.10). Dicho de un modo simple: el efecto de un potencial substrato periódico suficientemente pequeño en el movimiento, bajo fuerzas alternas, de las estructuras inconmensuradas, es una modulación suave (figura 4.14 (a)) de la solución en el límite integrable.

Conforme  $K$  crece, la función  $\bar{v}(\bar{F})$  comienza a desarrollar peldaños a los valores resonantes de la velocidad (4.4), ver figuras 4.13(a) y (b). Las observaciones numéricas dan el resultado de que para cada velocidad resonante existe un valor crítico de la intensidad del potencial,  $K_C(\bar{v})$ , por encima del cual hay un intervalo de valores de  $\bar{F}$  para los cuales la solución estacionaria tiene el mismo valor medio de velocidad, que es igual al valor resonante. Floría y Falo [94] también observaron que a cada valor de  $K_C(\bar{v})$  la función *hull* dinámica correspondiente  $f(x, y)$  pasa a ser no analítica, figura 4.14 (b), con infinitas fallas a lo largo de la dirección  $(\bar{v}, \nu_0)$  en el plano  $x$ - $y$ . Obsérvese que las posiciones de las partículas,  $u_j(t)$ , son funciones analíticas del tiempo, así que la función *hull* dinámica debe ser analítica a lo largo de la dirección temporal.

La transición que ocurre a  $K_C(\bar{v})$  es una **transición de Aubry dinámica**, y separa dos regímenes físicos distintos. Por debajo de la transición, el estado estacionario parece ser único, salvo transformaciones de simetría (4.2) y existe una función *hull* analítica  $f(x, y)$ , dependiente de los parámetros del sistema, que describe la solución del estado estacionario (figura 4.14 (a)). Por encima de la transición de Aubry dinámica observamos que en los peldaños existe una multiplicidad de soluciones resonantes con diferentes propiedades

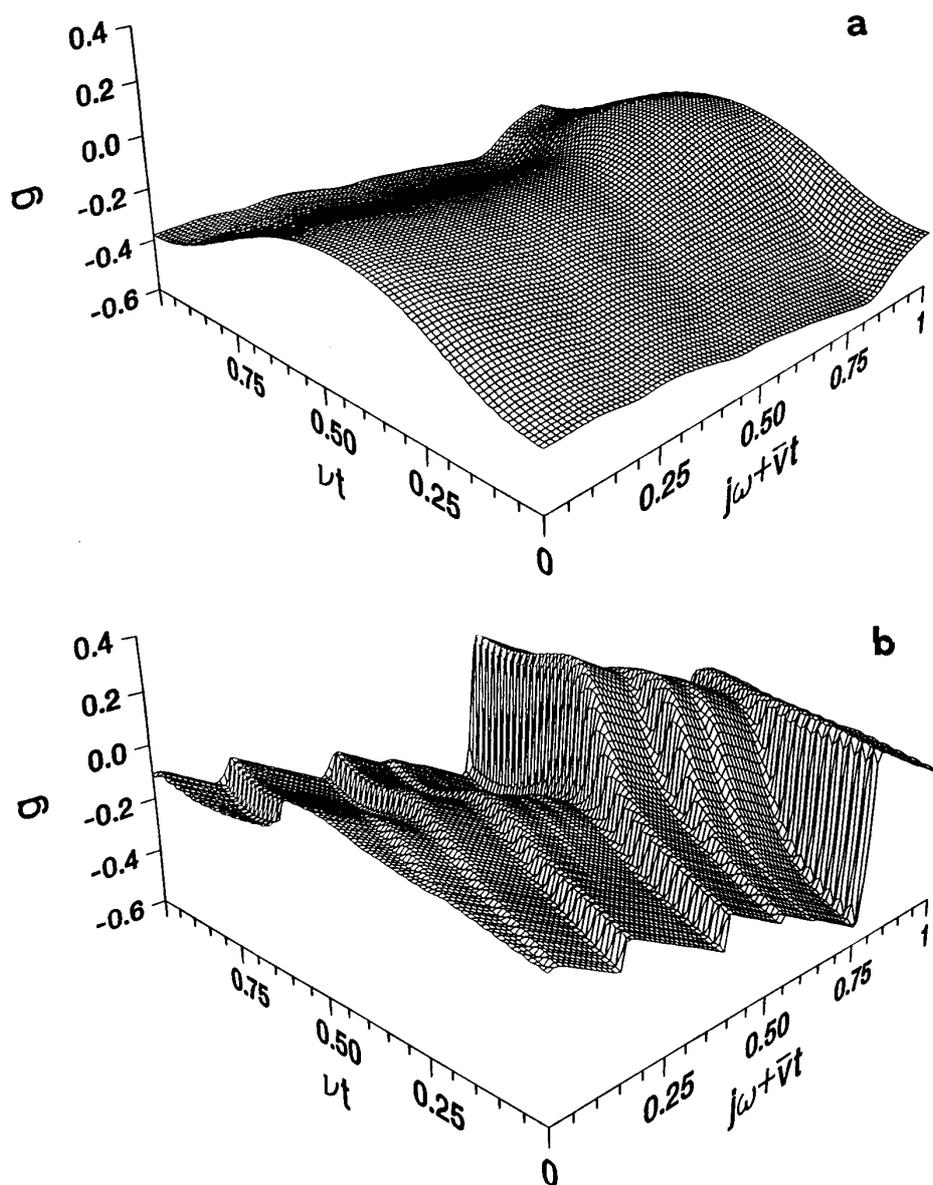


Figura 4.14: Función *hull* bidimensional  $g(x, y)$  que describe el movimiento de una estructura incommensurada a la velocidad asociada a la tripleta  $(r, m, s) = (-1, 1, 1)$  a ambos lados de la transición de Aubry dinámica: (a)  $K = 1,4$ , (b)  $K = 4,0$ .

de invariancia, y que el estado estacionario resonante invariante minimal está descrito por una función *hull* dinámica que no es analítica (figura 4.14 (b)).

Así como la transición de Aubry estática es el punto de frontera entre las estructuras inconmensuradas ancladas y deslizantes, a cada valor resonante de la velocidad media, la transición de Aubry dinámica separa el régimen de sincronización (peldaños en la función  $\bar{v}(\bar{F})$ ), caracterizado por la robustez de la velocidad media frente a pequeños cambios en  $\bar{F}$ , del régimen no sincronizado de las estructuras inconmensuradas.

Desde esta perspectiva, el resultado presentado en la sección 4.1 sobre el movimiento de las estructuras inconmensuradas bajo pulsos, es visto como un caso límite de las fuerzas periódicas, para el cual la transición de Aubry dinámica ocurre, para todas las resonancias, a un único valor de  $K$ , que coincide con el valor de  $K$  de la transición de Aubry estática.

El análisis de Floquet de una solución inconmensurada resonante, a valores de  $K$  por debajo de la transición de Aubry dinámica, muestra que el espectro de valores propios de la matriz de Floquet posee un valor propio igual a (+1). Por encima de la transición, sin embargo, y para valores de  $\bar{F}$  en el interior de un peldaño, todos los valores propios de la matriz de Floquet se encuentran localizados en el interior del círculo unidad del plano complejo, de manera que las perturbaciones de la trayectoria en un instante dado, decaen exponencialmente en las resonancias (tienen un exponente de Lyapunov negativo).

La caracterización de la transición de Aubry dinámica como fenómeno crítico no está totalmente completada. La abundancia de parámetros y los límites en la precisión numérica, hacen que éste no sea un asunto trivial desde el punto de vista de una aproximación numérica al problema. Podemos mostrar algunos resultados preliminares sobre tres cantidades **supercríticas**; esto es, cantidades que son distintas de cero por encima de la transición y se anulan en la transición.

- La anchura de los peldaños de resonancias,  $\Delta\bar{F}$ , tiende a cero cuando  $K \rightarrow K_C^+(\bar{v})$  con una ley potencial:

$$\Delta\bar{F} \sim (K - K_C(\bar{v}))^\psi. \quad (4.26)$$

- El mayor gap de la función *hull* dinámica (a lo largo del peldaño de resonancia),  $\Delta_f$ , escala según:

$$\Delta_f \sim (K - K_C(\bar{v}))^\sigma. \quad (4.27)$$

- El mayor de los exponentes de Lyapunov (logaritmo de la mayor parte real de entre los valores propios de la matriz de Floquet),  $\lambda_{\max}$ , se anula

en la transición de Aubry dinámica:

$$\lambda_{\max} \sim (K - K_C(\bar{v}))^\chi. \quad (4.28)$$

La tabla muestra, para varias resonancias, las estimaciones numéricas de los exponentes críticos y el valor de  $K_C(\bar{v})$  ( $F_{ac} = 0,2$  y  $\nu_0 = 0,2$ ).

(r,m,s)		(0,0,1)	(2,-1,1)	(-1,1,1)	(1,0,1)	(0,1,1)
$\Delta F$	$K_C$	2.30	1.90	1.42	1.54	1.94
	$\psi$	1.99	1.91	2.02	1.72	1.50
$\Delta_f$	$K_C$	2.28	1.97	1.44	1.55	1.82
	$\sigma$	0.35	0.26	0.43	0.39	0.48
$\lambda_{max}$	$K_C$	2.25	1.84	1.39	1.51	1.83
	$\chi$	1.93	1.56	1.49	1.31	1.34

Hemos visto que existen puntos de similitud entre la transición de desanclaje de las estructuras conmensuradas bajo la acción de fuerzas constantes y la transición de desincronización de los estados estacionarios conmensurados resonantes bajo la acción de fuerzas periódicas. Además, está el hecho de que el desanclaje de las estructuras inconmensuradas manifiesta diferencias notables con respecto al caso conmensurado. Por esto, es de esperar que la desincronización de las soluciones inconmensuradas resonantes podría mostrar algunas características nuevas.

La figura 4.15 muestra los valores propios de la matriz de Floquet de un estado estacionario inconmensurado resonante para varios valores del valor medio de la fuerza, cercanos al valor de desincronización  $\bar{F}_u$ . Como ocurre en el caso conmensurado cuando  $\bar{F} \rightarrow \bar{F}_u$  el mayor (en módulo) valor propio de la matriz de Floquet es real y tiende a (+1) con exponente 1/2 (ver figuras 4.15 y 4.16). Sin embargo, en esta ocasión encontramos una distribución de valores propios que se aproximan a (+1), cuyos correspondientes vectores propios son muy localizados (figura 4.17). Es de esperar que la densidad finita de modos blandos localizados escale con algún exponente que, posiblemente, depende de los valores de los parámetros del modelo. Desafortunadamente, las limitaciones en cuanto a la precisión numérica impiden una estimación directa de tal exponente.

El análisis de la transición de desincronización hecho desde el lado no resonante presenta el mismo tipo de dificultades que las encontradas en el análisis de la transición de desanclaje de las estructuras inconmensuradas: aunque el tiempo de pegado a resonancias próximas diverge con exponente 1/2 (bifurcación de *saddle-node*), el número de estados resonantes que la trayectoria no resonante tiene que visitar para cualquier desplazamiento finito (relativo al sistema de referencia que se mueve a la velocidad resonante) diverge con algún

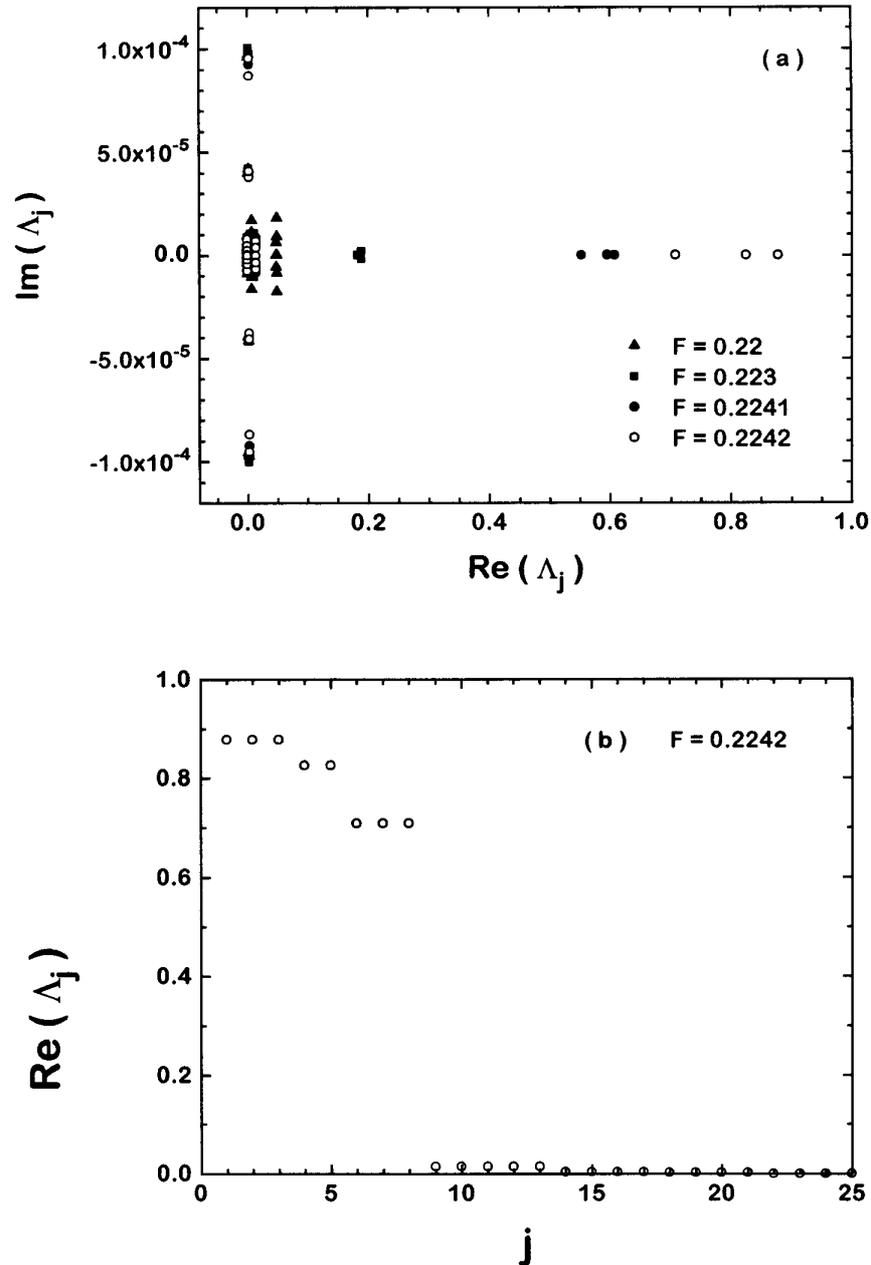


Figura 4.15: La figura (a) muestra los valores propios de la matriz de Floquet de la fase  $\omega = 55/89$  usada como aproximación a un caso inconmensurado. En la transición de desincronización existe una densidad finita de valores propios que cruzan el círculo unidad por +1. La figura (b) muestra la parte real del mayor de los valores propios cerca del valor de la fuerza al cual ocurre la transición.

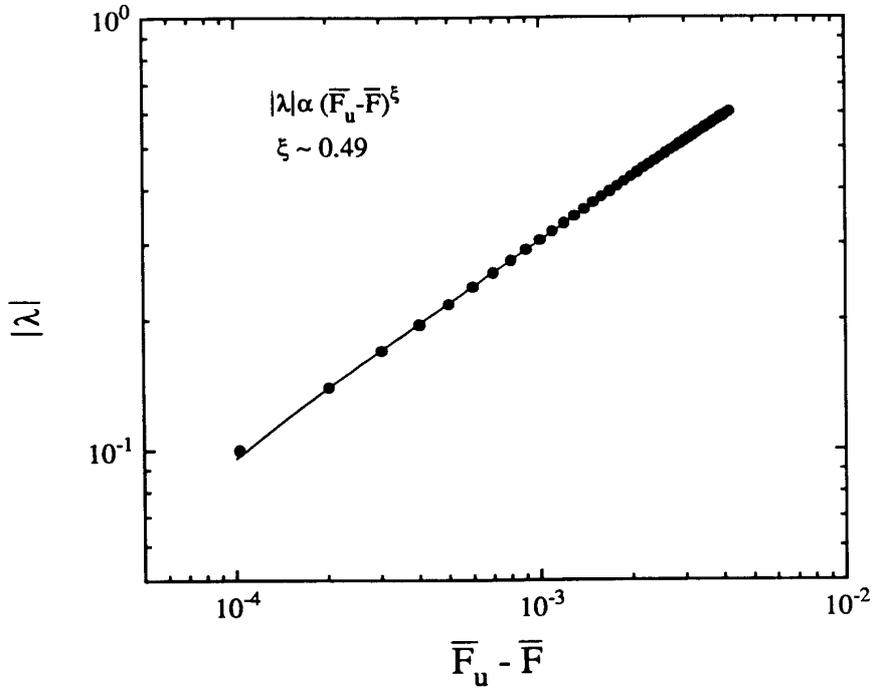


Figura 4.16: Hemos calculado el exponente de Lyapunov,  $\lambda$ , a partir del mayor valor propio,  $\Lambda_0$ , de la matriz de Floquet. Cuando  $\Lambda_0 \rightarrow +1$ , con exponente  $1/2$ ,  $\lambda \rightarrow 0$ , con el mismo exponente.

exponente  $\delta$  que seguramente depende de los valores de los parámetros del modelo. De este modo la velocidad media de una estructura inconmensurada en la transición de desincronización escala según:

$$|\bar{v} - \bar{v}_{\text{step}}| \sim |\bar{F} - \bar{F}_u|^{1/2+\delta}. \quad (4.29)$$

Estimaciones numéricas no muy precisas del exponente  $\delta$  a distintos resonancias y valores de  $K$ , parecen indicar que  $0 < \delta < 1/2$ , así como su carácter no universal.

Tanto la transición de desanclaje como la de desincronización son ejemplos de bifurcaciones *saddle-node*, que en el caso de un número finito de grados de libertad (conmensurado) están caracterizadas por un exponente  $1/2$  para la velocidad media. En los dos casos el paso al límite inconmensurado (continuo) cambia este exponente crítico. Por último, en el caso inconmensurado, cuando variamos el parámetro  $K$  cada transición finaliza en una transición de Aubry, por debajo de la cual tanto el anclaje como la sincronización desaparecen.

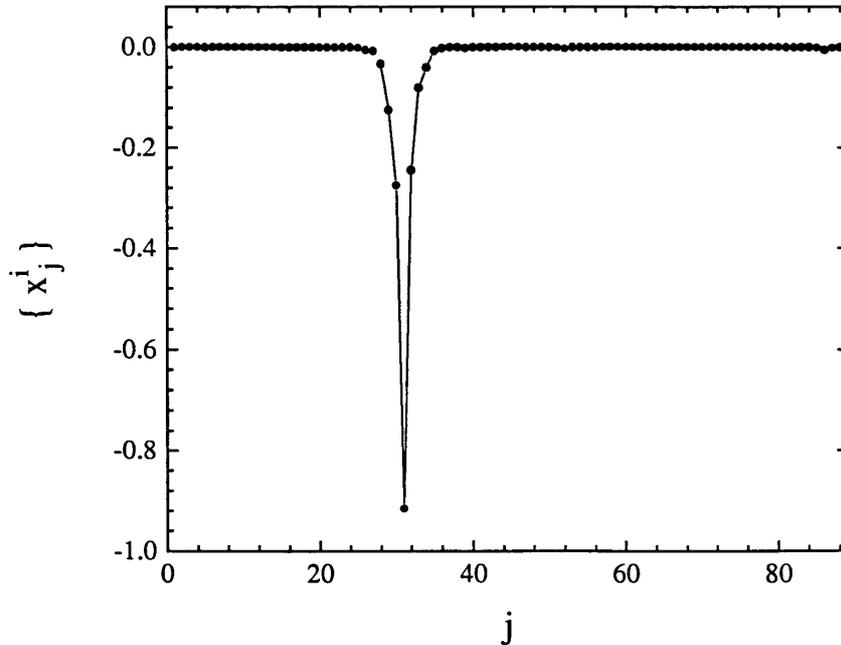


Figura 4.17: Los vectores propios  $\{x_j^i\}$  asociados con el mayor valor propio de la matriz de Floquet están localizados. La figura muestra uno de ellos, calculado para  $\bar{F} = 0,2242$  en la figura 4.15.

#### 4.4. Disconmensuraciones, sincronización y metaestabilidad dinámica

En la sección 3.2.4 discutimos el comportamiento dinámico de las disconmensuraciones elementales impulsadas por fuerzas constantes. Para valores del campo de fuerzas inferiores a la transición de desanclaje de la estructura conmensurada subyacente, pero superiores a la fuerza de desanclaje de la disconmensuración, ésta se mueve con alguna velocidad relativa  $\tilde{v}(F)$  determinada por el valor  $F$  de la fuerza. A partir de la regla “prohibido adelantar” es fácil obtener la unicidad de esa velocidad relativa. También hemos visto que para valores del campo de fuerzas por encima de la fuerza de desanclaje de la estructura conmensurada subyacente, asintóticamente, las disconmensuraciones elementales desaparecen: como consecuencia del carácter continuo del conjunto de soluciones estacionarias deslizantes las estructuras conmensuradas deslizantes son indefectibles, un resultado que está en la base de la existencia de una función *hull* dinámica analítica  $f(x)$  (3.11).

Como vamos a ver, la situación es muy diferente [95] cuando la cadena de Frenkel-Kontorova es impulsada por fuerzas periódicas. Al comienzo del capí-

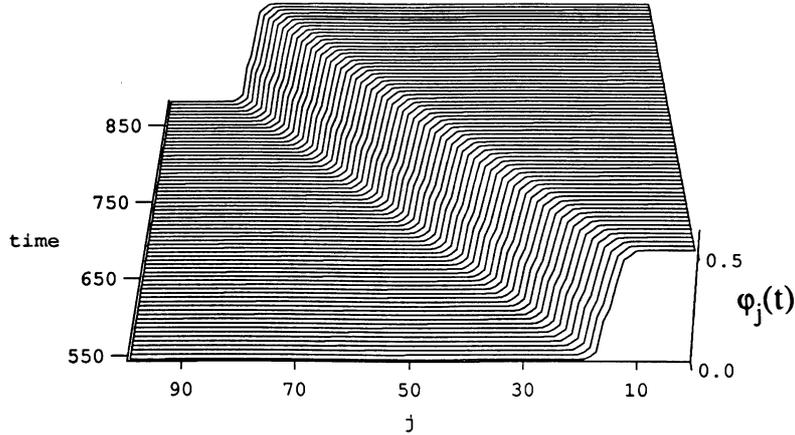


Figura 4.18: Fase relativa local de una discommensuración elemental de  $\Delta = -1/2$ .  $K = 4,0$ ,  $F_{ac} = 0,2$ ,  $\nu_0 = 0,2$  y  $\bar{F} = 0,26$ ; la estructura subyacente,  $\omega = 1/2$ , se mueve con velocidad resonante  $\bar{v}/\nu_0 = 1/2$  (ver la figura 4.4). La discommensuración se mueve con velocidad relativa  $\tilde{v}/\nu_0 = +1$  (ver figura 4.20). Mostramos  $\varphi_j(t)$  a valores de  $t = t_0 + n/\nu_0$ .

tulo señalamos que el conjunto de los estados estacionarios de una estructura commensurada moviéndose a una velocidad resonante es discreto. Este hecho es básico para sostener el siguiente argumento, que proporciona un modo de justificar la estabilidad de discommensuraciones en estructuras commensuradas que se mueven bajo la acción de una fuerza periódica: sea  $\{u_j(t)\}$  un estado estacionario resonante de invariancia minimal (que corresponde a algún valor de  $\bar{F}$  en el interior de una resonancia) con espaciado promedio  $\omega = p/q$  ( $p$  y  $q$  primos entre sí) y velocidad media resonante  $\bar{v}_{\text{step}} = (r\omega + m)/s$ , la cual, por sencillez asumiremos que es un armónico,  $s = 1$ . Sea  $\{u'_j(t)\}$  el estado estacionario resonante minimalmente invariante contiguo, de modo que  $\bar{x}' - \bar{x} = 1/q$ , donde  $\bar{x}$  se definió tras (4.17). Preparemos una configuración  $\{w_j(t_0)\}$  de condiciones iniciales tal que

$$\begin{aligned} w_j(t_0) &= u_j(t_0) & \text{si } j < j_0, \\ w_j(t_0) &= u'_j(t_0) & \text{si } j \geq j_0; \end{aligned} \tag{4.30}$$

de modo que la configuración de condiciones iniciales es cercana a una discommensuración elemental en una estructura commensurada. Dada la estabilidad de los estados estacionarios resonantes, se espera que para todo  $j \ll j_0$  la solución  $\{w_j(t)\}$  no difiera sustancialmente del estado estacionario resonante  $\{u_j(t)\}$ , y que para  $j \gg j_0$ ,  $\{w_j(t)\}$  permanezca esencialmente igual a  $\{u'_j(t)\}$ . En otras palabras, la robustez de las soluciones resonantes podría, en principio,

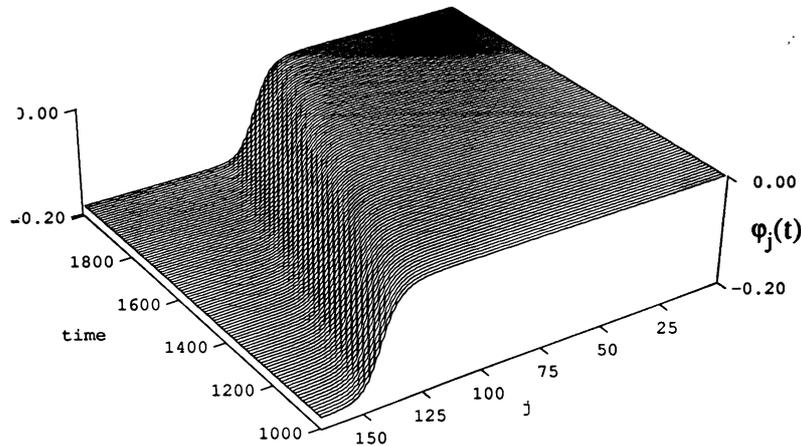


Figura 4.19: Las disconmensuraciones de exceso de longitud  $1/(qs)$  tan sólo son posibles como estados estacionarios móviles. La figura muestra una disconmensuración sobre un estado conmensurado de  $\omega = 1/2$  y resonante con  $s = 2$  (ver figura 4.4(b));  $K = 4,0$ ,  $F_{ac} = 0,2$ ,  $\nu_0 = 0,2$  y  $\bar{F} = 0,306625$ ). Dibujamos  $\varphi_j(t)$  a valores de  $t = t_0 + 2n/\nu_0$ .

mantener el exceso de longitud  $1/q$  (que inicialmente se concentra en  $j_0$ ) en una región localizada que, por otro lado, podría moverse respecto a la solución conmensurada con velocidad relativa  $\tilde{v}$ . La consecuencia es que, dada la discretitud del conjunto de soluciones resonantes los estados estacionarios resonantes son **defectibles**. Esta conclusión es confirmada plenamente por las simulaciones numéricas. La figura 4.18 muestra el movimiento de una disconmensuración elemental de espaciado promedio  $\omega = 1/2$  en el interior de la resonancia de velocidad  $\tilde{v}_{\text{step}}/\nu_0 = 1/2$ . La disconmensuración permanece localizada en el espacio.

Las disconmensuraciones elementales estáticas en estructuras conmensuradas de espaciado promedio  $\omega = p/q$  ( $p$  y  $q$  primos entre sí), tienen un exceso de longitud de  $1/q$ , siendo esta cantidad el menor exceso de longitud positivo que un defecto estático puede poseer. Sin embargo, las disconmensuraciones en estados conmensurados estacionarios resonantes pueden tener un exceso de longitud menor que  $1/q$ : en el caso de una resonancia subarmónica,  $s > 1$ , el mínimo exceso de longitud positivo es  $1/(qs) < 1/q$ . La figura 4.19 muestra un ejemplo de este interesante tipo de disconmensuraciones, que no tienen equivalente estático.

Consideremos una solución resonante de un estado con una disconmensuración elemental. A valores bajos de la intensidad  $K$  del potencial, la velocidad relativa  $\tilde{v}$  de la disconmensuración cambia suavemente como función de  $\bar{F}$  (ver

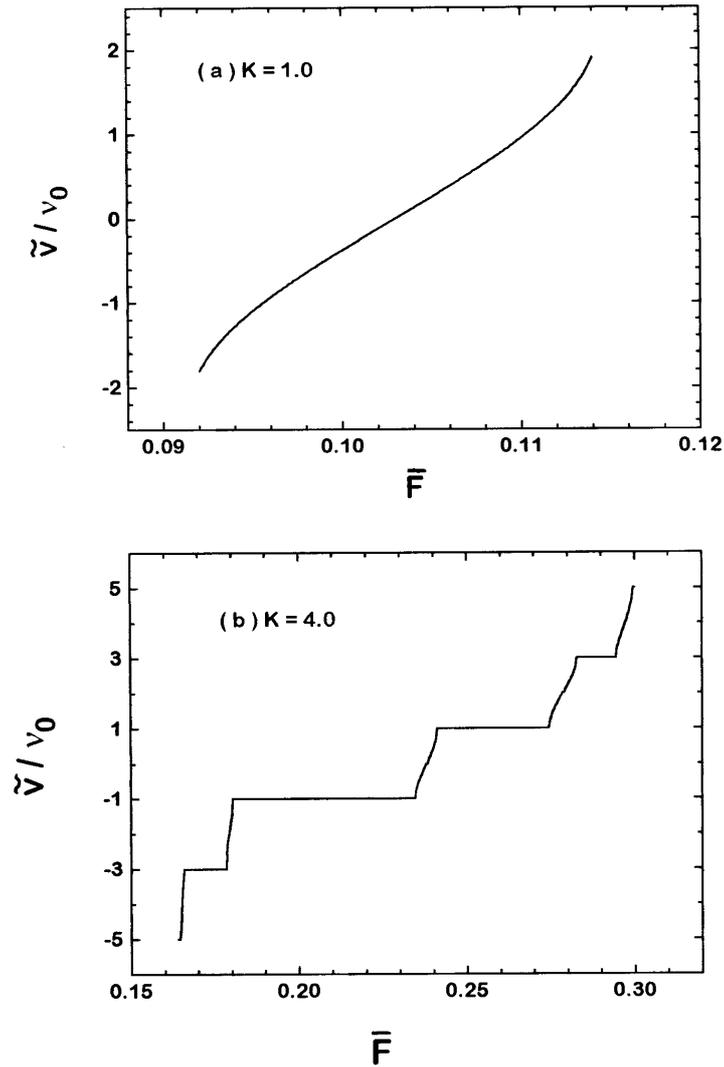


Figura 4.20:  $\tilde{v}(\bar{F})/\nu_0$  en el caso de una disconmensuración retardada a dos valores de  $K$ . (a)  $K = 1$  (caso de bajo  $K$ ),  $\tilde{v}$  no es resonante. (b)  $K = 4$  (caso de alto  $K$ ),  $\tilde{v}$  es resonante. La estructura subyacente es una fase de  $\omega_0 = 1/2$  que se mueve en un estado resonante. En (b) los peldaños impares ( $\tilde{v}/\nu_0 = \dots - 2, 0, 2, \dots$ ) corresponden a subarmónicos del movimiento de la disconmensuración; aunque existen, no se aprecian bien en la figura. Como de costumbre  $F_{ac} = 0,2$  y  $\nu_0 = 0,2$ .

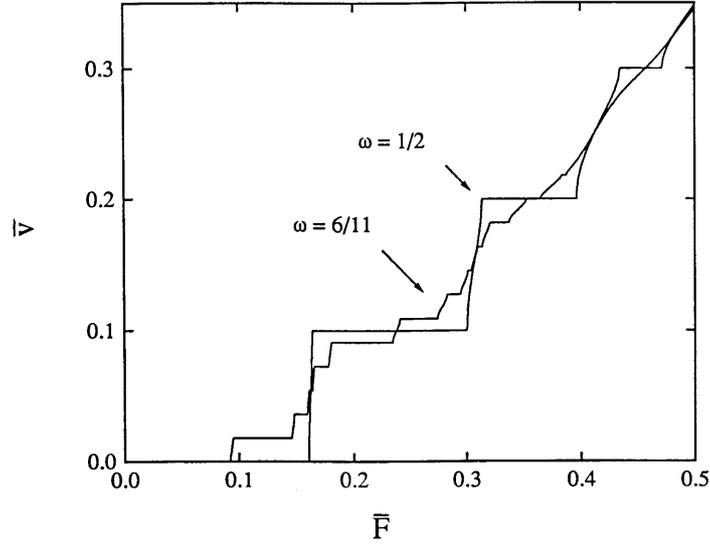


Figura 4.21: Curva característica,  $\bar{v}(\bar{F})$ , de dos estructuras distintas definidas con  $\omega = 1/2$  y  $\omega = 6/11$ . ( $K = 4, 0, F_{ac} = 0, 2, \nu_0 = 0, 2$ ).

la figura 4.20) y no aparece sincronización alguna. Sin embargo, por encima de algún valor crítico de  $K$ ,  $\tilde{v}$  se sincroniza a valores que son resonantes con la frecuencia  $\nu_0$  de la fuerza externa:

$$\frac{\tilde{v}}{\nu_0} = \frac{r}{s} \quad (4.31)$$

y el estado estacionario correspondiente,  $\{w_j(t)\}$ , es invariante bajo una transformación particular  $\sigma_{r,m,s}$  de invariancia del estado estacionario conmensurado subyacente  $\{u_j(t)\}$ . Para ser más concreto, si  $(r_0, m_0, s_0)$  es una tripleta minimal asociada a  $\{u_j(t)\}$ , entonces  $r$  y  $s$  en (4.31) tienen la forma  $r = kr_0 - nq$ ,  $s = ks_0$ , con  $k$  y  $n$  enteros, y entonces  $\{w_j(t)\}$  es invariante bajo la transformación  $\sigma_{r,m,s}$  con  $m = km_0 + np$ . En los valores resonantes de  $\tilde{v}$  los movimientos relativos de la disconmensuración y de la estructura conmensurada subyacente están sincronizados. Esta sincronización es estructuralmente estable, robusta frente a fluctuaciones de los parámetros.

Una configuración que esté formada por una estructura conmensurada de espaciado promedio  $\omega$ , moviéndose con velocidad media  $\bar{v}_0$ , y una densidad  $c$  de disconmensuraciones de velocidad relativa  $\tilde{v}$  y exceso de longitud  $\Delta$ , tiene una velocidad media  $\bar{v}$ :

$$\bar{v} = \bar{v}_0 - \tilde{v}c\Delta. \quad (4.32)$$

En la figura 4.21 mostramos la función  $\bar{v}(\bar{F})$  en el caso de dos estructuras conmensuradas diferentes de  $\omega = 1/2$  y  $\omega = 6/11$ , respectivamente. La últi-

ma puede verse como una red de disconmensuraciones elementales avanzadas con densidad  $c = 1/11$  sobre la configuración conmensurada más simple de  $\omega = 1/2$ . Incluso para este, no muy bajo, valor de la concentración de las disconmensuraciones, la velocidad (4.32) ajusta exactamente en los peldaños observados.

Ya que la defectibilidad es la condición necesaria para tener metaestabilidad, se espera que en el régimen resonante del movimiento haya una gran riqueza de atractores estables diferentes. De hecho, ya hemos mencionado que se observan muchos estados estacionarios resonantes rotacionalmente ordenados los cuales corresponden a diferentes transformaciones de invariancia. También se observan atractores estables que no son rotacionalmente ordenados. Para ilustrar este punto, en los párrafos siguientes analizaremos la estabilidad de los tres tipos de configuraciones metaestables que fueron introducidos en la sección 2.4.

Tomemos una estructura metaestable de tipo I y fijemos  $\bar{F}$  (y el resto de los parámetros del modelo) a un valor “bien en el interior” de uno de los intervalos de sincronización de la velocidad de la disconmensuración  $\tilde{v}$ . Como el espaciado entre las disconmensuraciones es irregular, la configuración de partículas en la disconmensuración es ligeramente diferente del caso de una estructura con disconmensuraciones regularmente espaciadas; sin embargo, ya que estas desviaciones son suficientemente pequeñas y gracias a que el valor de  $\bar{F}$  está centrado en el intervalo de sincronización (no cerca de los extremos), cada disconmensuración individual se mueve, sin deshacerse, con el mismo valor resonante de la velocidad. Esto es lo que debe esperarse basándonos en la robustez del fenómeno de sincronización. El movimiento sincronizado de las disconmensuraciones sobre el substrato conmensurado, asegura que los espaciados irregulares entre las disconmensuraciones son preservados en la evolución temporal y, por lo tanto, la estructura metaestable sobrevive como una configuración metaestable que se mueve y no relaja a una red regular de disconmensuraciones móviles. La figura 4.22 muestra un ejemplo del movimiento estable de una estructura de tipo I. Cuando la fuerza externa  $\bar{F}$  se ajusta fuera del intervalo de resonancia de la velocidad relativa de la disconmensuración, la estructura evoluciona a una red regular de disconmensuraciones. Sin embargo, tal relajación puede ser extremadamente lenta.

El movimiento estable de las estructura metaestables de tipo II requiere la condición de que las velocidades  $\tilde{v}_a$  y  $\tilde{v}_b$  de las disconmensuraciones avanzada y retardada, relativas a la estructura conmensurada subyacente, tengan el mismo valor  $\tilde{v}_a = \tilde{v}_b$ , en algún intervalo finito de  $\bar{F}$ . Con esta condición, la situación es muy similar al caso de las estructuras de tipo I analizado en el párrafo anterior, en el sentido de que el movimiento resonante de las disconmensuraciones

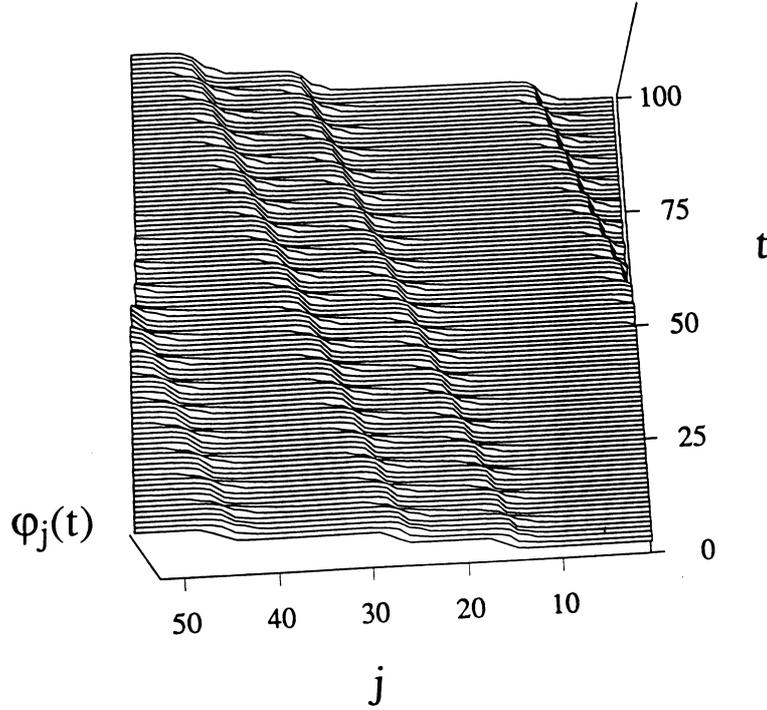


Figura 4.22: Estado estacionario móvil de la estructura metaestable de tipo I. Está formado por disconmensuraciones elementales con  $\Delta = +1/2$  y una concentración  $c = 3/53$ . Aquí  $\bar{v}_0/\nu_0 = 1/2$  y  $\bar{v}/\nu_0 = 25/53$  de modo que  $\bar{v}/\nu_0 = 1$  (ver ecuación (4.32)).

preservará la distribución inicial de disconmensuraciones separadas. La figura 4.23 (a) muestra un ejemplo de una estructura metaestable de tipo II moviéndose. En la figura 4.23 (b) el valor de  $\bar{F}$  se fijó fuera del intervalo común de resonancia, y el par de disconmensuraciones se aniquilan.

Finalmente, consideramos una estructura metaestables de tipo III, formada por bloques de espaciados promedio  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , de modo que el espaciado promedio de la estructura total viene dado por (2.49), donde  $\lambda$  es la proporción (en longitud) de la fase  $\omega_1$ . Sean  $\bar{v}$ ,  $\bar{v}_1$  y  $\bar{v}_2$  las velocidades medias asociadas a  $\omega$ ,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  respectivamente (darse cuenta de que fijos los parámetros del sistema,  $\bar{v}$  es una función única de  $\omega$  [44]). Para que sea posible el movimiento estable de la estructura metaestable, es necesario que la siguiente condición cinemática

$$\frac{\bar{v}}{\omega} = \lambda \frac{\bar{v}_1}{\omega_1} + (1 - \lambda) \frac{\bar{v}_2}{\omega_2} \quad (4.33)$$

se cumpla para algún intervalo finito de valores de  $\bar{F}$  de resonancia común para las tres velocidades. Siempre que la anchura de las interfases sea mucho menor que la separación entre ellas, y que el valor de  $\bar{F}$  se encuentre localizado en el

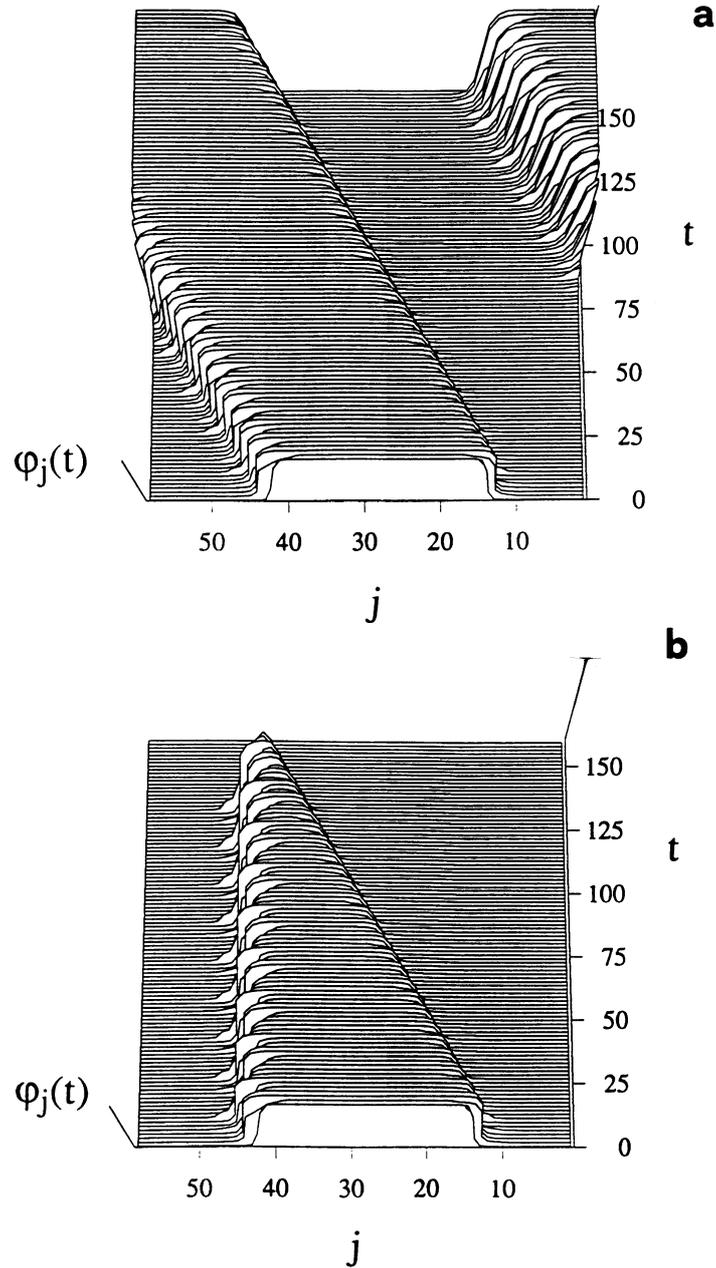


Figura 4.23: Estructura metaestable móvil de tipo II. Consiste en dos discommensuraciones opuestas en una estructura de  $\omega_0 = 2/3$ . (a)  $\bar{F} = 0,18$ , a este valor de la fuerza externa  $\tilde{v}$  es la misma para las dos discommensuraciones, resultando una estructura estable. (b)  $\bar{F} = 0,164$ , cada discommensuración se mueve con un valor diferente de  $\tilde{v}$ , de modo que se aniquilan.

interior del intervalo de resonancia común, la robustez del estado estacionario móvil sincronizado de cada uno de los bloques evita la difusión de las interfases; éstas mantienen su separación mientras se mueven con velocidad media  $\bar{v}_{int}$ :

$$\bar{v}_{int} = \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right)^{-1} \left( \frac{\bar{v}_1}{\omega_1} - \frac{\bar{v}_2}{\omega_2} \right). \quad (4.34)$$

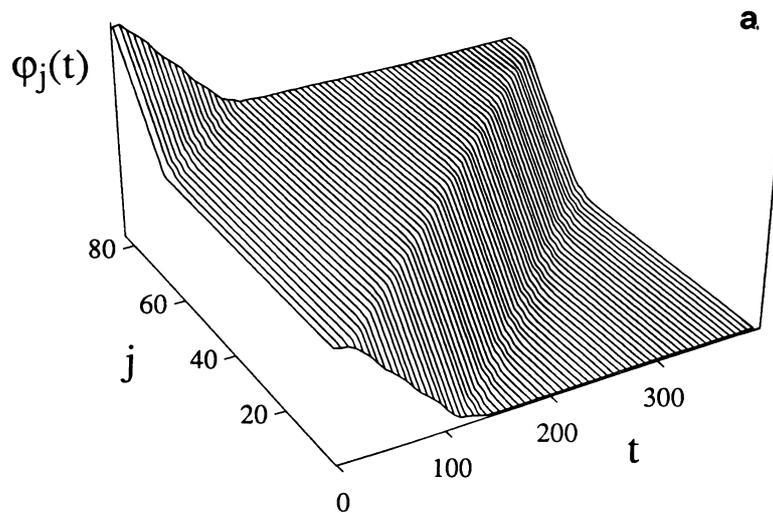
Para obtener este último resultado es útil darse cuenta de que cuando la estructura se mueve las partículas van pasando de una fase a otra. El número medio de partículas que cruzan la interfase en una unidad de tiempo (densidad  $\times$  velocidad relativa) puede expresarse como:

$$\omega_1^{-1}(\bar{v}_1 - \bar{v}_{int}) = \omega_2^{-1}(\bar{v}_2 - \bar{v}_{int}) \quad (4.35)$$

y a partir de esta ecuación de continuidad se obtiene  $\bar{v}_{int}$  (4.34).

Las figuras 4.24 (a), (b) y (c) muestran ejemplos del movimiento estable e inestable de estructuras metaestables de tipo III. En el caso (b) la estructura metaestable relaja a otra estructura metaestable diferente. En (c) el estado estacionario es la estructura homogénea.

Aunque los estudios numéricos se restringen a los casos de configuraciones metaestable periódicas, los argumentos de plausibilidad dados aquí también se aplican a los casos de redes espacialmente caóticas de disconmensuraciones o de interfases; esto permite afirmar que en la dinámica disipativa del modelo Frenkel-Kontorova con interacción convexa entre las partículas, pueden observarse configuraciones estables espacialmente caóticas.



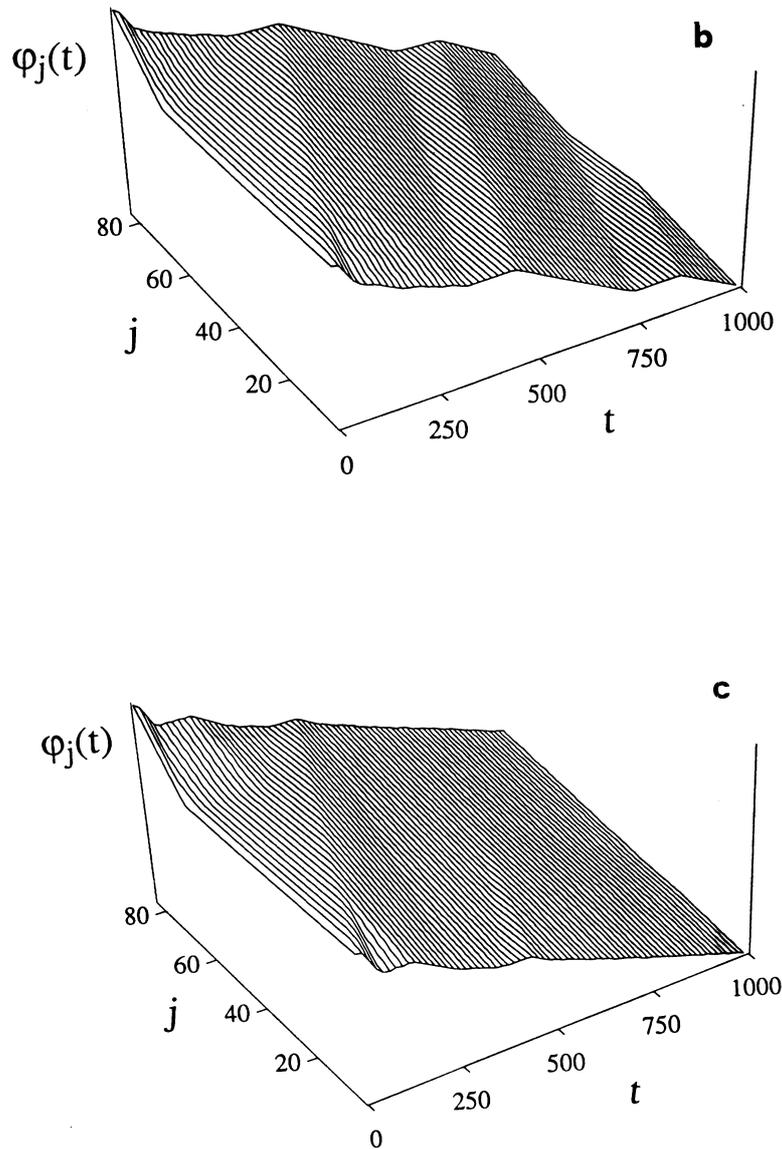


Figura 4.24: Tres evoluciones diferentes para una mismas condiciones iniciales de una estructura metaestable de tipo III. (a) La configuración inicial pervive como estado estacionario. (b) La configuración inicial relaja a una nueva estructura metaestable de tipo III, que permanece como estado estacionario. (c) El estado relaja a una estructura regular móvil. La condición inicial está definida por:  $\omega_1 = 1/2, \omega_2 = 1, \lambda = 32/52$  (ver (4.33)). (a)  $\bar{F} = 0,19$ , (b)  $\bar{F} = 0,22$ , (c)  $\bar{F} = 0,225$ . En esta figura se representa la fase relativa local donde la estructura conmensurada de referencia que se elige es  $\omega_0 = 1/2$ .

# Bibliografía I

- [1] J. M. Yeomans, en *Solid State Physics* **41**, editado por H. Ehrenreich y D. Turnbull (Academic, New York, 1988).
- [2] W. Selke, en *Phase Transitions and Critical Phenomena*, editado por C. Domb y J. L. Lebowitz (Academic, New York, 1993).
- [3] P. Bak, Rep. Prog. Phys. **45**, 587 (1982).
- [4] R. B. Griffiths, en *Fundamental Problems in Statistical Mechanics VII*, editado por H. van Beijeren (North-Holland, Amsterdam, 1990).
- [5] S. Aubry, en *Structures et Instabilités*, editado por C. Godrèche (Editions de Physique, Les Ulis, France, 1985).
- [6] S. Aubry y P. Y. Le Daeron, Physica D **8**, 381 (1983).
- [7] L. M. Floría y J. J. Mazo, Adv. Phys. (en prensa).
- [8] V. N. Prigodin y A. N. Samukhin, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **95**, 642 (1989). [Sov. Phys. JETP **68**, 362 (1989)].
- [9] S. E. Burkov, Phys. Rev. B **44**, 2850 (1991).
- [10] G. Blatter, M. F. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin y V. M. Vinokur, Rev. Mod. Phys. **66**, 1125 (1994).
- [11] *Charge Density Waves in Solids*, editado por L. P. Gorkov y G. Grüner, Modern Problems in Condensed Matter Sciences vol. 25 (North-Holly, Amsterdam, 1989).
- [12] G. Grüner, Rev. Mod. Phys. **60**, 1129 (1988).
- [13] D. Jèrome y H. J. Schulz, Adv. Phys. **31**, 299 (1982).
- [14] *Low-dimensional Conductors and superconductors*, editado por D. Jèrome y L. G. Caron, NATO ASI Series B, Vol. 155 (Plenum, New York, 1987).
- [15] R. E. Peierls, *Quantum Theory of Solids*, (Oxford University Press, Oxford, 1955).
- [16] H. Fröhlich, Proc. Roy. Soc. A **233**, 296 (1954).
- [17] S. Aubry, G. Abramovici y J. L. Raimbault, J. Stat. Phys. **67**, 675 (1992).
- [18] W. Fogle y H. Perlstein, Phys. Rev. B **6**, 1402 (1972).
- [19] P. Monceau, N. P. Ong, A. M. Portis, A. Meerschaut y J. Rouxel, Phys. Rev. Lett. **37**, 6902 (1976).

- [20] R. P. Hall, M. F. Hundley y A. Zettl, Phys. Rev. B **38**, 13002 (1988).
- [21] R. M. Fleming y C. C. Grimes, Phys. Rev. Lett. **42**, 1423 (1979).
- [22] P. Monceau, J. Richard y M. Renard, Phys. Rev. Lett. **45**, 43 (1980).
- [23] G. Grüner, A. Zawadowski y P. M. Chaikin, Phys. Rev. Lett. **46**, 511 (1981).
- [24] P. Monceau, J. Richard y M. Renard, Phys. Rev. B **25**, 931 (1982).
- [25] J. Bardeen, Phys. Rev. Lett. **42**, 1498 (1979).
- [26] J. Bardeen, Phys. Rev. Lett. **45**, 1978 (1980).
- [27] R. E. Thorne, J. R. Tucker, J. Bardeen, S. E. Brown y G. Grüner, Phys. Rev. B **33**, 7342 (1986).
- [28] H. Fukuyama y P. A. Lee, Phys. Rev. B **17**, 535 (1977).
- [29] L. Sneddon, M. C. Cross y D. S. Fisher, Phys. Rev. Lett. **49**, 292 (1982).
- [30] D. S. Fisher, Phys. Rev. B **31**, 1396 (1985).
- [31] D. S. Fisher, Phys. Rev. Lett. **50**, 1486 (1983).
- [32] L. Sneddon, Phys. Rev. Lett. **52**, 65 (1984).
- [33] L. Sneddon, Phys. Rev. B **30**, 2974 (1984).
- [34] S. N. Coppersmith y D. S. Fisher, Phys. Rev. B **28**, 2566 (1983).
- [35] S. N. Coppersmith y D. S. Fisher, Phys. Rev. A **38**, 6338 (1988).
- [36] A. A. Middleton y D. S. Fisher, Phys. Rev. B **47**, 3530 (1993).
- [37] O. Narayan y D. S. Fisher, Phys. Rev. B **46**, 11520 (1992).
- [38] S. N. Coppersmith y P. B. Littlewood, Phys. Rev. B **36**, 311 (1987).
- [39] P. B. Littlewood, en *Charge Density Waves in Solids*, editado por L. P. Gorkov y G. Grüner, Modern Problems in Condensed Matter Sciences vol. 25, pág. 321 (North-Holland, Amsterdam, 1989).
- [40] S. N. Coppersmith, Phys. Rev. A **36**, 3375 (1987).
- [41] A. A. Middleton, O. Biham, P. B. Littlewood y P. Sibani, Phys. Rev. Lett. **68**, 1586 (1992).
- [42] A. A. Middleton, Tesis doctoral. Princeton University (1990).
- [43] A. A. Middleton y D. S. Fisher, Phys. Rev. Lett. **66**, 92 (1991).
- [44] A. A. Middleton, Phys. Rev. Lett. **68**, 670 (1992).
- [45] M. Inui, R. P. Hall, S. Doniach y A. Zettl, Phys. Rev. B **38**, 13047 (1988).
- [46] J. Levy, M. S. Sherwin, F. F. Abraham y K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **68**, 2968 (1992).
- [47] Y. Braiman, J. Baumgarten, J. Jortner y J. Klafter, Phys. Rev. Lett. **65**, 2398 (1990).
- [48] J. D. Meiss, Rev. Mod. Phys. **64**, 795 (1992).
- [49] K. Sasaki y R. B. Griffiths, J. Stat. Phys. **53**, 1031 (1988).
- [50] S. Aubry, Physica D **7**, 240 (1983).

- [51] C. Baesens y R. S. Mackay, *Physica D* **69**, 59 (1993).
- [52] W. Chou y R. B. Griffiths, *Phys. Rev. B* **34**, 6219 (1986).
- [53] R. B. Griffiths y W. Chou, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1929 (1986).
- [54] P. J. Martínez, Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza (1995).
- [55] K. Sasaki y L. M. Floría, *J. Phys. Condens. Matt.* **1**, 2179 (1989).
- [56] L. H. Tang y R. B. Griffiths, *J. Stat. Phys.* **53**, 853 (1988).
- [57] K. Sasaki, *Physica A* **171**, 80 (1991).
- [58] L. H. Tang, Tesis doctoral. Carnegie Mellon University (1987).
- [59] M. E. Fisher y A. M. Szpilka, *Phys. Rev. B* **36**, 644, 5343 (1987).
- [60] A. M. Szpilka y M. E. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1044 (1986).
- [61] A. M. Szpilka y M. E. Fisher, *Phys. Rev. B* **36**, 5363 (1987).
- [62] C. S. O. Yokoi, L. H. Tang y W. Chou, *Phys. Rev. B* **37** 2173 (1988).
- [63] J. Villain, en *Structures et Instabilités*, editado by C. Godrèche (Editions de Physique, Les Ulis, France, 1985).
- [64] R. S. MacKay, Tesis doctoral. Princeton University (1982).. Reimpresión: R. S. MacKay, *Renormalisation in Area-preserving Maps* (World Scientific, Singapore, 1993).
- [65] M. Peyrard y S. Aubry, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **16**, 1593 (1983).
- [66] L. de Seze y S. Aubry, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **17**, 389 (1984).
- [67] S. Aubry y P. Quemerais en *Low dimensional electronic properties of Molybdenum bronzes and oxides*, editado por C. Schlenker (Kluwer, Dordrecht, 1989).
- [68] R. S. MacKay, *Physica D* **50**, 71 (1991).
- [69] L. P. Kadanoff, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1641 (1981).
- [70] S. J. Shenker y L. P. Kadanoff, *J. Stat. Phys.* **27**, 631 (1982).
- [71] S. Aubry, en *Twist Mappings and their Applications*, editado por R. McGehee y K. R. Meyer (Springer Verlag, New York, 1992).
- [72] S. Aubry y G. Abramovici, *Physica D* **43**, 199 (1990).
- [73] S. Aubry, J. P. Gosso, G. Abramovici, J. L. Raimbault y P. Quemerais, *Physica D* **47**, 461 (1991).
- [74] R. S. MacKay y S. Aubry, *Nonlinearity* **7**, 1623 (1994).
- [75] C. Baesens y R. S. Mackay, *Nonlinearity* **7**, 59 (1994).
- [76] J. L. Marín y S. Aubry, de pronta aparición en *Nonlinearity*.
- [77] S. B. Angenent, *Commun. Math. Phys.* **115**, 353 (1988).
- [78] M. Hirsch, *SIAM J. Math. Anal.* **13**, 167 (1982).
- [79] H. Matano, *J. Fac. Sci. Univ. Tokio* **29**, 401 (1982).
- [80] T. Natterman, S. Stepanow, L. H. Tang y H. Leschhorn, *J. Physique II*, **2**, 1483 (1992).

- [81] A.L. Barabási y H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge University Press, 1995).
- [82] F. Bergé, Y. Pomeau y Ch. Vidal, *Order within Chaos* (Wiley, New York, 1984).
- [83] Y. Pomeau y P. Manneville, *Commun. Math. Phys.* **74**, 189 (1980).
- [84] S. Aubry, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **16**, 2497 (1983).
- [85] S. N. Coppersmith y P. B. Littlewood, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1927 (1986).
- [86] C. Tang, K. Wiesenfeld, P. Bak, S. N. Coppersmith y P. B. Littlewood, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1161 (1987).
- [87] J. R. Waldram, A. B. Pippard y J. Clarke, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* **268**, 265 (1968).
- [88] C. A. Hamilton y E. G. Johnson, *Phys. Lett. A* **41**, 393 (1972).
- [89] P. Russer, *J. Appl. Phys.* **43**, 2008 (1972).
- [90] M. J. Renné y D. Polder, *Rev. Phys. Appl.* **9**, 25 (1974).
- [91] J. R. Waldram y P. H. Wu, *J. Low Temp. Phys.* **47**, 363 (1982).
- [92] M. Inui y S. Doniach, *Phys. Rev. B* **35**, 6244 (1987).
- [93] F. Falo, L.M. Floría, P.J. Martínez y J.J. Mazo, *Phys. Rev. B* **48**, 7434 (1993).
- [94] L. M. Floría y F. Falo, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2713 (1992).
- [95] J. J. Mazo, F. Falo y L. M. Floría, *Phys. Rev. B.* **52**, 6451 (1995).

## Parte II

# La escalera de uniones Josephson



## Resumen de la segunda parte

La segunda parte de esta memoria está dedicada al estudio de un tipo de configuración de red de uniones Josephson conocida como **escalera de uniones Josephson**. Nuestro principal objetivo ha sido poner de manifiesto las diferencias principales entre la escalera y las redes bidimensionales de uniones Josephson, por un lado, y la escalera y el modelo Frenkel-Kontorova por otro. El interés en las redes de uniones Josephson está impulsado por la disponibilidad de técnicas de fabricación de redes de cualquier tamaño y geometría. Por ello, la escalera de uniones Josephson es un sistema donde una rica fenomenología de sucesos pueden ser teórica y experimentalmente estudiados de una manera controlada. Podríamos aventurarnos a indicar que las redes de uniones Josephson son excelentes “bancos de pruebas” para la Física no lineal.

- Hemos demostrado la equivalencia rigurosa entre el problema del estado fundamental del modelo Frenkel-Kontorova y la red de uniones Josephson en el límite de despreciar campos autoinducidos ( $\lambda_{\perp} \rightarrow \infty$ ). En contraste con la red bidimensional de uniones Josephson, en la escalera la densidad de vórtices del estado fundamental como función del campo externo es una **Escalera del Diablo**, con un peldaño a cada valor racional de esta densidad. Existen estados fundamentales incommensurados (con densidad de vórtices irracional), que son descritos por una **función hull**. Esta función, al igual que en el modelo Frenkel-Kontorova, sufre una transición por ruptura de analiticidad, o transición de Aubry, a un valor determinado de la anisotropía de la red.

- Aunque las propiedades de equilibrio de la escalera de uniones Josephson son las del modelo Frenkel-Kontorova con interacciones convexas, esta equivalencia no se prolonga a la dinámica de la red. Así, por ejemplo, la dinámica de la escalera bajo corrientes continuas no muestra, en general, una curva única de intensidad frente a voltaje, como ocurre para el modelo convexo.

- En la escalera de uniones Josephson, a diferencia del modelo Frenkel-Kontorova, un estado fundamental no es estable en todo el rango posible de valores de la frustración del sistema. En particular, hemos visto que a valores pequeños del campo la discommensuración elemental del estado con densidad de vórtices igual a cero es inestable, y de la inestabilidad de esta se deriva la inestabilidad del resto de configuraciones de mínima energía del sistema, excepto el estado fundamental. La inestabilidad de esta discommensuración está relacionada con la no convexidad del potencial de interacción entre las fases en islas superconductoras vecinas en la red.

- En el caso de considerar los campos inducidos por las corrientes supercon-

ductoras ( $\lambda_{\perp}$  finito), el diagrama de fases de los estados fundamentales es cualitativamente similar al encontrado en el límite de despreciar estos campos: una Escalera del Diablo describe la variación de la densidad de vórtices del estado fundamental frente al campo externo. Sin embargo, la inclusión de los campos magnéticos inducidos dificulta el establecimiento de una equivalencia rigurosa entre el modelo de la escalera de uniones Josephson y el Frenkel-Kontorova. Este punto va más allá del objetivo de nuestro trabajo y permanece como una cuestión abierta en espera de futuras investigaciones.

- La introducción de los efectos de apantallamiento del campo nos permiten estudiar la variación continua del comportamiento del sistema entre dos regímenes magnéticos diferentes. En el límite  $\lambda_{\perp} \rightarrow \infty$  todo el campo magnético externo penetra la red, de modo que no hay apantallamiento. En el límite  $\lambda_{\perp} \rightarrow \infty$  encontramos que el flujo total de campo a través de una celda de la escalera es nulo en aquellas celdas con vorticidad nula e igual a un cuanto de flujo en aquellas celdas con vorticidad igual a uno.

- Al analizar la estabilidad de algunas fases metaestables simples encontramos que los campos de apantallamiento incrementan los intervalos de estabilidad. Cuando el campo es nulo, existe un valor de la longitud de penetración por encima del cual sólo el estado fundamental, de densidad de vórtices igual a cero, es estable. Esto nos ha permitido hacer una conjetura sobre las corrientes críticas de la escalera de uniones Josephson cuando los campos inducidos se tienen en cuenta.

- En el límite  $\lambda_{\perp} \rightarrow \infty$  hemos estudiado la aproximación dinámica de la escalera de uniones Josephson al equilibrio y en presencia de temperatura, encontrando **relajación lenta** aunque en el sistema no existe ningún desorden estructural. Esta dinámica **vítrea** es típica de sistemas cuyo paisaje de energías en el espacio de configuraciones se caracteriza por la existencia de una multiplicidad de estados metaestables desconectados dinámicamente, lo que conduce a una **dinámica restringida** del sistema.

# Capítulo 5

## Introducción

### 5.1. El efecto Josephson

Desde el descubrimiento del efecto Josephson, una parte importante de las investigaciones sobre superconductividad, se han concentrado en el estudio y aplicaciones de este efecto en diversos tipos de sistemas. Hoy día el tema sigue suscitando un enorme interés<sup>1</sup>.

A comienzos de los años sesenta B.D. Josephson estableció una teoría fenomenológica sobre la superconductividad en metales separados por una barrera fina de material aislante [1, 2, 3]. La teoría predice la existencia de corrientes estacionarias a través de la unión con voltaje cero. El origen de estas corrientes superconductoras es el túnel directo del condensado de pares de electrones entre las superficies de Fermi de los dos metales. Resultado de la teoría es que dichas corrientes son una función periódica de la diferencia invariante *gauge* de la fase del parámetro de orden superconductor a ambos lados de la barrera,  $\varphi$ .

En los problemas de no equilibrio la dependencia temporal de  $\varphi$  está relacionada directamente con la diferencia de potencial entre ambos lados de la unión, lo que se traduce en una corriente superconductora alterna. Las relaciones Josephson básicas para la intensidad y el voltaje a través de la unión son:

$$I_s = I_c \operatorname{sen}\varphi, \quad (5.1)$$

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (5.2)$$

Donde  $I_c$  es la corriente superconductora máxima que, a voltaje cero, la

---

<sup>1</sup>Clara prueba de esto es, por ejemplo, el altísimo número de comunicaciones sobre temas relacionados con el efecto Josephson presentadas en el *March Meeting* de la APS de este año 1996.

unión puede soportar, en ausencia de fluctuaciones térmicas.

Una derivación sencilla de dichas relaciones, extraídas del libro de Feymann [4], es la siguiente: sea  $\psi_i = \sqrt{\rho_i}e^{i\theta_i}$  ( $i = 1, 2$ ) la función de onda del estado superconductor en cada lado de la unión. En ausencia de campo magnético ambas funciones están relacionadas por las siguientes ecuaciones:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = U_1\psi_1 + K\psi_2 \quad (5.3)$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = U_2\psi_1 + K\psi_1 \quad (5.4)$$

donde  $K$  da cuenta de la amplitud del acoplamiento entre ambos lados. Supongamos además que conectamos la unión a una diferencia de potencial  $V$  con lo que, fijando adecuadamente el cero de la energía,  $U_1 = qV/2$  y  $U_2 = -qV/2$ , con  $q = 2e$ . Llevando  $\psi_1$  y  $\psi_2$  a las ecuaciones anteriores obtenemos la corriente que fluye del lado 1 al 2, que es  $\dot{\rho}_1 = -\dot{\rho}_2$ ,

$$J = \frac{2K}{\hbar}\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin\varphi, \quad (5.5)$$

con  $\varphi = \theta_2 - \theta_1$ , y que la diferencia de potencial

$$V = \frac{\hbar}{2e}\dot{\varphi}. \quad (5.6)$$

Además podemos calcular la energía asociada a cada unión [5]: en un superconductor el número de ocupación y la fase son variables canónicas conjugadas, de ahí que satisfacen la siguiente relación de incertidumbre

$$\Delta N \Delta \theta \geq 1 \quad (5.7)$$

Como en el superconductor  $\bar{N} \sim 10^{20}$  y  $\frac{\Delta N}{\bar{N}} \sim \bar{N}^{-1/2} \sim 10^{-10}$  entonces  $\Delta \theta \sim 10^{-10}$  y podemos tomar  $\hbar\theta$  y  $N$  como variables semiclásicas conjugadas y cumplen las ecuaciones del movimiento

$$\hbar\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial N} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial H}{\partial\theta} \quad (5.8)$$

De este modo la energía ( $H_{12}$ ) asociada a la unión se deduce de

$$\frac{I}{2e} = -\frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{\partial N_2}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar}\frac{\partial H_{12}}{\partial\theta_1} = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial H_{12}}{\partial\theta_2} = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial H_{12}}{\partial\varphi} \quad (5.9)$$

siendo

$$H_{12}(\varphi) = \text{cte.} - \frac{\hbar I_0}{2e}\cos\varphi \quad (5.10)$$

Los sorprendentes resultados predichos por Josephson fueron contrastados experimentalmente en muy poco tiempo. Así, Anderson y Rowell [6] observaron

el efecto túnel superconductor y Shapiro [7] encontró en las curvas intensidad-voltaje, bajo la acción de un campo de radiofrecuencias, varios intervalos de pendiente nula separados entre sí por un voltaje igual a  $h\nu/2e$ , los conocidos *Shapiro steps*.

Josephson estableció sus resultados para una unión de efecto túnel entre metales separados por una barrera aislante pero existe una gran variedad de estructuras superconductoras con acoplamiento débil (**uniones débiles**) que muestran un comportamiento similar [8, 9, 10].

En 1968 Stewart [11] y McCumber [12, 13] propusieron un modelo para describir la corriente neta total fluyendo a través de un enlace débil: el modelo RSJ (*resistively shunted junction*). Es un modelo de dos flujos para la corriente: la corriente superconductoras debida al efecto Josephson (5.1), y una contribución proporcional a la diferencia de potencial, debida a la corriente de electrones normales.

$$I = I_s + I_n = I_c \operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{R_N} \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5.11)$$

con  $R_N$  la resistencia normal en la unión. Este modelo ha resultado ser adecuado en la predicción de las principales características de sistemas con uniones Josephson. Si la unión tiene una capacidad  $C$  apreciable, como es común en el caso de las uniones tipo túnel, entonces hemos de tener en cuenta una contribución más a la corriente:  $I_C = C \frac{dV}{dt}$ .

Siguiendo a Lindelof [9], podemos considerar dos casos extremos de dinámica de una unión Josephson:

a) El caso de una fuente de voltaje constante  $V_{dc}$ , y con impedancia cero. Este es el caso de uniones con capacidad grande (las de tipo túnel por ejemplo). Entonces, la fase crece linealmente en el tiempo y la intensidad de corriente muestra oscilaciones de frecuencia  $\omega_J$

$$I = I_c \operatorname{sen}\omega_J t + \frac{V_{dc}}{R_N}, \quad (5.12)$$

$$\omega_J = \frac{2e}{\hbar} V_{dc}. \quad (5.13)$$

b) El caso de una fuente de intensidad constante,  $I_{dc}$ , con impedancia infinita. Esta es la descripción apropiada en los casos de “micropuentes” y uniones de “contacto puntual”. En estos casos la capacidad puede ser despreciada y la ecuación diferencial para  $\varphi$  es:

$$I_{dc} = I_c \operatorname{sen}\varphi + \frac{\hbar}{2eR_N} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (5.14)$$

Esta ecuación puede resolverse analíticamente. El voltaje en función de la corriente tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\langle V \rangle}{R_N} = \begin{cases} 0 & \text{si } I_{\text{dc}} \leq I_c \\ (I_{\text{dc}}^2 - I_c^2)^{1/2} & \text{si } I_{\text{dc}} > I_c. \end{cases} \quad (5.15)$$

Además, cuando una unión es irradiada por microondas, las curvas de intensidad frente a voltaje muestran una típica estructura basada en peldaños. Para los casos de uniones en las cuales la capacidad puede despreciarse, la curva IV se encuentra resolviendo

$$I_{\text{dc}} + I_{\text{ac}} \sin \omega_{\text{ac}} t = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR_N} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (5.16)$$

La sincronización de las oscilaciones de la fase con la frecuencia de la fuente externa produce los intervalos de estabilidad (los peldaños) en la curva a algunos, bien definidos, valores del voltaje.

$$\langle V \rangle = n \frac{\hbar}{2e} \omega_{\text{ac}} \quad ; \quad \text{con } n \text{ entero.} \quad (5.17)$$

Las ecuaciones (5.14) y (5.16) son las ecuaciones del movimiento, en el límite disipativo, de un péndulo impulsado por una fuerza externa. En las secciones 3.3.1 y 4.2 tratamos este sistema de una partícula que describe la dinámica disipativa de las estructuras conmensuradas de espaciado promedio entero del modelo Frenkel-Kontorova estándar.

## 5.2. Redes de uniones Josephson

Los avances en ciertas técnicas experimentales de microfabricación, que han tenido lugar en las dos últimas décadas, han puesto al alcance de los físicos experimentales la posibilidad de estudiar redes de uniones Josephson de cualquier tamaño y geometría [14, 15, 16, 17]. Gran parte del trabajo se ha centrado en estructuras periódicas con acoplamiento uniforme y celdas unidad triangulares o cuadradas construidas a base de diferentes tipos de uniones débiles. Sin embargo, también se ha investigado el comportamiento de sistemas desordenados, con defectos, o casos exóticos – redes cuasiperiódicas, fractales – que juegan con la geometría de la red y los tamaños de las celdillas.

El interés original en redes bidimensionales de uniones Josephson se apoya en dos razones principales: son la versión discreta de una película superconductora [18] y proporcionan la posibilidad de construir dispositivos de alta frecuencia basados en la oscilación coherente de toda la red [19].

Las redes bidimensionales formadas por islas superconductoras acopladas débilmente por medio de uniones Josephson constituyen un modelo para el estudio controlado de algunos aspectos de películas granulares, que pueden ser vistas como redes desordenadas de uniones Josephson. De este modo, el interés en la transición de fase superconductor-normal (de hecho una transición de Kosterlitz-Thouless [20]) en sistemas bidimensionales impulsó buena parte de los primeros estudios de redes de uniones Josephson [21, 22, 23, 24]. En el caso de uniones de tipo túnel, el comportamiento de la red es similar al de películas granulares; mientras que redes con otros tipos de uniones débiles (uniones de “acoplamiento por proximidad”), se comportan como superconductores débiles homogéneos de tipo II, con gran longitud de penetración transversal. Desde un punto de vista más fundamental, una red de uniones Josephson en presencia de un campo magnético externo constante y uniforme es una excelente realización experimental del modelo XY bidimensional uniformemente frustrado.

La energía Josephson de una red de uniones débiles en presencia de un campo magnético perpendicular a la red está descrita por [25]

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j - A_{ij}), \quad (5.18)$$

donde la suma se extiende sobre todas las uniones débiles entre pares de islas superconductoras. Cuando  $A_{ij}$  es cero (o un múltiplo entero de  $2\pi$ ) la ecuación (5.18) se reduce al hamiltoniano XY. Cuando  $A_{ij}$  no es cero o múltiplo de  $2\pi$ , el parámetro  $A_{ij}$  introduce frustración. Como veremos  $A_{ij}$  está directamente relacionado con el campo externo, de modo que constituye un parámetro de fácil control que nos permite variar el hamiltoniano de la red. Además podemos introducir fácilmente anisotropía y desorden actuando sobre la constante de acoplamiento  $J_{ij}$ , que está directamente relacionada con la intensidad crítica de la unión (5.1):  $J_{ij} = I_{c,ij}\Phi_0/2\pi$ . Este parámetro depende tanto de la temperatura como del campo magnético aplicado, aunque en lo que sigue no tendremos nunca en cuenta estas dependencias. En (5.18)  $\theta_i$  es la fase del parámetro de orden superconductor en la  $i$ -ésima isla superconductor; se asume que es una variable clásica constante en toda la isla y que la temperatura es suficientemente pequeña como para despreciar las fluctuaciones de la amplitud del parámetro de orden.  $A_{ij}$  es proporcional a la integral de línea del potencial vector  $\vec{A}$  entre las islas  $i$  y  $j$  de la red,

$$A_{ij} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_i^j \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (5.19)$$

Entonces la versión discreta de la ecuación de Maxwell para el potencial vector se traduce en

$$\sum_{\text{celdilla}} A_{ij} = 2\pi f; \quad (5.20)$$

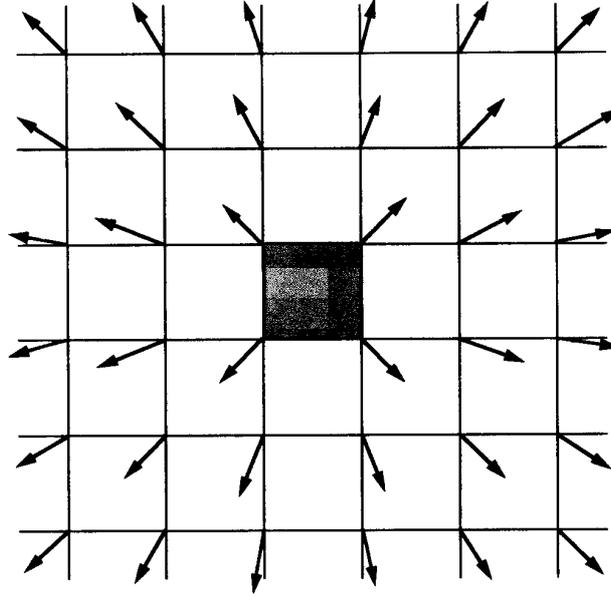


Figura 5.1: Configuración, a campo cero, de las fases en una red cuadrada bidimensional de uniones Josephson con un vórtice.

donde  $f$  es el flujo por celdilla debido al campo externo, medido en unidades del cuanto de flujo magnético  $\Phi_0 = h/2e$ .  $f$  es el parámetro que fija el grado de frustración de la red. El hamiltoniano de la ecuación (5.18) es simétrico bajo  $f \rightarrow f + 1$  y  $f \rightarrow -f$ , de modo que sólo consideraremos valores de  $f$  en el rango  $0 \leq f \leq 1/2$ . En (5.20) hemos asumido que la longitud de penetración de London de la red, es mucho mayor que el tamaño del sistema real, lo que permite despreciar los campos magnéticos inducidos por las corrientes superconductoras en la red. Más adelante, al considerar en detalle el problema de una red de uniones Josephson con la geometría de una escalera, veremos como la inclusión de estos campos cambia la descripción del sistema.

La principal excitación elemental en estas redes es el vórtice (ver figura 5.1). Tal estado está especificado por una distribución peculiar de las fases de la red en torno a una celdilla particular  $p$  en la cual la cuantificación del fluxoide  $n_p$  alcanza valor  $\pm 1$ :

$$\sum_p \varphi_{ij} = 2\pi(n_p - f); \quad (5.21)$$

esto es, la suma de las diferencias de fases invariantes gauge,  $\varphi_{ij} = \theta_i - \theta_j - A_{ij}$  con  $-\pi < \varphi_{ij} \leq \pi$ , en las uniones que rodean una determinada celdilla y con un sentido de giro definido. Definiremos la **densidad de vórtices**  $\omega$  en una red de uniones Josephson por el valor medio del número de vórtices en la red,

$\omega = \frac{1}{N} \sum_p \langle n_p \rangle$ , donde  $N$  es el número total de celdillas. La definición del fluxoide que hacemos en (5.21) es la versión discreta del concepto de fluxoide,  $\Phi'$ , asociado con un hueco o una región normal en un superconductor, introducido por London (ver por ejemplo la explicación que hace Tinkham del mismo [5]).  $\Phi' = \Phi + \text{cte} \oint \vec{J} d\vec{l} = \oint \vec{A} d\vec{l} + \text{cte} \oint \vec{J} d\vec{l} = \frac{1}{2e} \oint \vec{p} d\vec{l} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \oint \vec{\nabla} \theta d\vec{l} = n\Phi_0$ , donde  $\Phi$  es el flujo total del campo magnético a través de la región considerada y  $\vec{J}$  las corrientes superconductoras en la frontera de la misma. En el límite de longitud de penetración mucho menor que las dimensiones del sistema, la expresión anterior conduce a la cuantificación del campo magnético. En ese caso podemos encontrar un recorrido dentro del superconductor donde  $\oint \vec{J} d\vec{l} = 0$  y por lo tanto  $\Phi' = \Phi = n\Phi_0$ , el flujo está cuantizado y el fluxoide coincide con el fluxón. Sobre este límite en el caso de la red de uniones Josephson volveremos a tratar más adelante.

En las redes donde las uniones son muy pequeñas, en general, la energía Josephson también es menor mientras que la energía de carga  $E_C = (2e)^2/(2C)$  aumenta porque la capacidad  $C$  entre las islas es muy pequeña. En tales casos los efectos cuánticos cobran importancia (la fase y el número de ocupación no pueden ser tratadas como variables clásicas) y las fluctuaciones pueden llegar a destruir la coherencia en la red. La consideración de estos efectos sitúa las redes en un nuevo régimen físico. En el límite en el cual la energía Josephson es despreciable frente la energía de carga la excitación elemental del sistema es un solitón con carga de un electrón, localizado en una celdilla y que polariza la red. En los regímenes intermedios, donde ambas contribuciones a la energía del sistema compiten, encontramos los dos tipos de excitaciones: vórtices (antivórtices) y solitones (antisolitones) de carga eléctrica.

En lo que sigue nosotros nos mantendremos dentro de una descripción clásica de las redes de uniones Josephson, despreciando los efectos cuánticos descritos en el párrafo anterior. Entonces (y en el límite de longitud de penetración grande) la expresión clásica (5.18) es válida para describir la energía potencial asociada a una red de uniones Josephson en la presencia de un campo magnético externo. Dentro de esta descripción clásica nos falta considerar un término cinético  $H_k = \frac{1}{2} \sum_{ij} V_i C_{ij} V_j$ , donde aquí  $V_i$  es el voltaje a través de la unión  $i$ . No es necesario considerar este término al estudiar las propiedades de equilibrio de la red, ya que entonces  $V_i \sim \dot{\theta}_i = 0$  para todas las uniones. En el caso de considerar la dinámica de la red,  $H_k$  es despreciable en muchos de los casos (aquellas redes construidas a base de “uniones sobreamortiguadas”), pero deber ser tenido en cuenta al estudiar redes “subamortiguadas” (casos (b) y (a) respectivamente de la sección 5.1)

### 5.2.1. Estados fundamentales y transiciones de fase en redes de uniones Josephson

En el caso de campo magnético nulo el hamiltoniano que describe el sistema (ecuación (5.18) con  $A_{ij} = 0$  para toda unión  $ij$ ) es el del modelo XY. Dicho hamiltoniano es invariante bajo la simetría  $U(1)$ , que corresponde a una rotación uniforme de todas las fases. Los tipos de excitaciones elementales son dos: las ondas de espín, que se dan a cualquier temperatura no nula, y los vórtices. A temperatura nula el estado fundamental del sistema está trivialmente definido por  $\theta_i = \text{cte.}$  en toda la red, lo que significa que  $n_p = 0$  en toda la red. A esa temperatura el sistema es superconductor. Al aumentar la temperatura las fluctuaciones térmicas estimulan la aparición de vórtices en el sistema. Un simple cálculo [20, 26] nos permite hacer una estimación de la energía asociada a la presencia de un vórtice en la red. Dicha energía, es mayor que la asociada a una excitación consistente en un par vórtice-antivórtice ligado. De este modo, a bajas temperaturas la red de uniones Josephson es un sistema superconductor, con pares vórtice-antivórtice ligados de vorticidad total nula. A cierta temperatura mayor,  $T_{KT}$  el sistema sufre una transición de fase Kosterlitz-Thouless, que se manifiesta en que los pares vórtice-antivórtice se desligan. La aparición de vórtices libres, excitados térmicamente, rompe el carácter superconductor de la red, que entra en el régimen resistivo asociado al movimiento de los vórtices libres. De este modo la  $T_{KT}$  marca la transición superconductor-normal en una red de uniones Josephson. Esta transición está directamente relacionada con la simetría  $U(1)$  de los estados fundamentales.

En el caso de redes frustradas la naturaleza de las transiciones de fase es más complicada y éstas aún no están plenamente entendidas. La aplicación de un campo magnético transversal produce la aparición de una densidad finita de vórtices de un mismo signo en la red. En el caso de una lámina superconductora uniforme, por debajo de cierta temperatura, los vórtices se ordenan en una red triangular y, incluso a temperatura cero, el movimiento uniforme de la red destruye la superconductividad de la lámina. En una red de uniones Josephson la situación es diferente; la discretitud del sistema introduce un potencial de anclaje periódico, directamente relacionado con la geometría de la red, de modo que el estado fundamental es una red de vórtices anclada en posiciones cercanas a los mínimos del potencial. Entonces, las técnicas empleadas para el estudio de láminas superconductoras uniformes resultan inapropiadas. La red discreta introduce una barrera de anclaje en la red de vórtices, lo que mantiene el carácter superconductor del sistema.

En el caso particular de un sistema totalmente frustrado,  $f = 1/2$ , y para una red cuadrada, el estado fundamental es una distribución tipo tablero de ajedrez donde celdillas con  $n_p = 1$  y  $n_p = 0$  se alternan (figura 5.2). En este

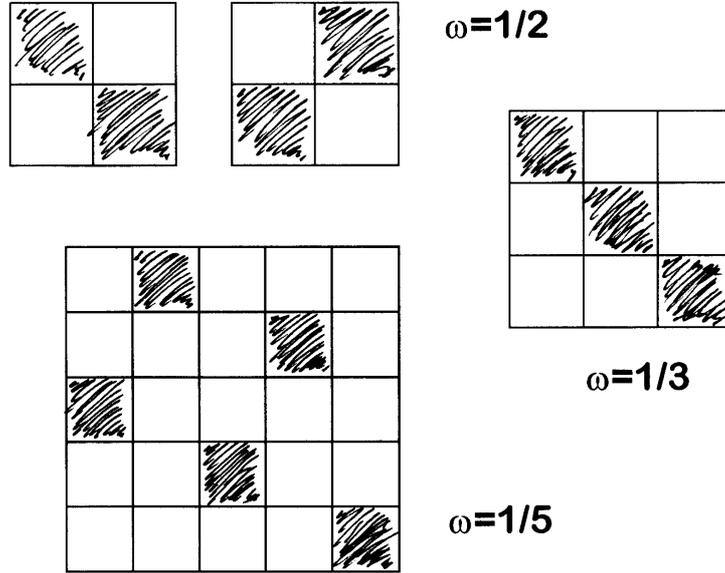


Figura 5.2: Representación de algunos de los estados fundamentales commensurados más sencillos de una red de uniones Josephson.

caso  $\omega = f$ . Esta red, de celdilla unidad  $2 \times 2$  commensurada con el potencial de anclaje substrato, introduce una simetría discreta,  $Z_2$ , del estado fundamental [27]. Asociada a esta simetría, aparece un nuevo tipo de excitación en el sistema, que consiste en una pared de dominio entre estados fundamentales degenerados. La excitación a cierta temperatura de este tipo de defectos lleva al sistema a un estado desordenado a través de una transición de tipo Ising. Las transiciones que ocurren en los sistemas frustrados son más complejas que la del caso no frustrado, dado que compiten ambos tipos de excitaciones: vórtices y paredes de dominio. Ha habido muchos estudios numéricos sobre el modelo XY frustrado en redes triangulares y cuadradas, pero no se ha llegado a ninguna conclusión definitiva sobre la naturaleza de la transición. La controversia surge sobre si existe una única transición o dos transiciones. Lo único claro es que si no hay sólo una transición las dos transiciones ocurren a temperaturas muy cercanas. Una imagen intuitiva presenta a las paredes de dominio como responsables de un apantallamiento de las interacciones vórtice-antivórtice, conduciendo a su disociación a la misma o casi la misma temperatura que la transición de tipo Ising. Un escenario análogo aparece en el estudio del sistema a otros valores no tan sencillos de la frustración, para los cuales parecen encontrarse evidencias de la existencia de transiciones de primer orden [28]. Un exhaustivo trabajo de Franz y Teitel [29] sobre las transiciones de fase a valores de  $f = p/q$  con altos  $q$  (en especial cerca de  $f = 0$  y  $f = 1/2$ ) parece mostrar la existencia de una abrupta transición de primer orden a  $T_c(1/q) \sim 1/q$

de la red conmensurada anclada a una red triangular flotante de vórtices que no está anclada respecto al potencial periódico. El estado es similar al de la red bidimensional de vórtices en una película uniforme. A esta temperatura ocurriría la transición de desanclaje, que marca la pérdida de superconductividad en la red y separa una fase sólida anclada de una fase sólida flotante. A una temperatura mayor  $T_m$  (independiente de  $q$  cuando  $1/q \rightarrow 0$ ) esta fase sufre una nueva transición a una fase isotropa líquida de vórtices. Por último, recientemente Olsson [30] afirma encontrar en sus simulaciones de Monte Carlo del modelo XY totalmente frustrado, una transición de Kosterlitz-Thouless seguida por una transición Ising ordinaria con  $T_c - T_{KT} \simeq 0,006$  y  $T_c \simeq 0,452$ .

La descripción detallada del comportamiento termodinámico del sistema XY frustrado para distintos valores (rationales e irracionales) de  $f$  es uno de los problemas más intrigantes de la Mecánica Estadística clásica. Dejando a un lado los posibles mecanismos que conducen a las transiciones a temperaturas finitas entre distintas fases, como vemos, ni siquiera existe una estrategia clara para la determinación de todos los estados fundamentales posibles del hamiltoniano (5.18) ordenado (esto es,  $J_{ij} = J$  para todas las uniones de la red) a cualquier valor de  $f$  y  $T = 0$ .

En la presencia de un campo magnético externo, las interacciones repulsivas entre los vórtices compiten con el potencial de anclaje de la red, que favorece una determinada organización ordenada de los vórtices formando diferentes fases moduladas. Los primeros intentos de resolver el problema condujeron a algunas conjeturas que luego se han visto rechazadas. Así, Teitel y Jayaprakash [25] buscan los estados fundamentales de algunos casos conmensurados sencillos para una red cuadrada de uniones y frustración racional  $f = p/q$  (figura 5.2). Asumen que el estado fundamental consiste en una red periódica de vórtices con densidad  $\omega = f$  y celda unidad  $q \times q$ . Sus resultados se basan en simulaciones Monte-Carlo en redes  $q \times q$  con condiciones de contorno periódicas.

Más tarde Halsey [31] propone una estructura cuasiunidimensional para los estados fundamentales, basada en paredes de dominio diagonales. Son los “estados escalera”. Asimismo propone una determinada dependencia funcional para la energía y la intensidad crítica de los estados fundamentales, que resulta ser fuertemente discontinua en  $f$ . Este resultado, aunque interesante, acarrea problemas serios para la interpretación de los datos experimentales. Sin embargo, más tarde, Teitel [32] encontró en sus simulaciones estados de menor energía que los propuestos por Halsey. Estos están caracterizados por la aparición de vacantes y paredes de dominio diagonales ondulantes. La conclusión es que los estados de Halsey sólo son aceptables como los verdaderos estados fundamentales en los casos de los valores racionales más sencillos de  $f$ .

Resultados de simulaciones Monte-Carlo realizadas por Kolahchi y Stra-

ley [33] dan evidencias de la existencia de estados fundamentales con celda unidad  $2q \times 2q$  cuando  $f$  es un valor cercano a un racional sencillo. En este punto conviene señalar que en cada caso se habla de estado fundamental como aquel estado con menor energía encontrado, dejándose una puerta abierta a la posibilidad de la existencia de otras configuraciones de menor energía.

En 1992 Vallat y Beck [34] demuestran rigurosamente que en el caso de una red regular la energía de los estados fundamentales es una función continua de  $f$ . También discuten el comportamiento de la intensidad crítica y demuestran que esta es siempre mayor que cero en el caso de un potencial de interacción parabólico a trozos.

Por último, nuevos estudios Monte-Carlo llevados a cabo por Straley y Barnett [35] conducen a una mejor comprensión del diagrama de fases a  $T = 0$ . Ellos afirman además que las interacciones de largo alcance entre los vórtices aseguran que la densidad de vórtices  $\omega$  es exactamente igual al flujo del campo magnético aplicado,  $f$ .

Lo expuesto anteriormente se refiere a estudios sobre el diagrama de fases en el caso de una red cuadrada de uniones Josephson. También interesa el estudio de otros tipos de redes, en particular el caso de redes triangulares [36]. En estas redes se encuentra que cuando  $f = 1/3$  existe una amplia familia de estados fundamentales no relacionados por simetría entre sí, que surgen de la existencia de paredes de dominio de energía 0, lo que conlleva propiedades termodinámicas bastante especiales.

En el capítulo siguiente (capítulos 6) presentaremos una caracterización rigurosa del diagrama de fases de una red de uniones Josephson frustrada y con la distribución geométrica de una escalera [37, 38, 39], un sistema que está recibiendo considerable atención en los últimos años. En el capítulo 7 veremos como la inclusión de campos magnéticos inducidos por las corrientes en la red modifica la descripción de los estados fundamentales de este sistema [40].

### 5.2.2. Redes de uniones Josephson sometidas a corrientes externas

Los primeros estudios sobre redes bidimensionales de uniones Josephson se centraron fundamentalmente en las propiedades de equilibrio del sistema. Sin embargo, más tarde cobraron interés las propiedades dinámicas de las redes en presencia de corrientes externas, materia sobre la que se centra, aún hoy día, gran parte del trabajo sobre estos sistemas [16, 17]

La introducción de una corriente externa permite estudiar los valores de la corriente crítica de la red a diferentes temperaturas [41]. Asimismo, las corrien-

tes inciden en las propiedades de equilibrio del sistema; en particular, disminuyen el valor de la temperatura a la cual tiene lugar la transición superconductor-normal de la red. Esta transición, en el caso de corrientes externas pequeñas, es esencialmente la misma que en ausencia de corrientes. Las corrientes contribuyen al desligamiento de los pares vórtice-antivórtice generados térmicamente, lo que produce una disminución de la temperatura Kosterlitz-Thouless de la transición. De este modo, corrientes pequeñas no cambian la naturaleza de la transición; sin embargo, corrientes suficientemente grandes conducen al sistema al régimen resistivo incluso en el límite de  $T = 0$ , destruyendo la transición de fase. La transición de desanclaje a  $T = 0$  de la red en ausencia de campo puede ser reducida a la transición de desanclaje de una única unión, que ha sido estudiada con detalle en la sección 3.3.1 en el marco del modelo Frenkel-Kontorova. Esta transición es de carácter no lineal. A temperaturas finitas aparece una nueva contribución a la curva, debida a la existencia de vórtices libres excitados térmicamente que tienen un comportamiento resistivo que básicamente suaviza la transición.

El modelo más sencillo utilizado para analizar el comportamiento dinámico de las redes consiste en la generalización [41, 42, 43, 44] a redes bidimensionales del modelo RSJ (ecuación (5.11)) de la dinámica de una unión. En este esquema la corriente entre dos islas superconductoras vecinas  $i$  y  $j$  está dada por

$$I_{ij} = I_{c;ij} \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_j - A_{ij}) + \frac{V_{ij}}{R_{ij}}, \quad (5.22)$$

donde  $I_{c;ij}$  y  $R_{ij}$  son la corriente crítica y la resistencia de cada unión – en lo que sigue consideraremos que ambos parámetros valen lo mismo para todas las uniones de la red. – Al escribir (5.22) estamos asumiendo que la red está fabricada con uniones en las cuales los efectos capacitivos son despreciables: este es el caso de las uniones SNS (superconductor – metal normal – superconductor), como los casos de Nb-Au-Nb o Nb-Cu-Nb que han sido estudiados experimentalmente [45]; pero no el de las uniones SIS (superconductor – aislante – superconductor).  $V_{ij}$  es la caída de voltaje entre islas superconductoras vecinas, y está directamente relacionado con las diferencias de fases invariantes gauge,

$$\frac{d}{dt}(\theta_i - \theta_j - A_{ij}) = \frac{2e}{\hbar} V_{ij}. \quad (5.23)$$

Las ecuaciones quedan completadas por la condición de la conservación de la corriente en cada nodo, que incluyen la presencia de corrientes externas:

$$\sum_j I_{ij} = I_{i,\text{ext}}. \quad (5.24)$$

Ya mencionamos anteriormente que uno de los temas que despertó mayor interés en este campo fue la posibilidad de construir dispositivos de alta fre-

cuencia basados en la oscilación coherente de toda la red. Dicha posibilidad está basada en los efectos de **sincronización de fase** en las uniones Josephson. Cuando una única unión es alimentada por una corriente con componentes continua y alterna de la forma

$$I(t) = I_{\text{dc}} + I_{\text{ac}} \text{sen}\omega_{\text{ac}}t, \quad (5.25)$$

la dinámica de la diferencia de fases está descrita por la ecuación (5.16). Entonces la frecuencia característica del sistema, que está asociada a la rotación de la diferencia de fases, se sincroniza con la frecuencia impuesta por la corriente externa:  $\langle \frac{d\varphi}{dt} \rangle = n\omega_{\text{ac}}$  con  $n$  entero, lo que produce peldaños – los *Shapiro steps* – en la curva intensidad-voltaje (ver ecuación (5.17)).

Gran parte de los experimentos, las simulaciones numéricas y los estudios teóricos de redes de uniones Josephson se han centrado en el comportamiento de las redes sometidas a este tipo de corrientes (el artículo de revisión de Domínguez y José [46] incluye una extensa lista de referencias a estos trabajos).

Cuando una red cuadrada de  $N \times N$  uniones Josephson, en ausencia de campo, es alimentada por una corriente externa de la forma (5.25) se encuentran ***Shapiro steps gigantes*** a valores del voltaje

$$V_n = n \frac{N\hbar\omega_{\text{ac}}}{2e}, \quad (5.26)$$

donde  $V_n$  mide el voltaje entre los dos extremos opuestos de la red conectados a la fuente de intensidad. En este caso cada unión en la red se comporta de un modo totalmente análogo a como lo hace una única unión y en los peldaños todo el sistema oscila de modo coherente lo que resulta en la sincronización de la red a valores del voltaje  $N$  veces mayores que los encontrados en el caso de una unión (ecuación 5.17). El hecho de que se hayan observado *Shapiro steps gigantes* incluso en redes imperfectas indica que el fenómeno de la sincronización es bastante robusto [47]. Esto, unido a algunas otras ventajas técnicas del empleo de redes bidimensionales en lugar de otros sistemas (por ejemplo  $N$  uniones idénticas conectadas en serie) condujo a la construcción y estudio de dispositivos de emisión coherente basados en redes bidimensionales de uniones Josephson [48].

En la presencia de un campo magnético externo  $f = p/q$  los efectos de conmensurabilidad entre la red de vórtices y la red de uniones Josephson conducen a la aparición de nuevos peldaños, los ***Shapiro steps gigantes fraccionados***, a valores del voltaje

$$V_{n/q} = \frac{n}{q} \frac{N\hbar\omega_{\text{ac}}}{2e}. \quad (5.27)$$

Estos nuevos peldaños están asociados con la oscilación coherente de la red de vórtices del estado fundamental estático. Los peldaños se entienden como

el desplazamiento, sincronizado con la fuerza externa, de la red de vórtices de uno a otro de los  $q$  estados fundamentales degenerados relacionados entre sí por operaciones de simetría.

Tanto los *Shapiro steps* gigantes como los Shapiro steps gigantes fraccionados han sido observados experimentalmente [49, 50, 51] en diversos sistemas y encuentran explicación dentro del marco del modelo RSJ de uniones Josephson.

Posteriores experimentos en este tipo de redes mostraron la existencia de peldaños inesperados, a valores del voltaje  $V_{\frac{n}{qs}}$  ( $n, q, s$  números enteros), los ***Shapiro steps* subharmónicos**. La aparición de peldaños subharmónicos fue una sorpresa dado que es bien sabido que una única unión de capacidad despreciable no muestra subharmónicos en la curva IV [52, 53]. Los primeros resultados numéricos en el marco del modelo RSJ dieron resultados controvertidos: aquellas simulaciones en las que se emplearon condiciones de contorno libres mostraban claras evidencias de subharmónicos, en oposición a la ausencia de éstos cuando las simulaciones se realizaron empleando condiciones de contorno periódicas. Por esto, en un principio la existencia de éstos se atribuyó a las condiciones de frontera de las redes. En todo caso ninguna simulación encontró subharmónicos en las redes no frustradas ( $f = 0$ ). La manifestación de subharmónicos también en experimentos realizados en la ausencia de campo magnético, contribuyó a crear cierto desconcierto sobre el origen y la naturaleza de estos. Simulaciones posteriores, más detalladas, mostraron la existencia de una completa estructura de subharmónicos (incluso se llega a hablar de una Escalera del Diablo [54, 55]) en las curvas IV de los sistemas frustrados cuando se emplean cualquiera de los dos tipos de condiciones de contorno propuestas. Sin embargo, las simulaciones no encontraron existencia de éstos en los casos de ausencia de campo externo. La existencia de subharmónicos en las redes frustradas y su no existencia en los casos no frustrados, coincide con lo encontrado en el modelo Frenkel-Kontorova (capítulo 4 de esta memoria) y clarifica que el análisis de este problema en el caso de un sistema con pocos grados de libertad no puede ser reducido al caso del sistema con sólo un grado de libertad.

Aún queda por dar explicación a los experimentos que mostraban la existencia de subharmónicos a campo externo nulo. Estos peldaños no encuentran explicación dentro del modelo RSJ, que había resultado eficaz para dar cuenta del resto de los fenómenos de sincronización de fase en redes de uniones Josephson. D. Domínguez y J. V. José [46, 56] identifican los subharmónicos con la existencia de un estado (*asymmetric coherent vortex state*, ACVS) dinámico especial cuyo origen es la ruptura, por el mecanismo que sea – ellos estudian dos: desorden y campos inducidos en los límites de la red, – de la invariancia traslacional del sistema, y que desaparece cuando cualquiera de las dos con-

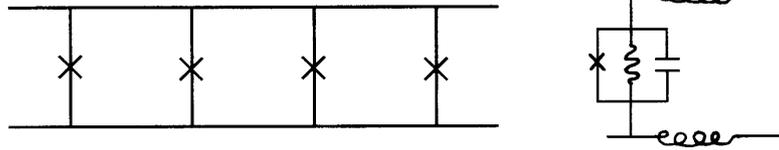


Figura 5.3: La figura representa la red unidimensional de uniones Josephson (representadas por cruces) conectadas en paralelo. Dicha red es modelada según el circuito mostrado a la derecha [58] lo que conduce al conjunto de ecuaciones (5.28).

tribuciones a la corriente externa (la continua o la alterna) es apagada. Las corrientes fluyendo en la red (con  $f = 0$ ) producen una distribución antisimétrica del campo magnético inducido, que es máximo en los extremos de la red. Esta distribución rompe la invariancia traslacional de la red y sirve para generar el estado dinámico responsable de la existencia de los subarmónicos. La presencia de los campos magnéticos inducidos en aquellos sistemas en los cuales la longitud de penetración no es muy grande, es suficientemente importante para variar el esquema microscópico de comprensión de los *Shapiro steps* gigantes fraccionados [46].

### 5.3. Red unidimensional de uniones Josephson en paralelo

Antes de finalizar este capítulo introductorio a las redes de uniones Josephson vamos a describir la red unidimensional de uniones de tipo túnel conectadas en paralelo (ver figura 5.3). La razón es que las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de la red son las del modelo Frenkel-Kontorova amortiguado [57, 58, 59, 60]:

$$\frac{d^2\varphi_n}{dt^2} + \alpha \frac{d\varphi_n}{dt} + \sin\varphi_n + \gamma - \frac{1}{a^2}(\varphi_{n-1} - 2\varphi_n + \varphi_{n+1}) = 0. \quad (5.28)$$

donde  $a$  es el parámetro de discretitud,  $\alpha$  la constante de amortiguamiento,  $\gamma$  la corriente impulsora normalizada, y  $\varphi_n$  la diferencia de fases entre ambos lados de la  $n$ -ésima unión. Además esta configuración es una versión discreta de la línea de transmisión de unión Josephson (*Josephson-junction transmission line*) – una unión Josephson larga – cuya dinámica está descrita por la ecuación de sine-Gordon perturbada [61], de ahí que al sistema de ecuaciones (5.28) también se le llame sine-Gordon discreto.

Estas redes pueden fabricarse con una geometría anular, de modo que en

(5.28) se impongan condiciones de contorno periódicas. Se ha prestado una atención especial al estudio de la dinámica de fluxones y la radiación producida por su movimiento alrededor de la red. La inclusión de una corriente alterna adicional (entonces  $\gamma$  es una función periódica del tiempo en la ecuación (5.28)) introduce una nueva escala de tiempo en el problema, incrementando en gran medida su complejidad. En los últimos años han aparecido muchos trabajos dedicados a estudios numéricos y aproximaciones analíticas a estas ecuaciones. La enorme variedad de fenómenos que estas ecuaciones muestran constituye uno de los mayores retos en el campo de los sistemas dinámicos no lineales espacialmente extendidos, que presumiblemente concentrará gran atención en los años venideros. Dos artículos recientes de revisión sobre la dinámica del modelo Frenkel-Kontorova (o modelo sine-Gordon discreto) son los trabajos de Floría y Mazo [62] sobre la dinámica en el límite sobreamortiguado, y el de Kivshar [63] sobre la dinámica en el límite subamortiguado.

## Capítulo 6

# Propiedades de equilibrio de la escalera de uniones Josephson

### 6.1. El modelo

En esta sección abordamos el problema de la determinación de los estados fundamentales de una red anisótropa ( $J_{ij} = J_\alpha$  donde  $\alpha = x, y$ ) de uniones Josephson con la geometría de una escalera (figura 6.1) y en presencia de un campo magnético externo  $\vec{H}$  perpendicular al plano de la escalera. El objetivo es presentar una descripción rigurosa de los estados fundamentales del sistema ( $T = 0$ ) y las transiciones entre estos, problema que, como hemos visto en la sección anterior, no está resuelto para la red bidimensional. La peculiar geometría de la escalera, que se manifiesta en las condiciones de frontera libre para los brazos superior e inferior de la misma, se traduce en un diagrama de fases muy diferente al del caso bidimensional. En particular, la densidad de vórtices del estado fundamental es, en general, diferente de la frustración.

Anteriormente a nuestro trabajo [37], Kardar primero [64, 65] y más tarde Granato [66, 67, 68, 69, 70] han estudiado problemas de equilibrio en la escalera de uniones Josephson. Kardar identifica el modelo de Frenkel-Kontorova y la escalera de uniones Josephson con un gas de Coulomb dual. Para ello necesita hacer varias aproximaciones al potencial de interacción. Posteriormente se ocupa del caso de uniones con capacidad muy pequeña, en las que los efectos cuánticos son importantes. Mantiene su aproximación al potencial de interacción, lo que le lleva a estudiar el sistema en relación con el modelo sine-Gordon cuántico. Los trabajos de Granato se dedican a estudiar las transiciones de esta versión cuántica del modelo XY, a distintos valores de la frustración.

En este trabajo nos mantendremos siempre en la aproximación clásica a la

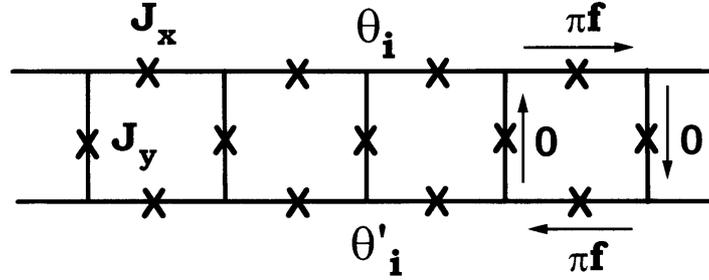


Figura 6.1: Representación esquemática de la escalera de uniones Josephson. La ecuación 6.2 da el hamiltoniano de interacción de este sistema

red de uniones Josephson. Usamos la descripción dada en la sección 5.2 de la energía de la red. El hamiltoniano (5.18) describe la energía potencial del sistema como suma de las energías de acoplamiento Josephson entre islas vecinas. En esta aproximación estamos despreciando los efectos de apantallamiento del campo debidos a las corrientes superconductoras en la red, lo que es válido para longitudes de penetración de la red mucho mayores que el tamaño de la celdilla. Por esto, los valores de  $A_{ij}$  en (5.18) están totalmente determinados por el campo externo y la *gauge* elegida: en ausencia de campos inducidos el campo magnético externo penetra totalmente la red, en esta situación no hay cuantización del flujo y la densidad de vórtices de una configuración (calculado a partir de la ecuación (5.21)) no es una densidad de cuantos de flujo, sino de cuantos de fluxoide. En la siguiente sección veremos cómo la consideración de campos magnéticos inducidos por las corrientes cambia esta descripción.

Para calcular el valor de  $A_{ij}$  en cada unión es necesario fijar una *gauge* para el cálculo del potencial vector. Es particularmente conveniente considerar un potencial vector paralelo al eje longitudinal de la escalera y con sentido opuesto en cada rama de la misma (ver figura 6.1):  $\vec{A} = Hy\hat{x}$  (se cumple que  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{H} = -H\vec{k}$ ), siendo  $(ia, \frac{a}{2})$  la coordenada de una isla del brazo superior y  $(ia, -\frac{a}{2})$  la coordenada de una isla del brazo inferior. Calculando los valores de  $A_{ij}$  según la ecuación (5.19) obtenemos:

$$A_{ij} = \begin{cases} \pi f & \text{si } i = (ia, \frac{a}{2}), \quad j = ((i+1)a, \frac{a}{2}) \\ -\pi f & \text{si } i = (ia, -\frac{a}{2}), \quad j = ((i+1)a, -\frac{a}{2}) \\ 0 & \text{si } i = (ia, \frac{a}{2}), \quad j = (ia, -\frac{a}{2}) \end{cases} \quad (6.1)$$

donde  $f = Ha^2/\Phi_0$ . Puede verse que se satisface la ecuación (5.20).

El hamiltoniano que describe la escalera anisótropa de uniones Josephson en presencia de un campo magnético es:

$$H = -\sum_i [J_x \cos(\theta_i - \theta_{i+1} - \pi f) + J_x \cos(\theta'_i - \theta'_{i+1} + \pi f) + J_y \cos(\theta_i - \theta'_i)] \quad (6.2)$$

donde se ha elegido  $\theta_i$  para designar a la fase del parámetro de orden superconductor en una isla de la rama superior y  $\theta'_i$  para las islas de la rama inferior. El hamiltoniano (6.2) es invariante por rotación uniforme de todas las fases. Además encontramos otras dos simetrías importantes:

- Es periódico en  $f$ , con periodo igual a 1. La configuración  $\{\theta_i, \theta'_i\}$  cuando  $f = f_0$  es equivalente a la configuración  $\{\theta_i + i\pi, \theta'_i + i\pi\}$  cuando  $f = f_0 + 1$ .
- Es antisimétrico bajo reflexión en  $f = 0$ . La configuración  $\{\theta_i, \theta'_i\}$  cuando  $f = f_0$  es equivalente a la configuración  $\{-\theta_i, -\theta'_i\}$  cuando  $f = -f_0$ .

Estas dos últimas simetrías del sistema permiten que nos restrinjamos al estudio del modelo para valores de  $f$  dentro del intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$ .

## 6.2. Estados fundamentales

Es conveniente reescribir el hamiltoniano (6.2) en términos de dos nuevos conjuntos de variables, centro de masas y coordenadas relativas:  $\chi_i = \frac{\theta_i + \theta'_i}{2}$  y  $\varphi_i = \frac{\theta_i - \theta'_i}{2}$ , que definimos imponiendo  $\cos(\varphi_i - \varphi_{i+1} - \pi f) > 0$  para todos los  $i$ . Esta condición es alcanzable de la consideración de  $\theta_i$  o  $\theta_i + 2\pi$ , estados que son físicamente equivalentes pero corresponden a valores de  $\varphi_i$  desplazados en  $\pi$ . Con este cambio la ecuación (6.2) adopta la siguiente expresión:

$$H = -\sum_i [2J_x \cos(\chi_i - \chi_{i+1}) \cos(\varphi_i - \varphi_{i+1} - \pi f) + J_y \cos(2\varphi_i)] \quad (6.3)$$

El nuevo hamiltoniano presenta la ventaja de que las nuevas variables están desacopladas. Ya que  $\cos(\varphi_i - \varphi_{i+1} - \pi f) > 0$  para todo  $i$ , es fácil ver que las configuraciones de fase que minimizan (6.3) cumplen  $\chi_i - \chi_{i+1} = 0$ ; esto es  $\chi_i = \text{cte.}$ , una constante arbitraria (independiente de  $i$ ). La simetría del sistema bajo rotación uniforme de todas las fases nos permite fijar arbitrariamente esta constante. Sea  $\chi_i = 0$ , entonces  $\theta'_i = -\theta_i$  y  $\varphi_i = \theta_i$ . Esta nueva simetría de los estados fundamentales entre las fases en ambos brazos de la escalera, conduce a la equivalencia entre (6.2) y (6.4) en lo que respecta a los estados fundamentales y otros mínimos locales de la energía:

$$H = -J_x \sum_i [2 \cos(\theta_i - \theta_{i+1} - \pi f) + h \cos(2\theta_i)] \quad (6.4)$$

con  $h = J_y/J_x$ , el parámetro que describe la anisotropía.

Dada la simetría del hamiltoniano bajo rotación uniforme de todas las fases, el conjunto de estados fundamentales del sistema es un continuo. Sin embargo,

cuando escribimos (6.4) nos estamos restringiendo a algunos de ellos, asociados a  $\theta'_i = -\theta_i$ , que corresponde a favorecer, último término de (6.4),  $\theta_i = 0$  o  $\pi$ .

El hamiltoniano (6.4) describe un modelo XY quiral unidimensional en un campo de anisotropía. Ha sido propuesto y estudiado [71, 72, 73] para describir algunos sistemas casi unidimensionales, como ondas de densidad de espín, de densidad de carga y polímeros helicoidales. Como vimos en el capítulo anterior, entre la variedad de diferentes modelos introducidos para estudiar estos sistemas de fases moduladas, el modelo de Frenkel-Kontorova es uno de los más estudiados. La diferencia fundamental entre el modelo Frenkel-Kontorova estándar (2.2) y este modelo XY (6.4) es el signo de la convexidad del potencial de interacción entre vecinos. Las propiedades de equilibrio de estos modelos dependen crucialmente de la convexidad de este potencial [72]. Esta es la razón por la que, en principio, este modelo no pertenece a una clase general de modelos unidimensionales de estructuras moduladas, estudiados por Aubry [74], cuyas propiedades de estado fundamental están perfectamente caracterizadas. Sin embargo, puede probarse [75, 76] que los estados fundamentales de (6.4) nunca hacen uso de la parte no convexa del potencial de interacción, por lo que este modelo XY quiral es uno de los casos especiales de modelos no convexos cuyos estados fundamentales son equivalentes a los de los modelos convexos del tipo Frenkel-Kontorova estándar, estudiados por Aubry [74]. Por supuesto, la situación podría ser muy diferente si se consideran otros aspectos del modelo que no sean los estados fundamentales.

A continuación vamos a presentar un breve esquema de los argumentos que conducen a la equivalencia de los estados fundamentales del modelo (6.4) y el conjunto de modelos convexos estudiados por Aubry: escribamos (6.4) del modo semejante al empleado en el capítulo 2 al introducir los modelos Frenkel-Kontorova (2.1)

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_j [V(u_j) + W(u_{j+1} - u_j)] \\
 V(u_j) &= -J_y \cos(2\pi u_j) \\
 W(u_{j+1} - u_j) &= W(y) = -2J_x \cos(\pi u_{j+1} - \pi u_j + \pi f).
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

Nos preguntamos sobre las configuraciones  $\{u_j\}$  que son el estado fundamental de (6.5) para unos determinados valores de los parámetros del sistema. Siguiendo a Chou y Griffiths [75] vamos a llegar a la siguiente conclusión: en la condición de ser la configuración estado fundamental, el potencial de interacción  $W(y)$  en (6.5) puede ser reemplazado por

$$W^*(y) = \min_m W(m + y),
 \tag{6.6}$$

donde  $m$  es igual a 0 o a 1. Vamos a ver que esto es así. Sea  $\{u_j\}$  la configuración estado fundamental y supongamos que para algún  $j = p$  se tiene que  $W(y_p) >$

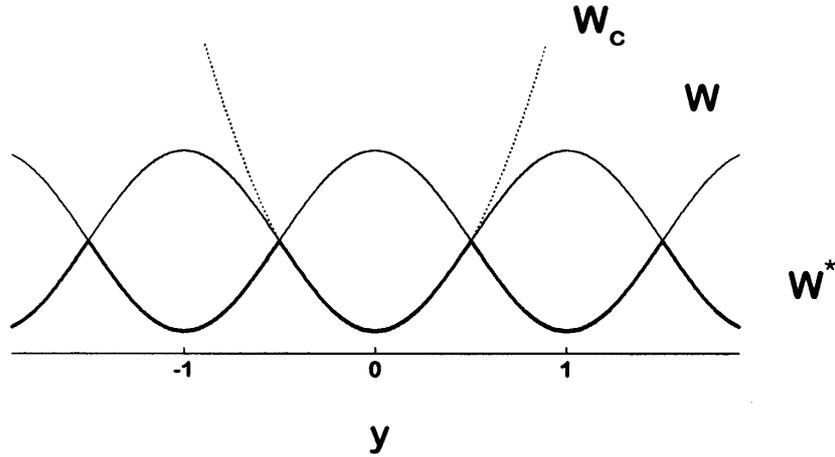


Figura 6.2: La figura muestra las tres funciones  $W$ ,  $W^*$  y  $W_c$  que aparecen en la discusión de la equivalencia de los estados fundamentales del modelo (7.4) y otros modelos convexos.

$W^*(y_p)$  lo que impediría reemplazar  $W(y)$  por  $W^*(y)$ . Si esto es así, siempre podemos construir la configuración  $\{u'_j\}$  con  $u'_j = u_j$  si  $j < p$  y  $u'_j = u_j - 1$  si  $j \geq p$ . En este caso  $y'_j = y_j$  para todo  $j \neq p$  y  $y'_p = y_p - 1$ . Entonces, vemos que  $W(y'_p) = W(y_p - 1) = W^*(y_p) < W(y_p)$  lo que nos dice que la configuración  $\{u_j\}$  no es el estado fundamental.

Dicho de otro modo, encontramos que los estados fundamentales de (6.4) son tales que los valores de  $u_j - u_{j-1}$  siempre descansan en la zona convexa del potencial de interacción  $W$ . La figura 6.2 muestra el resultado de calcular  $W^*(y)$  para el modelo (6.5). Las curvas más finas muestran  $W(y)$  y  $W(y+1)$  para un caso  $f = 0$ , mientras que la curva más gruesa muestra  $W^*(y)$ , que como vemos, es una función convexa “a trozos”. Sin embargo esta misma función puede ser obtenida a partir de un potencial de interacción  $W_c(y)$  convexo (línea de puntos en la figura). La equivalencia entre los estados fundamentales de  $W$ ,  $W^*$  y  $W_c$  muestran que las propiedades de los estados fundamentales del modelo XY quiral anisótropo definido por (6.4) son las mismas que las de los estados fundamentales de la clase de modelos convexos estudiados por Aubry. Este resultado se extiende a todas aquellas configuraciones de mínima energía (capítulo 2) que no visiten la parte no convexa del potencial de interacción.

La física esencial del sistema es la competición entre el término de anisotropía, que deriva de los acoplamientos Josephson en las uniones verticales y tiende a fijar el valor de las fases a  $0$  o  $\pi$ ; y el término de interacción, con origen en las uniones horizontales, que tiende a fijar  $\theta_i - \theta_{i+1} = \pi f$ ; esto es, intenta conservar el valor de la densidad de vórtices igual al valor de la frustración,

$\omega = f$ . Las configuraciones de fase de estado fundamental a un valor dado de los parámetros del modelo  $(h, f)$  son el resultado del compromiso entre las dos tendencias que compiten. Para calcularlos numéricamente usamos el método de los potenciales efectivos [75, 77, 78, 79] que es el método estándar para obtener el diagrama de fases de este tipo de modelos.

El método de los potenciales efectivos es un método exacto en la determinación del estado fundamental, dentro de la discretización en la variable estudiada (la fase  $\theta_i$  en nuestro caso), que es aplicable a cualquier variante del modelo Frenkel-Kontorova o similares, sin necesidad de imponer convexidad en el potencial de interacción. Proporciona una aplicación definida sobre los valores de la variable a partir de la que se obtiene el estado fundamental del sistema e información sobre las discommensuraciones elementales (ver sección 2.2), su energía de formación y desanclaje. En grandes rasgos, podemos decir que se basa en calcular el, así llamado, “**Potencial Efectivo** que experimenta una determinada partícula de una cadena infinita, cuando se fija su posición a un valor cualquiera dejando el resto de la cadena, que relaje hacia el estado fundamental. Ese Potencial Efectivo es precisamente aquel del que deriva la fuerza que debemos ejercer sobre la partícula para mantenerla en esa posición.” [79]

Como se ha dicho, el método es exacto dentro de la discretización en la variable empleada. Cuando se usa en combinación con otros métodos de determinación de mínimos locales de la energía – soluciones estables a la condición de equilibrio de fuerzas,  $\partial H(x_i)/\partial x_i = 0$ , o técnicas de relajación – da la configuración de estado fundamental con una precisión arbitraria. El método de potenciales efectivos da el estado fundamental en el límite termodinámico del sistema, de modo que no hace falta imponer condiciones de contorno. En otros métodos de relajación y de Newton y en las simulaciones de dinámica molecular es necesario usar condiciones de contorno periódicas en la dirección longitudinal compatibles con la commensurabilidad del estado fundamental, que es determinada exactamente por el método de los potenciales efectivos.

El método de potenciales efectivos calcula la configuración de fases  $\{\theta_i\}$  que es estado fundamental de (6.4) a un valor determinado de  $h$  y de  $f$ . Entonces, como hemos visto, el estado fundamental de (6.2) corresponde a la configuración  $\{\theta_i, \theta'_i\}$ , con  $\theta'_i = -\theta_i$ . Las fases  $\theta$  y  $\theta'$  no son cantidades invariantes *gauge*, por lo que dependen de la elección particular del *gauge* que hemos hecho. Las cantidades físicamente interesantes son las diferencias de fases invariantes *gauge*,  $\gamma_{ij} = \theta_i - \theta_j - A_{ij}$ , en cada unión, con ellas podemos calcular las corrientes superconductoras (5.1), los voltajes (5.2) y la vorticidad (5.21) de cada celda.

La figura 6.3 presenta el resultado del cálculo del diagrama de fases de los estados fundamentales de la escalera, donde, por claridad, sólo mostramos

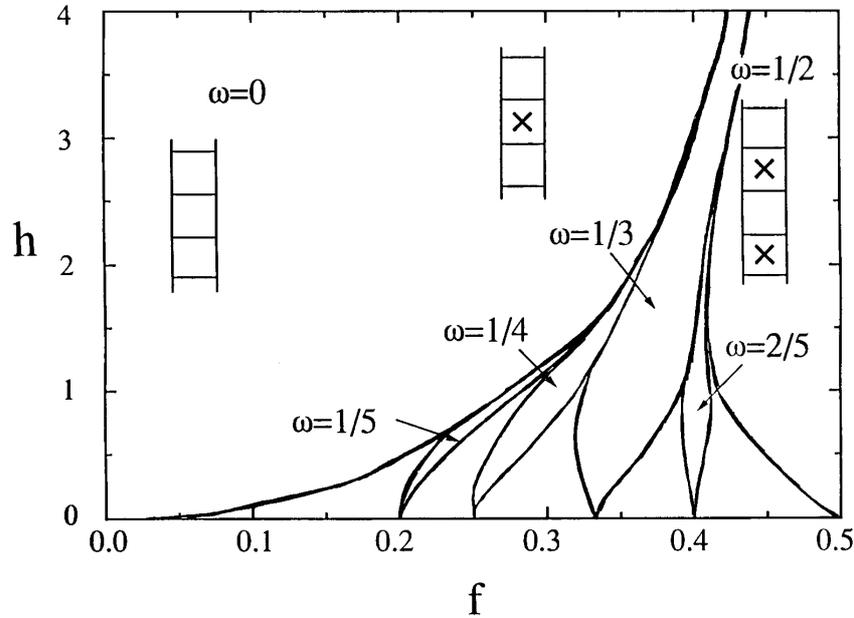


Figura 6.3: Diagrama de fases de la escalera calculado usando el método de los potenciales efectivos. Cada fase está definida por el valor de  $\omega$  y, por claridad, sólo representamos algunas de las líneas de transición.

algunas de las líneas de transición entre fases diferentes. Caracterizamos cada fase por el valor de la densidad de vórtices,  $\omega$ . La figura 6.4 muestra, como predicen los argumentos rigurosos mencionados anteriormente, que a un valor dado de  $h$ ,  $\omega(f)$  es una Escalera de Diablo: una función continua pero que en cada valor racional de  $\omega$  muestra un intervalo de valores de  $f$  para los cuales  $\omega$  es constante.

Este diagrama de fases es muy diferente del de la red isótropa bidimensional, en el que se asume que no existen intervalos de estabilidad en los valores racionales de  $\omega$ , y  $\omega = f$  en todo el diagrama. En el caso de la escalera, sin embargo, la densidad de vórtices no es igual al campo. Dentro de cada una de las lenguas del diagrama la configuración que es estado fundamental cambia con la frustración y la anisotropía pero sin que cambie  $\omega$ .

Físicamente, la reacción del sistema a un cambio del campo externo consiste en una variación de las supercorrientes que compensan los cambios en el campo externo sin que varíe la densidad de vórtices (fluxoides) en la red. En el caso de un estado fundamental y densidad de vórtices nula es tentador hablar de este efecto como un tipo de efecto Meissner. Sin embargo el campo magnético penetra totalmente la red, no hay expulsión de flujo, y por eso el valor de  $f$  para el cual la fase de estado fundamental cambia no puede ser interpretado como

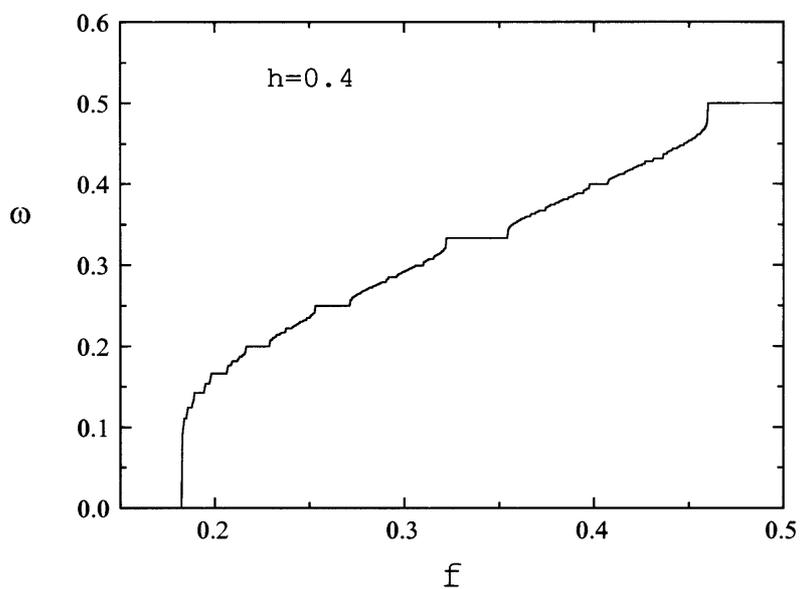


Figura 6.4: Función  $\omega(f)$  de los estados fundamentales de la escalera de uniones Josephson a  $h = 0,4$ . La función es una Escalera del Diablo: una curva continua con un peldaño para cada valor racional de  $\omega$ .

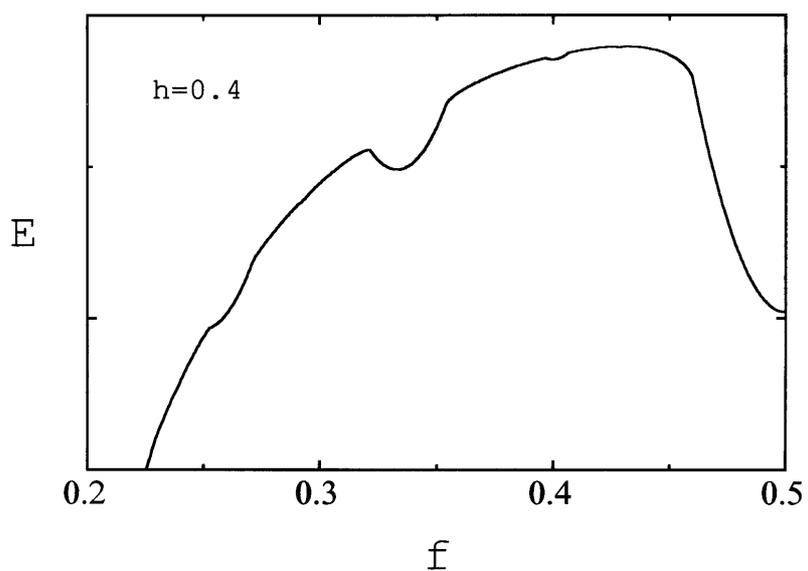


Figura 6.5: Energía del estado fundamental (figura 6.4) como función del campo externo,  $h = 0,4$ .

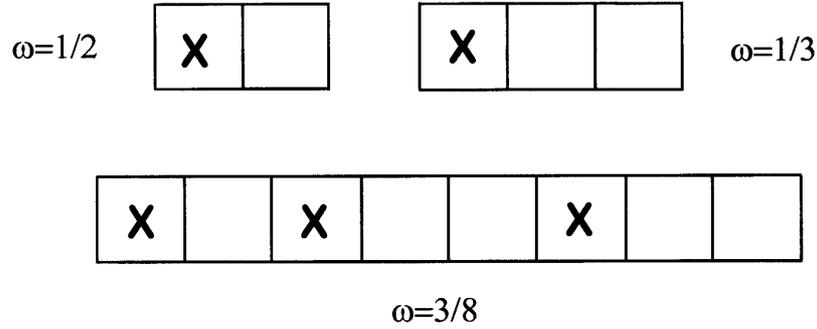


Figura 6.6: Varios ejemplos de la distribución de vórtices en estados fundamentales de la escalera de uniones Josephson.

el análogo al campo crítico de superconductores: es la densidad de fluxoides la que cambia, no la densidad de flujo.

Aunque  $\omega(f)$  muestra un aspecto muy complejo, la energía de los estados fundamentales es una función continua de la frustración (ver figura 6.5). Este resultado fue probado rigurosamente por Vallat y Beck [34] en redes bidimensionales y es también válido en la escalera.

La configuración de vórtices  $n_i$  correspondiente al estado fundamental de densidad  $\omega (< 1)$  está explícitamente dada por

$$n_i = \Xi_\omega(i\omega + \alpha) \quad (6.7)$$

con  $\alpha$  una constante arbitraria y  $\Xi_\omega(x) = \Xi_\omega(x + 1)$  la función característica del intervalo  $[0, \omega)$ :

$$\Xi_\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \omega \\ 0 & \text{si } \omega \leq x < 1 \end{cases} \quad (6.8)$$

Si  $\omega$  es racional,  $n_i$  es una secuencia periódica con periodo el mínimo posible; si  $\omega$  es irracional es una secuencia cuasiperiódica (hablaremos de estados conmensurados e inconmensurados respectivamente). La figura 6.6 muestra ejemplos de estados fundamentales conmensurados ( $\omega = p/q$ , con  $p, q$  primos entre sí) en distintos lugares del diagrama. La secuencia de las cantidades invariante *gauge* es periódica, de periodo el mínimo posible compatible con la vorticidad del sistema. Este no es el caso de otras variables; así por ejemplo, con el *gauge* que hemos elegido (6.1), la secuencia de las fases en cada isla es periódica, pero de periodo doble del mínimo posible.

A cualquier valor de  $h$ , los estados fundamentales conmensurados están anclados. Una configuración está anclada cuando existe un valor finito de la corriente  $I_d$  – intensidad de desanclaje – tal que si una corriente de intensidad

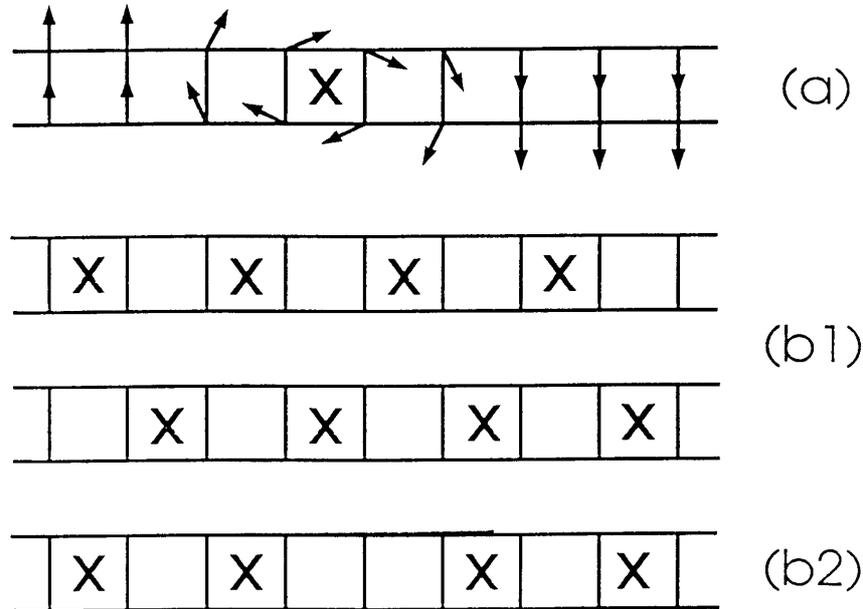


Figura 6.7: (a) Una disconmensuración elemental con  $\omega = 0$ . Mostramos las fases y la vorticidad. (b1) Las dos posibles secuencias de vórtices del estado fundamental de  $\omega = 1/2$ . (b2) Disconmensuración elemental de  $\omega = 1/2$ .

$I < I_d$  se inyecta en cada isla de la rama superior y se extrae de cada isla de la inferior, la configuración de vórtices no cambia. La corriente externa causa una fuerza en el sistema que tiende a mover los vórtices en la dirección longitudinal de la escalera, pero la discretitud del sistema introduce una fuerza de anclaje en cada vórtice, que compite con el efecto de la corriente externa. En el caso del estado fundamental con  $\omega = 0$ , el efecto de la corriente es hacer girar en sentido contrario las fases de los brazos superior e inferior de la escalera; esto es, manteniendo la simetría  $\theta_i + \theta_i^i = 0$  de nuestra descripción. Para valores de  $I < I_d$  las fases cambian a una nueva configuración de equilibrio y el voltaje entre las uniones es nulo, de modo que la red sigue siendo un superconductor. Para valores de la corriente externa por encima de la corriente de desanclaje, las configuraciones de las fases cambian en el tiempo – no hay soluciones estáticas – y se puede medir un voltaje entre las uniones.

Las transiciones entre diferentes fases son del mismo tipo que las encontradas en el modelo Frenkel-Kontorova. Esto significa que la energía de creación de un defecto elemental (también llamado disconmensuración elemental) es cero en el punto de la transición, lo que posibilita que se de la transición Commensurada-Incommensurada (ver capítulo 2). Una disconmensuración elemental en la escalera de uniones Josephson corresponde con la aparición o

desaparición de un vórtice (ver figura 6.7) y es una configuración de mínima energía que no es el estado fundamental (ver sección 2.2). En el caso de una fase conmensurada con vórtices, la aparición de una disconmensuración elemental corresponde a una pared de dominio que separa estados fundamentales equivalentes que están desplazados relativamente entre sí. La pared de dominio lleva asociada un incremento (o decrecimiento) mínimo de la densidad local de vórtices (ver figura 6.7 para un ejemplo), lo que no provoca variación en la densidad total  $\omega$ . Es importante señalar que una disconmensuración elemental no puede ser obtenida a partir de un estado fundamental mediante un número finito de cambios locales, sino que involucra la redistribución de una porción seminfinita de la escalera.

Los estados inconmensurados muestran dos regímenes diferentes que están separados por una transición de Aubry[74] (ver sección 2.3). La transición ocurre a un valor crítico  $h_c$  de la anisotropía de la red, que depende del número irracional  $\omega$ . Por debajo de este valor crítico, el estado fundamental está desanclado. La aplicación de cualquier corriente externa es capaz de hacer deslizar la estructura de vórtices del estado inconmensurado, lo que se refleja en la aparición de voltaje en las uniones; la red no es superconductora. Además, los estados inconmensurados por debajo de la transición de Aubry no son defectibles (no admiten defectos en la red de vórtices). En este régimen las diferencias de fases invariantes *gauge*,  $\gamma_{ij}$ , del estado fundamental definen una función *hull* que es analítica. Así, en las uniones verticales  $\gamma_i = \theta_i - \theta'_i = g(-2\pi\omega i + \beta)$ , con  $\beta$  una constante arbitraria (ver figura 6.8).

A valores de  $h$  por encima de la transición de Aubry los estados fundamentales están anclados. Como ocurre con los estados conmensurados, la corriente de desanclaje del estado es diferente de cero con lo que la red muestra un comportamiento superconductor. Los estados fundamentales aún pueden ser descritos por una función *hull*, pero que en este caso no es analítica, sino que presenta un número infinito de discontinuidades (ver figura 6.8).

Hemos estudiado el valor crítico  $h_c$  de la anisotropía al cual ocurre la transición en el caso de un número irracional áureo:  $\omega_\tau = (3 - \sqrt{5})/2$ , obteniendo  $h_c \simeq 0,490\dots$ . Esta estimación puede ser mejorada usando una aproximación racional mejor (nosotros hemos usado  $\omega = \frac{13}{34}$ ) al irracional  $\omega_\tau$ . Basándonos en la plausibilidad de la irrelevancia de las desviaciones del potencial de interacción respecto a su aproximación cuadrática, en el estudio de estados fundamentales del sistema, podemos conjeturar que la principal discontinuidad de la función *hull*, en el caso de una densidad de vórtices irracional áurea, se comporta como  $\Delta \simeq (h - h_c)^\xi$ , con  $\xi = 0,712$ , el exponente crítico obtenido por Mackay [80] para la transición de Aubry en el modelo Frenkel-Kontorova estándar. La corriente de desanclaje,  $I_d$ , para la estructura inconmensurada

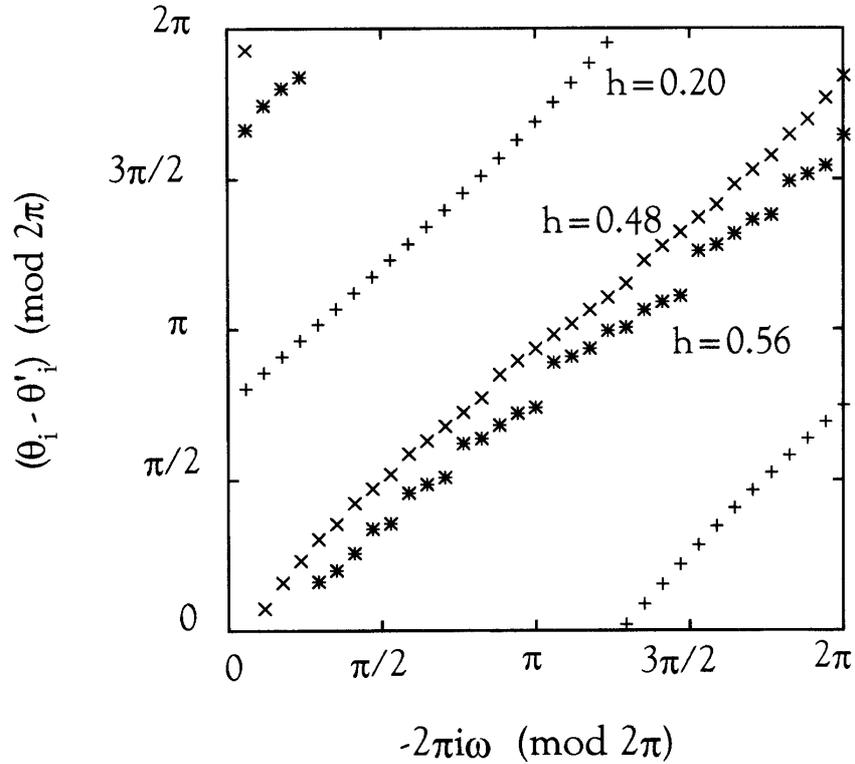


Figura 6.8: Función *hull* de la diferencia de fases invariante *gauge*, en las uniones verticales de la escalera, del estado fundamental  $\omega = 13/34$ . Este estado nos permite acercarnos al estudio de una fase inconmensurada,  $\omega$  irracional. Por encima de un valor crítico de  $h$  la función es discontinua con infinitas discontinuidades, y es analítica para valores de  $h$  menores que el crítico. En este ejemplo  $h_c \simeq 0,49$ .

áurea ha sido estimado usando simulaciones en la aproximación RSJ [38]. Se ha mostrado que  $I_d$  escala con  $(h - h_c)^\nu$  con  $\nu = 2,75$ , cercano a la estimación  $\nu = 3,011$ , de MacKay (sección 2.3) para el modelo Frenkel-Kontorova estándar.

### 6.3. Metaestabilidad

Una de las características de los modelos frustrados es la existencia de un gran número de estados metaestables, lo que influye en la naturaleza de la aproximación dinámica al equilibrio. Estas configuraciones son mínimos locales de la energía – soluciones estables de las ecuaciones de equilibrio,  $\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0$  – distintos del estado fundamental. Como extensión de los resultados obtenidos por Aubry [81, 82] en el modelo Frenkel-Kontorova, es plausible afirmar

la existencia de estados metaestables caóticos en la escalera de uniones Josephson. En esta sección vamos a estudiar algunos aspectos relacionados con la metaestabilidad en la escalera de uniones Josephson.

Nuestra descripción del espacio de configuraciones nace del estudio de la estabilidad lineal, bajo pequeñas variaciones del campo externo, de un conjunto muy restringido de fases, aquellas que son el estado fundamental en algún rango de los parámetros del modelo. Nos mantendremos siempre dentro de valores del campo tales que la frustración  $f$  esté comprendida entre 0 y  $1/2$ . El procedimiento seguido es el siguiente:

- a) Usando el método de los potenciales efectivos obtenemos la configuración estado fundamental a un valor de los parámetros  $(f, h)$  del modelo en el interior de una lengua conmensurada de densidad de vórtices  $\omega$ .
- b) A continuación, variamos finamente el parámetro  $f$  (normalmente  $\delta f \simeq 10^{-3}$ ) y usamos un método de Newton para resolver el sistema de ecuaciones no lineales  $\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0$ , con  $H$  definido por (6.2), lo que permite determinar la configuración de equilibrio a cada nuevo valor de  $f$ .
- c) En cada paso, hacemos el análisis de la estabilidad lineal de la solución, calculando el espectro de valores propios de la matriz de pequeñas perturbaciones en torno a la posición de equilibrio,  $\{\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\}$ . Con esto conocemos el carácter extremal de la configuración obtenida tras b).

En todos los casos encontramos un valor propio igual a cero, que corresponde a la invariancia (una simetría continua) del hamiltoniano (6.2) bajo rotación uniforme de todas las fases. Si el resto de los valores propios son todos positivos, la configuración es linealmente estable, y el estado es un mínimo local de la energía con el valor fijo de  $\omega$  que estamos considerando. Cuando el menor de los valores propios es negativo, la configuración es linealmente inestable lo que corresponde a otras configuraciones de equilibrio no mínimos locales de la energía.

En la figura 6.9 mostramos la evolución del menor valor propio no nulo de la matriz de estabilidad lineal de algunas fases conmensuradas ( $\omega = 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 2/5$ ), a diferentes valores de  $f$  cuando  $h = 1,0$  ( $J_x = J_y$ ). No es sorprendente que el rango de estabilidad sea mucho mayor que el intervalo de valores de  $f$  para los cuales un estado dado es el estado fundamental: una transición Conmensurada-Inconmensurada no tiene asociada la pérdida de la estabilidad lineal de la fase conmensurada, que sigue siendo un mínimo de la energía. La transición corresponde a un valor nulo de la energía de creación de una disconmensuración elemental, una característica que no se manifiesta en un análisis de estabilidad lineal. En el límite del intervalo de estabilidad el

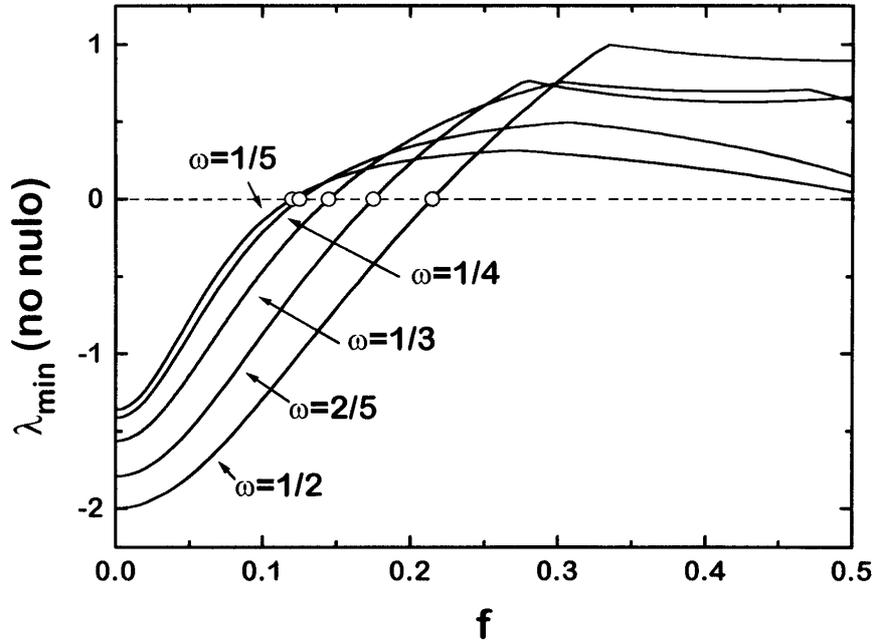


Figura 6.9: Menor de los valores propios no nulos de la matriz de estabilidad lineal de una fase a diferentes valores del campo. La imagen muestra algunos estados conmensurados simples a  $h = 1,0$ . Los círculos marcan el punto de la transición de estable a inestable de una configuración cuando  $f$  decrece.

carácter extremal de la configuración cambia, y allí ésta no es un mínimo de la energía.

Hemos observado que en el interior de un intervalo de estabilidad las diferencias de fases invariantes *gauge*  $\gamma_{ij}$  de la configuración se encuentran comprendidas dentro del intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Esto corresponde a valores de  $\gamma_{ij}$  dentro de la zona convexa del potencial de interacción. Conforme nos acercamos al límite de la zona de estabilidad, esta diferencia, en algunas de las uniones, se acerca a la zona de no convexidad del potencial y en el punto de cambio de estabilidad es igual a  $\pi/2$  o  $-\pi/2$ . Desde el punto de vista de las corrientes superconductoras en la red, el sistema se opone a un cambio del campo aumentando o disminuyendo las corrientes superconductoras en las uniones. Esta oposición tiene un límite que corresponde al momento en el cual la supercorriente en alguna de las uniones alcanza el máximo valor posible  $I_c$ , lo que coincide con que el potencial de interacción abandone el dominio de la convexidad. En este punto, cualquier cambio pequeño en el campo no puede mantenerse por un incremento de las corrientes, la estructura de vórtices es inestable y el sistema evoluciona a la configuración estable más cercana (en términos del espacio de configuraciones), que tiene un valor distinto de la

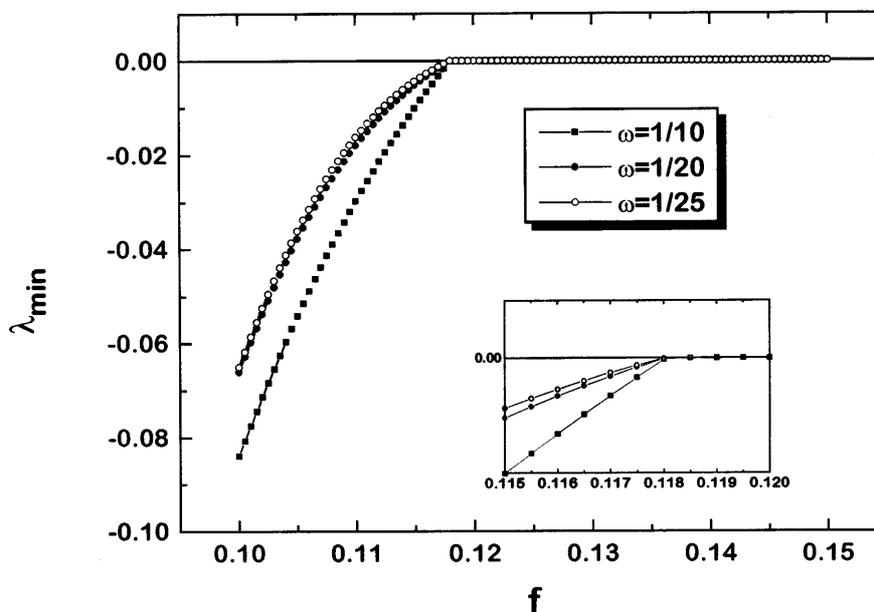


Figura 6.10: Menor valor propio de la matriz de estabilidad lineal de fases con una densidad pequeña de vórtices:  $\omega = 1/10, 1/20, 1/25$

densidad de vórtices,  $\omega$ .

En la figura 6.9 se pone de manifiesto que los estados con  $\omega \neq 0$  son inestables a valores bajos del campo mientras que son estables a  $f = 1/2$ . Fijémonos en la fase metaestable  $\omega = 0$ , la “más diferente” del estado fundamental cuando  $f = 1/2$ . Esta fase está definida por  $\theta_i = \theta_i^i = 0$  para todo  $i$ , entonces las diferencias de fases invariantes *gauge* valen  $\pm\pi f$  o 0 según la unión que consideremos. Cuando  $f < \frac{1}{2}$  las fases se mantienen dentro de la zona convexa del potencial y el estado es estable. El análisis de la fase  $\omega = 0$  revela que su límite de estabilidad lineal corresponde a  $f = \frac{1}{2}$ .

Vamos a considerar el otro límite, valores pequeños del campo externo, donde la figura (6.9) parece indicar que sólo la fase  $\omega = 0$ , el estado fundamental, es estable. Para ello estudiaremos la disconmensuración elemental del estado  $\omega = 0$ . Sabemos que en las cercanías de la transición ( $f \simeq 0,28$  a  $h = 1,0$ , ver figura 6.3) esta configuración es estable, y de hecho su energía de creación se hace cero en el punto de transición. El estudio de la estabilidad lineal de esta configuración a valores menores del campo indica que ésta también es inestable a valores bajos de  $f$  (ver figura 6.10). Dicha estabilidad ha sido calculada mediante la aproximación a esta fase a través de configuraciones conmensuradas con  $\omega$  pequeño ( $1/10, 1/20, 1/25$ ). El extremo inferior del intervalo de estabilidad de la disconmensuración elemental de  $\omega = 0$  es una cota inferior para los

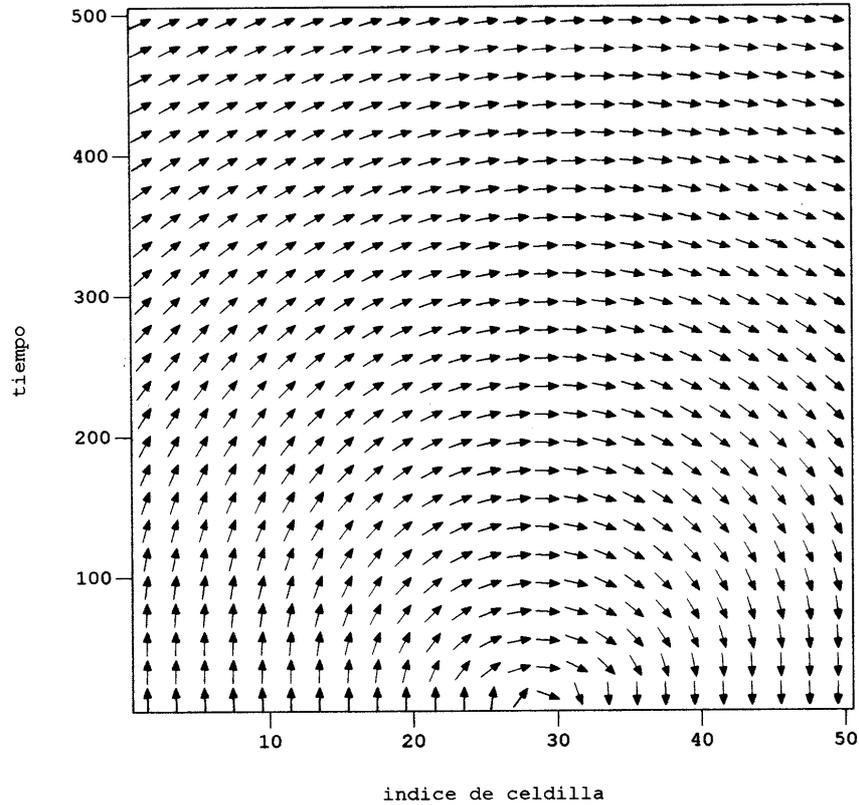


Figura 6.11: Simulación de la desestabilización de un vórtice cuando  $f = 0$  y  $h = 1,0$ . Para realizar la simulación hemos empleado una configuración inicial con dos vórtices en cien celdillas, y condiciones de contorno periódicas. En la figura representamos sólo la evolución temporal de  $\theta_i$  ( $i = 2, 4, 6, \dots, 50$ ), fases del brazo superior de la escalera;  $\uparrow$  corresponde a  $\theta_i = 0$  y  $\downarrow$  a  $\theta_i = \pi$ . Ver explicación en el texto.

extremos inferiores de los intervalos de estabilidad del resto de las estructuras metaestables. En el capítulo siguiente veremos el cambio en esta descripción cuando se consideran campos magnéticos inducidos por las corrientes en la red. En el capítulo 8 veremos algunas propiedades dinámicas del sistema que se entienden a partir del análisis que acabamos de desarrollar.

Por último, también hemos realizado un estudio microscópico de la desestabilización de la configuración con un sólo vórtice. La figura 6.11 muestra la relajación a temperatura cero de esta configuración cuando  $I^{ext} = 0$ ,  $f = 0$  y  $h = 1,0$ . El estado inicial (ver figura 6.7 (a)) cumple  $\theta'_i = -\theta_i$  para todo  $i$  y el vórtice se extiende a lo largo de varias celdillas de la red. Para esos valores de los parámetros la configuración inicial es inestable. La dinámica muestra dos regímenes temporales diferenciados: durante el primero (muy rápido, no se aprecia en la figura) la dinámica del sistema mantiene la simetría de la con-

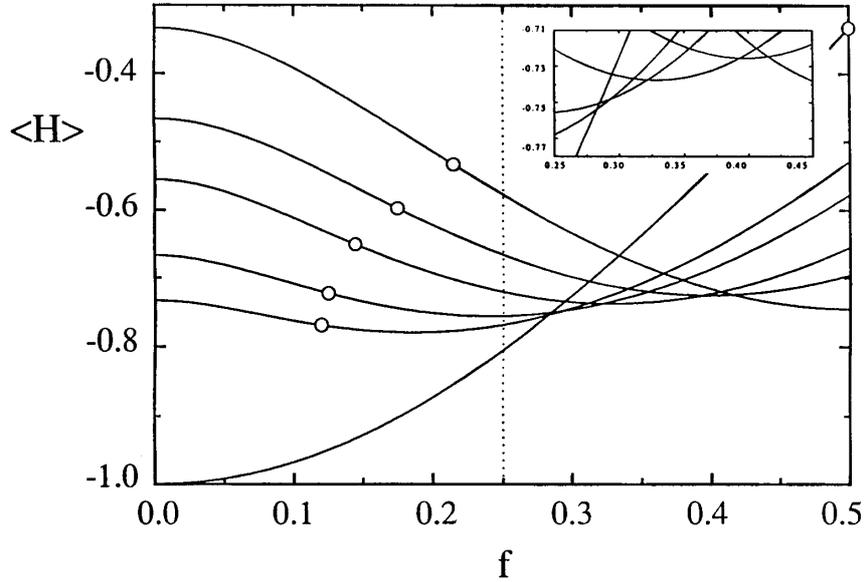


Figura 6.12: Diagrama con la energía de algunos estados commensurados como función de  $f$ . La envolvente da la energía del estado fundamental. Los círculos marcan el límite de estabilidad de cada estado, ver figura 6.9. La línea de puntos corresponde a  $f = 0,25$ , el valor del campo elegido para estudiar la dinámica de relajación que presentamos en la sección 8.1 ( $h = 1,0$ ).

figuración inicial ( $\theta'_i = -\theta_i$ ) hasta que se alcanza la siguiente configuración de las fases  $\{\theta_i\} = \{\dots 0 0 0 \pi \pi \pi \dots\}$ . Dicha configuración es una solución inestable de las ecuaciones de equilibrio, por lo que a partir de ese momento (bajo cualquier fluctuación) el sistema evoluciona hacia el estado fundamental, que para ese valor de los parámetros de la escalera corresponde a  $\theta_i = \theta'_i = \alpha$  y  $n_i = 0$  para todo  $i$ ). En este intervalo dinámico ha cambiado la simetría entre las fases de los brazos inferior (no mostradas en la figura) y superior de la escalera, el sistema evoluciona satisfaciendo  $\theta_i = \theta'_i$  y la vorticidad de cualquier celdilla vale cero.

En la figura 6.12 representamos, como función de la frustración, la energía de algunos estados commensurados simples. La energía del estado fundamental corresponde a la envolvente de esas, e infinitas otras, curvas. Los puntos de cambio de estabilidad están marcados mediante círculos. Podemos observar que en las cercanías de los extremos del diagrama,  $f = 0$  y  $f = 1/2$ , las diferencias de energía entre estos estados commensurados son bastante mayores que en el centro del diagrama. Las energías de otros estados estables commensurados e incommensurados, no incluidos en la figura, también están en esos rangos. Además de todos los estados metaestables que hemos estudiado (los

que son estado fundamental en alguna región del diagrama de fases) pueden construirse muchos otros estados metaestables asociados a distribuciones, casi arbitrarias, de vórtices, cuyas energías también se encuentran en los mismos rangos. Entonces, a valores intermedios de  $f$ , el paisaje de energías está formado por un conjunto extremadamente complejo de mínimos locales con energías comparables, que corresponden a configuraciones de fase que, en general, se encuentran muy separadas en el espacio de configuraciones y, desde una perspectiva dinámica, están prácticamente desconectadas, una situación que es en ocasiones llamada de **dinámica restringida** (*constrained dynamics*) [83]. Recordemos que la mayoría de los estados son inaccesibles desde uno dado. Los estados alcanzables dinámicamente son aquellos que vienen de la aniquilación o creación de una densidad finita de vórtices y no de la redistribución de todo el sistema. Este hecho, introduce una jerarquía de estados en la dinámica de relajación que es relevante en las propiedades vítreas del modelo [84]. Tras el análisis de estabilidad, podemos concluir que este modelo presenta ingredientes de sistemas con comportamiento de vidrio: una compleja estructura de estados metaestables y dinámica restringida. Debemos remarcar que el sistema que estamos considerando es un sistema frustrado pero ordenado. Como veremos en 8.1, este escenario es confirmado por las simulaciones numéricas de dinámica en presencia de temperatura.

## Capítulo 7

# Efectos de apantallamiento de campo en la escalera de uniones Josephson

### 7.1. El modelo y los métodos empleados

En el capítulo anterior hemos estudiado las propiedades de equilibrio de una red de uniones Josephson con la geometría de una escalera. Allí, no hemos incluido en nuestra descripción los campos magnéticos inducidos por las corrientes que circulan en la red (efectos de apantallamiento del campo externo), lo que es equivalente a considerar que la longitud de penetración  $\lambda_{\perp}$  del sistema es mucho mayor que la dimensión transversal de la escalera,  $\lambda_{\perp} \gg a$ . Esta aproximación es válida en muchos sistemas, especialmente a temperaturas cercanas a la transición Kosterlitz-Thouless; sin embargo la situación puede ser diferente a temperaturas menores, y de hecho nos encontramos con redes para las cuales  $\lambda_{\perp} \simeq 15a$ ,  $\simeq 5a$ , e incluso  $\simeq a$  [85]. En este capítulo, tomando como referencia y punto de partida los resultados obtenidos en el capítulo anterior [37], vamos a estudiar la escalera incluyendo los campos inducidos por las corrientes que circulan en la red [40]. De este modo obtenemos un conocimiento más realista de los estados fundamentales y en general de las propiedades de equilibrio del sistema. Los resultados que obtengamos pueden ser de interés en el momento de realizar e interpretar experimentos, donde los parámetros de la red pueden ser fijados a voluntad.

La investigación teórica en redes de uniones Josephson progresa continuamente y aparecen modelos, cada vez más complejos, que permiten mejorar nuestro entendimiento y capacidad de predicción de los muchos fenómenos

interesantes que se dan en estos sistemas [17]. Un paso importante en este avance es la inclusión de campos magnéticos inducidos por corrientes, que han desarrollado varios grupos en los últimos años.

Majhofer et al. [86] introducen un modelo basado en granos superconductores acoplados por efecto Josephson, para estudiar algunos aspectos del comportamiento de muestras superconductoras en presencia de un campo magnético. Encuentran distribuciones estacionarias de flujo magnético y efectos de histéresis típicos de superconductores cerámicos. Posteriormente mejoran su modelo y lo aplican al estudio de las curvas intensidad-voltaje y a la distribución y a la dinámica del flujo [87]. Domínguez y José [46, 88] han explicado la existencia de *Shapiro steps* subharmónicos a campo cero (en las curvas intensidad-voltaje de redes sometidas a corrientes alternas) debidos a la inclusión de los campos magnéticos inducidos por las corrientes en la red. Phillips et al. derivan un algoritmo eficiente que permite estudiar redes de  $500 \times 500$  celdillas incluyendo inducciones entre todas las celdillas de la red. Estudian las propiedades estáticas de los vórtices [85] y diferentes aspectos dinámicos [89, 90]. Ciria et al. han desarrollado un potente programa (que utilizamos en este capítulo) para estudiar dinámicamente grandes redes de uniones Josephson con campos inducidos [47]. Su interés se centra especialmente en las condiciones de estabilidad y coherencia en redes de uniones Josephson.

En todos estos casos, el sistema es estudiado mediante la simulación numérica de la dinámica de las diferencias de fases invariantes *gauge*; y en muchos de ellos el interés se concentra en los efectos de los campos inducidos en las propiedades dinámicas de las redes, cuando están alimentadas por corrientes externas. Por el contrario, al menos hasta donde nuestro conocimiento llega, el nuestro [40] es el primer estudio sobre los estados fundamentales de una red de uniones Josephson con inducciones. Formularemos el problema en términos de la solución del diagrama de fases de los estados fundamentales del sistema, descrito por un hamiltoniano que incluye la energía magnética debida a los campos inducidos, además de la contribución habitual de acoplamiento Josephson. Como en el capítulo anterior, nos limitamos a una aproximación clásica al problema, lo que significa despreciar los efectos de carga de las uniones. Estos efectos, sin embargo, son relevantes en el caso de uniones muy pequeñas.

El hamiltoniano que describe el sistema (sin término cinético) es la suma de la contribución de la energía Josephson de cada unión y la energía magnética de un circuito de corrientes [85, 88]:

$$\begin{aligned}
 H = & - \sum_i [J_x \cos(\theta_i - \theta_{i+1} - \pi f_0 - \pi f_i) \\
 & + J_x \cos(\theta'_i - \theta'_{i+1} + \pi f_0 + \pi f_i) + J_y \cos(\theta_i - \theta'_i)] \\
 & + \frac{1}{2} \Phi_0^2 \sum_{ij} f_i L_{ij}^{-1} f_j.
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Como en el capítulo anterior,  $\theta_i$  ( $\theta'_i$ ) son las fases del parámetro de orden

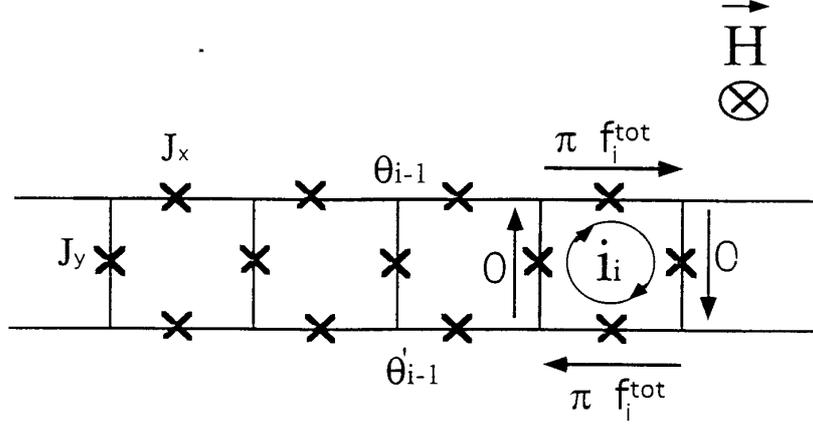


Figura 7.1: Representación esquemática de la red anisótropa de uniones Josephson en presencia de un campo externo. Los nodos representan islas superconductoras y las cruces las uniones. La celda de la derecha muestra la elección del *gauge*:  $f_i^{\text{tot}} = f_0 + f_i$  donde  $f_0 = Ha^2/\Phi_0$  es el flujo debido al campo externo y  $f_i$  el flujo inducido en  $i$ .

superconductor en las ramas superior (inferior) de la escalera (figura 7.1).  $f_0$  es el flujo debido al campo magnético externo, que asumimos constante en toda la red.  $f_i$  es el flujo del campo inducido en la celdilla  $i$ , una función de las corrientes a través de todas las uniones de la escalera. Ambos  $f_0$  y  $f_i$  son expresados en términos del cuanto de flujo,  $\Phi_0$ . De este modo, el flujo magnético total  $\Phi_i^{\text{tot}}$  a través de una celdilla dada  $i$  es  $\Phi_i^{\text{tot}} = \Phi^{\text{ext}} + \Phi_i^{\text{ind}} = \Phi_0(f_0 + f_i)$ . Del mismo modo que ocurre en el límite  $\lambda_{\perp} \rightarrow \infty$  (ecuación 6.2) el hamiltoniano (7.1) es periódico en  $f_0$  con periodo 1 y tiene simetría de reflexión en torno  $f_0 = \frac{1}{2}$  en el intervalo  $[0, 1]$ . De este modo, restringiremos nuestro análisis a valores de  $f_0$  en el intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$ .

Al escribir (7.1) hacemos una elección de *gauge* conveniente: consideramos que el potencial vector es paralelo al eje longitudinal de la escalera y toma valores opuestos en cada rama (ver figura 7.1). En este *gauge*  $f_0$  y  $f_i$  están relacionadas de modo trivial con las integrales de línea del potencial vector  $\vec{A}$  a lo largo de las uniones de la escalera:  $A_{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{\alpha}^{\beta} \vec{A} d\vec{l} = \epsilon\pi(f_0 + f_i)$ , donde  $\epsilon = +1(-1)$  para las uniones superiores (inferiores) de la escalera y  $\epsilon = 0$  para las uniones verticales.

$J_{\alpha}$  ( $\alpha = x, y$ ), la energía de acoplamiento Josephson, está relacionada con la corriente crítica a través de cada unión,  $I_{c\alpha}$ , por  $J_{\alpha} = I_{c\alpha}\Phi_0/2\pi$ . La matriz de inductancias de la red,  $L$ , es definida por

$$L_{ij} = \frac{\Phi_0}{I_{cx}} \frac{1}{8\pi^2\lambda_{\perp}} \Lambda_{ij}, \quad (7.2)$$

donde  $\Lambda_{ij}$  es una matriz adimensional que contiene tal sólo coeficientes geo-

métricos que dependen fundamentalmente de la distancia entre las celdas  $i$  y  $j$  en la red (ver apéndice al final del capítulo).  $\lambda_{\perp}$  es la longitud de penetración, definida como en [85]

$$\lambda_{\perp} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\Phi_0^2}{\mu_0 J_x a}, \quad (7.3)$$

medida en unidades del espaciado de la red,  $a$ .

De igual modo que en el caso de despreciar la contribución magnética a la energía (capítulo anterior), puede deducirse que las configuraciones que minimizan el hamiltoniano (7.1) cumplen  $\theta_i + \theta'_i = \text{cte}$ . Fijando esta constante igual a 0 y normalizando por  $J_x$ , para trabajar con cantidades adimensionales, obtenemos

$$\begin{aligned} H = & - \sum_i [2 \cos(\theta_i - \theta_{i+1} - \pi f_0 - \pi f_i) \\ & + \frac{J_y}{J_x} \cos(2\theta_i)] \\ & + \frac{\Phi_0^2}{2J_x} \sum_{ij} f_i L_{ij}^{-1} f_j, \end{aligned} \quad (7.4)$$

donde el cociente  $J_y/J_x$  define la anisotropía de la escalera. Resolver el diagrama de fases de estados fundamentales nos restringe a la expresión (7.4).

Vamos a considerar tres aproximaciones a la matriz de inducciones: el modelo más simple (caso A) asume que la matriz de inducciones es diagonal. En este caso, el flujo inducido en una celdilla sólo depende de la corriente de malla en esa celdilla. El próximo paso en complejidad, caso B, incluye también inducciones mutuas a primeros vecinos; entonces  $L_{ij}^{-1} = \tilde{L}\delta_{ij} + \tilde{M}\delta_{ij\pm 1}$ . En C tenemos en cuenta todos los elementos de la matriz. En el primer caso el término en las ecuaciones (7.1) y (7.4) que da cuenta de la energía magnética es

$$H_{\text{magn}} = \sum_i d_K f_i^2, \quad \text{con } d_K = 8\pi^3 (\Lambda^{-1})_{00} \lambda_{\perp} \approx 6,8\lambda_{\perp}. \quad (7.5)$$

En el caso B,

$$H_{\text{magn}} = \sum_i d_K f_i^2 + \sum_i \alpha d_K f_i (f_{i-1} + f_{i+1}), \quad \text{con } \alpha = \frac{\tilde{M}}{\tilde{L}} \simeq 0,21355 \quad (7.6)$$

Hemos usado distintos métodos para calcular el diagrama de fases de los estados fundamentales del sistema en el límite termodinámico. En los casos A y B es posible utilizar el método de potenciales efectivos [78] adaptado adecuadamente al estudio de nuestro problema [91, 92], que involucra dos variables independientes por sitio ( $\theta_i$  y  $f_i$ ) con interacción extendida a vecinos próximos. El caso es numéricamente equivalente a un sistema con una variable por lugar e interacción a segundos vecinos. El hecho de tener dos variables por sitio causa que el tiempo de computación requerido para obtener el diagrama de fases, con alta precisión, sea mucho mayor que el del caso estudiado en el

capítulo anterior (donde  $f_i = 0$  para todo  $i$ ). Esto hace que sea muy importante complementar adecuadamente el método con otros procedimientos. De este modo, potenciales efectivos proporciona, dentro de una cantidad aceptable de tiempo, soluciones aproximadas al problema del estado fundamental como función del campo externo, la anisotropía de la escalera y la longitud de penetración. Basándonos en estas soluciones, para obtener resultados más precisos es necesario utilizar métodos estándar de encontrar raíces (calculando las soluciones estables a  $\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0$ ) o dinámica (permitiendo a la solución aproximada que relaje). Entonces, es necesario el uso de la ecuación (7.1) para describir el sistema, ya que (7.4) sólo es adecuada cuando se trata con configuraciones que son mínimos, lo que es un subespacio reducido del sistema total. Hemos comprobado que se obtienen los mismos resultados si aplicamos el método de los potenciales efectivos con una discretización alta o se combina con cualquier método complementario del tipo de los descritos anteriormente. Cuando se hace esto último es posible determinar los bordes de las lenguas de estados fundamentales con densidades de vórtices diferentes, comparando las curvas de energía que corresponden a las distintas configuraciones.

Mas aún, haciendo uso de los procedimientos descritos anteriormente podemos estudiar como se modifica la configuración estado fundamental cuando los parámetros varían. Aquí es conveniente recordar que, en general, una configuración de vórtices es estable más allá del rango de parámetros en los que es el estado fundamental. En este caso hemos de utilizar los métodos para encontrar raíces complementados con el análisis de estabilidad de las soluciones.

El modelo C incluye la matriz total: las interacciones entre variables se extienden a toda la red. El problema no puede ser estudiado con el método de potenciales efectivos. En este caso, consideramos los resultados logrados en la aproximación B como condiciones iniciales y dejamos evolucionar el sistema para relajar al equilibrio. Los detalles sobre el algoritmo dinámico se pueden encontrar en [47].

## 7.2. Estados fundamentales

En la sección anterior hemos avanzado que, al igual que ocurre en el límite  $\lambda_{\perp} \rightarrow \infty$ , calcular los estados fundamentales de (7.1) es equivalente a calcular los estados fundamentales de (7.4), lo que nos permite aplicar el método de potenciales efectivos al cálculo de estos, siempre dentro de las aproximaciones A o B a la matriz de inducciones.

La figura 7.2(a) muestra el diagrama de fases de los estados fundamentales en el caso de longitud de penetración infinita [37]. Las distintas lenguas están

caracterizadas por la densidad de vórtices  $\omega$ . Esta cantidad está relacionada directamente con la periodicidad de la configuración: un valor  $\omega = p/q$  implica que las cantidades invariantes *gauge* – diferencias de fases invariantes *gauge*, flujos inducidos... – son espacialmente periódicas con periodo  $q$ . Aquí los vórtices se definen como en (5.21), haciendo uso de la propiedad de la cuantización del fluxoide para definir la vorticidad  $n_p$  de una celdilla. La suma de las diferencias de fases invariantes *gauge* (restringidas al intervalo  $(-\pi, \pi]$ ) a lo largo de las uniones de la celda  $\alpha$  es  $\sum_{ij \in \alpha} \gamma_{ij} = 2\pi(n_\alpha - f_\alpha^{\text{tot}})$ . La densidad de vórtices  $\omega$  es igual al promedio espacial de  $n_\alpha$ .

La densidad de vórtices como función del campo externo en la escalera de uniones Josephson con efectos de apantallamiento es una Escalera del Diablo, con un peldaño a cada valor racional de  $\omega$ . Las figuras 7.2(b) y 7.2(c) muestran el diagrama de fases en los casos A y B, con una longitud de penetración  $\lambda_\perp = 1$ , calculados usando el método de potenciales efectivos. Los diagramas (b) y (c) son cualitativamente similares al diagrama (a). Como se espera las corrientes inducidas tienden a expulsar el campo magnético fuera de la red: cuando  $\lambda_\perp$  decrece, la lengua  $\omega = 0$  crece. Hay, sin embargo, una marcada diferencia entre estos diagramas: mientras en el caso A todas las lenguas, excepto la  $\omega = 0$ , se comprimen; en el caso B la fase  $\omega = 1/2$  no lo hace y el resto de las fases se comprimen entre las dos extremas. En breve estudiaremos con cuidado este comportamiento en el límite  $\lambda_\perp \rightarrow 0$ . A grandes rasgos, el efecto de las corrientes inducidas por el campo es incrementar el campo crítico  $f_c$  hasta el cual la configuración  $\omega = 0$  es el estado fundamental. La Escalera del Diablo se restringe de este modo a un intervalo estrecho de valores del campo.

Surge la cuestión de si las corrientes inducidas son capaces de cambiar cualitativamente la naturaleza del diagrama de fases. En otras palabras, queremos comprobar si para algún  $\lambda_\perp$  la red es capaz de expulsar completamente el campo externo y, en consecuencia, la lengua  $\omega = 0$  ocupa todo el diagrama de fases. Si esto no es así, ¿se conserva la estructura de la Escalera del Diablo para todos los valores de  $\lambda_\perp$ ?

Para ganar en comprensión sobre el modelo y, en particular, arrojar luz sobre las cuestiones anteriores, es interesante estudiar la dependencia de las características de una configuración con un vórtice con los diferentes parámetros físicos. Tal estudio es llevado a cabo considerando fases conmensuradas con una densidad pequeña de vórtices (e.g.  $\omega = \frac{1}{128}$ ) para evitar los efectos de interacción entre ellos. En particular, estamos interesados en estudiar la extensión del vórtice, que está directamente relacionada con la distribución de las fases invariantes *gauge* en torno al baricentro del vórtice y depende de los valores de  $J_y$  y  $\lambda_\perp$  (ver figura 7.3). En las celdillas cercanas al centro del vórtice las fases decaen exponencialmente. Este decaimiento se hace más suave

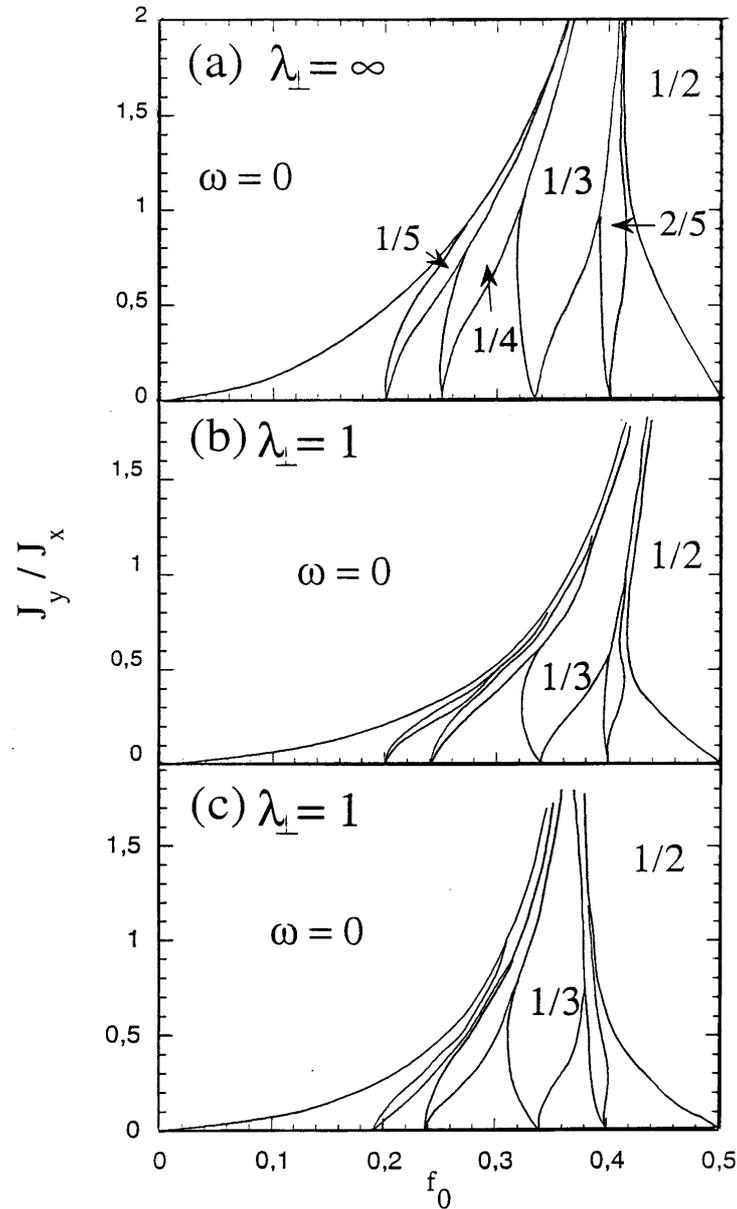


Figura 7.2: Diagramas de fases de los estados fundamentales de la escalera de uniones Josephson obtenidos usando el método de potenciales efectivos. Cada fase está definida por los valores de  $\omega$  y, por claridad, sólo están representadas algunas de las líneas de transición. La figura (a) muestra los resultados en el caso de despreciar corrientes de inducción ( $\lambda_{\perp} \rightarrow \infty$ ). (b) Diagrama de fases cuando  $\lambda_{\perp} = 1,0$  calculado usando la aproximación A (matriz diagonal) al cálculo de los campos inducidos. (c) Diagrama de fases cuando  $\lambda_{\perp} = 1,0$  calculado usando la aproximación B (matriz tridiagonal) al cálculo de los campos inducidos.

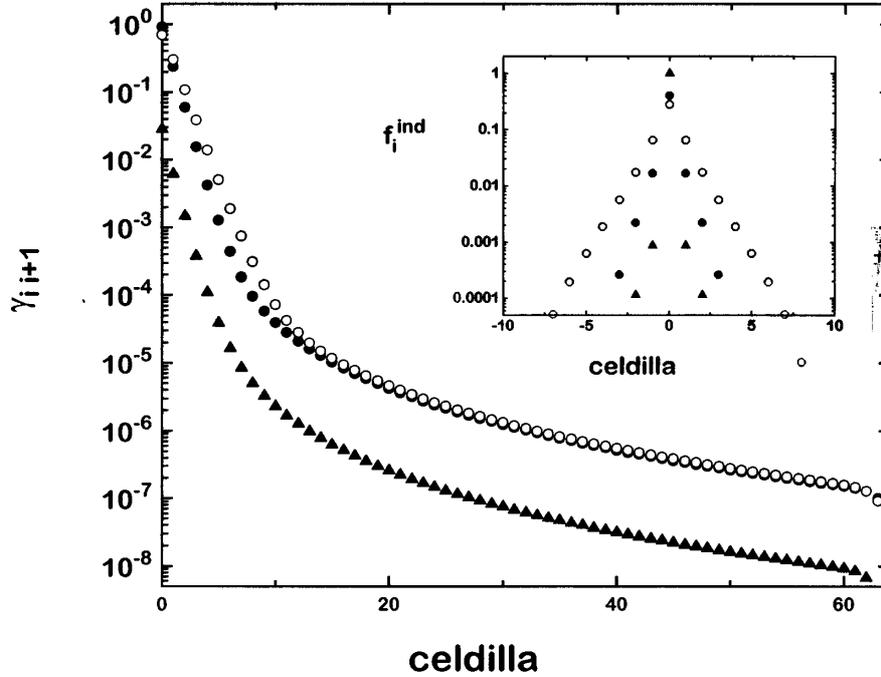


Figura 7.3: Forma del vórtice a distintos valores de  $\lambda_{\perp}$  y de anisotropía, calculado según el modelo C. Es simétrico y sólo dibujamos la mitad del mismo (el origen de coordenadas es la celda con  $n_i = 1$ ). La figura muestra las diferencias de fases invariantes *gauge* en las uniones horizontales del brazo superior de la escalera. Comparamos, cuando  $f_0 = 0$ , los casos:  $J_y = J_x$ ,  $\lambda_{\perp} = 1$  (círculos en negro)  $J_y = 0,4J_x$ ,  $\lambda_{\perp} = 1$  (círculos en blanco) y  $J_y = J_x$ ,  $\lambda_{\perp} = 0,012$  (triángulos). En pequeño, el flujo inducido en cada celdilla.

al aumentar la distancia, para  $i$  grandes, con  $i$  la distancia al centro, la fase es de la forma ( $\phi_i \sim i^{-3}$ ). La anisotropía afecta la parte exponencial de la curva: un decrecimiento de  $J_y$  implica un suavizamiento del decaimiento exponencial, mientras que el comportamiento a largo alcance permanece sin cambios. En su lugar, variar  $\lambda_{\perp}$  provoca un desplazamiento del conjunto de la curva. En celdas suficientemente lejos del centro, el flujo es negativo y su valor absoluto es una función decreciente de la distancia. El flujo negativo es debido al signo del término de inductancias mutuas (ver apéndice). Esta característica ya fue señalada por Phillips et al. [85].

Conforme  $\lambda_{\perp}$  decrece el vórtice se vuelve más localizado en la celdilla central y, en el límite  $\lambda_{\perp} \rightarrow 0$ , tiende a identificarse con el fluxoide (la magnitud cuantizada definida anteriormente, que indica el baricentro del vórtice). Podemos pensar en  $\lambda_{\perp}$  como el radio del vórtice:  $\lambda_{\perp} \rightarrow 0$  implica que el vórtice permanece restringido a la celda en la que  $n_p = 1$ .

Cuando no se consideran campos inducidos por corrientes (límite  $\lambda_{\perp} \rightarrow \infty$ ) el flujo magnético total a través de una celdilla es el flujo externo, que es constante a lo largo de toda la red. De este modo, la distribución del flujo a lo largo de la escalera es independiente de la vorticidad, no hay cuantización del flujo y la densidad de vórtices no es una densidad de cuantos de flujos sino una densidad de cuantos de fluxoide. Por el contrario, la situación cambia drásticamente cuando los campos inducidos son contabilizados, estando el número y extensión de los vórtices directamente conectados con la distribución del flujo inducido a lo largo de la escalera. Consideremos el límite  $\lambda_{\perp} \rightarrow 0$  y la configuración de estado fundamental  $\omega = 0$ ; allí, las corrientes tienden a apantallar uniformemente el campo externo (en cada celda  $f_i \rightarrow -f_0$ ). De este modo la red exhibe un comportamiento que recuerda el efecto Meissner: el campo externo es apantallado por el sistema y no penetra en la red. Para cualquier otro valor de  $\omega$ , la distribución de flujos es bastante diferente. En las celdas donde la vorticidad es igual a cero, el flujo inducido tiende a cancelar el externo, y el flujo total es igual a cero. En las celdas donde la vorticidad es igual a uno, el flujo inducido  $f_i \rightarrow (1 - f_0)$ , siendo el flujo total igual a un cuanto de flujo. Entonces, en el límite  $\lambda_{\perp} \rightarrow 0$ , el fluxoide se identifica con el fluxón, y está localizado en una celdilla de la red. Esto está ilustrado en la figura 7.4 donde se muestra la dependencia del flujo inducido con  $\lambda_{\perp}$  para las celdas con vorticidad  $n_p = 1$  y  $n_p = 0$  del estado fundamental  $\omega = \frac{1}{2}$ , cuando  $f_0 = \frac{1}{2}$  y  $J_y = J_x$ . Este comportamiento es general, para otros valores de  $\omega$  los flujos en las celdas de vorticidad nula dependen de la distancia al vórtice más cercano, pero esta diferencia es del orden de  $\lambda_{\perp}^2$  en el límite  $\lambda_{\perp} \rightarrow 0$ . Podemos distinguir tres regiones: para  $\lambda_{\perp} > 4$ ,  $|f_i| \leq 0,1f_0$ , y considerar longitud de penetración infinita es una aproximación justificada. Por otro lado, para  $\lambda_{\perp} < 0,12$ , observamos el comportamiento de bajo  $\lambda_{\perp}$ :  $|f_i| > 0,9(n_i - f_0)$ , y los campos de apantallamiento son dominantes. Entre ellos hay una región intermedia, en torno a  $\lambda_{\perp} = 0,7$  (donde la derivada del flujo inducido respecto al logaritmo de la longitud de penetración es máximo). Este valor central de  $\lambda_{\perp}$  revela que la dimensión trasversal de la escalera domina sobre la longitudinal, y la mayoría de los resultados son fuertemente dependientes del carácter casi unidimensional del sistema.

La descripción presentada en el párrafo anterior permite obtener algunas expresiones simples para las energías de diferentes configuraciones a valores pequeños de  $\lambda_{\perp}$ . El hamiltoniano (7.1) consiste de dos componentes, correspondiendo a las energías Josephson y magnética. Hemos comprobado numéricamente que, cuando  $\lambda_{\perp} \rightarrow 0$ , el término Josephson se satura antes que el magnético. De este modo, a valores pequeños de  $\lambda_{\perp}$ , podemos aproximar la

energía por celdilla por

$$E_p \simeq -3 + \frac{\Phi_0^2}{2J_x N_p} (n_i - f_0 + \delta f_i) (L^{-1})_{ij} (n_j - f_0 + \delta f_j) \quad (7.7)$$

donde  $\delta f_i \sim O(\lambda_\perp)$ ,  $N_p$  es el número total de celdas, y  $n_i = 0, 1$  es la vorticidad de la celda  $i$ . Consideremos primero el caso A en esta aproximación. La energía

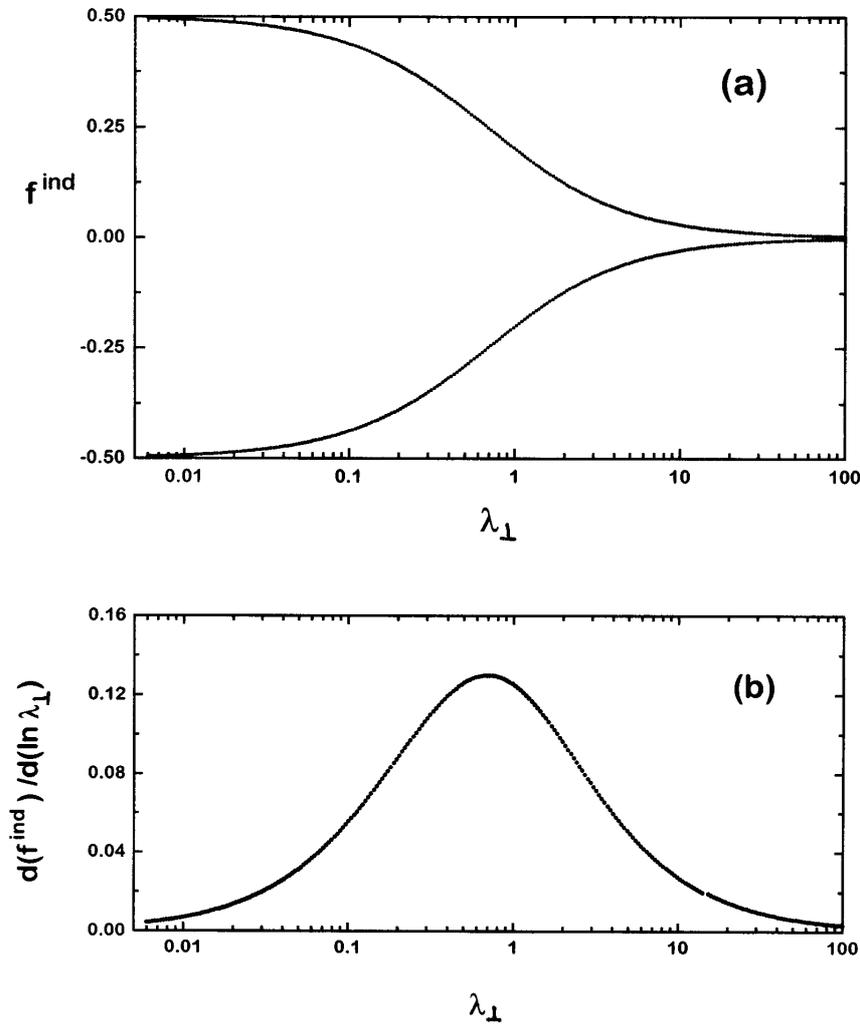


Figura 7.4: (a) Variación del flujo inducido como función de  $\lambda_\perp$  en el estado fundamental  $\omega = \frac{1}{2}$  ( $f_0 = \frac{1}{2}$ ,  $J_x = J_y$ ), calculado según el modelo C. Cada curva corresponde al flujo en el caso  $n_i = 1$  o  $n_i = 0$ . (b) muestra la derivada del flujo inducido con respecto al logaritmo de la longitud de penetración. La figura permite distinguir tres regiones: los casos extremos,  $\lambda_\perp > 4$  (el flujo inducido  $f_i = 0 + \delta/\lambda_\perp$ ) y  $\lambda_\perp < 0,12$  ( $f_i = n_i - f_0 + \delta\lambda_\perp$ ), y una región intermedia en torno a  $\lambda_\perp \sim 0,7$ , donde la derivada es máxima.

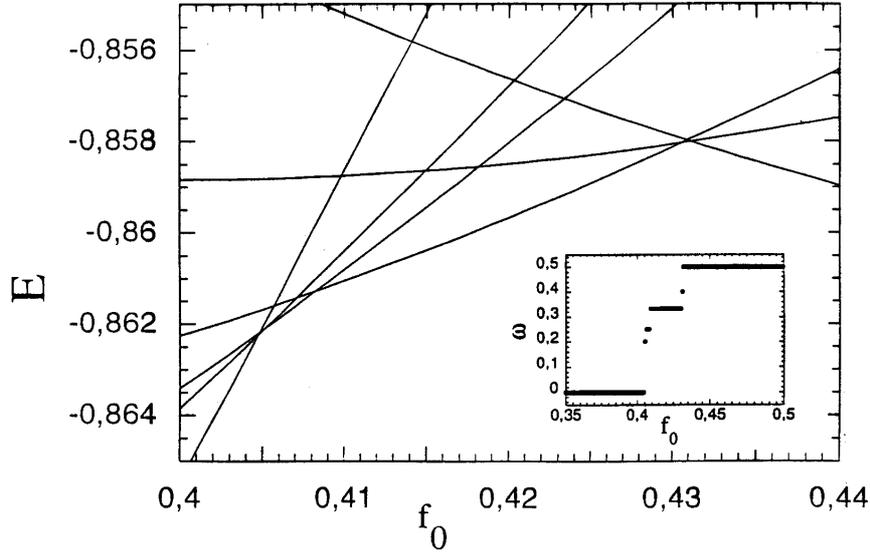


Figura 7.5: Energía de diferentes configuraciones a distintos valores de la frustración cuando  $\lambda_{\perp} = 0,5$ ,  $J_y = J_x$  y usando el modelo A. Estudiamos los estados  $\omega = 0, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5$  y  $1/2$  (de izquierda a derecha en la figura). La energía del estado fundamental como función del campo está dada por la envolvente de las curvas. En pequeño mostramos el valor de  $\omega$  para los estados fundamentales, obtenido a partir de la curva de energías.

por celdilla de una configuración con  $\omega = p/q$  es

$$E_p \simeq -3 + d_K \left( \frac{p}{q} (1 - f_0)^2 + \frac{q-p}{q} f_0^2 \right). \quad (7.8)$$

Cuando  $f_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $(1 - f_0) \geq f_0$ , y  $E_p$  es una función creciente de  $\omega$ : para cualquier  $f_0 \neq \frac{1}{2}$ ,  $\omega_0 < \omega_1$  implica  $E(\omega_0) < E(\omega_1)$  y, en esta aproximación, la configuración con  $\omega = 0$  es el estado fundamental. Si  $f_0 = 1/2$ ,  $E_p$ , como se definió previamente, es igual para todos los valores de  $\omega$ , por lo que se requiere una aproximación de segundo orden en  $d_K$ . Es fácil de obtener que  $E(\omega = \frac{1}{2}; f_0 = \frac{1}{2}) < E(\omega = 0; f_0 = \frac{1}{2})$  – en particular  $E(\omega = \frac{1}{2}; f_0 = \frac{1}{2}) - E(\omega = 0; f_0 = \frac{1}{2}) = d_K^2 / (6\pi^2 J_y)$ . –

Remarcamos que estos resultados corresponden al caso A y un límite extremo ( $\lambda_{\perp} \rightarrow 0$ ). De todos modos, la Escalera del Diabolo es observable a todos los valores de  $\lambda_{\perp}$  (hemos comprobado este punto incluso a  $\lambda_{\perp} = 0,012$ ). Como ejemplo, la figura 7.5 muestra la energía de configuraciones estables con valores diferentes de  $\omega$  ( $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ ), como una función del campo externo cuando  $\lambda_{\perp} = 0,5$ . La energía del estado fundamental corresponde a la envolvente de estas curvas, de este modo una aproximación a la función  $\omega(f_0)$  del estado fundamental puede obtenerse a partir de ellas.

Este resultado cambia cuando consideramos una aproximación más completa a la matriz de inducciones (modelos B y C). En estos casos la fase  $\omega = 0$  no domina el diagrama cuando  $\lambda_{\perp} \rightarrow 0$  y otras fases conmensuradas se aprecian nítidamente. Antes de realizar un análisis completo, vamos a presentar un argumento de plausibilidad en apoyo de esta afirmación. Comencemos comparando las fases  $\omega = 0$  y  $\omega = \frac{1}{2}$ . En la configuración  $\omega = 0$ , las corrientes y los flujos son idénticos en todas las celdas. Por otro lado, una configuración con  $\omega = \frac{1}{2}$  exhibe una periodicidad espacial de periodo  $2a$ ; cuando  $f_0 = \frac{1}{2}$  el flujo y las corrientes en una celda tienen el mismo módulo y signo opuesto respecto a las de celdas adyacentes. Esto nos permite definir un  $d_K$  efectivo para ambas configuraciones, de modo que la energía magnética por celda es  $d_{K\text{eff}} f_i^2$  (ver apéndice). En el caso B  $d_{K\text{eff}}(\omega = 0) = 10,945\lambda_{\perp}$  y  $d_{K\text{eff}}(\omega = \frac{1}{2}) = 4,617\lambda_{\perp}$  mientras que en el caso C  $d_{K\text{eff}}(\omega = 0) = 11,176\lambda_{\perp}$  y  $d_{K\text{eff}}(\omega = \frac{1}{2}) = 4,638\lambda_{\perp}$ . En general, si  $\omega_0 < \omega_1$  entonces  $d_{K\text{eff}}(\omega_0) > d_{K\text{eff}}(\omega_1)$  y por ello  $E(\omega_0; f_0 = 1/2) > E(\omega_1; f_0 = 1/2)$ . Esta dependencia de la intensidad del apantallamiento con  $\omega$  causa que el diagrama de fases en el límite de longitud de penetración muy pequeña cambie de manera importante según la aproximación a la matriz de inducciones.

Es fácil demostrar que, en el límite  $\lambda_{\perp} \rightarrow 0$  y usando la aproximación B a la matriz de inducciones, la fase  $\omega = 0$  es estado fundamental cuando  $0 < f_0 < 0,350$ , la fase  $\omega = 1/2$  lo es cuando  $0,350 < f_0 < 1/2$ , y cuando  $f_0 = 0,350$  todas las fases tienen la misma energía.

Más aún, es posible extender de modo trivial el argumento desarrollado previamente en A, y calcular la energía por celdilla de cualquier distribución de vórtices como función de  $f_0$ . Notar que una configuración con  $\omega = \frac{p}{q}$  está descrita por una estructura periódica espacial cuya celda unidad consiste en  $q$  celdillas conteniendo  $p$  vórtices, por ello podemos reducir el sistema a uno con  $q$  celdas. Para hacerlo es necesario generalizar la suma anterior y redefinir las componentes de la matriz  $L$  para tener en cuenta la contribución de cada una de las infinitas réplicas de la celda unidad. De este modo la inductancia entre dos celdillas a distancia  $j$  está dada por

$$\hat{L}_{ij} = \sum_n L_{i,j+nq}, \quad \text{donde } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ y } j = 1, \dots, q \quad (7.9)$$

En el límite  $\lambda_{\perp} \rightarrow 0$  los flujos inducidos en las celdillas de la celda unidad están dados por el vector  $F \equiv \{f_a f_b f_c \dots\}$  con  $f_i = (1 - f_0 + \delta f_i)$  o  $(-f_0 + \delta f_i)$  dependiendo del número de ocupación de la celda,  $n_i$ . De este modo, la energía por celda, hasta el primer orden en  $\lambda_{\perp}$ , está dada por la ecuación (7.7) con  $\delta f_i = 0$ . Hemos calculado esta expresión para una serie de valores de  $\omega$ . Comparando las energías de las curvas para diferentes configuraciones hemos obtenido una Escalera del Diablo, ver figura 7.6.

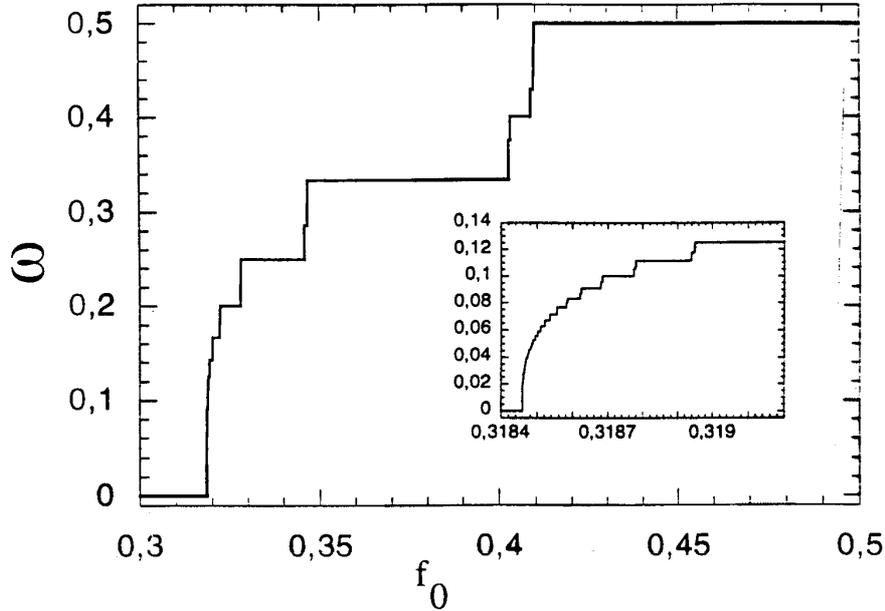


Figura 7.6: Escalera del Diablo observada en el caso C, cuando  $\lambda_{\perp} \rightarrow 0$  y la escalera es isótropa.

El comportamiento que hemos descrito – la existencia de un conjunto infinito de estados fundamentales que varían con el campo según una Escalera del Diablo – es característico de una amplia clase de estructuras espacialmente moduladas con una interacción convexa entre las partículas. Como vimos en el capítulo anterior, en el límite de despreciar los efectos de apantallamiento del campo ( $\lambda_{\perp} \rightarrow \infty$ ), está bien establecido que el problema del estado fundamental de la escalera es equivalente al problema del estado fundamental de un modelo Frenkel-Kontorova convexo. Sin embargo, y a pesar del comportamiento cualitativo similar mostrado en nuestros cálculos, la inclusión de los campos inducidos por las corrientes magnéticas dificulta hacer una equivalencia rigurosa entre el hamiltoniano que describe la escalera con efectos de apantallamiento y los modelos unidimensionales convexos. Este punto está más allá del alcance del trabajo realizado y es una cuestión abierta a un estudio futuro.

### 7.3. Metaestabilidad

De aquí en adelante vamos a estudiar la respuesta de la red de uniones Josephson a variaciones del campo externo. Restringiremos nuestro análisis al estudio de los intervalos de estabilidad de algunas fases commensuradas sen-

cillas, aquellas que son la solución estado fundamental a algún valor de los parámetros del sistema (de este modo, consideramos sólo fases ordenadas que incluyan vórtices, y no antivórtices, y para las cuales  $0 < \omega < \frac{1}{2}$ ). Tal perspectiva fue estudiada en el capítulo anterior, en el límite de despreciar los efectos de apantallamiento, para caracterizar la aproximación dinámica al equilibrio, que mostró relajación lenta [37] (ver la sección primera del capítulo siguiente). Aquí nos centraremos en una diferencia importante que surge cuando se consideran los campos inducidos. Tal estudio es llevado a cabo por medio de una computación casi estática de las configuraciones ordenadas estables (mínimos locales del hamiltoniano (7.1)) cuando el campo externo cambia lentamente.

El rango de estabilidad de cualquiera de las configuraciones que estudiamos es mayor que el intervalo de los parámetros en los que es el estado fundamental. En general, existe un valor crítico del campo para la estabilidad de cada fase: para  $f_0 < f_c(\omega)$  la fase  $\omega$  no es ya estable. La pérdida de estabilidad cuando  $f_0$  decrece ocurre del siguiente modo: un decrecimiento del campo implica un aumento de las supercorrientes a través de las uniones para mantener la densidad de vórtices en la red. La inestabilidad de un estado ocurre cuando la supercorriente en una unión alcanza su valor máximo. Entonces cualquier cambio pequeño en el campo no puede mantenerse por un crecimiento de las corrientes, la estructura de vórtices es inestable y el sistema relaja a una fase con  $\omega$  diferente. Este es el proceso para los cambios en la densidad de vórtices cuando el campo externo es variado o cuando el ruido térmico es suficientemente grande para producir que un vórtice salte la barrera de energía de la fase metaestable y entonces el sistema se aproxima a alguna otra fase “más estable”.

En el límite de despreciar efectos de apantallamiento [37]  $f_c(\omega) > 0$  para todo  $\omega \neq 0$ , y de este modo cuando  $f_0 = 0$  sólo la fase  $\omega = 0$  es estable. La inclusión de corrientes inducidas cambia esta situación. Cuando  $\lambda_{\perp}$  decrece el rango de estabilidad de una fase determinada aumenta. Más aún, para cada configuración  $\omega$  hay un valor crítico de la longitud de penetración  $\lambda_{\perp c}(\omega)$ : si  $\lambda_{\perp} < \lambda_{\perp c}(\omega)$  la fase es estable a cualquier valor del campo externo. Consideremos dos casos extremos: la configuración de un vórtice y la fase  $\omega = 1/2$ . El carácter repulsivo de la interacción entre vórtices implica que la estabilidad de la configuración con un sólo vórtice es una condición necesaria para la estabilidad de cualquier fase con  $0 < \omega < \frac{1}{2}$ , así que el valor particular de  $\lambda_{\perp}$  al cual ocurre la estabilidad de la configuración  $(\lambda_{\perp}^v(f_0))$  es una cota superior para la estabilidad de las fases con  $0 < \omega < \frac{1}{2}$ . Por otro lado, la estabilidad de la fase  $\omega = \frac{1}{2}$  asegura la estabilidad de cualquier otra fase con  $0 < \omega < \frac{1}{2}$ , de modo que el valor particular de  $\lambda_{\perp}$  al cual ocurre la estabilidad de la  $\omega = \frac{1}{2}$   $(\lambda_{\perp}^{1/2}(f_0))$  es una cota inferior para la inestabilidad de las fases con  $0 < \omega < \frac{1}{2}$ . De este

modo,  $\lambda_{\perp}^{1/2}(f_0) \leq \lambda_{\perp}^{\omega_i}(f_0) \leq \lambda_{\perp}(f_0)$ . La figura 7.7 muestra las regiones de estabilidad de las configuraciones de vórtices. Para valores de los parámetros por encima de las curvas (región E), cualquier configuración de vórtices es estable. En la región E-I, conforme nos movemos hacia el origen de coordenadas, los diferentes estados se hacen inestables (en orden de decrecimiento de  $\omega$ ). En I la única configuración estable es la de  $\omega = 0$ .

Mirando de nuevo las supercorrientes en la red, vemos que conforme  $\lambda_{\perp}$  decrece las diferencias de fases invariantes *gauge* de las configuraciones metaestables se aproximan a cero y de este modo las supercorrientes son menores, haciendo la fase más estable.

En el capítulo siguiente volveremos sobre estas cuestiones, que tienen incidencia sobre el comportamiento del sistema en presencia de corrientes externas.

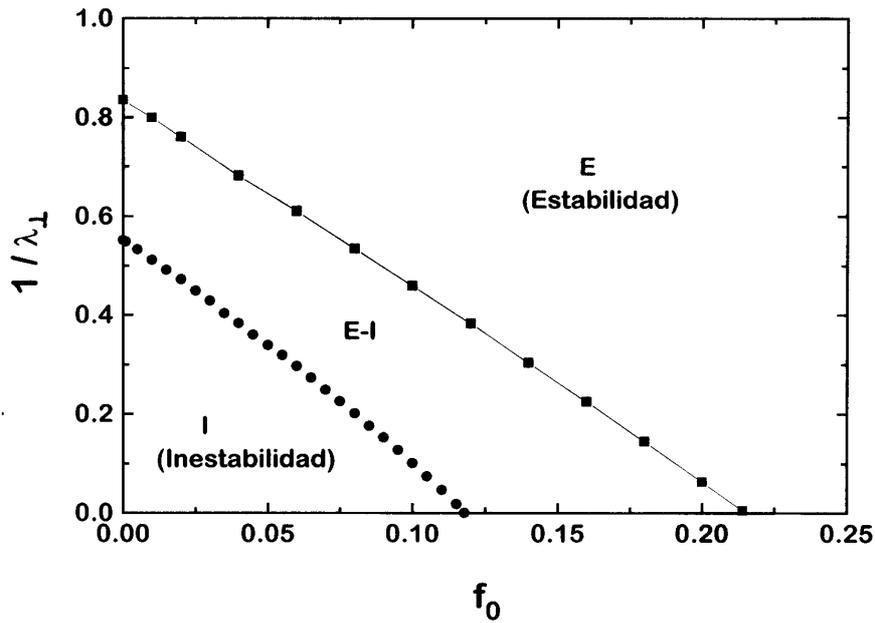


Figura 7.7: La figura muestra las fronteras entre las regiones de estabilidad y de inestabilidad de una configuración con un vórtice (círculos) y de la fase  $\omega = 1/2$  (cuadrados), en el caso  $J_y = J_x$ . Hemos comprobado que las curvas ajustan a una función cuadrática  $f_0 = \alpha \left( \beta + \frac{1}{\lambda_{\perp c}(f_0)} \right) \left( \frac{1}{\lambda_{\perp c}(0)} - \frac{1}{\lambda_{\perp c}(f_0)} \right)$ . Donde  $\lambda_{\perp c}(0)$  es la longitud de penetración por debajo de la cual una configuración es estable a  $f_0 = 0$ , y  $\alpha\beta \frac{1}{\lambda_{\perp c}(0)} = f_c$ , donde  $f_c$  es el valor de la frustración por debajo del cual la configuración no es estable en el límite de inducción nula. Para la configuración con un vórtice,  $f_c = 0,1175 \pm 0,00065$  y  $\lambda_{\perp c}(0) = 1,812 \pm 0,018$ ; en el caso  $\omega = 1/2$ ,  $f_c = 0,215 \pm 0,001$  y  $\lambda_{\perp c}(0) = 1,197 \pm 0,006$ .

## 7.4. Apéndice: matriz de inducciones

Analicemos las ecuaciones dinámicas de una red de uniones Josephson con corrientes de apantallamiento. Dentro del marco del modelo RSJ la intensidad a través de la unión  $ij$  de la red viene dada por la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$I_{ij} = I_c \text{sen}(\theta_i - \theta_j - A_{ij}) + \frac{\Phi_0}{2\pi R} \frac{d}{dt}(\theta_i - \theta_j - A_{ij}) \quad (7.10)$$

con  $A_{ij}$  cumpliendo  $\sum_{ij \in \alpha} A_{ij} = 2\pi\Phi_\alpha^{\text{tot}}/\Phi_0$ . El flujo magnético total a través de una celdilla  $\alpha$  está dado por el flujo debido al campo externo  $\Phi^{\text{ext}}$ , que es constante para todas las celdillas de la red, más el campo inducido por todas las corrientes  $I_{kl}$  en la red:

$$\Phi_\alpha^{\text{tot}} = \Phi^{\text{ext}} + \Phi_\alpha^{\text{ind}} = \Phi^{\text{ext}} + \sum_{ij \in \alpha} \sum_{kl} \mathcal{L}_{ij,kl} I_{kl} \quad (7.11)$$

$\mathcal{L}_{ij,kl}$  es una matriz que depende explícitamente de la geometría de la red.

El sistema es de ecuaciones se completa con las condiciones de conservación de la corriente en cada isla superconductora:

$$\sum_j I_{ij} = I_i^{\text{ext}} \quad (7.12)$$

Resolver los anteriores sistemas no es un problema en modo alguno trivial [46, 90], implica la resolución de un conjunto de  $2n^2$  ecuaciones diferenciales no lineales y globalmente acopladas. Las  $2n^2$  variables son las  $n^2$  fases de las islas superconductoras y los  $n^2$  flujos o las  $2n^2$  diferencias invariantes *gauge* en las uniones de la red. De aquí en adelante asumiremos que  $I_i^{\text{ext}} = 0$ .

Es habitual redefinir las expresiones anteriores y trabajar con las corrientes de malla  $I_\alpha$ , en lugar de las corrientes de unión  $I_{ij}$ , y la matriz de inducciones entre celdillas  $L_{\alpha\beta}$ , en vez de inducciones entre uniones  $\mathcal{L}_{ij,kl}$ . Dicha transformación la hacemos del siguiente modo: aplicando la ley de Biot-Savart calculamos el campo magnético inducido en una unión por las corrientes circulando en la red [93]. De este modo se obtiene la siguiente expresión adimensional para las componentes inducidas del potencial vector, que obedece el gauge de Coulomb ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ),

$$A_{ij}^{\text{ind}} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_i^j \vec{A}^{\text{ind}} d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\lambda_\perp} \sum_{kl} FF_{ij,kl} i_{kl}, \quad (7.13)$$

donde  $FF$  es un factor de forma que depende de la geometría de la red,  $i_{ij}$  es la corriente que circula a través de la unión  $ij$ , normalizada a la corriente

crítica de la unión  $I_c$ , y  $\lambda_\perp$  es la longitud de penetración (ver ecuación (7.3)). En esta descripción  $\mathcal{L}_{ij,kl} = 1/(4\pi\lambda_\perp I_{c,ij})FF_{ij;kl}$ .

Es fácil obtener una descripción equivalente en términos de las corrientes de malla y el flujo magnético. El flujo inducido en la celda  $\alpha$  está dado por

$$\Phi_\alpha^{\text{ind}} = \oint_\alpha \vec{A}^{\text{ind}} d\vec{l} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \sum_{ij \in \alpha} A_{ij}^{\text{ind}}, \quad (7.14)$$

donde la suma es sobre las cuatro uniones  $ij$  de la celda  $\alpha$ , y puede ser expresado por una ecuación lineal de la forma

$$\sum_{ij \in \alpha} A_{ij}^{\text{ind}} = P_{\alpha;ij} A_{ij}^{\text{ind}}. \quad (7.15)$$

Por otro lado, también las corrientes de malla están relacionadas con las corrientes en cada unión a través de un operador lineal

$$i_{ij} = \sum_{ij \in \alpha} Q_{ij;\alpha} i_\alpha \quad (7.16)$$

(suponemos que no hay corrientes externas).

Combinando (7.13), (7.14), (7.15) y (7.16) obtenemos

$$\Phi_\alpha^{\text{ind}} = L_{\alpha\beta} I_\beta, \quad L_{\alpha\beta} = \frac{\Phi_0}{I_c} \frac{1}{8\pi^2 \lambda_\perp} \Lambda_{\alpha\beta}, \quad \Lambda_{\alpha\beta} = \sum_{ij} \sum_{kl} P_{\alpha;ij} FF_{ij;kl} Q_{kl;\beta}. \quad (7.17)$$

Los elementos de  $\Lambda_{ij}$  dependen de la distancia  $|i-j|$  entre las celdas consideradas. Las propiedades generales de la matriz  $\Lambda_{ij}$  son:  $\Lambda_{00}$  es positivo, y  $\Lambda_{ij} < 0$  para  $i \neq j$ ;  $\Lambda_{00} = 38,194$  y  $\frac{\Lambda_{0i}}{\Lambda_{00}} \equiv \{1, -0.20332, -0.0040118, -0.0010570, \dots\}$ ; para dos celdas suficientemente alejadas ( $|i-j| \geq 10$ ) la inducción mutua es  $|L_{ij}| \sim |i-j|^{-3}$ , como está calculado en [46]. En nuestros cálculos, hemos considerado celdas cuadradas y corrientes concentradas en un cilindro de longitud  $a$  y radio  $0,005a$  [93].

En este punto debemos señalar que la descripción anterior en términos de corrientes de malla en vez de corrientes de unión, cuando se aplica a la escalera de uniones Josephson implica que la corriente circulando a través de una unión del brazo superior de la escalera es igual pero de signo contrario que la corriente que circula a través de la unión inferior de la misma celdilla (si esto no fuera así no se podría escribir la ecuación 7.16). Puede verse fácilmente que esta condición es siempre satisfecha en el caso de una red finita de uniones Josephson pero no en el caso de la red infinita (que es el límite que consideramos en nuestro trabajo), en la cual está permitido un transporte neto de corriente en la dirección longitudinal de la red. A primera vista esto pone en dificultad

la descripción que hacemos del sistema. Sin embargo hemos de decir que en el caso de la búsqueda de los estados fundamentales partimos del hecho de que en el límite  $\lambda_{\perp} \rightarrow \infty$  estos cumplen esta condición sobre las corrientes, y en el resto de los casos también por ser continuación de este límite. Por último, señalamos que en los estudios dinámicos de relajación al equilibrio, caso C, la dinámica que realizamos [93] se basa en el cálculo de los campos inducidos por las corrientes de cada unión (ecuación 7.11).

Aplicando las propiedades de la matriz  $\Lambda_{ij}$  a la escalera de uniones Josephson podemos calcular el  $d_K$  equivalente en el caso  $f_0 = \frac{1}{2}$  para las configuraciones  $\omega = 0$  y  $\omega = \frac{1}{2}$ . Esto puede hacerse fácilmente si se considera la periodicidad espacial de las soluciones. Si  $\omega = 0$  todas las celdillas de la red tienen el mismo flujo y corriente; de este modo podemos definir una matriz de autoinductancia efectiva como

$$f_i = (L_{i;i} + 2 * (L_{i;i+1} + L_{i;i+2} + \dots)) i_i = L_{\text{eff}} i_i, \quad (7.18)$$

donde el factor 2 es debido a la suma de las contribuciones de las celdas a la derecha y a la izquierda. Los términos  $L_{ij}, i \neq j$  son y así  $L_{\text{eff}} < L_{ii}$ . Ahora,  $d_{K\text{eff}}(\omega = 0) = 8\pi^3/L_{\text{eff}} = 11,176\lambda_{\perp}$ .

De manera análoga, podemos calcular el valor de  $L_{\text{eff}}$  para una solución de  $\omega = \frac{1}{2}$ : para  $f_0 = \frac{1}{2}$  el flujo y la corriente en una celda tienen la misma magnitud y signos contrarios de las de celdas adyacentes. Así

$$f_i = (L_{i;i} + 2 * (-L_{i;i+1} + L_{i;i+2} - \dots)) i_i = L_{\text{eff}} i_i, \quad (7.19)$$

donde ahora  $L_{\text{eff}} > L_{ii}$  y  $d_{K\text{eff}}(\omega = \frac{1}{2}) = 8\pi^3/L_{\text{eff}} = 4,638\lambda_{\perp}$ .

## Capítulo 8

# Algunos aspectos dinámicos en la escalera de uniones Josephson

### 8.1. Dinámica de relajación al equilibrio

Las redes de uniones Josephson en presencia de un campo externo son probablemente uno de los mejores ejemplos de sistemas físicos en los que las ideas de competición entre interacciones (frustración), desorden y dinámica compleja o vítrea (*glassy*) pueden ser comprobadas teórica y experimentalmente, de forma controlada [94, 95, 96, 97]. La mayor parte de los esfuerzos dedicados a estos sistemas, siguiendo esta línea de desorden y dinámica compleja, durante la última década, han sido principalmente dirigidos al estudio de redes bi- y tri- dimensionales como modelos de superconductores extremos de tipo II y en conexión con algunos problemas en superconductores granulares (como los superconductores de alta temperatura crítica) [98, 99].

En esta sección veremos como el concepto de frustración influye en los fenómenos de equilibrio térmico en la escalera de uniones Josephson. También veremos como este sistema, a pesar de su geometría simple, presenta **relajación lenta** al equilibrio, un fenómeno que ha sido observado en algunos sistemas físicos, como vidrios de espín, polímeros y superconductores granulares y que en modo alguno puede considerarse trivial. Es importante señalar que, a diferencia de los ejemplos anteriores, nuestro sistema no posee ningún desorden estructural y la frustración es uniforme. El fenómeno de la relajación lenta en sistemas frustrados pero sin desorden es la referencia que impulsa el estudio que hemos realizamos. En las siguientes trabajos encontramos resultados sobre la posibilidad de un comportamiento vítreo en sistemas ordenados [100, 101, 102].

En el capítulo 5 hemos realizado el análisis de la estabilidad lineal de algunas estructuras conmensuradas representativas, el cual revela su persistencia como estados metaestables fuera del dominio de valores del campo en el que son el estado fundamental. En el sistema existen muchas otras estructuras metaestables lo que define un complejo espacio de configuraciones. Una de las características microscópicas que conducen al fenómeno macroscópico de **relajación lenta** es la existencia de fuertes ligaduras dinámicas en el espacio de configuraciones del sistema, éstas causan una aproximación dinámica al equilibrio que se define como **dinámica restringida**. En la escalera de uniones Josephson estas ligaduras están directamente relacionadas con el carácter y grado de la metaestabilidad, estudiados en el capítulo 5.

Para comprobar este fenómeno en la escalera de uniones Josephson nosotros estudiamos la dinámica relajacional de Langevin [103, 104].

$$\dot{\theta}_i(t) = -\Gamma \frac{\partial H}{\partial \theta_i} + \eta_i(t) \quad (8.1)$$

donde  $H$  está definido por la ecuación (6.2) (vamos a restringir nuestro estudio al caso que no incluye campos inducidos). Además, usamos  $\Gamma = 1$  y  $J_x = 1$ .  $\eta_i$  es un ruido térmico aditivo en las fases y satisface  $\langle \eta_i(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = 2T \delta_{ij} \delta(t - t')$ .

Buscamos la relajación de estados conmensurados y configuraciones aleatorias a diferentes valores de la temperatura  $T$ . En cada caso hemos calculado la densidad de vórtices como función del tiempo y seguido la evolución temporal de las correspondientes estructuras espaciales de vórtices. En estas simulaciones usamos escaleras con 400, 2000 y 5000 celdillas, para evitar los efectos de tamaño finito, y condiciones de contorno periódicas en la dirección longitudinal. Hemos integrado el sistema de ecuaciones definido por 8.1 usando un algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden adecuado para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales estocásticas [105, 106]. Los resultados que presentamos aquí han sido obtenidos con  $f = 0,25$  y  $J_y = J_x$ . El estado fundamental a esos valores de los parámetros tiene densidad de vórtices  $\omega = 0$ , y el espacio de configuraciones muestra una estructura extremadamente compleja de estados metaestables con valores de energía cercanos (ver figura 6.12).

En el caso de una configuración metaestable inicialmente ordenada, encontramos tres regímenes de temperatura distintos (figura 8.1). A valores muy bajos de la temperatura el estado permanece como configuración metaestable. A partir de algún valor mayor de  $T$ , que depende del estado inicial particular, y hasta  $T \simeq 0,05$  observamos el decaimiento desde el estado inicial ordenado a una fase metaestable desordenada. Esta fase es básicamente del mismo tipo que la encontrada al realizar la relajación a  $T = 0$  de una configuración de fases aleatorias. A valores de la temperatura superiores a  $T = 0,05$  los estados

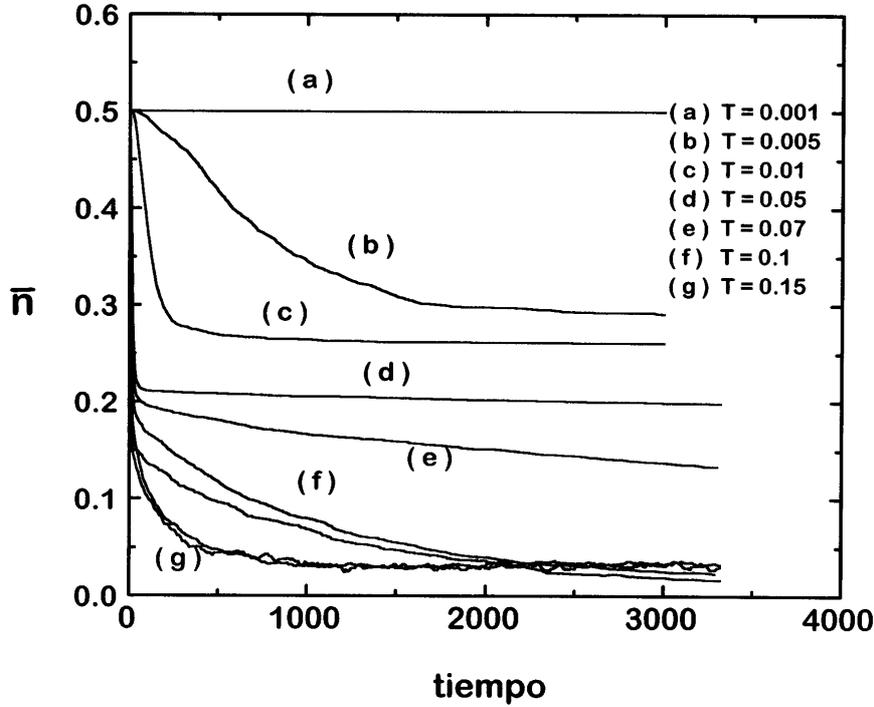


Figura 8.1: Curvas de relajación de la escalera de uniones Josephson a diferentes temperaturas. Cada curva muestra el cambio de la densidad de vórtices  $\bar{n}$  en la escalera en función del tiempo. El estado inicial es la fase ordenada  $\omega = 1/2$ , que es estable a estos valores de  $f$  y  $h$  ( $f = 0,25, h = 1,0$ ). A bajas temperaturas no se observa relajación. A valores de  $T$  inferiores a  $T \simeq 0,05$  el estado decae a un nuevo estado metaestable. A temperaturas por encima de este valor decae lentamente al estado fundamental  $\omega = 0$ . A altas temperaturas la generación térmica de vórtices y antivórtices es dominante y  $\langle \bar{n}(t) \rangle_t = f$ . En los casos de  $T = 0,1$  y  $T = 0,15$  también mostramos las curvas de relajación de configuraciones iniciales aleatorias. Estas curvas coinciden con la relajación de la fase ordenada,  $\omega = 1/2$ .

relajan lentamente hacia el estado fundamental, sin vórtices. Tal relajación, para los valores de los parámetros estudiados, es observable en el rango de temperaturas entre  $T \simeq 0,05$  y  $T \simeq 0,15$ . En torno a este último valor de  $T$ , superpuesta a los efectos puramente relajacionales, aparece la activación térmica de vórtices y antivórtices.

Han sido propuestas muchas clases de funciones para ajustar una curva de relajación lenta. Una de las más generales es la ley KWW [107, 108] (Kohlrausch, Williams y Watts, también llamada *two-parameter stretched exponential law*), definida por  $\bar{n}(t) \sim \exp[-(t/\tau)^\beta]$ . La relajación lenta corresponde a valores del parámetro  $\beta < 1$ . Si  $\beta \rightarrow 0$  se encuentra relajación logarítmica. Un valor de  $\beta$  de 0,5 a 0,7 es común en vidrios. Los ajustes de nuestros datos de

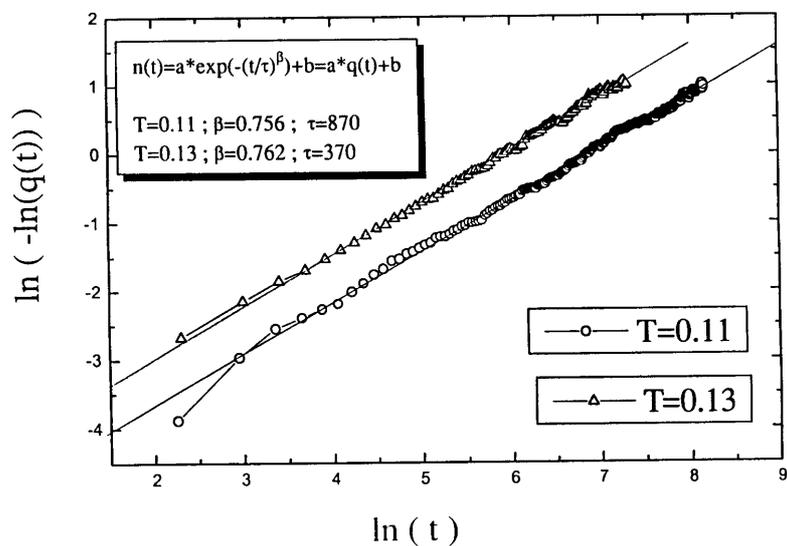


Figura 8.2: Las curvas de relajación lenta de configuraciones aleatorias han sido ajustadas en el rango de temperaturas entre 0,05 y 0,15 por medio de la ley KWW. Encontramos diferentes exponentes entre 0,5 y 0,9 ( $h = 1,0$ ,  $f = 0,25$ )

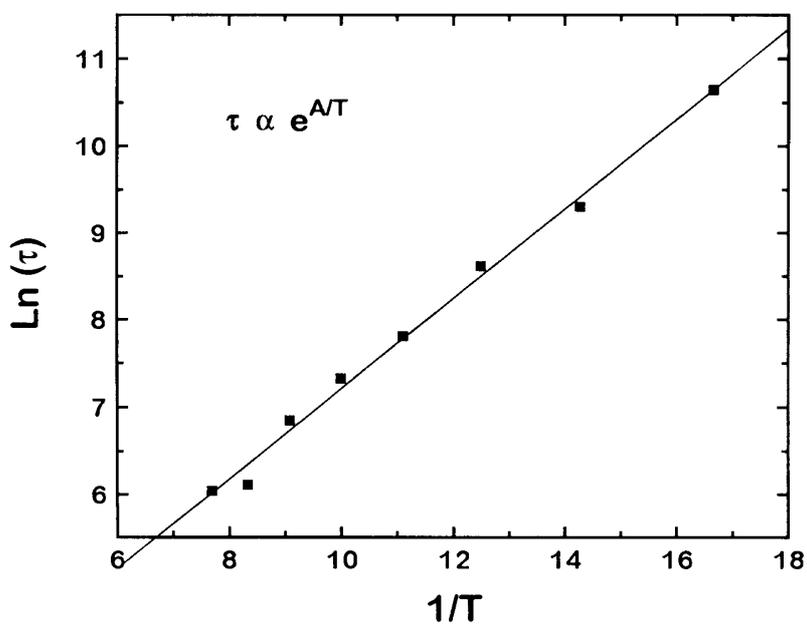


Figura 8.3: La figura muestra la dependencia del tiempo de relajación  $\tau$  con la temperatura en el rango de temperaturas en el cual el sistema presenta el fenómeno de relajación lenta

las simulaciones dan valores de  $\beta$  entre 0,5 y 0,9, dependiendo de la temperatura (ver figura 8.2). No hemos sido capaces de encontrar una dependencia funcional del exponente  $\beta$  con la temperatura. Sin embargo  $\tau \simeq \exp(\alpha/T)$  (ver figura 8.3), como debíamos esperar de un proceso activado térmicamente [83].

También hemos investigado las características microscópicas de la dinámica de vórtices en los diferentes regímenes de la relajación. A bajas temperaturas la relajación de las fases conmensuradas está dominada por la nucleación de nuevas estructuras compatibles con la inicial. El estado estacionario es un estado metaestable formado por diferentes estructuras conmensuradas separadas por paredes de dominio, ver figura 8.4. Los estados metaestables alcanzados desde configuraciones aleatorias son esencialmente los mismos. A temperaturas mayores estos estados metaestables intermedios decaen hacia el estado funda-

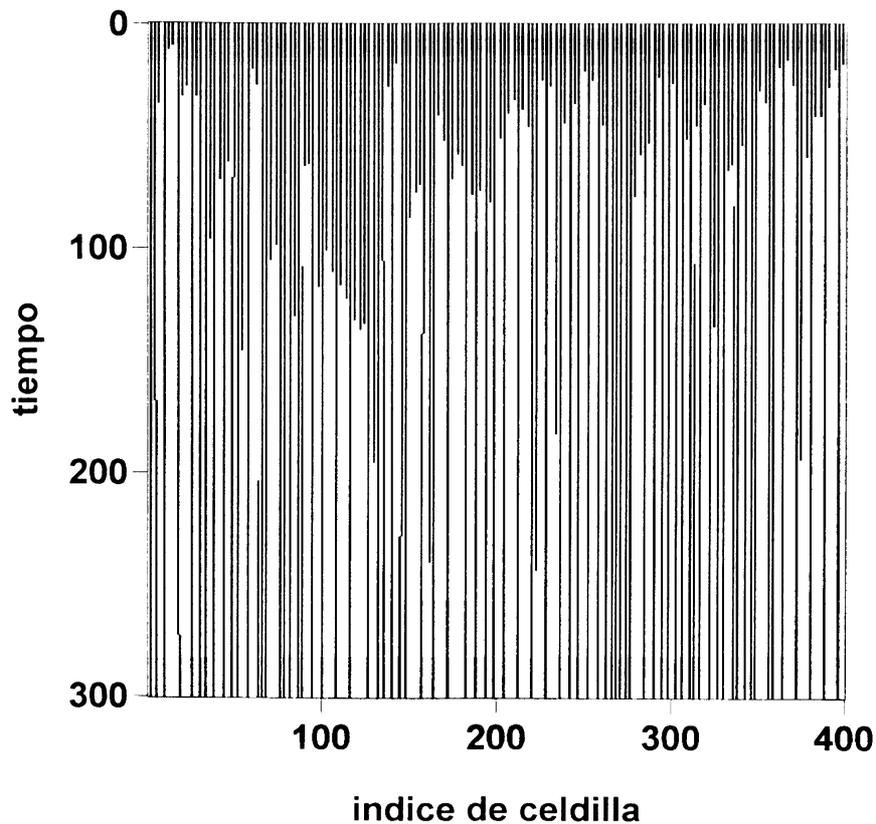


Figura 8.4: Evolución temporal de una configuración de vórtices en la escalera,  $n_j(t)$ , mostrando los procesos de nucleación, dominantes en la relajación de las estructuras ordenadas, a “bajas temperaturas”. El estado inicial ordenado,  $\bar{n}(t=0) = 1/2$ , decae “rápidamente” a un estado metaestable desordenado, ver figura 8.1. En la figura un cuadro negro indica vorticidad +1 en esa celda ( $h = 1,0, f = 0,25, T = 0,01$ ).

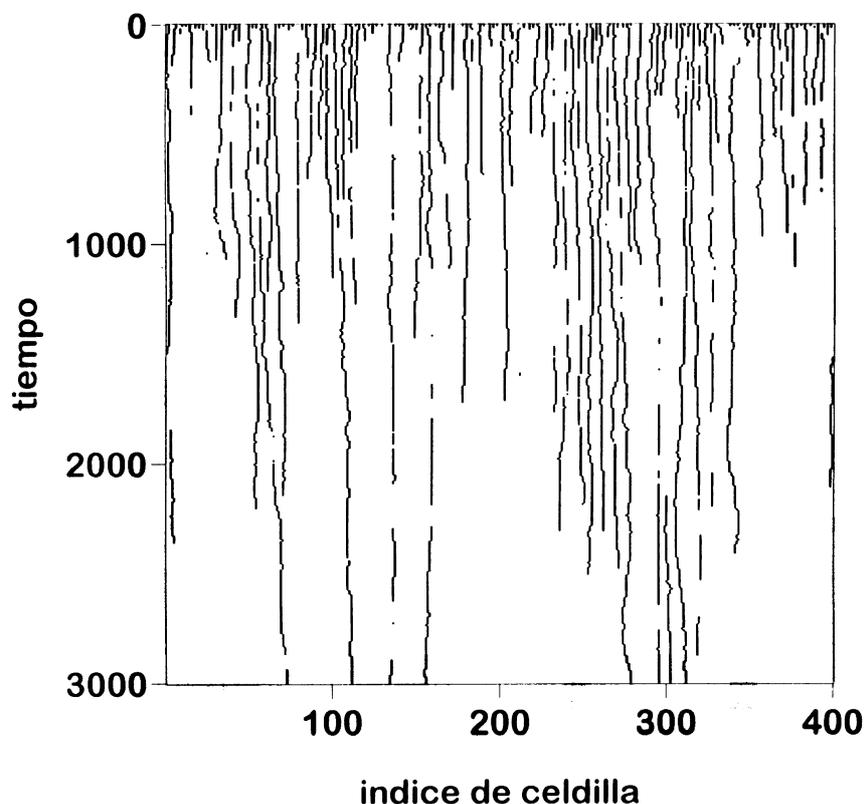


Figura 8.5: Evolución temporal de los vórtices en la escalera en el rango de temperaturas que muestra relajación lenta. Tales procesos dominan las relajaciones a temperaturas intermedias. El estado inicial es un estado ordenado  $\bar{n}(t = 0) = 1/2$  que decae rápidamente a una fase metaestable desordenada (ver figura 8.1) según se muestra en la figura 8.4. Posteriormente tales estados decaen lentamente al estado fundamental correspondiente, que en este caso ( $h = 1,0, f = 0,25, T = 0,1$ ) es  $\omega_{gs} = 0$ .

mental. En este rango de temperaturas es en el que encontramos la **relajación lenta**, resultado de las características del espacio de configuraciones. Conforme el tiempo avanza más vórtices son expulsados lentamente de la red por los fenómenos térmicos, ver figura 8.5.

A temperaturas muy altas la dinámica está dominada por la generación térmica de vórtices y antivórtices. Las fases se encuentran distribuidas aleatoriamente entre 0 y  $2\pi$  y  $\bar{n}$  se acerca a  $f$ .

La relajación de configuraciones arbitrarias se ajustan a una función de dinámica lenta aunque en el sistema no hay ningún desorden estructural. El único desorden posible es introducido vía la aleatoriedad en las configuraciones iniciales y vía las fluctuaciones térmicas. La existencia de una estructura

compleja de muchos estados metaestables y dinámica restringida en el espacio de configuraciones son los ingredientes esenciales para esta dinámica vítrea.

## 8.2. Dinámica en presencia de corrientes externas

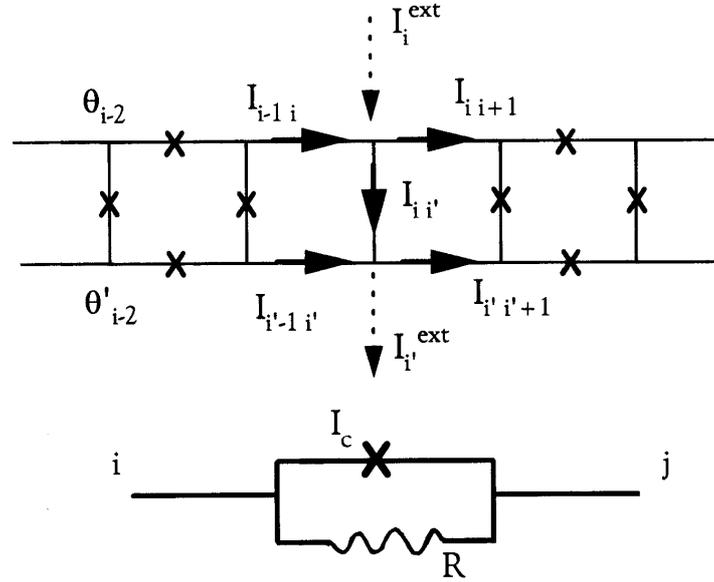
### 8.2.1. Ecuaciones del movimiento

El objeto de esta sección es recopilar una serie de resultados sobre la escalera de uniones Josephson sobreamortiguadas en presencia de corrientes externas. En el primer capítulo de esta parte dedicada a la escalera de uniones Josephson hemos establecido rigurosamente la equivalencia entre los estados fundamentales de la escalera y los del modelo Frenkel-Kontorova. Recordando dicha equivalencia nuestro enfoque, a diferencia del resto de los trabajos dinámicos realizados sobre la escalera de uniones Josephson (y redes en general), tiene su origen en los resultados dinámicos del modelo Frenkel-Kontorova [62], estudiado en profundidad en la primera parte de esta memoria, y su fin destacar las principales diferencias y paralelismos entre la dinámica de ambos tipos de sistemas.

En la literatura aparecen una serie de trabajos sobre diferentes aspectos dinámicos de una escalera de uniones Josephson. La mayoría de ellos estudian los fenómenos de sincronización bajo corrientes alternas: los *Shapiro steps*, su anchura, origen y estabilidad, tanto en el caso de que la red sea alimentada en su dirección transversal [109, 110, 111] o en la longitudinal [110, 112, 113, 114]. Aparte, Kim y Lee [115] estudian una transición dinámica de fase en la escalera en el caso de un campo magnético aleatorio. Muy recientemente Hwang, Ryu y Stroud [116] han informado de algunas características propias de la escalera de uniones Josephson directamente ligadas a su peculiar diagrama de fases, algunas de las cuales coinciden con aspectos que serán desarrollados en este capítulo.

Vamos a mantener nuestra descripción dentro del marco del modelo RSJ (ver ecuaciones (5.22) y (5.23)) para la intensidad y el voltaje a través de una unión de efecto Josephson. La conservación de la corriente en cada nodo de la red (ver figura 8.6) conduce al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_{i-1} + \dot{\theta}_{i+1} + \dot{\theta}'_i - 3\dot{\theta}_i &= \\
 &= -\text{sen}(\theta_{i-1} - \theta_i - \pi f) + \text{sen}(\theta_i - \theta_{i+1} - \pi f) + \frac{J_y}{J_x} \text{sen}(\theta_i - \theta'_i) - I(t) \\
 \\
 \dot{\theta}'_{i-1} + \dot{\theta}'_{i+1} + \dot{\theta}_i - 3\dot{\theta}'_i &= \\
 &= -\text{sen}(\theta'_{i-1} - \theta'_i + \pi f) + \text{sen}(\theta'_i - \theta'_{i+1} + \pi f) - \frac{J_y}{J_x} \text{sen}(\theta_i - \theta'_i) + I(t).
 \end{aligned}
 \tag{8.2}$$



$$I_{ij} = (\Phi_0/2\pi R)(\theta_i - \theta_j) + I_c \text{sen}(\theta_i - \theta_j - A_{ij})$$

Figura 8.6: La figura muestra un esquema del modelo RSJ para estudiar la escalera de uniones Josephson en presencia de corrientes externas aplicadas en la dirección transversal de la escalera

En el sistema anterior las corrientes están escaladas al valor de la corriente crítica  $I_{cx} = (\Phi_0/2\pi)J_x$  ( $J_y/J_x = I_{cy}/I_{cx}$ ) y el tiempo está normalizado a  $\tau = \hbar/2eRI_{cx} = 1/J_x R$ . Asumimos que la anisotropía afecta a las corrientes críticas y no a los términos resistivos. La elección del *gauge* es la misma que la de los capítulos anteriores. La corriente externa, en general

$$I(t) = I_{dc} + I_{ac} \cos(2\pi\nu_0 t), \tag{8.3}$$

es introducida en cada isla de la rama superior de la red y extraída de cada una de la inferior. La curva característica del sistema es el valor medio del voltaje entre el brazo superior e inferior de la escalera como función del valor medio de la corriente externa.

En nuestras simulaciones empleamos condiciones de contorno periódicas en la dirección longitudinal de la escalera. Las ecuaciones (8.2) definen un sistema de  $2N$  ecuaciones de primer orden acopladas para  $2N$  fases. Entre ellas una es redundante debido a la simetría del sistema bajo rotación uniforme de las fases, de modo que es posible fijar una fase arbitrariamente y resolver las  $2N - 1$  ecuaciones restantes. La integración del sistema requiere la inversión de una matriz de orden  $2N - 1$  en cada paso de la integración. En lugar de

seguir este esquema, resulta ventajoso numéricamente utilizar el procedimiento introducido por Faló et al. [43] para estudiar una red bidimensional de uniones sobreamortiguadas. Hemos comprobado que los resultados obtenidos usando los dos métodos son los mismos y este último es mucho más rápido en los casos de utilizar redes grandes. El método de Faló et al. consiste básicamente en incluir en cada isla superconductora un término capacitivo derivado de la interacción isla-substrato en la red. La inclusión de dicho término conduce a un sistema de  $2N$  ecuaciones de segundo orden desacopladas, que es equivalente al siguiente sistema de  $4N$  ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_i &= p_i \\
\dot{p}_i &= \eta(p_{i-1} + p_{i+1} + p'_i - 3p_i) + \\
&+ \text{sen}(\theta_{i-1} - \theta_i - \pi f) - \text{sen}(\theta_i - \theta_{i+1} - \pi f) - \frac{J_y}{J_x} \text{sen}(\theta_i - \theta'_i) + I(t) \\
\dot{\theta}'_i &= p'_i \\
\dot{p}'_i &= \eta(p'_{i-1} + p'_{i+1} + p_i - 3p'_i) + \\
&+ \text{sen}(\theta'_{i-1} - \theta'_i + \pi f) - \text{sen}(\theta'_i - \theta'_{i+1} + \pi f) + \frac{J_y}{J_x} \text{sen}(\theta_i - \theta'_i) - I(t).
\end{aligned} \tag{8.4}$$

En este caso el tiempo está normalizado a  $\tau = (C_0 \hbar / 2eI_x)^{1/2} = (C_0 / J_x)^{1/2}$  y la disipación está dada por  $\eta = (1/R)(\hbar/2eC_0I_x)^{1/2} = (1/R)(1/J_x C_0)^{1/2}$  con  $R$  la resistencia normal entre uniones y  $C_0$  la capacidad entre las islas superconductoras y el substrato. La solución en el límite sobreamortiguado ( $\eta > 1,0$ ) de (8.4) es la misma que la solución de (8.2).

El conjunto de ecuaciones (8.2) tiene la siguiente propiedad de simetría. Si a  $t = t_0$  todas las fases de la red cumplen que  $\theta_i(t_0) = -\theta'_i(t_0)$ , entonces para todo  $t > t_0$  se cumple que  $\theta_i(t) = -\theta'_i(t)$ . Sin embargo, obviamente, un estado estacionario arbitrario no tiene porque cumplir esta condición. Si suponemos que la configuración inicial es un estado fundamental del sistema (entonces  $\theta_i(t_0) = -\theta'_i(t_0)$ ) y consideramos que las diferencias de fases invariantes *gauge* son tales que nos mantenemos siempre dentro de la zona convexa del potencial de interacción y que esto nos permite realizar la aproximación:  $\text{sen}(\theta_i - \theta_{i+1} - \pi f) \simeq (\theta_i - \theta_{i+1} - \pi f)$ , entonces el problema se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
2\dot{\theta}_i - (\dot{\theta}_{i+1} - 2\dot{\theta}_i + \dot{\theta}_{i+1}) &= \\
= \theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1} - \frac{J_y}{J_x} \text{sen}(2\theta_i) + I(t),
\end{aligned} \tag{8.5}$$

muy similar a las ecuaciones que describen la dinámica disipativa del modelo Frenkel-Kontorova. Lo que diferencia (8.5) de (3.1) es la matriz de disipación que define la respuesta de las velocidades frente a las fuerzas.

Para llegar a (8.5) hemos necesitado hacer una serie de suposiciones sobre la naturaleza de las condiciones iniciales y la evolución de las diferencias de

fases invariantes *gauge* en las uniones horizontales de la red. En todo momento en nuestras simulaciones nos restringiremos al sistema de ecuaciones definido por (8.4), sin embargo la deducción de (8.5) revela las semejanzas existentes entre la dinámica del modelo Frenkel-Kontorova y la red de uniones Josephson, semejanzas que son equivalencia rigurosa en lo que se refiere a las propiedades del diagrama de fases de los estados fundamentales de ambos sistemas.

El punto principal de las diferencias entre los comportamientos dinámicos de ambos sistemas es la imposibilidad de la extensión de la regla de Middleton a la dinámica de la escalera de uniones Josephson. Este resultado es básico para la afirmación rigurosa de muchas de las propiedades de la dinámica del modelo Frenkel-Kontorova en la presencia de un campo uniforme espacial de fuerzas y en el límite sobreamortiguado; en particular la unicidad de la curva  $\bar{v}(\bar{F})$  y la existencia y unicidad de una función *hull* dinámica que describe el estado estacionario del sistema impulsado por una fuerza constante.

### 8.2.2. Algunos resultados de dinámica peculiares de la escalera de uniones Josephson bajo intensidades continuas

En la escalera de uniones Josephson la densidad de vórtices de los estados fundamentales como función del campo magnético externo,  $\omega_{gs}(f)$ , es una Escalera del Diablo (sección 2.1), de modo que el diagrama de fases de los estados fundamentales es muy distinto del caso de una red bidimensional infinita de uniones, donde  $\omega = f$ . Como consecuencia de esto puede esperarse que la escalera también presente algunas propiedades dinámicas propias, que la diferencie de otras redes. En esta sección vamos a fijarnos en tres aspectos del comportamiento de la escalera cuando es sometida a una corriente continua: las implicaciones dinámicas de la transición de Aubry estática de los estados fundamentales inconmensurados; la intensidad crítica de la escalera a distintos valores del campo magnético; y el problema de las condiciones iniciales.

#### Consecuencias dinámicas de la transición de Aubry

De la continuidad de la función  $\omega_{gs}(f)$  se deriva la existencia de estados fundamentales inconmensurados, aquellos para los cuales  $\omega$  es irracional. Dichos estados sufren una transición de fase, la transición de ruptura de analiticidad o transición de Aubry, a un cierto valor crítico (que depende del irracional  $\omega$ ) del parámetro que describe la anisotropía de la red,  $h_c(\omega)$ . En particular, en la sección 6.2 vimos que en el caso del número áureo  $(3 - \sqrt{5})/2$  ese valor de la anisotropía es  $h_c \simeq 0,490$ . La transición de Aubry distingue entre fases inconmensuradas analíticas ( $h < h_c$ ) y fases inconmensuradas no analíticas

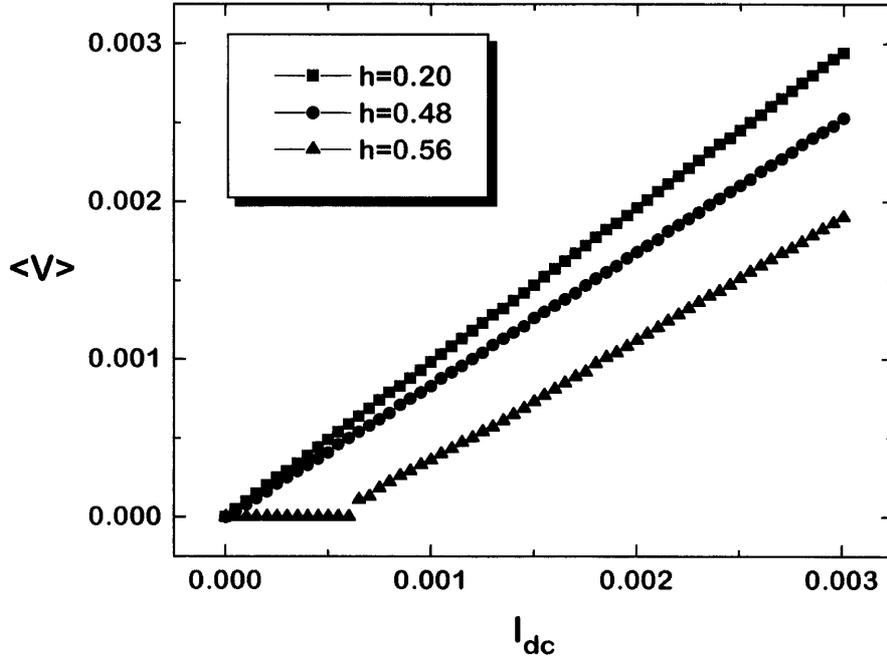


Figura 8.7: Curvas IV de una fase incommensurada en la escalera de uniones Josephson a distintos valores de la anisotropía de la red. Para esta fase  $h_c \simeq 0,49$

( $h > h_c$ ), dos regímenes estáticos radicalmente diferentes, y tiene una consecuencia importante sobre la dinámica de las fases: la red de vórtices de una fase incommensurada analítica es deslizante ( $I_c = 0$ ), mientras que no es deslizante en el caso de una fase incommensurada no analítica ( $I_c \neq 0$ ). El deslizamiento de los vórtices produce un comportamiento resistivo en la red, de ahí que en el marco de la red de uniones Josephson la transición de Aubry se reinterpreta como una transición superconductor-normal a temperatura cero.

Usando el método descrito anteriormente (ecuaciones 8.4) hemos calculado, a distintos valores de  $h$ , las curvas características intensidad-voltaje del estado fundamental  $\omega = 13/34$ , aproximación a la fase incommensurada  $\omega = (3 - \sqrt{5})/2$ , cuando el sistema es alimentado por una corriente constante:  $I(t) = I_{dc}$ . El valor de  $f$  para el cual esa fase es estado fundamental, que cambia con  $h$ , es obtenido usando el método de potenciales efectivos. La figura 8.7 presenta algunas de estas curvas a distintos valores de  $h$  a ambos lados y en las cercanías de la transición. Para valores bajos de  $h$ , la estructura incommensurada es deslizante y la respuesta IV es casi lineal ( $h = 0 \Rightarrow \langle V \rangle = I_{dc}$ ). Por encima de  $h_c$  el estado incommensurado está anclado y encontramos una corriente crítica  $I_c$  no nula y una curva característica IV no lineal. El valor de la intensidad crítica para las estructuras incommensuradas no analíticas escala con  $h$  cuando

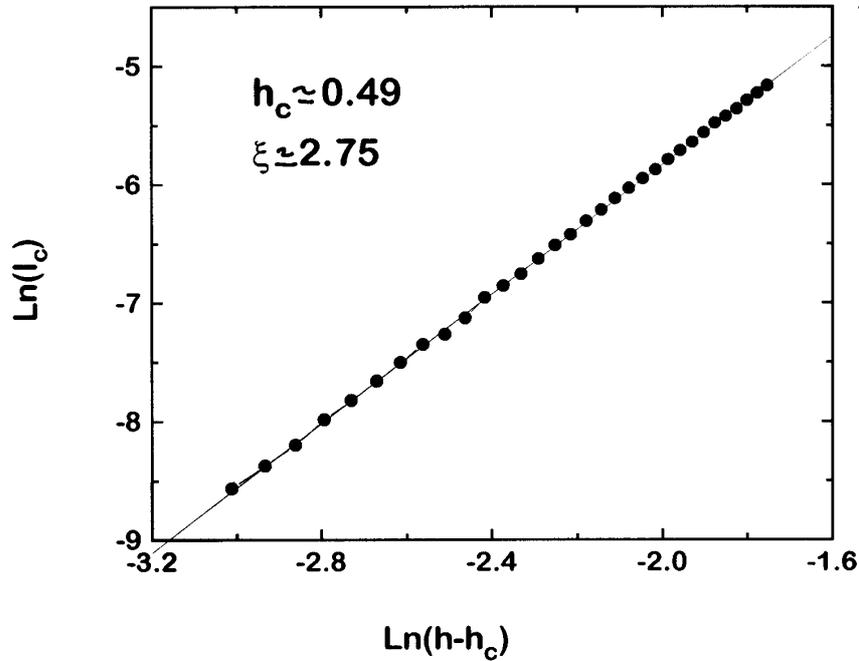


Figura 8.8: Ajuste de la intensidad de desanclaje (intensidad crítica) de una fase incommensurada por encima de la transición de Aubry, a distintos valores de la anisotropía de la red,  $I_c \sim (h - h_c)^\xi$

$h \rightarrow h_c$  según  $I_c \sim (h - h_c)^\xi$  (ver figura 8.8) donde  $h_c \approx 0,49$  y  $\xi \approx 2,75$ . Si nos basamos en la posible irrelevancia de la no convexidad de la interacción en la determinación de este exponente crítico, podría ser que una estimación más precisa de este exponente diera un valor más próximo a  $\xi = 3,011 \dots$ , el encontrado por Aubry para el modelo Frenkel-Kontorova (ver sección 2.3).

### Intensidad crítica de la escalera a distintos valores del campo externo

Muy recientemente Hwang, Ryu y Stroud [116] han extendido los resultados sobre las propiedades de los estados fundamentales de la escalera de uniones Josephson en el límite de larga longitud de penetración, para tratar las curvas características IV de la escalera. Ellos encuentran que cuando una corriente es inyectada en la dirección transversal de la escalera, la corriente crítica no cambia de su valor a  $f = 0$  hasta un valor del campo igual  $f_{c1} \approx 0,12$ .

Este resultado, que difiere de lo encontrado al estudiar redes bidimensionales de uniones Josephson, puede comprenderse de las consideraciones sobre la estabilidad de la configuración con un sólo vórtice hechas en el capítulo 6. En el caso de la red bidimensional de uniones Josephson, a valores bajos del campo

externo la configuración de fases de estado fundamental tiene una densidad de vórtices que es diferente de cero y la existencia de vórtices produce que la corriente crítica sea menor que la de la fase  $\omega = 0$ . En la escalera sin embargo la situación es bastante diferente: a valores bajos de  $f$  el estado fundamental de la escalera es la fase  $\omega = 0$  y, más aún, como hemos descrito en 6.3, la configuración con un sólo vórtice es inestable y la fase  $\omega = 0$  es el único atractor estable de cualquier configuración inicial arbitraria. Consecuentemente, es de esperar que a valores bajos del campo externo la corriente crítica de la escalera no cambie, al depender de la densidad de vórtices. También hemos mostrado que el valor crítico del campo para la estabilidad de la configuración con un sólo vórtice es  $f_c^v = 0,1175 \pm 0,00065$  para una escalera isótropa. Para valores del campo superiores a  $f_c^v$  diferentes configuraciones de vórtices son estables; de modo que configuraciones iniciales arbitrarias relajan a alguna de las diferentes configuraciones metaestables posibles, que pueden ser descritas como redes irregulares de vórtices. En esta situación la corriente crítica está esencialmente asociada con la transición de desanclaje de estas fases de vórtices, que ocurre a un valor menor de la corriente externa. Hwang, Ryu y Stroud dan un valor cercano a 0,12, bastante próximo a nuestra predicción de  $f_c^v = 0,1175 \pm 0,00065$ , pero no dan explicación alguna del resultado.

En la sección 7.3 vimos que cuando la longitud de penetración  $\lambda_\perp$  de la red decrece, el valor de  $f_c^v$  también decrece, y es cero cuando  $\lambda_\perp = 1,812 \pm 0,018$ . El diagrama de estabilidad que presentamos en el capítulo 7 (figura 7.7), nos permite hacer la siguiente conjetura sobre el comportamiento de la corriente crítica de la escalera de uniones Josephson cuando los campos inducidos por las corrientes son considerados: cuando la longitud de penetración decrece, el rango de valores del campo externo para los cuales la corriente crítica no cambia también decrece, y se anula cuando  $\lambda_\perp = 1,812 \pm 0,018$ . Esta conjetura está basada en la asociación entre la corriente crítica de la escalera y la estabilidad de la configuración de un vórtice.

La situación descrita en los párrafos anteriores no se da para otros valores posibles del campo y otros estados fundamentales. Así, por ejemplo, cuando  $f = 1/2$  el estado fundamental tiene densidad de vórtices  $\omega = 1/2$  y existen muchos otros estados metaestables posibles – en particular, la fase sin vórtices tiene allí su límite de estabilidad –. Cuando se pretenda calcular el valor de la corriente crítica de la red a partir de la simulación de las curvas intensidad-voltaje hay que tener en cuenta la posible dependencia de esta curva con las condiciones iniciales. De este modo, en el caso totalmente frustrado,  $f = 1/2$ , el valor encontrado para la intensidad crítica de la red cuando la configuración inicial es el estado fundamental, debe ser mayor que el encontrado en el caso de que partamos de una configuración  $\omega = 1/2$  con un defecto (exceso de un vórtice o defecto de este), cuya intensidad crítica está asociada al desanclaje de

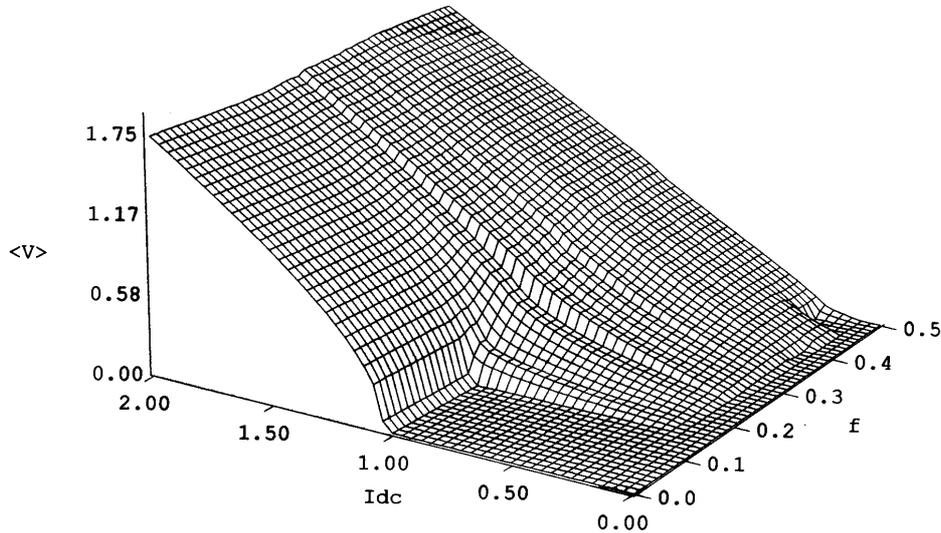


Figura 8.9: Figura mostrando las curvas IV de la escalera de uniones Josephson cuando la intensidad es constante y a distintos valores de la frustración. En cada caso la configuración inicial es una distribución aleatoria de las fases. La figura muestra como la intensidad crítica de la red se mantiene constante e igual a 1,0 hasta un determinado valor de la frustración.

este defecto que ocurre a valores menores de la corriente externa. Hwang, Ryu y Stroud [116] también encuentran en sus simulaciones dos valores posibles de la intensidad crítica cuando  $f = 1/2$ , que nosotros asociamos a dos estados iniciales diferentes: una red desordenada de vórtices y el estado fundamental  $1/2$ .

La figura 8.9 presenta el resultado de la simulación de las curvas IV en una escalera de uniones Josephson bajo intensidad constante, y calculadas a partir de una configuración inicial de fases aleatorias y a distintos valores del campo externo. Se observa claramente la existencia de un escalón de  $I_c = 1,0$  a valores bajos de  $f$  y un valor de  $I_c$  mucho menor para el resto de las curvas del diagrama.

### **Principales diferencias entre la dinámica de la red de uniones Josephson y la dinámica del modelo Frenkel-Kontorova**

Las consideraciones hechas en los párrafos anteriores nos conducen al problema de la dependencia de las curvas intensidad-voltaje con respecto a las condiciones iniciales de las fases en la escalera de uniones Josephson, y en general a señalar algunas de las diferencias y similitudes entre la dinámica

del modelo Frenkel-Kontorova [62] y la de la escalera. Podemos señalar tres puntos fundamentales de diferencia entre ambas dinámicas (definidas por las ecuaciones (3.1) y (8.2) respectivamente):

- En el modelo Frenkel-Kontorova, la escala de longitud que determina el valor de  $\omega$  a  $K = 0$  (ver sección 2.1),  $\gamma$ , no interviene ni en las ecuaciones de equilibrio ni en las ecuaciones dinámicas del sistema, de ahí que un estado fundamental es estable en todo el rango de valores de  $\gamma$ . En la escalera de uniones Josephson, el parámetro equivalente es la frustración,  $f$ , que aparece en las ecuaciones de equilibrio y de movimiento del sistema. Así, mientras que la velocidad media de la cadena Frenkel-Kontorova depende de la intensidad del potencial de anclaje y de la fuerza externa,  $\bar{v} = f(F(t), K)$ , el valor medio del voltaje entre los dos brazos de la escalera depende del acoplamiento entre las islas superiores e inferiores, la corriente externa y el campo magnético,  $\langle V \rangle = g(I(t), \frac{J_y}{J_x}, f)$ .
- En la dinámica del modelo Frenkel-Kontorova el valor de  $\omega$  está determinado por las condiciones iniciales y es una constante del movimiento (sección 3.1). Sin embargo, en la escalera de uniones Josephson, la densidad de vórtices no es obligatoriamente una constante del movimiento, como se desprende del estudio de la estabilidad de las fases metaestables a valores pequeños del campo hecho en la sección 6.3.
- La convexidad de la interacción entre partículas y la el carácter local de la disipación que caracteriza la dinámica del modelo Frenkel-Kontorova permite aplicar la regla de Middleton (sección 2.1), cuyo principal resultado es la unicidad de la curva  $\bar{v}(\bar{F})$  para cualquier campo de fuerzas que permita definir un valor de  $\bar{F}$  y  $\bar{v}$ . Sin embargo, este resultado no es aplicable al caso de la escalera de uniones Josephson, lo que conduce a la posibilidad de obtener diferentes curvas  $\langle V \rangle (I_{dc})$  para los mismos valores de los parámetros del sistema pero diferentes configuraciones iniciales.



# Bibliografía II

- [1] B. D. Josephson, Phys. Lett. **1**, 251 (1962).
- [2] B. D. Josephson, Rev. Mod. Phys. **36**, 216 (1964).
- [3] B. D. Josephson, Adv. Phys. **14**, 419 (1965).
- [4] R. P. Feynman, R. B. Leighton y M. Sands, en *The Feynmann Lectures on Physics, Quantum Mechanics, Volume III*, capítulo 21 (Addison-Wesley 1965).
- [5] M. Tinkham, en *Introduction to Superconductivity* (McGraw-Hill, 1975).
- [6] P. W. Anderson y J. M. Rowell, Phys. Rev. Lett. **10**, 230 (1963).
- [7] S. Shapiro, Phys. Rev. Lett. **11**, 80 (1963).
- [8] A. Barone y G. Paternó, *Physics and Applications of the Josephson Effect* (Wiley, New York, 1982).
- [9] P. E. Lindelof, Rep. Prog. Phys. **44**, 949 (1981).
- [10] J. R. Waldram, Rep. Prog. Phys. **39**, 751 (1976).
- [11] W. C. Stewart, Appl. Phys. Lett. **12**, 277 (1968).
- [12] D. E. McCumber, J. Appl. Phys. **39**, 2503 (1968).
- [13] D. E. McCumber, J. Appl. Phys. **39**, 3113 (1968).
- [14] *Coherence in Superconducting Networks*, editado por J. E. Mooji y G. Schön, Physica B **152** (1988).
- [15] *KT Transition and Superconducting Arrays*, editado por D. Kim, J. S. Chung y M. Y. Choi (Min Eum Sa, Seoul, 1993).
- [16] *Quantum Dynamics of Submicron Structures*, editado por H. A. Cerdeira, B. Kramer y G. Schön (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995).
- [17] *Macroscopic Quantum Phenomena and Coherence in Superconducting Networks*, editado por C. Giovannella y M. Tinkham (World Scientific, 1995).
- [18] *Percolation, Localization and Superconductivity*, editado por L. Goldman y S. A. Wolf (Plenum, New York, 1984).
- [19] *Nonlinear Superconductive Electronics and Josephson Devices*, editado por G. Costabile, S. Pagano, N. F. Pedersen y M. Russo (plenum, New York, 1991).
- [20] J. M. Kosterlitz y D. J. Thouless en *Progress in Low Temperature Physics*, vol. VIIB, editado por D. F. Brewer (North Holland, 1978).

- [21] D. W. Abraham, C. J. Lobb, M. Tinkham y T. M. Klapwijk, *Phys. Rev. B* **26**, 5268 (1982).
- [22] C. J. Lobb, D. W. Abraham y M. Tinkham, *Phys. Rev. B* **27**, 150 (1983).
- [23] D. J. Resnick, J. C. Garland, J. T. Boyd, S. Shoemaker y R. S. Newrock, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1542 (1981).
- [24] R. F. Voss y R. A. Webb, *Phys. Rev. B* **25**, 3446 (1982).
- [25] S. Teitel y C. Jayaprakash, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1999 (1983).
- [26] M. Tinkham, M. A. Itzler y J. M. Hergenrother, en *Macroscopic Quantum Phenomena and Coherence in Superconducting Networks*, pág. 3. Editado por C. Giovannella y M. Tinkham (World Scientific, 1995).
- [27] M. Josefin y E. Domany, *Phys. Rev. B* **32**, 1778 (1985).
- [28] J. S. Chung y H. R. Youn, en *Macroscopic Quantum Phenomena and Coherence in Superconducting Networks*, pág. 147. Editado por C. Giovannella y M. Tinkham (World Scientific, 1995).
- [29] M. Franz y S. Teitel, *Phys. Rev. B* **51**, 6551 (1995).
- [30] P. Olsson, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2758 (1995).
- [31] T. C. Halsey, *Phys. Rev. B* **31**, 5728 (1985).
- [32] S. Teitel, *Physica B* **152**, 30 (1988).
- [33] M. R. Kolahchi y J. P. Straley, *Phys. Rev. B* **43**, 7651 (1991).
- [34] A. Vallat y H. Beck, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3096 (1992).
- [35] J. P. Straley y G. M. Barnett, *Phys. Rev. B* **48**, 3309 (1993).
- [36] S. E. Korshunov, A. Vallat y H. Beck, *Phys. Rev. B* **51** 3071 (1995).
- [37] J. J. Mazo, F. Falo y L. M. Floría, *Phys. Rev. B* **52**, 10433 (1995).
- [38] J. J. Mazo, F. Falo y L. M. Floría, en *Macroscopic Quantum Phenomena and Coherence in Superconducting Networks*, pág. 131. Editado por C. Giovannella y M. Tinkham (World Scientific, 1995).
- [39] C. Denniston y C. Tang, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3930 (1995).
- [40] J. J. Mazo y J. C. Ciria, enviado a publicar
- [41] K. K. Mon y S. Teitel, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 673 (1989).
- [42] J. S. Chung, K. H. Lee y D. Stroud, *Phys. Rev. B* **40**, 6570 (1989).
- [43] F. Falo, A. R. Bishop y P. S. Lomdahl, *Phys. Rev. B* **41**, 10983 (1990).
- [44] S. R. Shenoy, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **18**, 5163 (1985).
- [45] S. E. Hebboul y J. C. Garland, *Phys. Rev. B* **43** 13703 (1991).
- [46] D. Domínguez y J. V. José, *Int. J. in Mod. Phys. B* **8**, 3749 (1994).
- [47] J.C. Ciria y C. Giovannella. *Journal of Physics: Cond. Matt.* (en prensa).
- [48] S. P. Benz y C. J. Burroughs, *Appl. Phys. Lett.* **58**, 2162 (1991).
- [49] T. D. Clark, *Phys. Rev. B* **8**, 137 (1973).

- [50] Ch. Leeman, Ph. Lerch y P. Martinoli, *Physica* (Amsterdam). **126B**, 475 (1984).
- [51] S. P. Benz, M. S. Rzchowski, M. Tinkham y C. J. Lobb, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 693 (1990).
- [52] M. J. Renne y D. Polder, *Revue de Physique Appliquée* **9**, 25 (1974).
- [53] J. R. Waldram y P. H. Wu, *Jou. Low Temp. Phys.* **47**, 363 (1982).
- [54] S. Kim y M. Y. Choi, *Europhys. Lett.* **23**, 217 (1993).
- [55] C. Giovannella, F. Ritort y A. Giannelli, *Europhys. Lett.* **29**, 419 (1995).
- [56] D. Domínguez y J. V. José, *Phys. Rev. B* **48**, 13717 (1993).
- [57] A. V. Ustinov, M. Cirillo y B. A. Malomed, *Phys. Rev. B* **47**, 8357 (1993).
- [58] A. V. Ustinov, M. Cirillo, B. H. Larsen, V. A. Oboznov, P. Carelli y G. Rotoli, *Phys. Rev. B* **51**, 3081 (1995).
- [59] H. S. J. van der Zant, T. P. Orlando, S. Watanabe y S. H. Strogatz, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 174 (1995).
- [60] S. Watanabe, S. H. Strogatz, H. S. J. van der Zant y T. P. Orlando, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 379 (1995).
- [61] D. W. McLaughlin y A. C. Scott, *Phys. Rev. A* **18**, 1652 (1978).
- [62] L. M. Floría y J. J. Mazo, *Adv. Phys.* (en prensa).
- [63] Yu. S. Kivshar, *Phys. Rep.* (en prensa).
- [64] M. Kardar, *Phys. Rev. B* **30**, 6368 (1984).
- [65] M. Kardar, *Phys. Rev. B* **33**, 3125 (1986).
- [66] E. Granato, *Phys. Rev. B* **42**, 4797 (1990).
- [67] E. Granato, *Phys. Rev. B* **45**, 2557 (1992).
- [68] E. Granato, *Phys. Rev. B* **48**, 7727 (1993).
- [69] E. Granato, en *Quantum Dynamics of Submicron Structures*, pág. 627. Editado por H. A. Cerdeira, B. Kramer y G. Schön (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995).
- [70] E. Granato, cond-mat/9512038, a aparecer en *Physica B*
- [71] A. Banerjea y P. L. Taylor, *Phys. Rev. B* **30**, 6489 (1984).
- [72] C. S. O. Yokoi, L. Tang y W. Chou, *Phys. Rev. B* **37**, 2173 (1988).
- [73] M. Hébert, A. Caillé y A. Bel Moufid, *Phys. Rev. B* **48**, 3074 (1993).
- [74] S. Aubry, en *Structures et Inestabilités*, págs. 73-194. Editado por C. Godreche, Editions de Physique (Les Ulis, France, 1985).
- [75] W. Chou y R. B. Griffiths, *Phys. Rev. B* **34**, 6219 (1986).
- [76] K. Sasaki y R. B. Griffiths, *J. Stat. Phys.* **53**, 1031 (1988).
- [77] R. B. Griffiths y W. Chou, *Phys. Rev. Lett.* **56** 1929 (1986).
- [78] R. B. Griffiths, en *Fundamental Problems in Statistical Mechanics VII*, págs. 69-110, editado por H. van Beijeren (North-Holland, Amsterdam, 1990).

- [79] P. J. Martínez Ovejas, Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza (1995).
- [80] R. S. MacKay, *Physica D* **50**, 71 (1991).
- [81] S. Aubry y G. Abramovici, *Physica D* **43**, 199 (1990).
- [82] S. Aubry y R. S. MacKay, *Physica D* **56**, 123 (1992).
- [83] R. G. Palmer en *Heilderberg Colloquium on Glassy Dynamics*, editado por J. L. van Hemmen y I. Morgenstern. Lectures Notes in Physics, vol 275 (Springer-Verlag, Berlin, 1987).
- [84] S. R. Shenoy, *Physica B* **152**, 72 (1988).
- [85] J. R. Phillips, H. S. J. van der Zant, J. White y T. P. Orlando, *Phys. Rev. B* **47**, 5219 (1993).
- [86] A. Majhofer, T. Wolf y W. Dieterich, *Phys. Rev. B* **44**, 9634 (1991).
- [87] D. Reinal, W. Dietrich, T. Wolf y A. Majhofer, *Phys. Rev. b* **49**, 9118 (1994).
- [88] D. Domínguez y J. V. José, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 514 (1992).
- [89] J. R. Phillips, H. S. J. van der Zant y T. P. Orlando, *Phys. Rev. B* **50** 9380 (1994).
- [90] J. R. Phillips, H. S. J. van der Zant, J. White y T. P. Orlando, *Phys. Rev. B* **50** 9387 (1994).
- [91] S. Marianer y L. M. Floría, *Phys. Rev. B* **38**, 12054 (1988).
- [92] L. M. Floría y R. B. Griffiths, *Numerische Mathematik* **55**, 565 (1989).
- [93] A. Nuvoli, A. Giannelli, J.C.Ciria y C. Giovannella, *Nuovo Cimento* **16**, 2045 (1994).
- [94] W. Y. Shih, C. Ebner y D. Stroud, *Phys. Rev. B* **30**, 134 (1984).
- [95] C. Ebner y D. Stroud, *Phys. Rev. B* **31**, 165 (1985).
- [96] D. A. Huse y H. S. Seung, *Phys. Rev. B* **42**, 1059 (1990).
- [97] N. Gronbech-Jensen, A. R. Bishop, F. Falo y P. S. Lomdahl, *Phys. Rev. B* **45** 10139 (1992).
- [98] Z. Q Wang y D. Stroud, *Phys. Rev. B* **44**, 9643 (1991).
- [99] I. Morgenstern, K. A. Muller y J. G. Bednorz, *Z. Phys.* **69**, 33 (1987).
- [100] J. P. Sethna, J. D. Shore y M. Huang, *Phys. Rev. B* **44**, 4943 (1991).
- [101] G. Parisi, cond.mat/9412034
- [102] P. Chandra, L. B. Ioffe y D. Sherrington, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 713 (1995).
- [103] P. C. Hohenberg y B. I. Halperin, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 435 (1977).
- [104] D. Domínguez, E. A. Jagle y C. A. Balseiro, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2773 (1994).
- [105] E. Helfand, *Bell Syst. Tech. J* **58**, 2289 (1979).
- [106] H. S. Greenside y E. Helfand, *Bell Syst. Tech. J* **60**, 1927 (1981).
- [107] R. Kohlrausch, *Pogg. Ann. Phys.* **91**, 198 (1854).;
- [108] G. Williams y D. C. Watts *Trans. Faraday Soc.* **66**, 80 (1970).

- 
- [109] B. J. Kim, S. Kim y S. J. Lee, Phys. Rev. B **51**, 8462 (1995).
- [110] J. C. Ciria, C. Giovannella, P. Pacetti y L. Paoluzi, en *Macroscopic Quantum Phenomena and Coherence in Superconducting Networks*, pág 378 Editado por C. Giovannella y M. Tinkham (World Scientific, 1995).
- [111] L. M. Floría, J. L. Marín, P. J. Matínez, F. Falo y S. Aubry, enviado a publicar.
- [112] W. Yu, E. B. Harris, S. E. Hebboul, J. C. Garland y D. Stroud, Phys. Rev. B **45**, 12624 (1992).
- [113] J. Kim, W. G. Choe, S. Kim y H. J. Lee, Phys. Rev. B **49**, 459 (1994).
- [114] W. G. Choe y S. Kim, Phys. Rev. B **53**, R502 (1996).
- [115] J. M. Kim y S. J. Lee, Phys. Rev. B **50**, 13829 (1994).
- [116] I. J. Hwang, S. Ryu y D. Stroud, Phys. Rev. B **53**, R506 (1996).

ISBN 978-84-7733-928-1



9 788477 339281



Prensas Universitarias de Zaragoza

