



**Universidad
Zaragoza**

TRABAJO FIN DE MÁSTER

COHOMOLOGÍA DE BOTT-CHERN

Autora:

ADELA LATORRE LARRODÉ

Director:

LUIS UGARTE VILUMBRALES

Máster en Iniciación a la Investigación en Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

Zaragoza, Septiembre de 2012

Índice general

Introducción	5
1. Variedades complejas y cohomologías asociadas	9
1.1. Estructuras casi complejas e integrabilidad	9
1.2. Cohomología de Dolbeault	16
1.3. Cohomologías de Aeppli y de Bott-Chern	19
2. Nilvariedades complejas	21
2.1. Estructuras complejas invariantes sobre nilvariedades	21
2.2. Clasificación de estructuras complejas en dimensión 6	28
2.3. Cohomología de Bott-Chern de nilvariedades complejas	32
3. Cohomología de Bott-Chern en dimensión 6	41
3.1. Familia 1	41
3.2. Familia 2	58
3.3. Familia 3	72
3.4. Resumen	80
4. Aplicaciones	87
4.1. El $\partial\bar{\partial}$ -Lema y la cohomología de Bott-Chern	87
4.2. Comportamiento por deformación	90

Introducción

Las variedades complejas son la “versión sobre \mathbb{C} ” de las variedades diferenciables, en el sentido de que están formadas “pegando abiertos” de \mathbb{C}^n en vez de \mathbb{R}^n , de manera que las aplicaciones de transición son holomorfas en lugar de diferenciables. En particular, toda variedad compleja es una variedad diferenciable de dimensión par, pero decidir si una variedad diferenciable real dada admite o no estructura de variedad compleja es un problema que está aún lejos de ser resuelto, siendo la existencia de estructura compleja sobre la 6-esfera el problema abierto más conocido.

Por otro lado, las variedades complejas generalizan a dimensión superior la noción de superficie compleja, la cual corresponde a $n = 2$. La clasificación de superficies complejas compactas está resuelta por Enriques y Kodaira, pero en dimensión $n \geq 3$ el problema está completamente abierto. En este contexto resulta de gran utilidad la introducción y el estudio de invariantes asociados a las variedades complejas, como por ejemplo los números de Hodge $b_{p,q}(M)$, es decir, las dimensiones de los grupos de cohomología de Dolbeault $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ que surgen de la descomposición de la diferencial exterior d como $d = \partial + \bar{\partial}$, que juegan un papel fundamental en la clasificación de Enriques-Kodaira.

En este trabajo consideramos invariantes complejos introducidos por Bott y Chern en [6], que denotaremos por $H_{BC}^{p,q}(M)$ y a los que nos referiremos como grupos de cohomología de Bott-Chern de la variedad compleja M .

Cuando una variedad compleja compacta M admite métrica Kähler, es decir, una métrica de Riemann compatible con su estructura compleja de manera que la forma fundamental asociada es simpléctica, entonces los grupos de cohomología de Bott-Chern coinciden con los grupos de cohomología de Dolbeault. Más generalmente, la aplicación natural $H_{BC}^{p,q}(M) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ es un isomorfismo para toda variedad compleja compacta cumpliendo el $\partial\bar{\partial}$ -Lema, es decir, para toda variedad compleja compacta que cumple $\ker \partial \cap \ker \bar{\partial} \cap \text{im } d = \text{im } \partial\bar{\partial}$, o dicho de otro modo, toda forma compleja exacta, ∂ -cerrada y $\bar{\partial}$ -cerrada es $\partial\bar{\partial}$ -exacta. La condición dada por el $\partial\bar{\partial}$ -Lema está relacionada con el concepto de “formalidad” y fue estudiada por Deligne, Griffiths, Morgan y Sullivan en [10],

donde probaron que toda variedad Kähler compacta cumple el $\partial\bar{\partial}$ -Lema. Recientemente, Angella y Tomassini han logrado expresar la condición dada en el $\partial\bar{\partial}$ -Lema en términos de la cohomología de Bott-Chern, la cohomología de Aeppli $H_A^{p,q}(M)$ (la cual puede verse como la versión dual de la de Bott-Chern) y la cohomología de de Rham $H_{dR}^k(M; \mathbb{C})$ (que es un invariante topológico de la variedad y por tanto no depende de la estructura compleja considerada). En concreto, en [3] se demuestra que para toda variedad compleja compacta M y para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica la siguiente desigualdad

$$\sum_{p+q=k} (\dim H_{BC}^{p,q}(M) + \dim H_A^{p,q}(M)) \geq 2 \dim H_{dR}^k(M; \mathbb{C}); \quad (1)$$

más aún, las desigualdades (1) son igualdades para todo $k \in \mathbb{N}$ si y sólo si M cumple el $\partial\bar{\partial}$ -Lema.

El objetivo principal de este trabajo es la determinación de todos los grupos de cohomología de Bott-Chern en la clase especial de nilvariedades complejas compactas de dimensión compleja 3 cuya estructura compleja es invariante. Las nilvariedades compactas son cocientes compactos de grupos de Lie nilpotentes por subgrupos discretos maximales y constituyen una amplia familia de variedades compactas que en muchos casos admiten estructuras geométricas adicionales (compleja, simpléctica, contacto,...) con propiedades interesantes y poco usuales. Es bien conocido que las nilvariedades (a excepción de los toros complejos) no cumplen el $\partial\bar{\partial}$ -Lema [5], por tanto no pueden admitir métrica Kähler y las desigualdades (1) no pueden ser todas ellas igualdades. Para la determinación de los grupos de cohomología de Bott-Chern de nilvariedades compactas 6-dimensionales con estructura compleja J invariante se usarán principalmente la clasificación de tales estructuras J obtenida en [1, 7] y resultados que permiten determinar la cohomología de Bott-Chern a nivel del álgebra de Lie que subyace a la nilvariedad.

A continuación se resumen los resultados principales contenidos en cada capítulo del trabajo.

En el primer capítulo recordamos la noción de variedad compleja e introducimos algunos invariantes complejos asociados definidos como grupos de cohomología. En concreto, en primer lugar vemos las variedades complejas alternativamente como variedades casi complejas (M, J) para las cuales la estructura casi compleja J tiene tensor de Nijenhuis idénticamente nulo, y centramos después nuestra atención en la definición y propiedades fundamentales de los grupos de cohomología de Dolbeault, Bott-Chern y Aeppli.

En el Capítulo 2 consideramos una clase particular de variedades complejas compactas construidas como cocientes de grupos de Lie nilpotentes G . La estructura compleja J que consideraremos sobre tales (nil)variedades está definida a nivel del álgebra de Lie \mathfrak{g} de G en el sentido que J proviene de un endomorfismo $J: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ tal que $J^2 = -\text{Id}$ y su

tensor de Nijenhuis es nulo. Diremos que una tal estructura compleja J es *invariante*. Es bien conocido que el teorema de Nomizu [17] permite calcular la cohomología de de Rham de una nilvariedad a partir de su álgebra de Lie subyacente, lo que constituye una herramienta fundamental en el estudio de la topología y la geometría de nilvariedades compactas. En la Sección 2.3 incluimos una demostración detallada de la versión del teorema de Nomizu para la cohomología de Bott-Chern de ciertas nilvariedades dotadas de estructura compleja invariante obtenido recientemente por Angella [2] y basado en un resultado similar para la cohomología de Dolbeault dado por Rollenske en [18].

El Capítulo 3 recoge la parte principal de este trabajo. En [2] se calculan los grupos de cohomología de Bott-Chern de la (nil)variedad de Iwasawa y de sus pequeñas deformaciones. Todas estas estructuras complejas son estructuras complejas invariantes sobre una nilvariedad correspondiente al álgebra de Lie \mathfrak{h}_5 , por lo que es natural plantearse el estudio general de la cohomología de Bott-Chern en nilvariedades compactas complejas de dimensión compleja 3 con estructura compleja invariante. Este es el objetivo del capítulo. Salamon clasificó en [20] las nilvariedades 6-dimensionales que admiten estructura compleja invariante y probó que el álgebra de Lie subyacente debe ser isomorfa a $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_{16}, \mathfrak{h}_{19}^-$ o \mathfrak{h}_{26}^+ . Posteriormente en [1] se da una clasificación de estructuras complejas invariantes de tipo abeliano en dimensión 6 y recientemente en [7] se obtiene la clasificación general de estructuras complejas invariantes en dimensión 6. Por un resultado de Rollenske [18] resulta que para todas estas nilvariedades complejas puede utilizarse el resultado de Angella descrito en el Capítulo 2 y determinar explícitamente las cohomologías de Dolbeault y Bott-Chern, y por tanto la de Aeppli. La descripción general se realiza siguiendo las Tablas 1 y 2 de la Sección 2.2 que recogen la citada clasificación de estructuras complejas, subdividiendo el estudio en tres familias que cubren toda la geometría compleja 3-dimensional. La Sección 3.4 recoge en forma de tablas la información sobre las dimensiones de los grupos de cohomología de Bott-Chern.

En el último capítulo del trabajo presentamos un par de aplicaciones como consecuencia del estudio realizado en el Capítulo 3. En primer lugar, motivados por la relación (1), en la Sección 4.1 introducimos el invariante complejo $\alpha(M)$ dado por

$$\alpha(M) = \sum_{k=0}^{2n} \left[\sum_{p+q=k} (\dim H_{BC}^{p,q}(M) + \dim H_A^{p,q}(M)) - 2 \dim H_{dR}^k(M; \mathbb{C}) \right].$$

Del resultado de [3] citado anteriormente se sigue que $\alpha(M)$ es una medida de lo que la variedad M se aleja de cumplir el $\partial\bar{\partial}$ -Lema. Para toda nilvariedad compacta compleja M que no sea un toro complejo se tiene que $\alpha(M) > 0$ ya que el $\partial\bar{\partial}$ -Lema no se cumple. En la Sección 4.1 se calcula el invariante $\alpha(M)$ para toda nilvariedad compacta compleja 6-dimensional con estructura compleja invariante. Finalmente, la Sección 4.2 se dedica a

mostrar el comportamiento de los grupos de cohomología de Bott-Chern por deformación de la estructura compleja.

Capítulo 1

Variedades complejas y cohomologías asociadas

En este primer capítulo recordamos la noción de variedad compleja e introducimos algunos invariantes complejos asociados definidos como grupos de cohomología. En concreto, centramos nuestra atención en las cohomologías de Dolbeault, Bott-Chern y Aeppli.

1.1. Estructuras casi complejas e integrabilidad

El objetivo de esta sección es introducir el concepto de estructura casi compleja sobre una variedad diferenciable y estudiar condiciones equivalentes de integrabilidad en términos del tensor de Nijenhuis y de formas bigraduadas.

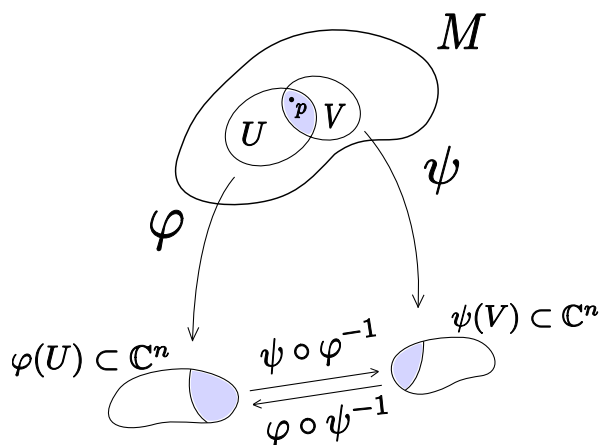
Para ello, empezamos recordando el concepto de variedad compleja.

Definición 1.1.1. *Sea M un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable. Se dice que M es una variedad compleja de dimensión compleja n si verifica:*

- (a) *Para todo punto $p \in M$, existe un abierto U y un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$, de tal manera que $p \in U \subset M$ y $\varphi(U)$ es un abierto de \mathbb{C}^n .*
- (b) *Dados dos pares (U, φ) y (V, ψ) en las condiciones anteriores tales que $U \cap V \neq \emptyset$, las aplicaciones:*

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi^{-1} &: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V), \\ \varphi \circ \psi^{-1} &: \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V),\end{aligned}$$

son holomorfas.



Llamaremos carta local de p a un par (U, φ) cumpliendo lo anterior. En tal caso, diremos que U es un abierto coordenado de p y que φ es un sistema local de coordenadas complejas del punto p .

Dada una carta local compleja (U, φ) , se pueden definir n aplicaciones del abierto U en \mathbb{C} de la siguiente manera:

$$z_j = \pi_j \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, n,$$

siendo π_j la proyección de \mathbb{C}^n sobre la componente j -ésima. Entonces $\varphi = (z_1, \dots, z_n)$.

Si $\varphi = (z_1, \dots, z_n)$ es un sistema local de coordenadas complejas en M , es posible tomar $\tilde{\varphi} = (\Re z_1, \Im z_1, \dots, \Re z_n, \Im z_n)$ y obtener un sistema local de coordenadas reales en M . Por este motivo, toda variedad compleja de dimensión compleja n tiene estructura de variedad real (en el sentido de diferenciable) de dimensión $2n$.

El recíproco no es cierto en general. Es decir, existen variedades reales de dimensión par admitiendo estructura de variedad compleja, como es el caso de la esfera \mathbb{S}^2 , y otras que no la admiten, como \mathbb{S}^4 . Surge por tanto el problema de averiguar qué variedades reales de dimensión $2n$ poseen estructuras complejas y cuáles no.

Sea M una variedad diferenciable (real) cualquiera.

Denotaremos por $\mathfrak{F}(M)$ el espacio de todas las funciones reales definidas sobre M indefinidamente derivables, es decir, $\mathfrak{F}(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es } C^\infty\}$.

Por $\mathfrak{X}(M)$ nos referiremos al álgebra de Lie dada por el conjunto de los campos de vectores diferenciables definidos sobre M junto con el corchete de Lie:

$$[X, Y] = XY - YX, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Conviene recordar que la derivabilidad de una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto $p \in M$ viene dada por la derivabilidad de $\tilde{f} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$, para cualquier carta local (U, φ) de p . Un campo de vectores es una sección del fibrado tangente, es decir, una aplicación que asocia a cada punto $p \in M$ un único vector de su espacio tangente $T_p M$ (recordemos que los elementos del espacio tangente son derivaciones que actúan sobre funciones de $\mathfrak{F}(M)$).

Denotaremos por $\mathfrak{F}_{\mathbb{C}}(M)$ y $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)$ a los complexificados de los espacios anteriores:

$$\mathfrak{F}_{\mathbb{C}}(M) = \{f + ig \mid f, g : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ son } C^\infty\},$$

$$\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M) = \{X + iY \mid X, Y \in \mathfrak{X}(M)\}.$$

Definición 1.1.2. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión $2n$. Una estructura casi compleja definida sobre M es una aplicación $J : \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)$ verificando:*

$$J^2 = -Id, \quad \bar{J} = J \quad \text{y} \quad J(fX + gY) = fJX + gJY,$$

$\forall f, g \in \mathfrak{F}_{\mathbb{C}}(M)$ y $\forall X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)$. Llamaremos variedad casi compleja a una variedad diferenciable M de dimensión par dotada de una estructura casi compleja J .

La importancia de este concepto radica en que la variedad real subyacente a toda variedad compleja M posee una estructura casi compleja natural dada por:

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i},$$

siendo $\varphi = (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$ un sistema local de coordenadas complejas en M . Las condiciones de Cauchy-Riemann para funciones holomorfas en varias variables aseguran que esta definición local de J se puede extender a todo M .

De esta manera, si una variedad real de dimensión par no posee estructura casi compleja, automáticamente podremos afirmar que entonces tampoco admite estructura de variedad compleja. El problema queda así reducido a ver qué variedades casi complejas admiten estructura de variedad compleja.

El teorema de Newlander y Nirenberg, que enunciaremos en breve, da la clave.

Definición 1.1.3. *El tensor de Nijenhuis de una estructura casi compleja J se define como el campo de tensores $N_J : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ sobre M dado por*

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Definición 1.1.4. *Una estructura casi compleja J se dice integrable si $N_J \equiv 0$.*

Teorema 1.1.5. [16] *Sea (M, J) una variedad casi compleja. M admite estructura de variedad compleja, siendo J su estructura casi compleja natural, si y sólo si J es integrable.*

En tal caso, diremos que J es una *estructura compleja*.

Como se indicaba al principio de la sección, existen condiciones equivalentes de integrabilidad en términos de bigraduaciones. Dedicaremos a este fin las siguientes líneas.

Consideramos una variedad compleja M de dimensión compleja n , y $(z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$ un sistema local de coordenadas complejas sobre un abierto coordinado U . Puesto que $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ es un sistema local de coordenadas reales, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n} \right\}$ es una base local de campos de vectores reales sobre U .

Definiendo:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right),$$

para $j = 1, \dots, n$, obtenemos una base $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \right\}$ de campos de vectores complejos sobre el mismo abierto U .

Evaluando esta base en cada $p \in U$, se consigue una base del espacio tangente complejo $T_p^{\mathbb{C}}M$ que además cumple:

$$J_p \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \Big|_p \right) = i \frac{\partial}{\partial z_j} \Big|_p, \quad J_p \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \Big|_p \right) = -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \Big|_p,$$

para cada $j = 1, \dots, n$. Es decir, los elementos $\frac{\partial}{\partial z_j} \Big|_p$ de la base anterior son vectores propios de valor propio i y los $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \Big|_p$ vectores propios de valor propio $-i$. Este hecho motiva la siguiente descomposición del espacio tangente $T_p^{\mathbb{C}}M$:

$$T_p^{\mathbb{C}}M = T_p^{1,0}M \oplus T_p^{0,1}M,$$

donde $T_p^{1,0}M$ es el subespacio vectorial generado por $\frac{\partial}{\partial z_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \Big|_p$, y $T_p^{0,1}M$ el generado por $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \Big|_p$. Es evidente que uno es el conjugado del otro.

Definición 1.1.6. *Un campo de vectores complejo Z sobre una variedad compleja M de dimensión n se dice de tipo $(1, 0)$ si para cada entorno coordinado U de M se tiene*

$$Z|_U = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial z_j},$$

donde las f_j son funciones \mathcal{C}^∞ valuadas sobre \mathbb{C} . Si también son holomorfas, el campo se dirá holomorfo.

Además, existe la siguiente caracterización: Un campo de vectores Z es de tipo $(1, 0)$ si y sólo si $JZ = iZ$, siendo J la estructura casi compleja natural.

Del mismo modo, se definen y caracterizan los campos de vectores $(0, 1)$, cambiando cada z_j por \bar{z}_j y tomando $JZ = -iZ$.

Estas ideas se extienden de manera natural a las variedades casi complejas (M, J) . Para ello, basta considerar el complexificado del espacio de los campos de vectores $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)$, y se tiene:

$$\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M) = \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}^{1,0}(M) \oplus \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}^{0,1}(M),$$

donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}^{1,0}(M) &= \{Z \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M) \mid JZ = iZ\}, \\ \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}^{0,1}(M) &= \{Z \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M) \mid JZ = -iZ\}. \end{aligned}$$

Es importante observar que $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}^{0,1}(M) = \overline{\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}^{1,0}(M)}$.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Las 1-formas ω son secciones del fibrado cotangente, esto es, aplicaciones que asocian a cada punto $p \in M$ un elemento del espacio T_p^*M dual de T_pM , $\omega_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$. Por tanto, tomando un sistema de coordenadas local (x_1, \dots, x_m) en un entorno coordenado U , es posible escribir para cada punto $p \in U$,

$$\omega_p = \sum_{j=1}^m \omega_j(p) dx_j|_p,$$

con $\omega_j(p) = \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right)$ y $dx_j|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p \right) = \delta_j^k$. Si las m funciones componentes ω_j son \mathcal{C}^∞ , la 1-forma se dice diferenciable. Sea $\Omega^1(M)$ el espacio de las 1-formas diferenciables.

Si (M, J) es una variedad casi compleja de dimensión $m = 2n$, podemos extender J al espacio $\Omega^1(M)$ tomando

$$(J^*\omega)(X) = \omega(JX),$$

para todo $\omega \in \Omega^1(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces $(J^*)^2 = -Id$, y haciendo una extensión natural al espacio complexificado de 1-formas, $\Omega_{\mathbb{C}}^1(M) = \{\alpha + i\beta \mid \alpha, \beta \in \Omega^1(M)\}$, aparece una bigraduación del mismo análoga a la que teníamos para el complexificado de los campos de vectores diferenciables:

$$\Omega_{\mathbb{C}}^1(M) = \Omega_{\mathbb{C}}^{1,0}(M) \oplus \Omega_{\mathbb{C}}^{0,1}(M),$$

donde

$$\Omega_{\mathbb{C}}^{1,0}(M) = \{\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^1(M) \mid J^*\omega = i\omega\},$$

$$\Omega_{\mathbb{C}}^{0,1}(M) = \{\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^1(M) \mid J^*\omega = -i\omega\}.$$

Observemos que un espacio es el conjugado del otro.

Por comodidad, denotaremos por J tanto a la J original como a J^* .

En el caso de que M sea compleja, se puede ver fácilmente que $\{dz_1, \dots, dz_n\}$ es una base local de $\Omega_{\mathbb{C}}^{1,0}(M)$ y $\{d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n\}$ del espacio $\Omega_{\mathbb{C}}^{0,1}(M)$.

Pero podemos ir un paso más allá, definir el concepto de k -forma y encontrar una bigraduación del complexificado del espacio de las k -formas diferenciables, $\Omega_{\mathbb{C}}^k(M)$.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Una k -forma ω sobre M es una aplicación que lleva cada punto $p \in M$ a la función multilineal

$$\omega_p : T_p M \times \cdots \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Localmente, se puede escribir $\omega = \sum \omega_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ y se dirá que ω es diferenciable si sus funciones componentes ω_{i_1, \dots, i_k} lo son. Denotaremos por $\Omega^k(M)$ el espacio de k -formas diferenciables sobre M .

El complexificado $\Omega_{\mathbb{C}}^k(M)$ de $\Omega^k(M)$ se define de manera natural y J se extiende a este espacio siguiendo una definición equivalente a la dada para las 1-formas.

Las k -formas complejas se definen de manera análoga para variedades complejas, sólo que entonces la función multilineal tiene su imagen en \mathbb{C} en lugar de en \mathbb{R} , lo que obliga a un cambio en la expresión local de la forma. Este cambio es el que motiva la bigraduación del espacio. Diremos que una k -forma compleja ω es de *tipo* (p, q) si localmente se puede escribir como:

$$\omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n}} f_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q},$$

donde las $f_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}$ son funciones diferenciables \mathbb{C} -valuadas sobre el abierto coordenado correspondiente. Si también son holomorfas, entonces la k -forma se dirá holomorfa.

Esto conduce a la descomposición

$$\Omega_{\mathbb{C}}^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M)$$

y con ella, a la descomposición de todo el espacio de las formas complejas definidas sobre la variedad M :

$$\Omega_{\mathbb{C}}^*(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega_{\mathbb{C}}^k(M) = \bigoplus_{p+q \geq 0} \Omega^{p,q}(M).$$

Cuando la variedad es casi compleja, es posible descomponer el espacio complexificado de las formas, $\Omega_{\mathbb{C}}^*(M)$. En tal caso, se dirá que un elemento $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^k(M)$ es de *tipo* (p, q) , con $p + q = k$, si y sólo si $\omega(Z_1, \dots, Z_{p+q}) = 0$ para cualesquiera $Z_1, \dots, Z_{p+q} \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)$, siempre que haya más de p campos de tipo $(1, 0)$ o más de q campos de tipo $(0, 1)$.

Al considerar la derivada exterior d de una k -forma, su grado aumenta en una unidad. Si estamos en una variedad casi-compleja, al considerar la inclusión $\Omega^k(M) \hookrightarrow \Omega_{\mathbb{C}}^k(M)$ podemos plantearnos cómo afecta este aumento a la bigraduación de la forma.

Proposición 1.1.7. *Si (M, J) es una variedad casi compleja de dimensión $2n$, entonces:*

$$d(\Omega^{p,q}) = \Omega^{p+2,q-1} \oplus \Omega^{p+1,q} \oplus \Omega^{p,q+1} \oplus \Omega^{p-1,q+2}.$$

No obstante, en el caso de que J sea integrable, la diferencial se comporta de una manera peculiar que resultará clave en todo el desarrollo posterior:

Proposición 1.1.8. *Sea (M, J) una variedad casi-compleja. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- (I) J es integrable;
- (II) $\mathfrak{X}^{1,0}(M)$ es una subálgebra de Lie de $(\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M), +, \cdot_{\mathbb{C}}, [,])$;
- (III) $\mathfrak{X}^{0,1}(M)$ es una subálgebra de Lie de $(\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M), +, \cdot_{\mathbb{C}}, [,])$;
- (IV) $d(\Omega^{1,0}) \subset \Omega^{2,0} \oplus \Omega^{1,1}$;
- (V) $d(\Omega^{0,1}) \subset \Omega^{1,1} \oplus \Omega^{0,2}$;
- (VI) $d(\Omega^{p,q}) \subset \Omega^{p+1,q} \oplus \Omega^{p,q+1}$, para todo par (p, q) .

Y es que gracias a este resultado, tenemos que la diferencial d definida sobre variedades complejas puede descomponerse en la forma:

$$d = \partial + \bar{\partial}, \tag{1.1}$$

donde $\partial : \Omega^{p,q} \longrightarrow \Omega^{p+1,q}$, y $\bar{\partial} : \Omega^{p,q} \longrightarrow \Omega^{p,q+1}$. Es decir, ∂ corresponde a la parte de la diferencial que actúa aumentando la primera componente de la bigraduación y $\bar{\partial}$ a la que actúa aumentando la segunda. De (1.1) y del hecho $d^2 = 0$ se sigue:

Proposición 1.1.9. *Dada M variedad compleja, se cumple que:*

$$\partial^2 = 0 = \bar{\partial}^2 \quad \text{y} \quad \partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial.$$

La descomposición anterior permite definir varias cohomologías como vemos en las siguientes secciones.

1.2. Cohomología de Dolbeault

En esta sección recordamos los grupos de cohomología de Dolbeault de una variedad compleja M , los cuales son invariantes complejos de M , y los grupos de cohomología de de Rham, invariantes topológicos de la variedad.

Dada M una variedad diferenciable de dimensión m , los grupos de cohomología de de Rham surgen al considerar el complejo

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{m-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^m(M) \longrightarrow 0.$$

Puesto que $d \circ d = 0$, el subespacio $\text{im} \{d : \Omega^{p-1}(M) \longrightarrow \Omega^p(M)\}$ está contenido en $\ker \{d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)\}$, lo que permite definir para cada $p = 0, \dots, m$ el k -ésimo grupo de cohomología de Rham de la siguiente manera:

$$H_{\text{dR}}^p(M) = \frac{\ker \{d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)\}}{\text{im} \{d : \Omega^{p-1}(M) \longrightarrow \Omega^p(M)\}}.$$

Conviene notar que $H_{\text{dR}}^p(M)$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial y por tanto, un grupo con la suma de vectores.

La suma directa

$$H_{\text{dR}}^*(M) = H_{\text{dR}}^0(M) \oplus H_{\text{dR}}^1(M) \oplus \dots \oplus H_{\text{dR}}^m(M)$$

es un álgebra con el producto exterior \wedge dado por $[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$, con $[\alpha], [\beta] \in H_{\text{dR}}^*(M)$.

La importancia de los grupos y del álgebra de de Rham se debe al Teorema de de Rham, y es que debido a este resultado se deduce que si M es una variedad compacta, entonces la dimensión de $H_{\text{dR}}^*(M)$ es finita (y con ella, la de los grupos de cohomología de de Rham) y también que dos variedades homeomorfas M y N tienen álgebras $H_{\text{dR}}^*(M), H_{\text{dR}}^*(N)$ isomorfas (lo que convierte a estos grupos en invariantes topológicos).

Definición 1.2.1. Se llama k -ésimo número de Betti de la variedad M a la dimensión de su k -ésimo grupo de cohomología de de Rham:

$$b_k(M) = \dim H_{\text{dR}}^k(M), \quad k = 1, \dots, m.$$

Los números de Betti permiten definir la llamada característica de Euler-Poincaré $\chi(M)$ de la variedad M como:

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^m (-1)^i b_i(M).$$

Es más, los números de Betti de un tipo concreto de variedades diferenciables cumplen una serie de relaciones dadas en el Teorema de Dualidad de Poincaré:

Teorema 1.2.2. Sea M una variedad diferenciable, compacta y orientable de dimensión m . Entonces, para cada $i = 0, \dots, m$, se cumple que:

$$b_i(M) = b_{m-i}(M).$$

Ya que en el caso de variedades complejas existe la descomposición (1.1) de la diferencial exterior, parece natural definir nuevas cohomologías usando los operadores ∂ y $\bar{\partial}$. A partir de esta idea surge la cohomología de Dolbeault.

Sea M una variedad compleja de dimensión compleja n . Para cada $p = 0, 1, \dots, n$, se tiene la secuencia:

$$0 \longrightarrow \Omega^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,n-1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,n}(M) \longrightarrow 0.$$

Llamaremos *cohomología de Dolbeault* a aquella cuyos grupos de cohomología vienen dados por:

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) = \frac{\ker \{\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(M)\}}{\text{im} \{\bar{\partial} : \Omega^{p,q-1}(M) \longrightarrow \Omega^{p,q}(M)\}}.$$

Observar que está bien definida puesto que $\bar{\partial}^2 = 0$ por la Proposición 1.1.9.

En el caso de que M sea una variedad compacta, las dimensiones de los grupos de cohomología de Dolbeault son finitas, lo que motiva la aparición del siguiente concepto:

Definición 1.2.3. Se llaman números de Hodge de una variedad compleja compacta M a las dimensiones de los grupos de cohomología de Dolbeault de dicha variedad,

$$b_{p,q}(M) = \dim H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M).$$

Una pregunta que se puede plantear en esta etapa es por qué no definir una cohomología análoga a la anterior utilizando ∂ en lugar de $\bar{\partial}$. La respuesta es muy sencilla, y es que tal cohomología sería isomorfa a la de Dolbeault ya que bastaría conjugar para pasar de la una a la otra.

Al igual que ocurría con los números de Betti, existen una serie de relaciones entre los números de Hodge (Teorema de Poincaré-Serre) e incluso una expresión para la característica de Euler-Poincaré basada en estos números, para el caso de M variedad compleja compacta.

Teorema 1.2.4. *Sea M una variedad compleja compacta de dimensión compleja n . Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

- (a) $b_i(M) = b_{2n-i}(M)$, para $i = 0, \dots, 2n$.
- (b) $b_{p,q}(M) = b_{n-p,n-q}(M)$, para $p, q = 0, \dots, n$.

Teorema 1.2.5. *Sea M una variedad compleja compacta de dimensión compleja n . Entonces la característica de Euler-Poincaré de la variedad puede calcularse a partir de los números de Hodge usando la siguiente fórmula:*

$$\chi(M) = \sum_{p,q=0}^n (-1)^{p+q} b_{p,q}(M).$$

Además, para M una variedad compleja compacta, se tiene el siguiente resultado que relaciona los números de Betti y los de Hodge:

Teorema 1.2.6. *Sea M una variedad compleja compacta de dimensión n . Entonces se cumple la siguiente desigualdad:*

$$b_i(M) \leq \sum_{p+q=i} b_{p,q}(M).$$

Para finalizar esta sección, conviene resaltar el hecho de que cuando la variedad M es Kähler (es decir, simpléctica y con una métrica compatible definida positiva) las cohomologías de de Rham y Dolbeault “coinciden” debido al Teorema de descomposición de Hodge. En concreto, en términos de los números de Hodge y de Betti de M , se tiene $b_{p,q}(M) = b_{q,p}(M)$ y las desigualdades del Teorema 1.2.6 son todas igualdades. En particular, $b_1 = b_{1,0} + b_{0,1} = 2b_{1,0}$ es par, y más generalmente, todos los b_k con k impar lo son.

1.3. Cohomologías de Aeppli y de Bott-Chern

Esta sección está dedicada a los grupos de cohomología de Bott-Chern y de Aeppli de una variedad compleja, así como a las propiedades y relaciones principales existentes entre ellos.

Sea M una variedad compleja de dimensión compleja n .

Definimos la *cohomología de Bott-Chern* de M como aquella dada por

$$H_{\text{BC}}^{p,q}(M) = \frac{\ker \{d: \Omega^{p,q}(M) \longrightarrow \Omega^{p+q+1}(M)\}}{\text{im} \{\partial\bar{\partial}: \Omega^{p-1,q-1}(M) \longrightarrow \Omega^{p,q}(M)\}},$$

y la *cohomología de Aeppli* por

$$H_{\text{A}}^{p,q}(M) = \frac{\ker \{\partial\bar{\partial}: \Omega^{p,q}(M) \longrightarrow \Omega^{p+1,q+1}(M)\}}{\text{im} \{\partial: \Omega^{p-1,q}(M) \longrightarrow \Omega^{p,q}(M)\} + \text{im} \{\bar{\partial}: \Omega^{p,q-1}(M) \longrightarrow \Omega^{p,q}(M)\}},$$

para cualquier par (p, q) .

Ambos grupos de cohomología son \mathbb{C} -espacios vectoriales.

Como muestra la siguiente proposición, existen unas ciertas relaciones entre estos grupos de cohomología que pueden facilitar el cálculo de las mismas.

Proposición 1.3.1. *Sea M una variedad compleja compacta de dimensión compleja n . Para cada $p, q \in \mathbb{N}$ se verifica:*

$$H_{\text{BC}}^{p,q}(M) \cong H_{\text{BC}}^{q,p}(M), \quad H_{\text{BC}}^{p,q}(M) \cong H_{\text{A}}^{n-q,n-p}(M).$$

Luego se puede concluir que la cohomología de Aeppli es isomorfa a la cohomología de Bott-Chern. Por tanto, basta centrar nuestra atención en esta última, como sugiere hacer el nombre de este trabajo.

Si M es una variedad compleja compacta, resulta que $H_{\text{BC}}^{p,q}(M)$ es un espacio de dimensión finita [21], y esto permite definir los *números de Bott-Chern*:

$$h_{\text{BC}}^{p,q}(M) = \dim H_{\text{BC}}^{p,q}(M).$$

Un aspecto importante en el estudio de los invariantes anteriores es su comportamiento por deformación compleja. Como señala Rollenske en [19], una *deformación* de una variedad compleja (M, J) puede verse como una familia de estructuras complejas $(J_t)_{t \in \mathcal{B}}$ sobre M parametrizadas a través de un espacio complejo analítico \mathcal{B} de manera que $J = J_0$ en

un cierto punto $0 \in \mathcal{B}$. Observar que la variedad M de partida no cambia. Sólo vamos variando su estructura compleja de una manera “suave”.

Resulta que para todo $p, q \in \mathbb{N}$, tanto los números de Hodge $b_{p,q}(M, J_t)$ como los números de Bott-Chern $h_{\text{BC}}^{p,q}(M, J_t)$ son funciones semi-continuas superiores en t . Es decir, cuando nos centramos en un elemento J_{t_0} y consideramos un subconjunto de \mathcal{B} que contenga a t_0 lo suficientemente pequeño, al recorrer las diferentes estructuras complejas J_t dentro de este subconjunto, las dimensiones de los grupos de cohomología de Dolbeault y Bott-Chern nunca pueden aumentar:

$$b_{p,q}(M, J_t) \leq b_{p,q}(M, J_{t_0}), \quad (1.2)$$

$$h_{\text{BC}}^{p,q}(M, J_t) \leq h_{\text{BC}}^{p,q}(M, J_{t_0}), \quad (1.3)$$

para cualquier t suficientemente próximo a t_0 . La relación (1.2) fue obtenida por Kodaira, mientras que (1.3) puede encontrarse en [21].

Para finalizar este capítulo debemos señalar que al igual que la cohomología de Bott-Chern está relacionada con la cohomología de Aeppli, existen relaciones entre la cohomología de Bott-Chern y las que aparecen en la Sección 1.2. De hecho, dados $k \in \mathbb{N}$ y $p, q \in \mathbb{N}$ se definen de manera natural las siguientes aplicaciones:

$$H_{\text{BC}}^{p,q}(M) \longrightarrow H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M),$$

$$\bigoplus_{r+s=k} H_{\text{BC}}^{r,s}(M) \longrightarrow H_{\text{dR}}^k(M; \mathbb{C}).$$

En general no son inyectivas ni suprayectivas, aunque si M es una variedad compacta verificando el $\partial\bar{\partial}$ -Lema (ver Capítulo 4) entonces ambas son isomorfismos. En particular, esto se cumple para toda variedad Kähler.

Capítulo 2

Nilvariedades complejas

En este capítulo consideramos una clase especial de variedades complejas compactas construidas a partir de grupos de Lie nilpotentes. Tales variedades, conocidas como nilvariedades, han sido estudiadas por muchos autores y desde diferentes puntos de vista, ya que han permitido construir numerosos ejemplos interesantes de variedades con estructura geométrica adicional cumpliendo propiedades poco usuales. El teorema de Nomizu, que permite calcular la cohomología de de Rham de una nilvariedad a partir de su álgebra de Lie subyacente, es una de las principales herramientas en tales construcciones. En la Sección 2.3 de este tema incluimos una demostración detallada de la versión del teorema de Nomizu para la cohomología de Bott-Chern de ciertas nilvariedades dotadas de estructura compleja invariante obtenido recientemente por Angella en [2].

2.1. Estructuras complejas invariantes sobre nilvariedades

En esta primera sección se presenta el concepto de nilvariedad, así como ciertos resultados relativos a estructuras complejas invariantes, prestando especial atención al caso de dimensión real 6.

Antes de entrar con estructuras complejas, vamos a recordar el concepto de grupo de Lie y a ver la definición de nilvariedad, así como algunas de sus propiedades básicas.

Un *grupo de Lie de dimensión m* es una variedad diferenciable de dimensión m que posee estructura de grupo algebraico de tal manera que la aplicación producto,

$$G \times G \longrightarrow G, \text{ dada por } (g, h) \longmapsto g \cdot h,$$

y la aplicación inversa,

$$G \longrightarrow G, \text{ dada por } g \longmapsto g^{-1},$$

son diferenciables.

El álgebra de Lie \mathfrak{g} asociada de manera natural a un grupo de Lie G es el conjunto de campos de vectores diferenciables sobre G que son invariantes a izquierda:

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{X}(G) \mid (L_g)_*(X) = X, \forall g \in G\}.$$

Es bien conocido que existe un isomorfismo canónico entre el álgebra de Lie \mathfrak{g} de cualquier grupo de Lie G y el espacio tangente en el elemento neutro e de G : $\mathfrak{g} \cong T_e G$. Este hecho permite asegurar que \mathfrak{g} es un espacio de dimensión finita, a diferencia de $\mathfrak{X}(G)$, que no tiene porqué serlo.

Además, se puede probar que $\mathfrak{g}^* \cong \Omega^1(T_e G)$ e identificar el espacio de las 1-formas invariantes a izquierda con el espacio dual \mathfrak{g}^* . Esta dualidad unida a la fórmula:

$$d\alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]),$$

donde $\alpha \in \Omega^1(G)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$, permite describir \mathfrak{g} indistintamente en términos del corchete de Lie o en términos de la diferencial exterior de formas. En efecto, cuando $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ y $X, Y \in \mathfrak{g}$, se tiene que $\alpha(X)$ y $\alpha(Y)$ son funciones constantes, luego $X\alpha(Y) = 0 = Y\alpha(X)$, y la fórmula queda reducida a:

$$d\alpha(X, Y) = -\alpha([X, Y]), \quad \forall \alpha \in \mathfrak{g}^*, \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (2.1)$$

Dada una base $\{\omega^1, \dots, \omega^m\}$ de \mathfrak{g}^* , es posible escribir para cada $k = 1, \dots, m$:

$$d\omega^k = \sum_{1 \leq i < j \leq m} c_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j. \quad (2.2)$$

Estas son las llamadas *ecuaciones de estructura* o *fórmulas de Maurer-Cartan* del grupo de Lie G , y c_{ij}^k son las *constantes de estructura* de G respecto de la base de \mathfrak{g}^* dada.

Definición 2.1.1. *Un grupo de Lie G se dice nilpotente si su álgebra de Lie \mathfrak{g} lo es. Es decir, si la serie central descendente de \mathfrak{g} ,*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}] \supset \dots \supset \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}] \supset \dots,$$

cumple $\mathfrak{g}^k = 0$ para algún k . Llamaremos paso de nilpotencia s al menor número natural k que cumple lo anterior.

Observar que si el paso de nilpotencia es 1, entonces el álgebra de Lie \mathfrak{g} es abeliana.

Equivalentemente, podemos definir la nilpotencia de un álgebra de Lie \mathfrak{g} usando la *serie central ascendente*,

$$\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_l \subset \cdots, \quad (2.3)$$

donde $\mathfrak{g}_0 = 0$, y $\mathfrak{g}_l = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_{l-1}\}$ para $l \geq 1$.

En particular, \mathfrak{g}_1 es el centro de \mathfrak{g} . En este caso, el álgebra de Lie es nilpotente si existe un l tal que $\mathfrak{g}_l = \mathfrak{g}$. Resulta que el mínimo de tales l 's existe si y sólo si la serie central descendente tiene paso de nilpotencia s , y además $s = l$.

Llamaremos *subgrupo discreto* de un grupo de Lie G a un subconjunto que es a la vez subgrupo algebraico y subespacio discreto de G . Por poseer la topología discreta como subespacio, este conjunto será cerrado y numerable.

Definición 2.1.2. *Una nilvariedad es un cociente compacto $N = \Gamma \backslash G$, donde G es un grupo de Lie nilpotente, conexo y simplemente conexo, y Γ un subgrupo discreto de G de rango máximo. La dimensión de N es la dimensión de G como variedad diferenciable.*

Dado un grupo de Lie G , podemos plantearnos cuándo es posible asegurar la existencia de un subgrupo discreto Γ tal que el cociente $\Gamma \backslash G$ es compacto. En el caso de grupos de Lie nilpotentes, existe un teorema debido a Mal'cev [14] que resuelve el problema:

Teorema 2.1.3. *Un grupo de Lie nilpotente, conexo y simplemente conexo tiene cocientes compactos de la forma $\Gamma \backslash G$ si y sólo si existe una base de \mathfrak{g}^* tal que las constantes de estructura de G respecto de la misma son números racionales.*

Según se ha visto, el grupo de Lie G lleva asociado de manera natural un álgebra de Lie \mathfrak{g} cumpliendo muy buenas propiedades. La cuestión que ahora nos asalta es si éstas se conservan al tomar nilvariedades.

Resulta que dada una base $\{X_1, \dots, X_m\}$ de campos de vectores invariantes a izquierda sobre G , es decir, una base de \mathfrak{g} , se obtiene una base de campos global para $N = \Gamma \backslash G$ sin más que tomar $\{\pi_*(X_1), \dots, \pi_*(X_m)\}$, siendo π la proyección natural de G sobre $\Gamma \backslash G$.

Análogamente, dada una base $\{\omega^1, \dots, \omega^m\}$ de 1-formas invariantes a izquierda sobre G , esto es, una base de \mathfrak{g}^* , existe una base de 1-formas $\{\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^m\}$ sobre $N = \Gamma \backslash G$ tal que $\pi^*(\omega^k) = \tilde{\omega}^k$, para cada $k = 1, \dots, m$.

De hecho, se puede probar que las ecuaciones de estructura de la variedad N con respecto a la base anterior son las mismas que las que se tenían para G . Por tanto, podemos denotar por ω^k a las 1-formas $\tilde{\omega}^k$ y considerar las ecuaciones (2.2) tanto para G como para $\Gamma \backslash G$.

Es más, el Teorema de Ado [24] nos permite estudiar ciertos aspectos de las nilvariedades sin necesidad de conocerlas explícitamente, usando las ecuaciones de estructura del álgebra de Lie subyacente \mathfrak{g} .

No perdamos de vista que el objetivo de esta sección es el estudio de estructuras complejas invariantes sobre nilvariedades. Ya que las nilvariedades son cocientes entre un grupo de Lie G y un subgrupo discreto Γ , parece sensato pensar que podremos hallarlas a partir de las G de alguna manera.

Definición 2.1.4. *Sea G un grupo de Lie de dimensión $2n$. Se dice que una estructura casi compleja J definida sobre G es invariante a izquierda si $JX \in \mathfrak{g}$ para cada $X \in \mathfrak{g}$.*

Si $\{X_1, \dots, X_{2n}\}$ es una base de \mathfrak{g} , se puede ver que cualquier estructura casi compleja J invariante a izquierda sobre G tiene coeficientes constantes respecto de esa base.

Es más, toda estructura compleja J sobre \mathfrak{g} induce una estructura compleja sobre G invariante a izquierda.

Proposición 2.1.5. *Sea $N = \Gamma \backslash G$ una nilvariedad. Toda estructura casi compleja J invariante a izquierda sobre G desciende a una estructura casi compleja \tilde{J} sobre N con coeficientes constantes. Además, \tilde{J} es integrable si y sólo si J lo es.*

Llegamos así a la conclusión de que las estructuras complejas sobre \mathfrak{g} generan estructuras complejas \tilde{J} sobre la nilvariedad.

Definición 2.1.6. *Una estructura compleja invariante sobre una nilvariedad $N = \Gamma \backslash G$ es una estructura compleja que proviene de una estructura compleja J invariante a izquierda sobre G . En particular, si G es un grupo de Lie complejo, diremos que N es una variedad compleja paralelizable en el sentido de que posee una base global de campos de vectores holomorfos.*

Observar que la existencia de una estructura compleja invariante a izquierda sobre G hace que G posea estructura de variedad compleja, aunque no sea un grupo de Lie complejo.

Como consecuencia de todo lo anterior, resulta que basta hallar las estructuras complejas sobre \mathfrak{g} para encontrar las nilvariedades complejas $\Gamma \backslash G$ con estructura compleja invariante.

En particular, necesitamos dar condiciones sobre las estructuras casi complejas invariantes a izquierda sobre G , es decir, sobre las definidas en \mathfrak{g} , que permitan averiguar si éstas son o no complejas.

Denotemos por $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ la complexificación de \mathfrak{g} y por $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ al espacio dual del anterior, que se identifica con $(\mathfrak{g}^*)_{\mathbb{C}}$.

Dada una estructura casi compleja J invariante a izquierda sobre G , podemos seguir los mismos pasos que en la Sección 1.1 y bigraduar el espacio de las formas definidas sobre \mathfrak{g} : $\bigwedge^* \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* = \bigoplus_{p,q} \bigwedge^{p,q}(\mathfrak{g}^*)$, donde $\bigwedge^{1,0}(\mathfrak{g}^*)$ y $\bigwedge^{0,1}(\mathfrak{g}^*)$ son los subespacios de valores propios 1 y -1 para J , respectivamente.

Llamemos $\mathfrak{g}^{p,q} = \bigwedge^{p,q}(\mathfrak{g}^*)$.

Sea $d : \bigwedge^* \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \rightarrow \bigwedge^{*+1} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ la extensión natural de la diferencial de Chevalley-Eilenberg (2.1) al complexificado de las formas. En general se tiene:

$$d(\mathfrak{g}^{p,q}) \subset \mathfrak{g}^{p+2,q-1} \oplus \mathfrak{g}^{p+1,q} \oplus \mathfrak{g}^{p,q+1} \oplus \mathfrak{g}^{p-1,q+2},$$

que en el caso particular de las $(1,0)$ -formas sobre \mathfrak{g} queda:

$$d(\mathfrak{g}^{1,0}) \subset \mathfrak{g}^{2,0} \oplus \mathfrak{g}^{1,1} \oplus \mathfrak{g}^{0,2}.$$

J es integrable si y sólo si $d(\mathfrak{g}^{1,0})$ no tiene parte en $\mathfrak{g}^{0,2}$, lo que permite la bigraduación de la diferencial en tal caso. Además, esta condición origina ciertos casos particulares que dan lugar a importantes ejemplos de estructuras complejas:

- Si $d(\mathfrak{g}^{1,0}) \subset \mathfrak{g}^{2,0}$, o equivalentemente $[JX, Y] = J[X, Y]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, resulta que \mathfrak{g} es un álgebra de Lie compleja y la estructura J es compleja paralelizable.
- Si $d(\mathfrak{g}^{1,0}) \subset \mathfrak{g}^{1,1}$, o equivalentemente $[JX, JY] = [X, Y]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}^{1,0}$ es un álgebra de Lie compleja Abelianas. En tal caso, J se dirá estructura compleja Abelianas.

Observar que la integrabilidad, como prueba Salamon en [20], conlleva la siguiente simplificación de las ecuaciones de estructura:

Teorema 2.1.7. *Sea J una estructura casi compleja sobre un álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{g} de dimensión $2n$. Se tiene que J es integrable si y sólo si existe una base $\{\omega^j\}_{j=1}^n$ de $\mathfrak{g}^{1,0}$ tal que*

$$d\omega^1 = 0, \quad d\omega^j \in \mathcal{I}(\omega^1, \dots, \omega^{j-1}) \text{ para } j = 2, \dots, n,$$

donde $\mathcal{I}(\omega^1, \dots, \omega^{j-1})$ es el ideal de $\bigwedge^* \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ generado por $\{\omega^1, \dots, \omega^{j-1}\}$.

Como consecuencia, cualquier múltiplo de la $(n,0)$ -forma $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$ es cerrada.

El primer caso no trivial que nos encontramos es el de dimensión real 4. En tal situación, las ecuaciones de Salamon se reducen a las siguientes:

$$\begin{cases} d\omega^1 = 0, \\ d\omega^2 = \varepsilon \omega^{1\bar{1}}, \end{cases} \quad (2.4)$$

donde $\omega^{i\bar{j}}$ denota el producto exterior $\omega^i \wedge \omega^{\bar{j}}$, con $\omega^{\bar{j}}$ el conjugado de ω^j .

A partir de (2.4) es posible averiguar qué álgebras de Lie nilpotentes de dimensión real 4 admiten estructura compleja. Veamos cómo.

Tomamos una base de \mathfrak{g}^* de 1-formas reales $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ con las cuales se construye la base de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{1,0}$ dada por $\omega^1 = e^1 + ie^2$, $\omega^2 = e^3 + ie^4$. Observar que al elegir esta base estamos diciendo que la estructura compleja J actúa como $J(e^1) = -e^2$ y $J(e^3) = -e^4$, ya que ω^1 y ω^2 son de tipo $(1, 0)$.

Ahora, aplicamos (2.4) y se deduce que:

$$d\omega^1 = 0 \Rightarrow de^1 = de^2 = 0,$$

$$d\omega^2 = de^3 + ide^4 = \varepsilon \omega^{1\bar{1}} = \varepsilon((e^1 + ie^2) \wedge (e^1 - ie^2)) = -2i\varepsilon e^{12},$$

lo que nos lleva a $de^3 = 0$ y $de^4 = -2\varepsilon e^{12}$.

Si $\varepsilon = 0$, entonces $de^4 = 0$ y obtenemos el álgebra Abelianas $(0, 0, 0, 0)$.

Si por el contrario $\varepsilon \neq 0$, se tiene $de^4 = -2\varepsilon e^{12}$, y haciendo un cambio de base conseguimos $de^4 = e^{12}$, lo que da lugar al álgebra de Lie $(0, 0, 0, 12)$.

Llegamos así a la siguiente tabla, donde el símbolo “✓” significa “existencia” y el símbolo “–” significa “no existencia”.

Tabla I: Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 4

Estructura del álgebra de Lie	J compleja
$(0, 0, 12, 13)$	–
$(0, 0, 0, 12)$	✓
$(0, 0, 0, 0)$	✓

Notemos que a la vista de las ecuaciones, podemos concluir que todas las estructuras complejas J sobre álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 4 son Abelianas.

Cuando pasamos a dimensión 6 el problema no resulta tan sencillo, aunque Salamon lo resuelve en [20]. En la siguiente tabla mostramos sus conclusiones.

Tabla II: Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6

b_1	b_2	b_3	s	Estructura del álgebra de Lie	\oplus	J compleja
2	2	2	5	$\mathfrak{h}_{32} = (0, 0, 12, 13, 14 + 23, 34 + 52)$		–
2	2	2	5	$\mathfrak{h}_{31} = (0, 0, 12, 13, 14, 34 + 52)$		–
2	3	4	5	$\mathfrak{h}_{28} = (0, 0, 12, 13, 14, 15)$		–
2	3	4	5	$\mathfrak{h}_{30} = (0, 0, 12, 13, 14 + 23, 24 + 15)$		–
2	3	4	5	$\mathfrak{h}_{29} = (0, 0, 12, 13, 14, 23 + 15)$		–
2	4	6	4	$\mathfrak{h}_{23} = (0, 0, 12, 13, 23, 14)$		–
2	4	6	4	$\mathfrak{h}_{26}^- = (0, 0, 12, 13, 23, 14 - 25)$		–
2	4	6	4	$\mathfrak{h}_{26}^+ = (0, 0, 12, 13, 23, 14 + 25)$		✓
3	4	4	4	$\mathfrak{h}_{27} = (0, 0, 0, 12, 14 - 23, 15 + 34)$		–
3	5	6	4	$\mathfrak{h}_{25} = (0, 0, 0, 12, 14, 15 + 23)$		–
3	5	6	4	$\mathfrak{h}_{24} = (0, 0, 0, 12, 14, 15 + 23 + 24)$		–
3	5	6	4	$\mathfrak{h}_{22} = (0, 0, 0, 12, 14, 15 + 24)$	1+5	–
3	5	6	4	$\mathfrak{h}_{21} = (0, 0, 0, 12, 14, 15)$	1+5	–
3	5	6	3	$\mathfrak{h}_{18} = (0, 0, 0, 12, 13, 14 + 35)$		–
3	5	6	3	$\mathfrak{h}_{19}^+ = (0, 0, 0, 12, 23, 14 + 35)$		–
3	5	6	3	$\mathfrak{h}_{19}^- = (0, 0, 0, 12, 23, 14 - 35)$		✓
3	5	6	3	$\mathfrak{h}_{16} = (0, 0, 0, 12, 14, 24)$	1+5	✓
3	5	6	3	$\mathfrak{h}_{15} = (0, 0, 0, 12, 13 + 42, 14 + 23)$		✓
3	5	6	3	$\mathfrak{h}_{14} = (0, 0, 0, 12, 14, 13 + 42)$		✓
3	5	6	3	$\mathfrak{h}_{13} = (0, 0, 0, 12, 13 + 14, 24)$		✓
3	6	8	3	$\mathfrak{h}_{11} = (0, 0, 0, 12, 13, 14 + 23)$		✓
3	6	8	3	$\mathfrak{h}_{12} = (0, 0, 0, 12, 13, 24)$		✓
3	6	8	3	$\mathfrak{h}_{10} = (0, 0, 0, 12, 13, 14)$		✓
3	8	12	2	$\mathfrak{h}_7 = (0, 0, 0, 12, 13, 23)$		✓
4	6	6	3	$\mathfrak{h}_{20} = (0, 0, 0, 0, 12, 15 + 34)$		–
4	7	8	3	$\mathfrak{h}_{17} = (0, 0, 0, 0, 12, 15)$	1+1+4	–
4	7	8	3	$\mathfrak{h}_9 = (0, 0, 0, 0, 12, 14 + 25)$	1+5	✓
4	8	10	2	$\mathfrak{h}_5 = (0, 0, 0, 0, 13 + 42, 14 + 23)$		✓
4	8	10	2	$\mathfrak{h}_4 = (0, 0, 0, 0, 12, 14 + 23)$		✓
4	8	10	2	$\mathfrak{h}_2 = (0, 0, 0, 0, 12, 34)$	3+3	✓
4	9	12	2	$\mathfrak{h}_6 = (0, 0, 0, 0, 12, 13)$	1+5	✓
5	9	10	2	$\mathfrak{h}_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 12 + 34)$	1+5	✓
5	11	14	2	$\mathfrak{h}_8 = (0, 0, 0, 0, 0, 12)$	1+1+1+3	✓
6	15	20	1	$\mathfrak{h}_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$	1+...+1	✓

En las tres primeras columnas aparecen las dimensiones b_k de los grupos de cohomología (de de Rham) del álgebra de Lie, $H_{\text{dR}}^k(\mathfrak{g})$, para $k = 1, 2, 3$. Por dualidad, se tiene que $b_4 = b_2$, $b_5 = b_1$ y $b_6 = b_0 = 1$. Además, b_3 queda determinado por b_1 y b_2 ya que $b_3 = 2b_0 - 2b_1 + 2b_2$, lo cual es debido a que la suma alternada $\chi(\mathfrak{g}) = \sum_{i=0}^m (-1)^i b_i$ se anula para toda álgebra de Lie \mathfrak{g} . En la cuarta columna s es el paso de nilpotencia del álgebra de Lie.

La notación para las álgebras es una combinación de la descripción de su estructura tal y como aparece en [20] y la notación \mathfrak{h}_k utilizada en [8]. Por ejemplo, $\mathfrak{h}_2 = (0, 0, 0, 0, 12, 34)$ significa que existe una base $\{e^j\}_{j=1}^6$ tal que la diferencial de Chevalley-Eilenberg viene dada por $de^1 = de^2 = de^3 = de^4 = 0$, $de^5 = e^1 \wedge e^2$, $de^6 = e^3 \wedge e^4$; equivalentemente, usando (2.1) se ve que el corchete de Lie estaría dado en términos de la base dual $\{X_j\}_{j=1}^6$ por $[X_1, X_2] = -X_5$ y $[X_3, X_4] = -X_6$.

La columna \oplus nos dice si el álgebra de Lie es suma directa de otras de menor dimensión.

2.2. Clasificación de estructuras complejas en dimensión 6

En esta sección recordamos la clasificación de estructuras complejas sobre álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6 recientemente obtenida en [7].

En un álgebra de Lie nilpotente de dimensión 6, la condición de Salamon equivale a la existencia de una base $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ de $\mathfrak{g}^{1,0}$ verificando:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega^1 = 0, \\ d\omega^2 = A_{12} \omega^{12} + A_{13} \omega^{13} + A_{1\bar{1}} \omega^{1\bar{1}} + A_{1\bar{2}} \omega^{1\bar{2}} + A_{1\bar{3}} \omega^{1\bar{3}}, \\ d\omega^3 = B_{12} \omega^{12} + B_{13} \omega^{13} + B_{1\bar{1}} \omega^{1\bar{1}} + B_{1\bar{2}} \omega^{1\bar{2}} + B_{1\bar{3}} \omega^{1\bar{3}} \\ \quad + B_{23} \omega^{23} + B_{2\bar{1}} \omega^{2\bar{1}} + B_{2\bar{2}} \omega^{2\bar{2}} + B_{2\bar{3}} \omega^{2\bar{3}}, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

para ciertos coeficientes complejos $A's$ y $B's$. Para poder asegurar la nilpotencia de \mathfrak{g} y el hecho de que $d \circ d = 0$ (condición equivalente a la identidad de Jacobi para el corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ en \mathfrak{g}), los coeficientes deben cumplir ciertas relaciones. Salta a la vista que, como hemos señalado en la sección anterior, el paso de dimensión 4 a dimensión 6 no es trivial ni mucho menos sencillo.

A diferencia de lo que ocurría en dimensión 4, ahora no todas las estructuras complejas J son Abelianas, lo que nos lleva a una primera separación entre ellas. Teniendo en cuenta

que la nilpotencia “extiende” la idea de Abelianidad, podemos partir de este hecho para lograr una segunda distinción dentro de las estructuras complejas.

En general, la serie central ascendente (2.3) no es compatible con la estructura compleja J , por lo que en [9] se introduce una nueva serie adaptada a J .

Definición 2.2.1. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie nilpotente y J una estructura compleja sobre \mathfrak{g} . Diremos que J es nilpotente si la serie ascendente adaptada a J

$$\mathfrak{g}_0^J \subset \mathfrak{g}_1^J \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_l^J \subset \cdots,$$

dada por $\mathfrak{g}_0^J = 0$, y $\mathfrak{g}_l^J = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_{l-1}^J \text{ y } [JX, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_{l-1}^J\}$ para $l \geq 1$, cumple que $\mathfrak{g}_l^J = \mathfrak{g}$ para algún entero positivo l . En otro caso, se dice que J es no nilpotente.

Conviene observar que los \mathfrak{g}_l^J son ideales de \mathfrak{g} que cumplen $\mathfrak{g}_l^J \subset \mathfrak{g}_l$, $\forall l \geq 0$. Además, si J es compleja paralelizable o Abeliana entonces se verifica que $\mathfrak{g}_l^J = \mathfrak{g}_l$, $\forall l \geq 0$.

En [9] se obtiene una condición equivalente para la nilpotencia de J en términos de las ecuaciones de estructura para un álgebra de Lie \mathfrak{g} nilpotente:

Teorema 2.2.2. Sea J una estructura compleja sobre un álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{g} de dimensión $2n$. J es nilpotente si y sólo si existe una base $\{\omega^j\}_{j=1}^n$ de $\mathfrak{g}^{1,0}$ verificando:

$$d\omega^1 = 0, \quad d\omega^j \in \bigwedge^2 \langle \omega^1, \dots, \omega^{j-1}, \omega^{\bar{1}}, \dots, \omega^{\overline{j-1}} \rangle \text{ para } j = 2, \dots, n.$$

Este último teorema permite afinar las ecuaciones generales en dimensión seis (2.5) dependiendo de si la estructura compleja J es nilpotente, tal y como se muestra en [22, 23]:

Proposición 2.2.3. Sea J una estructura compleja sobre un álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{g} de dimensión 6.

(a) Si J es no nilpotente, existe una base $\{\omega^j\}_{j=1}^3$ de $\mathfrak{g}^{1,0}$ tal que

$$\begin{cases} d\omega^1 &= 0, \\ d\omega^2 &= \omega^{13} + \omega^{1\bar{3}}, \\ d\omega^3 &= i\varepsilon \omega^{1\bar{1}} \pm i(\omega^{1\bar{2}} - \omega^{2\bar{1}}), \end{cases}$$

donde $\varepsilon = 0, 1$.

(b) Si J es nilpotente, existe una base $\{\omega^j\}_{j=1}^3$ de $\mathfrak{g}^{1,0}$ tal que

$$\begin{cases} d\omega^1 &= 0, \\ d\omega^2 &= \varepsilon \omega^{1\bar{1}}, \\ d\omega^3 &= \rho \omega^{12} + (1 - \varepsilon)A \omega^{1\bar{1}} + B \omega^{1\bar{2}} + C \omega^{2\bar{1}} + (1 - \varepsilon)D \omega^{2\bar{2}}, \end{cases}$$

donde $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon, \rho \in \{0, 1\}$. Además, $\rho = 0$ se corresponde con las estructuras Abelianas.

El siguiente resultado aparecido en [22] muestra la clasificación de acuerdo al tipo de estructura compleja.

Teorema 2.2.4. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie nilpotente de dimensión 6 isomorfa a $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_{16}, \mathfrak{h}_{19}^-$ o \mathfrak{h}_{26}^+ . Entonces:*

- (a) *Toda estructura compleja sobre \mathfrak{h}_{19}^- y \mathfrak{h}_{26}^+ es no nilpotente.*
- (b) *Para $1 \leq k \leq 16$, cualquier estructura compleja sobre \mathfrak{h}_k es nilpotente.*
- (c) *Toda estructura compleja sobre $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_8$ y \mathfrak{h}_9 es Abeliana.*
- (d) *En $\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_4, \mathfrak{h}_5$ y \mathfrak{h}_{15} existen tanto estructuras nilpotentes Abelianas como no Abelianas.*
- (e) *Toda estructura compleja sobre $\mathfrak{h}_6, \mathfrak{h}_7, \mathfrak{h}_{10}, \mathfrak{h}_{11}, \mathfrak{h}_{12}, \mathfrak{h}_{13}, \mathfrak{h}_{14}$ y \mathfrak{h}_{16} es no Abeliana.*

No obstante, para lograr una clasificación “sin repeticiones” es necesario eliminar aquellas estructuras complejas definidas sobre cada álgebra que se pueden obtener a partir de otras ya existentes. Es por ello que se introduce el siguiente concepto.

Definición 2.2.5. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie dotada de dos estructuras complejas, J y J' . Se dice que J y J' son equivalentes si existe un automorfismo $F: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ tal que $J' = F^{-1} \circ J \circ F$, es decir, si F es un automorfismo lineal tal que $F^*: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ conmuta con la diferencial de Chevalley-Eilenberg d y F conmuta con las estructuras complejas J y J' .*

Con todo lo anterior, en [7] se obtienen las siguientes tablas que recogen la clasificación de estructuras complejas en dimensión 6.

Tabla 1: Clasificación de estructuras complejas nilpotentes

\mathfrak{g}	Estructuras Abelianas ($\rho = 0$)	Estructuras nilpotentes no Abelianas ($\rho = 1$)
\mathfrak{h}_1	$d\omega^2 = 0, d\omega^3 = 0$	—
\mathfrak{h}_2	$d\omega^2 = 0, d\omega^3 = \omega^{1\bar{1}} + D\omega^{2\bar{2}},$ $\Im D = 1$	$d\omega^2 = 0, d\omega^3 = \omega^{12} + \omega^{1\bar{1}} + \omega^{1\bar{2}} + D\omega^{2\bar{2}},$ $\Im D > 0$
\mathfrak{h}_3	$d\omega^2 = 0, d\omega^3 = \omega^{1\bar{1}} \pm \omega^{2\bar{2}}$	—
\mathfrak{h}_4	$d\omega^2 = 0,$ $d\omega^3 = \omega^{1\bar{1}} + \omega^{1\bar{2}} + \frac{1}{4}\omega^{2\bar{2}}$	$d\omega^2 = 0, d\omega^3 = \omega^{12} + \omega^{1\bar{1}} + \omega^{1\bar{2}} + D\omega^{2\bar{2}},$ $D \in \mathbb{R} - \{0\}$
\mathfrak{h}_5	$d\omega^2 = 0,$ $d\omega^3 = \omega^{1\bar{1}} + \omega^{1\bar{2}} + D\omega^{2\bar{2}},$ $D \in [0, \frac{1}{4})$	$d\omega^2 = 0, d\omega^3 = \omega^{12}$ $d\omega^2 = 0, d\omega^3 = \omega^{12} + \omega^{1\bar{1}} + \lambda\omega^{1\bar{2}} + D\omega^{2\bar{2}},$ with (λ, D) satisfying one of: <ul style="list-style-type: none"> • $\lambda = 0 \leq \Im D, 4(\Im D)^2 < 1 + 4\Re D;$ • $0 < \lambda^2 < \frac{1}{2}, 0 \leq \Im D < \frac{\lambda^2}{2}, \Re D = 0;$ • $\frac{1}{2} \leq \lambda^2 < 1, 0 \leq \Im D < \frac{1-\lambda^2}{2}, \Re D = 0;$ • $\lambda^2 > 1, 0 \leq \Im D < \frac{\lambda^2-1}{2}, \Re D = 0.$
\mathfrak{h}_6	—	$d\omega^2 = 0, d\omega^3 = \omega^{12} + \omega^{1\bar{1}} + \omega^{1\bar{2}}$
\mathfrak{h}_7	—	$d\omega^2 = \omega^{1\bar{1}}, d\omega^3 = \omega^{12} + \omega^{1\bar{2}}$
\mathfrak{h}_8	$d\omega^2 = 0, d\omega^3 = \omega^{1\bar{1}}$	—
\mathfrak{h}_9	$d\omega^2 = \omega^{1\bar{1}}, d\omega^3 = \omega^{1\bar{2}} + \omega^{2\bar{1}}$	—
\mathfrak{h}_{10}	—	$d\omega^2 = \omega^{1\bar{1}}, d\omega^3 = \omega^{12} + \omega^{2\bar{1}}$
\mathfrak{h}_{11}	—	$d\omega^2 = \omega^{1\bar{1}}, d\omega^3 = \omega^{12} + B\omega^{1\bar{2}} + B-1 \omega^{2\bar{1}},$ $B \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$
\mathfrak{h}_{12}	—	$d\omega^2 = \omega^{1\bar{1}}, d\omega^3 = \omega^{12} + B\omega^{1\bar{2}} + B-1 \omega^{2\bar{1}},$ $\Im B \neq 0$
\mathfrak{h}_{13}	—	$d\omega^2 = \omega^{1\bar{1}}, d\omega^3 = \omega^{12} + B\omega^{1\bar{2}} + c\omega^{2\bar{1}},$ $c \neq B-1 , (c, B) \neq (0, 1),$ $c^4 - 2(B ^2 + 1)c^2 + (B ^2 - 1)^2 < 0$

\mathfrak{h}_{14}	—	$d\omega^2 = \omega^{1\bar{1}}, d\omega^3 = \omega^{12} + B\omega^{1\bar{2}} + c\omega^{2\bar{1}},$ $c \neq B - 1 , (c, B) \neq (0, 1),$ $c^4 - 2(B ^2 + 1)c^2 + (B ^2 - 1)^2 = 0$
\mathfrak{h}_{15}	$d\omega^2 = \omega^{1\bar{1}}, d\omega^3 = \omega^{2\bar{1}}$	$d\omega^2 = \omega^{1\bar{1}}, d\omega^3 = \omega^{12} + B\omega^{1\bar{2}} + c\omega^{2\bar{1}},$
	$d\omega^2 = \omega^{1\bar{1}}, d\omega^3 = \omega^{12} + c\omega^{2\bar{1}},$ $c \neq 1$	$c \neq B - 1 , (c, B) \neq (0, 1),$ $c^4 - 2(B ^2 + 1)c^2 + (B ^2 - 1)^2 > 0$
\mathfrak{h}_{16}	—	$d\omega^2 = \omega^{1\bar{1}}, d\omega^3 = \omega^{12} + B\omega^{1\bar{2}},$ $ B = 1, B \neq 1$

donde $d\omega^1 = 0$; $\lambda, c \geq 0$; $B, D \in \mathbb{C}$.

Tabla 2: Clasificación de estructuras complejas no nilpotentes

\mathfrak{g}	Estructuras complejas
\mathfrak{h}_{19}^-	$d\omega^1 = 0, d\omega^2 = \omega^{13} + \omega^{1\bar{3}}, d\omega^3 = \pm i(\omega^{12} - \omega^{2\bar{1}})$
\mathfrak{h}_{26}^+	$d\omega^1 = 0, d\omega^2 = \omega^{13} + \omega^{1\bar{3}}, d\omega^3 = i\omega^{1\bar{1}} \pm i(\omega^{12} - \omega^{2\bar{1}})$

2.3. Cohomología de Bott-Chern de nilvariedades complejas

Dedicamos esta sección al reciente resultado de Angella [2] que permite calcular la cohomología de Bott-Chern de nilvariedades con estructura compleja invariante a partir del álgebra de Lie. La idea del mismo se basa en resultados similares para las cohomologías de de Rham y de Dolbeault que también enunciamos a continuación.

En primer lugar, observar que escribiremos:

$$H_{BC}^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \frac{\ker\{d: \bigwedge^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*) \longrightarrow \bigwedge^{p+q+1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*)\}}{\text{im}\{\partial\bar{\partial}: \bigwedge^{p-1,q-1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*) \longrightarrow \bigwedge^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*)\}},$$

y análogamente para las cohomologías de Dolbeault y de de Rham, distinguiendo cuando sea necesario en este último caso si se trata de la cohomología de de Rham sobre \mathbb{R} o sobre \mathbb{C} .

El Teorema de Nomizu [17] dice lo siguiente:

Teorema 2.3.1. *Sea G un grupo de Lie de dimensión m , \mathfrak{g} su álgebra de Lie asociada y $N = \Gamma \backslash G$ una nilvariedad. Entonces,*

$$H_{\text{dR}}^k(N) \cong H_{\text{dR}}^k(\mathfrak{g}), \quad k = 1, \dots, m.$$

En [13], Hattori logró una generalización de este resultado para variedades completamente resolubles, aunque el caso que nos ocupa queda cubierto por el teorema anterior.

Al dotar a la nilvariedad de una estructura compleja invariante, es posible enunciar un resultado similar para la cohomología de Dolbeault, aunque para ello la nilvariedad debe cumplir “algo más”.

Definición 2.3.2. *Sea $N = \Gamma \backslash G$ una nilvariedad compleja con estructura compleja J invariante y \mathfrak{g} su álgebra de Lie subyacente. Se dice que J es racional si J es compatible con la estructura racional de G , es decir, $J(\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}) \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$.*

Teorema 2.3.3. [18] *Sea $N = \Gamma \backslash G$ una nilvariedad compleja con estructura compleja J invariante y \mathfrak{g} el álgebra de Lie de G . Si J es racional, abeliana o bien J es biinvariante con G un grupo de Lie complejo y N compleja paralelizable, se tiene que:*

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(N) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}), \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Más aún, Rollenske prueba en [18] que en dimensión 6 el resultado es cierto para toda J definida sobre cualquier \mathfrak{g} no isomorfa a \mathfrak{h}_7 .

Cabe observar que los isomorfismos de los teoremas anteriores están inducidos por la inclusión natural i .

Pasemos ya a ver el resultado obtenido por Angella a partir de los dos teoremas anteriores. Aunque en [2] aparece enunciado para un tipo más general de variedades (las variedades resolubles) aquí nos centramos en el caso nilpotente.

Comenzamos recordando el llamado “proceso de simetrización”, introducido por Belgun [4] y desarrollado en [11], que permite reducir algunos resultados sobre la nilvariedad a resultados a nivel del álgebra de Lie.

Puesto que toda nilvariedad $N = \Gamma \backslash G$ es paralelizable, es posible tomar un elemento de volumen $\nu = d\tau$ sobre N inducido por uno invariante a izquierda y a derecha en G (ver [15]). Reescalando, podemos suponer que N tiene volumen igual a 1.

Dado cualquier campo de k -tensores covariantes $T : \mathfrak{X}(N) \times \dots \times \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathcal{C}^{\infty}(N)$ sobre la nilvariedad N , se define un k -tensor covariante sobre el álgebra de Lie nilpotente

\mathfrak{g} , $T_\nu : \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, de la siguiente manera:

$$T_\nu(X_1, \dots, X_k) = \int_{p \in N} T_p(X_1|_p, \dots, X_k|_p) \nu, \quad \text{para } X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g},$$

donde $X_j|_p$ denota la proyección del campo invariante a izquierda X_j de G sobre N evaluada en el punto $p \in N$.

Notar que si T es un campo de tensores invariante, entonces $T_\nu = T$.

Además, se puede probar que si $T = \alpha$ es una k -forma sobre N , entonces $(d\alpha)_\nu = d\alpha_\nu$ y $(\alpha_\nu \wedge \beta)_\nu = \alpha_\nu \wedge \beta_\nu$, donde β es cualquier r -forma.

Por tanto, el proceso de simetrización define una aplicación lineal $\tilde{\nu}$ del espacio de las $(p+q)$ -formas en N en el espacio de las $(p+q)$ -formas en \mathfrak{g} , dada por $\tilde{\nu}(\alpha) = \alpha_\nu$ y que conmuta con la diferencial. Es más, el Teorema de Nomizu permite afirmar que $\tilde{\nu}$ induce un isomorfismo $H_{\text{dR}}^{p+q}(\tilde{\nu}) : H_{\text{dR}}^{p+q}(N; \mathbb{R}) \rightarrow H_{\text{dR}}^{p+q}(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ entre los grupos de cohomología de de Rham de orden $p+q$. En particular, toda $(p+q)$ -forma cerrada α en N es cohomóloga a la $(p+q)$ -forma invariante α_ν obtenida en el proceso de simetrización.

Si además tenemos una estructura compleja J invariante sobre N , este proceso de simetrización se puede extender a las formas complejas y es fácil ver que si α es una forma de tipo (p, q) , entonces α_ν también lo es. Ahora, considerando la descomposición de la diferencial $d\alpha = \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha$, donde $\partial\alpha$ es de tipo $(p+1, q)$ y $\bar{\partial}\alpha$ de tipo $(p, q+1)$, se llega a que $\partial\alpha_\nu + \bar{\partial}\alpha_\nu = d\alpha_\nu = (d\alpha)_\nu = (\partial\alpha)_\nu + (\bar{\partial}\alpha)_\nu$, lo cual implica

$$(\partial\alpha)_\nu = \partial\alpha_\nu, \quad (\bar{\partial}\alpha)_\nu = \bar{\partial}\alpha_\nu.$$

Antes de pasar a enunciar el teorema de Angella es necesario ver el siguiente lema previo, cuya demostración en [2] se basa en la teoría de Hodge para la cohomología de Bott-Chern pero que nosotros hemos logrado demostrar basándonos en el proceso de simetrización.

Lema 2.3.4. *Sea $N = \Gamma \backslash G$ una nilvariedad con estructura compleja invariante J . Sea \mathfrak{g} el álgebra de Lie asociada de manera natural a G . La aplicación entre complejos*

$$\begin{array}{ccccc} \bigwedge^{p-1, q-1} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* & \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} & \bigwedge^{p, q} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* & \xrightarrow{d} & \bigwedge^{p+q+1} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \Omega_{\text{inv}}^{p-1, q-1} N & \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} & \Omega_{\text{inv}}^{p, q} N & \xrightarrow{d} & \Omega_{\text{inv}}^{p+q+1} N \\ \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i \\ \Omega^{p-1, q-1} N & \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} & \Omega^{p, q} N & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+q+1} N \end{array}$$

induce un monomorfismo en cohomología:

$$i : H_{\text{BC}}^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \hookrightarrow H_{\text{BC}}^{p,q}(N).$$

Demostración. Sea $[\tilde{\alpha}] \in H_{\text{BC}}^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ tal que $[\tilde{\alpha}] = 0$ en $H_{\text{BC}}^{p,q}(N)$. Entonces sabemos que existe $\beta \in \Omega^{p-1,q-1}(N)$ tal que $\tilde{\alpha} = \partial\bar{\partial}\beta$. Por ser $\tilde{\alpha}$ invariante, resulta que

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_{\nu} = (\partial\bar{\partial}\beta)_{\nu} = \partial\bar{\partial}\beta_{\nu},$$

con $\beta_{\nu} \in \Lambda^{p-1,q-1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, y podemos concluir que $[\tilde{\alpha}] = 0$ en $H_{\text{BC}}^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. \square

Teorema 2.3.5. *Sea $N = \Gamma \backslash G$ una nilvariedad con estructura compleja invariante J . Sea \mathfrak{g} el álgebra de Lie asociada de manera natural a G y supongamos que para todo $p, q \in \mathbb{N}$ se verifica:*

$$i : H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\cong} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(N).$$

Entonces, también se tiene que:

$$i : H_{\text{BC}}^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\cong} H_{\text{BC}}^{p,q}(N).$$

Demostración. Haremos esta demostración en detalle, siguiendo los mismos pasos que aparecen en [2]. Para ello, se toman $p, q \in \mathbb{N}$.

Paso 1 Empezamos observando la existencia de la siguiente secuencia exacta:

$$0 \xrightarrow{i_1} \frac{\text{imd} \cap \Omega^{p,q}(N)}{\text{im}\partial\bar{\partial}} \xrightarrow{i_2} H_{\text{BC}}^{p,q}(N) \xrightarrow{i_3} H_{\text{dR}}^{p+q}(N; \mathbb{C}).$$

Tal secuencia induce una nueva secuencia exacta entre esos mismos espacios pero a nivel del álgebra de Lie \mathfrak{g} , que estará relacionada con la primera a través del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{i_1} & \frac{\text{imd} \cap \Omega^{p,q}(N)}{\text{im}\partial\bar{\partial}} & \xrightarrow{i_2} & H_{\text{BC}}^{p,q}(N) & \xrightarrow{i_3} & H_{\text{dR}}^{p+q}(N; \mathbb{C}) \\ \uparrow \cong & & \uparrow j_1 & & \uparrow j_2 & & \uparrow \cong \\ 0 & \xrightarrow{\tilde{i}_1} & \frac{\text{imd} \cap \Lambda^{p,q}(\mathfrak{g}^*)}{\text{im}\partial\bar{\partial}} & \xrightarrow{\tilde{i}_2} & H_{\text{BC}}^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\tilde{i}_3} & H_{\text{dR}}^{p+q}(\mathfrak{g}; \mathbb{C}) \end{array}$$

Conviene notar que todas las aplicaciones anteriores son inclusiones naturales.

Por el lema previo, se sabe que j_2 es un monomorfismo, luego basta ver su suprayectividad para que quede probado lo que buscamos.

Por ser i_3 una aplicación lineal y las secuencias anteriores exactas tenemos:

$$H_{\text{BC}}^{p,q}(N) = \ker i_3 \oplus \text{im } i_3 = \text{im } i_2 \oplus \text{im } i_3 = \frac{\text{imd} \cap \Omega^{p,q}(N)}{\text{im} \partial \bar{\partial}} \oplus \text{im } i_3.$$

Si conseguimos ver que j_1 es suprayectiva y que $\text{im } i_3 \cong \text{im } \tilde{i}_3$, habremos concluido.

En primer lugar, nos centramos en probar $\text{im } i_3 \cong \text{im } \tilde{i}_3$.

Notar que dada una $(p+q)$ -forma compleja α en N tal que $d\alpha = 0$, se tiene que $d\alpha_\nu = (d\alpha)_\nu = 0$, por lo que α_ν es una $(p+q)$ -forma compleja cerrada en \mathfrak{g} . Como $j_2(H_{\text{BC}}^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})) \subset \text{im } i_3$, este hecho nos lleva a que $\text{im } \tilde{i}_3 \cong \text{im } i_3$.

Paso 2 En esta etapa, se prueba el siguiente resultado auxiliar:

En las condiciones del enunciado, si ψ es una forma invariante a izquierda tal que $\bar{\partial}\psi = 0$, entonces toda solución ϕ de la ecuación $\bar{\partial}\phi = \psi$ es suma de una forma invariante a izquierda y términos $\bar{\partial}$ -exactos.

Sea ϕ una solución cualquiera de $\bar{\partial}\phi = \psi$. Observemos que en ese caso ψ es una forma $\bar{\partial}$ -exacta y por ser $\bar{\partial}\psi = 0$, ψ también es $\bar{\partial}$ -cerrada, luego $[\psi] = 0 \in H_{\bar{\partial}}^{p,q}(N) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Debe pues existir una $(p, q-1)$ -forma α en $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ tal que $\psi = \bar{\partial}\alpha$.

Pero entonces $\bar{\partial}\phi = \psi = \bar{\partial}\alpha$, lo que implica que $\bar{\partial}(\phi - \alpha) = 0$, y $\phi - \alpha$ define una clase en $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(N)$. Es decir, $[\phi - \alpha] = [\omega] \in H_{\bar{\partial}}^{p,q}(N)$ y queda $\phi - \alpha = \omega + \bar{\partial}\beta$, donde ω procede de una forma invariante a izquierda. Así:

$$\phi = \underbrace{\alpha + \omega}_{\text{invariantes}} + \underbrace{\bar{\partial}\beta}_{\bar{\partial}\text{-exacta}}.$$

Paso 3 Para terminar, comprobamos que $\frac{\text{imd} \cap \Omega^{p,q}(N)}{\text{im} \partial \bar{\partial}}$ se puede hallar usando formas invariantes a izquierda.

Sea $[\omega^{p,q}] \in \frac{\text{imd} \cap \Omega^{p,q}(N)}{\text{im} \partial \bar{\partial}}$. Entonces $\omega^{p,q} = d\eta$ mód $\text{im} \partial \bar{\partial}$, con $\eta \in \Omega^{p+q-1}(N)$.

Descomponiendo η como $\eta = \sum_{r+s=p+q-1} \eta^{r,s}$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\omega^{p,q} = d\eta = \partial\eta + \bar{\partial}\eta = \sum_{r+s=p+q-1} \partial\eta^{r,s} + \sum_{r+s=p+q-1} \bar{\partial}\eta^{r,s} \quad \text{mód } \partial\bar{\partial}.$$

Expandiendo los sumatorios y teniendo en cuenta cómo actúan ∂ y $\bar{\partial}$ se ve que la igualdad sólo se puede dar cuando se verifican las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial\eta^{p+q-1,0} = 0 \quad \text{mód im}\partial\bar{\partial}, \\ \bar{\partial}\eta^{p+q-l,l-1} + \partial\eta^{p+q-l-1,l} = 0 \quad \text{mód im}\partial\bar{\partial}, \quad l = 1, \dots, q-1, \\ \bar{\partial}\eta^{p,q-1} + \partial\eta^{p-1,q} = \omega^{p,q} \quad \text{mód im}\partial\bar{\partial}, \\ \bar{\partial}\eta^{l,p+q-l-1} + \partial\eta^{l-1,p+q-l} = 0 \quad \text{mód im}\partial\bar{\partial}, \quad l = 1, \dots, p-1, \\ \bar{\partial}\eta^{0,p+q-1} = 0 \quad \text{mód im}\partial\bar{\partial}. \end{array} \right.$$

Centrémonos en la última de ellas. Observar que:

$$\bar{\partial}\eta^{0,p+q-1} = 0 \quad \text{mód im}\partial\bar{\partial} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\partial}\eta^{0,p+q-1} = 0 + \partial\bar{\partial}\alpha,$$

para cualquier $\alpha \in \Omega^{p+q-2}(N)$, luego:

$$\bar{\partial}\eta^{0,p+q-1} = -\bar{\partial}\partial\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\partial}(\eta^{0,p+q-1} + \partial\alpha) = 0.$$

Como 0 es una forma invariante a izquierda, se puede aplicar el *Paso 2* y queda:

$$\eta^{0,p+q-1} + \partial\alpha = \beta + \bar{\partial}\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \eta^{0,p+q-1} = \beta + \bar{\partial}\gamma - \partial\alpha,$$

siendo β una forma invariante a izquierda.

Pero según el sistema dado, también se debe cumplir:

$$\bar{\partial}\eta^{1,p+q-2} + \partial\eta^{0,p+q-1} = 0 \quad \text{mód im}\partial\bar{\partial} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\partial}\eta^{1,p+q-2} = -\partial\eta^{0,p+q-1} + \partial\bar{\partial}\alpha_2,$$

con $\alpha_2 \in \Omega^{0,p+q-2}$ cualquiera. Sustituyendo $\eta^{0,p+q-1}$ por la expresión que hemos hallado tenemos:

$$\bar{\partial}\eta^{1,p+q-2} = -\partial\beta - \partial\bar{\partial}\gamma + \partial\bar{\partial}\alpha_2 = -\partial\beta + \partial\bar{\partial}(\underbrace{\alpha_2 - \gamma}_{\sigma_2}),$$

con lo cual queda la ecuación:

$$\bar{\partial}(\eta^{1,p+q-2} + \partial\sigma_2) = -\partial\beta,$$

donde $-\partial\beta$ es invariante a izquierda por serlo β . De esta manera, se puede volver a aplicar el *Paso 2* y se obtiene:

$$\eta^{1,p+q-2} + \partial\sigma_2 = \beta_2 + \bar{\partial}\gamma_2 \quad \Leftrightarrow \quad \eta^{1,p+q-2} = \beta_2 + \bar{\partial}\gamma_2 - \partial\sigma_2.$$

En general, para

$$\bar{\partial}\eta^{l,p+q-l-1} + \partial\eta^{l-1,p+q-l} = 0 \quad \text{mód im}\partial\bar{\partial}, \quad l = 2, \dots, p-1,$$

es posible reiterar el proceso, llegando a la siguiente expresión:

$$\eta^{p-1,q} = \beta_p + \bar{\partial}\gamma_p - \partial\sigma_p, \quad \text{con } \beta_p \text{ invariante a izquierda.} \quad (2.6)$$

Ahora, usando la versión conjugada del *Paso 2* procedemos de modo análogo.

A partir de la primera ecuación del sistema se tiene:

$$\partial\eta^{p+q-1,0} = 0 \quad \text{mód } \text{im}\partial\bar{\partial} \Leftrightarrow \partial\eta^{p+q-1,0} = 0 + \partial\bar{\partial}\alpha \Leftrightarrow \partial(\eta^{p+q-1,0} - \bar{\partial}\alpha) = 0,$$

con $\alpha \in \Omega^{p+q-2}$ cualquiera. Aplicando el *Paso 2* conjugado resulta que:

$$\eta^{p+q-1,0} - \bar{\partial}\alpha = \tilde{\beta} + \partial\tilde{\gamma} \Leftrightarrow \eta^{p+q-1,0} = \tilde{\beta} + \partial\tilde{\gamma} + \bar{\partial}\alpha,$$

con $\tilde{\beta}$ una forma invariante a izquierda.

Consideramos ahora: $\bar{\partial}\eta^{p+q-1,0} + \partial\eta^{p+q-2,1} = 0 \quad \text{mód } \text{im}\partial\bar{\partial}$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \partial\eta^{p+q-2,1} &= -\bar{\partial}(\tilde{\beta} + \partial\tilde{\gamma} + \bar{\partial}\alpha) + \partial\bar{\partial}\alpha_2 = -\bar{\partial}\tilde{\beta} - \bar{\partial}\partial\tilde{\gamma} + \partial\bar{\partial}\alpha_2 \\ &= -\bar{\partial}\tilde{\beta} + \partial(\bar{\partial}\tilde{\gamma} + \bar{\partial}\alpha_2) = -\bar{\partial}\tilde{\beta} + \partial\bar{\partial}(\underbrace{\tilde{\gamma} + \alpha_2}_{\tilde{\sigma}_2}), \end{aligned}$$

consiguiendo: $\partial(\eta^{p+q-2,1} - \bar{\partial}\tilde{\sigma}_2) = -\bar{\partial}\tilde{\beta}$.

Por ser $\tilde{\beta}$ invariante a izquierda, $-\bar{\partial}\tilde{\beta}$ también lo es y aplicando el *Paso 2*:

$$\eta^{p+q-2,1} - \bar{\partial}\tilde{\sigma}_2 = \tilde{\beta}_2 + \partial\tilde{\gamma}_2 \Leftrightarrow \eta^{p+q-2,1} = \tilde{\beta}_2 + \partial\tilde{\gamma}_2 + \bar{\partial}\tilde{\sigma}_2,$$

con $\tilde{\beta}_2$ invariante a izquierda.

Reiterando el proceso, se obtiene la siguiente expresión:

$$\eta^{p,q-1} = \tilde{\beta}_q + \partial\tilde{\gamma}_q + \bar{\partial}\tilde{\sigma}_q, \quad \text{con } \tilde{\beta}_q \text{ invariante a izquierda.} \quad (2.7)$$

Nos centramos ahora en la única ecuación que queda:

$$\bar{\partial}\eta^{p,q-1} + \partial\eta^{p-1,q} = \omega^{p,q} \quad \text{mód } \text{im}\partial\bar{\partial} \Leftrightarrow \bar{\partial}\eta^{p,q-1} + \partial\eta^{p-1,q} = \omega^{p,q} + \partial\bar{\partial}\alpha,$$

con $\alpha \in \Omega^{p+q-2}$ cualquiera. Teniendo en cuenta (2.6) y (2.7) llegamos a que:

$$\bar{\partial}(\tilde{\beta}_q + \partial\tilde{\gamma}_q + \bar{\partial}\tilde{\sigma}_q) + \partial(\beta_p + \bar{\partial}\gamma_p - \partial\sigma_p) = \omega^{p,q} + \partial\bar{\partial}\alpha,$$

lo que operando conduce a:

$$\bar{\partial}\tilde{\beta}_q + \partial\beta_p = \omega^{p,q} + \partial\bar{\partial}(\alpha - \gamma_p + \tilde{\gamma}_q).$$

Es decir,

$$\bar{\partial}\tilde{\beta}_q + \partial\beta_p = \omega^{p,q} \quad \text{mód } \text{im}\partial\bar{\partial},$$

con $\tilde{\beta}_q, \beta_p$ invariantes a izquierda.

Por tanto, $[\omega^{p,q}] = [\bar{\partial}\tilde{\beta}_q + \partial\beta_p] \in \frac{\text{imd} \cap \Omega^{p,q}(N)}{\text{im}\partial\bar{\partial}}$ se puede calcular a partir de formas invariantes a izquierda. \square

Haciendo uso de este resultado, en [2] se calculan las cohomologías de Aeppli y Bott-Chern para la variedad de Iwasawa y sus pequeñas deformaciones.

Estas variedades son casos particulares de estructuras complejas J sobre álgebras de Lie \mathfrak{g} nilpotentes de dimensión 6 ya que corresponden a algunas estructuras complejas sobre \mathfrak{h}_5 . Lo que vamos a hacer en el Capítulo 3 es extender el estudio de [2] a cualquier estructura compleja J sobre cualquier \mathfrak{g} , para lo cual usaremos la clasificación obtenida en [1, 7, 23] y dada en las Tablas 1 y 2.

Observemos que esto es posible porque las cohomologías de Aeppli y Bott-Chern son invariantes bajo equivalencia de la estructura compleja. Es decir, si J y J' son dos estructuras complejas equivalentes, entonces $H_{\text{BC}}^{p,q}(\mathfrak{g}, J') \cong H_{\text{BC}}^{p,q}(\mathfrak{g}, J)$ y $H_{\text{A}}^{p,q}(\mathfrak{g}, J') \cong H_{\text{A}}^{p,q}(\mathfrak{g}, J)$, para cualquier par (p, q) .

Capítulo 3

Cohomología de Bott-Chern en dimensión 6

En este capítulo se calculan los grupos de cohomología de Bott-Chern para las nil-variedades de dimensión 6 con estructura compleja invariante. Los resultados vistos en el Capítulo 2 nos permiten reducir el cálculo a nivel del álgebra de Lie subyacente \mathfrak{g} (Teorema 2.3.5) y considerar las estructuras complejas J sobre cada \mathfrak{g} salvo equivalencia (Tablas 1 y 2). Los pasos a seguir son los siguientes:

- Cálculo de las diferenciales y las formas $\partial\bar{\partial}$ -exactas.
- Estudio de las formas d -cerradas.
- Cocientar adecuadamente para hallar los generadores de cada grupo de cohomología, atendiendo a las condiciones existentes sobre los parámetros de cada álgebra para evitar repeticiones en las estructuras complejas.

Dividimos el estudio en tres familias de estructuras complejas y en la Sección 3.4 presentamos las conclusiones para cada una de las álgebras.

3.1. Familia 1

Consideramos las ecuaciones de estructura:

$$\begin{cases} d\omega^1 = 0, \\ d\omega^2 = 0, \\ d\omega^3 = \rho\omega^{12} + \omega^{1\bar{1}} + \lambda\omega^{1\bar{2}} + D\omega^{2\bar{2}}, \end{cases}$$

donde $\rho = 0, 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \geq 0$, y $D \in \mathbb{C}$ con $\Im D \geq 0$.

Notar que estas ecuaciones se obtienen a partir de las dadas en la Proposición 2.2.3 para estructuras complejas nilpotentes tomando $\varepsilon = 0$ y reescalando adecuadamente los coeficientes A, B, C y D (ver [7] para mayor información).

Todas las álgebras de Lie de partida tienen paso de nilpotencia 2 y sus estructuras complejas serán abelianas si $\rho = 0$ y no abelianas en otro caso.

Teniendo en cuenta que el operador ∂ actúa aumentando en una unidad la primera componente de la bigraduación, y $\bar{\partial}$ aumentando en uno la segunda, es evidente que para las formas de tipo $(1, 0)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \partial\omega^1 &= 0, & \bar{\partial}\omega^1 &= 0, \\ \partial\omega^2 &= 0, & \bar{\partial}\omega^2 &= 0, \\ \partial\omega^3 &= \rho\omega^{12}, & \bar{\partial}\omega^3 &= \omega^{1\bar{1}} + \lambda\omega^{1\bar{2}} + D\omega^{2\bar{2}}. \end{aligned}$$

Ahora, conjugando las ecuaciones de estructura, obtenemos:

$$\begin{aligned} d\omega^{\bar{1}} &= 0 = d\omega^{\bar{2}}, \\ d\omega^{\bar{3}} &= \underbrace{-\omega^{1\bar{1}} - \lambda\omega^{2\bar{1}} - \bar{D}\omega^{2\bar{2}}}_{(1,1)} + \underbrace{\rho\omega^{\bar{1}\bar{2}}}_{(0,2)}. \end{aligned}$$

Quedan así bigraduadas las diferenciales de las formas de tipo $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Para el resto, se aplica la fórmula general de derivación para el producto exterior de formas:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta,$$

y se utilizan los cálculos de las diferenciales anteriores.

Empezamos con las formas de tipo $(2, 0)$:

$$\begin{aligned} d\omega^{12} &= 0, \\ d\omega^{13} &= \underbrace{-D\omega^{12\bar{2}}}_{(2,1)}, \\ d\omega^{23} &= \underbrace{\omega^{12\bar{1}} + \lambda\omega^{12\bar{2}}}_{(2,1)}. \end{aligned}$$

Continuamos con las de tipo (1, 1):

$$d\omega^{1\bar{1}} = 0 = d\omega^{1\bar{2}},$$

$$d\omega^{1\bar{3}} = \underbrace{\lambda\omega^{12\bar{1}} + \bar{D}\omega^{12\bar{2}}}_{(2,1)} - \underbrace{\rho\omega^{1\bar{1}\bar{2}}}_{(1,2)},$$

$$d\omega^{2\bar{1}} = 0 = d\omega^{2\bar{2}},$$

$$d\omega^{2\bar{3}} = \underbrace{-\omega^{12\bar{1}}}_{(2,1)} - \underbrace{\rho\omega^{2\bar{1}\bar{2}}}_{(1,2)},$$

$$d\omega^{3\bar{1}} = \underbrace{\rho\omega^{12\bar{1}}}_{(2,1)} - \underbrace{\lambda\omega^{1\bar{1}\bar{2}} + D\omega^{2\bar{1}\bar{2}}}_{(1,2)},$$

$$d\omega^{3\bar{2}} = \underbrace{\rho\omega^{12\bar{2}}}_{(2,1)} + \underbrace{\omega^{1\bar{1}\bar{2}}}_{(1,2)},$$

$$d\omega^{3\bar{3}} = \underbrace{\rho\omega^{12\bar{3}} - \omega^{13\bar{1}} - \lambda\omega^{23\bar{1}} - \bar{D}\omega^{23\bar{2}}}_{(2,1)} + \underbrace{\omega^{1\bar{1}\bar{3}} + \lambda\omega^{1\bar{2}\bar{3}} + D\omega^{2\bar{2}\bar{3}} - \rho\omega^{3\bar{1}\bar{2}}}_{(1,2)}.$$

Aunque para las formas (1, 1) hemos aplicado la fórmula general en todos los casos, sería posible hallar $d\omega^{2\bar{1}}$ conjugando la expresión obtenida para $d\omega^{1\bar{2}}$, la expresión de $d\omega^{3\bar{1}}$ conjugando la de $d\omega^{1\bar{3}}$ y la de $d\omega^{3\bar{2}}$ a partir de la de $d\omega^{2\bar{3}}$.

Bien usando la conjugación o bien aplicando la fórmula general, las diferenciales de las formas de tipo (0, 2) quedan:

$$d\omega^{1\bar{2}} = 0,$$

$$d\omega^{1\bar{3}} = \underbrace{-\bar{D}\omega^{2\bar{1}\bar{2}}}_{(1,2)},$$

$$d\omega^{2\bar{3}} = \underbrace{\omega^{1\bar{1}\bar{2}} + \lambda\omega^{2\bar{1}\bar{2}}}_{(1,2)}.$$

Pasamos a continuación a calcular las diferenciales de las 3-formas.

Para las formas de tipo (3, 0):

$$d\omega^{123} = 0.$$

Para las de tipo (2, 1):

$$d\omega^{12\bar{1}} = 0 = d\omega^{12\bar{2}},$$

$$d\omega^{12\bar{3}} = \underbrace{\rho\omega^{12\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)},$$

$$d\omega^{13\bar{1}} = \underbrace{D\omega^{12\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)},$$

$$d\omega^{13\bar{2}} = 0,$$

$$d\omega^{13\bar{3}} = \underbrace{\lambda\omega^{123\bar{1}} + \bar{D}\omega^{123\bar{2}}}_{(3,1)} - \underbrace{D\omega^{12\bar{2}\bar{3}} + \rho\omega^{13\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)},$$

$$d\omega^{23\bar{1}} = \underbrace{-\lambda\omega^{12\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)},$$

$$d\omega^{23\bar{2}} = \underbrace{\omega^{12\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)},$$

$$d\omega^{23\bar{3}} = \underbrace{-\omega^{123\bar{1}}}_{(3,1)} + \underbrace{\omega^{12\bar{1}\bar{3}} + \lambda\omega^{12\bar{2}\bar{3}} + \rho\omega^{23\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)}.$$

Para las (1, 2)-formas:

$$d\omega^{1\bar{1}\bar{2}} = 0,$$

$$d\omega^{1\bar{1}\bar{3}} = \underbrace{\bar{D}\omega^{12\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)},$$

$$d\omega^{1\bar{2}\bar{3}} = \underbrace{-\lambda\omega^{12\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)},$$

$$d\omega^{2\bar{1}\bar{2}} = 0 = d\omega^{2\bar{1}\bar{3}},$$

$$d\omega^{2\bar{2}\bar{3}} = \underbrace{\omega^{12\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)},$$

$$d\omega^{3\bar{1}\bar{2}} = \underbrace{\rho\omega^{12\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)},$$

$$d\omega^{3\bar{1}\bar{3}} = \underbrace{\rho\omega^{12\bar{1}\bar{3}} - \bar{D}\omega^{23\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)} - \underbrace{\lambda\omega^{1\bar{1}\bar{2}\bar{3}} - D\omega^{2\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(1,3)},$$

$$d\omega^{3\bar{2}\bar{3}} = \underbrace{\rho\omega^{12\bar{2}\bar{3}} + \omega^{13\bar{1}\bar{2}} + \lambda\omega^{23\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)} + \underbrace{\omega^{1\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(1,3)}.$$

Finalmente, pasamos a ver qué ocurre con la forma de grado 3 bigraduada como $(0, 3)$. Para ello, basta conjugar la expresión obtenida para la diferencial de la forma de tipo $(3, 0)$ y se obtiene:

$$d\omega^{\overline{123}} = 0.$$

Centrémonos ahora en las formas de grado 4. Puesto que la base de tipo $(1, 0)$ tiene tres elementos, en el momento en que una de las componentes de la bigraduación sea cuatro o un número superior, el producto exterior tendrá factores repetidos, luego será cero. De esta manera, sólo existen tres bigraduaciones que tienen elementos no nulos y que por tanto, tiene sentido derivar: $(3, 1)$, $(2, 2)$ y $(1, 3)$.

Para las formas $(3, 1)$:

$$\begin{aligned} d\omega^{123\overline{1}} &= 0 = d\omega^{123\overline{2}}, \\ d\omega^{123\overline{3}} &= \underbrace{-\rho\omega^{123\overline{12}}}_{(3,2)}. \end{aligned}$$

Para las formas $(2, 2)$:

$$\begin{aligned} d\omega^{12\overline{12}} &= 0 = d\omega^{12\overline{13}} = d\omega^{12\overline{23}} = d\omega^{13\overline{12}}, \\ d\omega^{13\overline{13}} &= \underbrace{\overline{D}\omega^{123\overline{12}}}_{(3,2)} + \underbrace{D\omega^{12\overline{123}}}_{(2,3)}, \\ d\omega^{13\overline{23}} &= \underbrace{-\lambda\omega^{123\overline{12}}}_{(3,2)}, \\ d\omega^{23\overline{12}} &= 0, \\ d\omega^{23\overline{13}} &= \underbrace{-\lambda\omega^{12\overline{123}}}_{(2,3)}, \\ d\omega^{23\overline{23}} &= \underbrace{\omega^{123\overline{12}}}_{(3,2)} + \underbrace{\omega^{12\overline{123}}}_{(2,3)}. \end{aligned}$$

Formas de tipo $(1, 3)$:

$$\begin{aligned} d\omega^{1\overline{123}} &= 0 = d\omega^{2\overline{123}}, \\ d\omega^{3\overline{123}} &= \underbrace{\rho\omega^{12\overline{123}}}_{(2,3)}. \end{aligned}$$

Por el mismo motivo que antes, para grado 5 sólo tenemos que calcular las diferenciales de las siguientes bigraduaciones:

Formas de tipo $(3, 2)$:

$$d\omega^{123\bar{1}\bar{2}} = 0 = d\omega^{123\bar{1}\bar{3}} = d\omega^{123\bar{2}\bar{3}}.$$

Formas de tipo (2, 3):

$$d\omega^{12\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = 0 = d\omega^{13\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = d\omega^{23\bar{1}\bar{2}\bar{3}}.$$

Finalmente, para formas de tipo (3, 3):

$$d\omega^{123\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = 0.$$

Ahora, a partir de los resultados anteriores, se calculan las parciales $\partial\bar{\partial}$, que son las que se necesitarán a la hora de cocientar y hallar los grupos de cohomología de Bott-Chern.

Al hacer todos los cálculos, vemos que todas ellas se anulan a excepción de la siguiente:

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}\omega^{3\bar{3}} &= \partial(\omega^{1\bar{1}\bar{3}} + \lambda\omega^{1\bar{2}\bar{3}} + D\omega^{2\bar{2}\bar{3}} - \rho\omega^{3\bar{1}\bar{2}}) \\ &= \bar{D}\omega^{12\bar{1}\bar{2}} - \lambda^2\omega^{12\bar{1}\bar{2}} + D\omega^{12\bar{1}\bar{2}} - \rho^2\omega^{12\bar{1}\bar{2}} = (\bar{D} + D - \lambda^2 - \rho^2)\omega^{12\bar{1}\bar{2}} \\ &= (\bar{D} + D - \lambda^2 - \rho)\omega^{12\bar{1}\bar{2}}. \end{aligned}$$

Esto nos viene a indicar que únicamente la forma $\omega^{12\bar{1}\bar{2}}$ es imagen por $\partial\bar{\partial}$, aunque sólo cuando se verifique $\bar{D} + D - \lambda^2 - \rho \neq 0$.

Es decir, a la hora de tomar cocientes para definir nuestra cohomología, resulta que sólo habrá que quitar elementos del kernel en el caso de $H_{BC}^{2,2}$ (y no siempre).

Recordemos que la cohomología de Bott-Chern viene dada de la siguiente manera:

$$H_{BC}^{p,q} = \frac{\ker\{d : \Omega^{p,q} \longrightarrow \Omega^{p+1,q} \oplus \Omega^{p,q+1}\}}{\text{im}\{\partial\bar{\partial} : \Omega^{p-1,q-1} \longrightarrow \Omega^{p,q}\}}.$$

Denotemos

$$\begin{aligned} Z_{BC}^{p,q} &= \ker\{d : \Omega^{p,q} \longrightarrow \Omega^{p+1,q} \oplus \Omega^{p,q+1}\}, \\ B_{BC}^{p,q} &= \text{im}\{\partial\bar{\partial} : \Omega^{p-1,q-1} \longrightarrow \Omega^{p,q}\}. \end{aligned}$$

Ya que la diferencial exterior d es un operador real y $\overline{\partial\bar{\partial}} = \bar{\partial}\partial = -\partial\bar{\partial}$, se tiene que $Z_{BC}^{q,p} = \overline{Z_{BC}^{p,q}}$ y $B_{BC}^{q,p} = \overline{B_{BC}^{p,q}}$. Por consiguiente, basta calcular $Z_{BC}^{p,q}$ y $B_{BC}^{p,q}$ para

$$(p, q) = (1, 0), (2, 0), (1, 1), (3, 0), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 2) \text{ y } (3, 3).$$

Lo que interesa ahora es calcular $Z_{BC}^{p,q}$; es decir, las formas cerradas para cada bigrado.

– Formas cerradas de tipo (1, 0): $Z_{BC}^{1,0} = \langle \omega^1, \omega^2 \rangle$.

– Formas cerradas de tipo $(2, 0)$:

$$D \neq 0: \quad Z_{\text{BC}}^{2,0} = \langle \omega^{12} \rangle.$$

$$D = 0: \quad Z_{\text{BC}}^{2,0} = \langle \omega^{12}, \omega^{13} \rangle.$$

– Formas cerradas de tipo $(1, 1)$:

Es evidente que $\{\omega^{1\bar{1}}, \omega^{1\bar{2}}, \omega^{2\bar{1}}, \omega^{2\bar{2}}\} \subset Z_{\text{BC}}^{1,1}$. Para ver si hay algún elemento más, se toma una combinación lineal de los elementos de la base $(1, 1)$ que no son cerrados y se impone la condición de que la derivada de este nuevo elemento sea cero. Sea entonces $\omega = \alpha\omega^{1\bar{3}} + \beta\omega^{2\bar{3}} + \delta\omega^{3\bar{1}} + \gamma\omega^{3\bar{2}} + \theta\omega^{3\bar{3}}$ tal que

$$0 = d\omega = \alpha d\omega^{1\bar{3}} + \beta d\omega^{2\bar{3}} + \delta d\omega^{3\bar{1}} + \gamma d\omega^{3\bar{2}} + \theta d\omega^{3\bar{3}}.$$

Sustituyendo las derivadas de cada forma por las expresiones halladas anteriormente llegamos a que:

$$(\alpha\lambda - \beta + \delta\rho)\omega^{12\bar{1}} + (\alpha\bar{D} + \gamma\rho)\omega^{12\bar{2}} + \theta\rho\omega^{12\bar{3}} - \theta\omega^{13\bar{1}} - \theta\lambda\omega^{23\bar{1}} - \theta\bar{D}\omega^{23\bar{2}}$$

$$+ (-\alpha\rho - \delta\lambda + \gamma)\omega^{1\bar{1}2} + \theta\omega^{1\bar{1}3} + \theta\lambda\omega^{1\bar{2}3} + (-\beta\rho - \delta D)\omega^{2\bar{1}2} + \theta D\omega^{2\bar{2}3} - \theta\rho\omega^{3\bar{1}2} = 0,$$

lo que conduce al siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} \alpha\lambda - \beta + \delta\rho = 0, \\ \alpha\bar{D} + \gamma\rho = 0, \\ \theta = 0, \\ -\alpha\rho - \delta\lambda + \gamma = 0, \\ -\beta\rho - \delta D = 0. \end{cases}$$

Y sabiendo que $\theta = 0$, el problema se reduce a estudiar el rango y las soluciones del sistema lineal de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas dado por:

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & \rho & 0 \\ \bar{D} & 0 & 0 & \rho \\ -\rho & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & \rho & D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notar que:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \rho & 0 \\ \bar{D} & 0 & 0 & \rho \\ -\rho & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & \rho & D & 0 \end{pmatrix} = (\lambda^2 - D - \bar{D} - 1)\rho - D\bar{D},$$

luego si $(\lambda^2 - D - \bar{D} - 1)\rho - D\bar{D} = 0$, el rango del sistema es menor que cuatro. Hallemos todas sus soluciones según el valor de ρ :

- Si $\rho = 0$, existen dos posibilidades: que el sistema tenga rango cuatro o bien que tenga rango menor que cuatro.

- Si $D \neq 0$, el rango es exactamente cuatro, con lo cual existe una única solución que debe ser la trivial. Es decir, $Z_{BC}^{1,1}$ no tiene más elementos que los ya dichos.
- Si $D = 0$, se obtienen soluciones distintas a la trivial pues la matriz que da el sistema se reduce a:

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema y sustituyendo los valores hallados de $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ en la expresión de ω dada al principio, llegamos a que la base de formas cerradas añade dos nuevos elementos: $\omega^{1\bar{3}} + \lambda\omega^{2\bar{3}}, \omega^{3\bar{1}} + \lambda\omega^{3\bar{2}}$.

- Si $\rho = 1$, volvemos a encontrar dos posibilidades según el rango de la matriz:
 - Si $\lambda^2 - D - \bar{D} - D\bar{D} - 1 \neq 0$, existe una única solución al sistema, que es la solución trivial. Como ocurría en el primer caso, esto significa que no existen elementos “extra” en $Z_{BC}^{1,1}$.
 - Si $\lambda^2 - D - \bar{D} - D\bar{D} - 1 = 0$, el rango es menor que cuatro. Observar que:

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 & 0 \\ \bar{D} & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & D & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 & 0 \\ \bar{D} & 0 & 0 & 1 \\ -1 - \bar{D} & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & D & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 & 0 \\ \bar{D} & 0 & 0 & 1 \\ \lambda^2 - 1 - \bar{D} & -\lambda & 0 & 0 \\ -D\lambda & D + 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde debido al valor de λ^2 considerado se cumple que:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 - \bar{D} & -\lambda \\ -D\lambda & D + 1 \end{pmatrix} = (D + 1)(D + D\bar{D}) - D(D + \bar{D} + D\bar{D} + 1) = 0.$$

Luego las dos últimas filas son linealmente independientes y podemos prescindir de una de ellas. Queda así un sistema de tres ecuaciones y cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} \lambda\alpha - \beta + \delta = 0, \\ \bar{D}\alpha + \gamma = 0, \\ -D\lambda\alpha + (D + 1)\beta = 0. \end{cases}$$

A la vista de la última de ellas, para poder despejar β se necesita imponer que $D \neq -1$, lo que vuelve a generar dos casos:

- Si $D = -1$, entonces $\bar{D} = -1$ y debe ser $\lambda^2 = 0$. Se obtiene:

$$\begin{cases} -\beta + \delta = 0 \Rightarrow \delta = \beta, \\ -\alpha + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \alpha. \end{cases}$$

Hay dos nuevas formas cerradas: $\omega^{1\bar{3}} + \omega^{3\bar{2}}$, y $\omega^{2\bar{3}} + \omega^{3\bar{1}}$.

- Si $D \neq -1$, se despeja directamente en las ecuaciones dadas y se obtiene la forma: $\omega^{1\bar{3}} + \frac{D\lambda}{D+1}\omega^{2\bar{3}} - \frac{\lambda}{D+1}\omega^{3\bar{1}} - \bar{D}\omega^{3\bar{2}}$.

Teniendo en cuenta todo lo anterior podemos concluir:

$$\rho = 0, \quad D \neq 0: \quad Z_{\text{BC}}^{1,1} = \langle \omega^{1\bar{1}}, \omega^{1\bar{2}}, \omega^{2\bar{1}}, \omega^{2\bar{2}} \rangle.$$

$$\rho = 0, \quad D = 0: \quad Z_{\text{BC}}^{1,1} = \langle \omega^{1\bar{1}}, \omega^{1\bar{2}}, \omega^{2\bar{1}}, \omega^{2\bar{2}}, \omega^{1\bar{3}} + \lambda\omega^{2\bar{3}}, \omega^{3\bar{1}} + \lambda\omega^{3\bar{2}} \rangle.$$

$$\rho = 1, \quad \lambda^2 \neq D + \bar{D} + D\bar{D} + 1: \quad Z_{\text{BC}}^{1,1} = \langle \omega^{1\bar{1}}, \omega^{1\bar{2}}, \omega^{2\bar{1}}, \omega^{2\bar{2}} \rangle.$$

$$\rho = 1, \quad D = -1, \quad \lambda = 0: \quad Z_{\text{BC}}^{1,1} = \langle \omega^{1\bar{1}}, \omega^{1\bar{2}}, \omega^{2\bar{1}}, \omega^{2\bar{2}}, \omega^{1\bar{3}} + \omega^{3\bar{2}}, \omega^{2\bar{3}} + \omega^{3\bar{1}} \rangle.$$

$$\rho = 1, \quad D \neq -1, \quad \lambda^2 = D + \bar{D} + D\bar{D} + 1:$$

$$Z_{\text{BC}}^{1,1} = \langle \omega^{1\bar{1}}, \omega^{1\bar{2}}, \omega^{2\bar{1}}, \omega^{2\bar{2}}, \omega^{1\bar{3}} + \frac{D\lambda}{D+1}\omega^{2\bar{3}} - \frac{\lambda}{D+1}\omega^{3\bar{1}} - \bar{D}\omega^{3\bar{2}} \rangle.$$

$$- \text{Formas cerradas de tipo } (3, 0): \quad Z_{\text{BC}}^{3,0} = \langle \omega^{123} \rangle.$$

- Formas cerradas de tipo (2, 1):

A la vista de las diferenciales es claro que $\omega^{12\bar{1}}, \omega^{12\bar{2}}, \omega^{13\bar{2}}$ son cerradas. Hay que ver si existen más formas ω de tipo (2, 1) cumpliendo $d\omega = 0$. Para ello, se toma

$$\omega = \alpha\omega^{12\bar{3}} + \beta\omega^{13\bar{1}} + \delta\omega^{13\bar{3}} + \gamma\omega^{23\bar{1}} + \theta\omega^{23\bar{2}} + \tau\omega^{23\bar{3}}$$

y se impone $d\omega = 0$. Conseguimos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \delta\lambda - \tau = 0, \\ \delta\bar{D} = 0, \\ \alpha\rho + \beta D - \gamma\lambda + \theta = 0, \\ \tau = 0, \\ \tau\lambda - \delta D = 0, \\ \delta\rho = 0. \end{cases}$$

Sustituyendo τ por su valor se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \rho & D & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente, este sistema no tiene rango máximo luego en todos los casos podremos encontrar nuevas formas cerradas. Estudiemos las soluciones según el valor de ρ .

▪ Si $\rho = 0$ la última ecuación se puede eliminar y vuelven a aparecer dos casos:

• Si $D = 0$, entonces $\bar{D} = 0$ y el sistema se reduce al siguiente:

$$\begin{cases} \delta\lambda = 0, \\ -\gamma\lambda + \theta = 0 \Rightarrow \theta = \gamma\lambda. \end{cases}$$

◦ Si $\lambda = 0$, entonces $\theta = 0$ y las formas $\omega^{12\bar{3}}$, $\omega^{13\bar{1}}$, $\omega^{13\bar{3}}$ y $\omega^{23\bar{1}}$ son cerradas.

◦ Si $\lambda \neq 0$, entonces $\delta = 0$ y aparecen las formas: $\omega^{12\bar{3}}$, $\omega^{13\bar{1}}$, $\omega^{23\bar{1}} + \lambda\omega^{23\bar{2}}$.

• Si $D \neq 0$, necesariamente $\delta = 0$ y queda $\theta = \gamma\lambda - \beta D$, con lo cual encontramos tres nuevas formas cerradas que son $\omega^{12\bar{3}}$, $\omega^{13\bar{1}} - D\omega^{23\bar{2}}$, $\omega^{23\bar{1}} + \lambda\omega^{23\bar{2}}$.

▪ Si $\rho = 1$, entonces $\delta = 0$ y queda una única ecuación:

$$\alpha + D\beta - \lambda\gamma + \theta = 0 \Rightarrow \theta = \lambda\gamma - D\beta - \alpha.$$

De esta manera, hallamos las formas cerradas: $\omega^{12\bar{3}} - \omega^{23\bar{2}}$, $\omega^{13\bar{1}} - D\omega^{23\bar{2}}$, $\omega^{23\bar{1}} + \lambda\omega^{23\bar{2}}$.

Teniendo en cuenta lo anterior concluimos:

$$\rho = 0, \quad D = 0, \quad \lambda = 0: \quad Z_{BC}^{2,1} = \langle \omega^{12\bar{1}}, \omega^{12\bar{2}}, \omega^{12\bar{3}}, \omega^{13\bar{1}}, \omega^{13\bar{2}}, \omega^{13\bar{3}}, \omega^{23\bar{1}} \rangle.$$

$$\rho = 0, \quad D = 0, \quad \lambda \neq 0: \quad Z_{BC}^{2,1} = \langle \omega^{12\bar{1}}, \omega^{12\bar{2}}, \omega^{12\bar{3}}, \omega^{13\bar{1}}, \omega^{13\bar{2}}, \omega^{23\bar{1}} + \lambda\omega^{23\bar{2}} \rangle.$$

$$\rho = 0, \quad D \neq 0: \quad Z_{BC}^{2,1} = \langle \omega^{12\bar{1}}, \omega^{12\bar{2}}, \omega^{12\bar{3}}, \omega^{13\bar{2}}, \omega^{13\bar{1}} - D\omega^{23\bar{2}}, \omega^{23\bar{1}} + \lambda\omega^{23\bar{2}} \rangle.$$

$$\rho = 1: \quad Z_{BC}^{2,1} = \langle \omega^{12\bar{1}}, \omega^{12\bar{2}}, \omega^{13\bar{2}}, \omega^{12\bar{3}} - \omega^{23\bar{2}}, \omega^{13\bar{1}} - D\omega^{23\bar{2}}, \omega^{23\bar{1}} + \lambda\omega^{23\bar{2}} \rangle.$$

– Formas cerradas de tipo (3, 1):

$$\rho = 0: \quad Z_{BC}^{3,1} = \langle \omega^{123\bar{1}}, \omega^{123\bar{2}}, \omega^{123\bar{3}} \rangle.$$

$$\rho = 1: \quad Z_{BC}^{3,1} = \langle \omega^{123\bar{1}}, \omega^{123\bar{2}} \rangle.$$

– Formas cerradas de tipo (2, 2):

A la vista de las diferenciales, $\{\omega^{12\bar{1}\bar{2}}, \omega^{12\bar{1}\bar{3}}, \omega^{12\bar{2}\bar{3}}, \omega^{13\bar{1}\bar{2}}, \omega^{23\bar{1}\bar{2}}\} \subset Z_{BC}^{2,2}$. De nuevo, se plantea el problema de encontrar formas, en este caso de tipo (2, 2), que sean linealmente independientes con las anteriores y cerradas.

Tomamos $\omega = \alpha\omega^{13\bar{1}\bar{3}} + \beta\omega^{13\bar{2}\bar{3}} + \delta\omega^{23\bar{1}\bar{3}} + \gamma\omega^{23\bar{2}\bar{3}}$ e imponemos $d\omega = 0$, obteniendo el siguiente sistema lineal de dos ecuaciones y cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} \alpha\bar{D} - \beta\lambda + \gamma = 0 & \Rightarrow \beta\lambda = \alpha\bar{D} + \gamma, \\ \alpha D - \delta\lambda + \gamma = 0 & \Rightarrow \delta\lambda = \alpha D + \gamma. \end{cases}$$

Para poder despejar β y δ es necesario que $\lambda \neq 0$, lo que induce a distinguir dos casos:

- Suponemos que $\lambda = 0$. Entonces el sistema se reduce a dos incógnitas α y γ (las otras dos serán libres), y la matriz asociada al mismo será:

$$\begin{pmatrix} \bar{D} & 1 \\ D & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \bar{D} & 1 \\ D - \bar{D} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si $D \in \mathbb{R}$, entonces $\bar{D} = D$ y queda una única ecuación $\alpha D + \gamma = 0$ que lleva a que $\gamma = -\alpha D$. De esta manera, las formas $\omega^{13\bar{2}\bar{3}}$, $\omega^{23\bar{1}\bar{3}}$ y $\omega^{13\bar{1}\bar{3}} - D\omega^{23\bar{2}\bar{3}}$ resultan ser cerradas.
- Si $D \notin \mathbb{R}$, entonces $D - \bar{D} \neq 0$ y debe ser $\alpha = 0 = \gamma$. Tenemos: $\omega^{13\bar{2}\bar{3}}$, $\omega^{23\bar{1}\bar{3}}$.

- Para $\lambda \neq 0$ es posible despejar directamente en el sistema dado, en cuyo caso aparecen las formas cerradas: $\omega^{13\bar{1}3} + \frac{\bar{D}}{\lambda}\omega^{13\bar{2}3} + \frac{D}{\lambda}\omega^{23\bar{1}3}$ y $\frac{1}{\lambda}\omega^{13\bar{2}3} + \frac{1}{\lambda}\omega^{23\bar{1}3} + \omega^{23\bar{2}3}$.

Finalmente obtenemos:

$$\lambda = 0, \quad D \in \mathbb{R}: \quad Z_{\text{BC}}^{2,2} = \langle \omega^{12\bar{1}2}, \omega^{12\bar{1}3}, \omega^{12\bar{2}3}, \omega^{13\bar{1}2}, \omega^{13\bar{2}3}, \omega^{23\bar{1}2}, \omega^{23\bar{1}3}, \omega^{13\bar{1}3} - \bar{D}\omega^{23\bar{2}3} \rangle.$$

$$\lambda = 0, \quad D \notin \mathbb{R}: \quad Z_{\text{BC}}^{2,2} = \langle \omega^{12\bar{1}2}, \omega^{12\bar{1}3}, \omega^{12\bar{2}3}, \omega^{13\bar{1}2}, \omega^{13\bar{2}3}, \omega^{23\bar{1}2}, \omega^{23\bar{1}3} \rangle.$$

$$\lambda \neq 0: \quad Z_{\text{BC}}^{2,2} = \langle \omega^{12\bar{1}2}, \omega^{12\bar{1}3}, \omega^{12\bar{2}3}, \omega^{13\bar{1}2}, \omega^{23\bar{1}2}, \omega^{13\bar{1}3} + \frac{\bar{D}}{\lambda}\omega^{13\bar{2}3} + \frac{D}{\lambda}\omega^{23\bar{1}3}, \\ \frac{1}{\lambda}\omega^{13\bar{2}3} + \frac{1}{\lambda}\omega^{23\bar{1}3} + \omega^{23\bar{2}3} \rangle.$$

– Formas cerradas de tipo (1, 3):

$$\rho = 0: \quad Z_{\text{BC}}^{1,3} = \langle \omega^{1\bar{1}23}, \omega^{2\bar{1}23}, \omega^{3\bar{1}23} \rangle.$$

$$\rho = 1: \quad Z_{\text{BC}}^{1,3} = \langle \omega^{1\bar{1}23}, \omega^{2\bar{1}23} \rangle.$$

– Formas cerradas de tipo (3, 2): $Z_{\text{BC}}^{3,2} = \langle \omega^{123\bar{1}2}, \omega^{123\bar{1}3}, \omega^{123\bar{2}3} \rangle.$

– Formas cerradas de tipo (3, 3): $Z_{\text{BC}}^{3,3} = \langle \omega^{123\bar{1}23} \rangle.$

Con todo lo anterior, ya podemos calcular la cohomología de Bott-Chern de la Familia 1. No obstante, conviene notar que basta considerar los valores de los parámetros ρ , λ y D que aparecen en la Tabla 1, puesto que para el resto de valores las estructuras complejas obtenidas son isomorfas a alguna de las que aparecen en la tabla.

TABLA A

	ρ	λ	D	\mathfrak{g}
ABELIANAS	0	0	0	\mathfrak{h}_8
	0	0	± 1	\mathfrak{h}_3
	0	0	$\Im m D = 1$	\mathfrak{h}_2
	0	1	$D \in [0, \frac{1}{4})$	\mathfrak{h}_5
	0	1	$\frac{1}{4}$	\mathfrak{h}_4
NO ABELIANAS	1	1	0	\mathfrak{h}_6
	1	1	$D \in \mathbb{R} - \{0\}$	\mathfrak{h}_4
	1	1	$\Im m D > 0$	\mathfrak{h}_2
	1	0	$\Im m D \geq 0$ $4(\Im m D)^2 < 1 + 4\Re e D$	\mathfrak{h}_5
		$0 < \lambda^2 < \frac{1}{2}$	$0 \leq \Im m D < \frac{\lambda^2}{2}$ $\Re e D = 0$	
		$\frac{1}{2} \leq \lambda^2 < 1$	$0 \leq \Im m D < \frac{1-\lambda^2}{2}$ $\Re e D = 0$	
		$\lambda^2 > 1$	$0 \leq \Im m D < \frac{\lambda^2-1}{2}$ $\Re e D = 0$	

Además, conviene notar que debido a la Proposición 1.3.1 basta calcular los grupos de cohomología que aparecen a continuación.

Para todas las estructuras que aparecen en la tabla anterior:

$$H_{BC}^{1,0} = \langle [\omega^1], [\omega^2] \rangle.$$

Sin embargo, si pasamos al bigrado $(2, 0)$:

$$H_{BC}^{2,0} = \langle [\omega^{12}], \underbrace{[\omega^{13}]}_{\text{aparece sólo si } D=0} \rangle.$$

La cosa se complica bastante más al pasar al bigrado $(1, 1)$:

- Las álgebras de la tabla que cumplen $\rho = 0$ y $D \neq 0$ son: \mathfrak{h}_2 , \mathfrak{h}_3 y \mathfrak{h}_4 con J Abeliana y \mathfrak{h}_5 con J Abeliana dada por $D \in (0, \frac{1}{4})$. Por tanto, en estos casos:

$$H_{BC}^{1,1} = \langle [\omega^{1\bar{1}}], [\omega^{1\bar{2}}], [\omega^{2\bar{1}}], [\omega^{2\bar{2}}] \rangle.$$

- Para $\rho = 0$ y $D = 0$, se tienen \mathfrak{h}_8 y \mathfrak{h}_5 con J Abeliana (el caso que quedaba, que es $\rho = D = 0$), para las cuales $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, respectivamente. Así, el grupo de cohomología $(1, 1)$ queda:

$$H_{BC}^{1,1} = \langle [\omega^{1\bar{1}}], [\omega^{1\bar{2}}], [\omega^{2\bar{1}}], [\omega^{2\bar{2}}], [\omega^{1\bar{3}} + \lambda\omega^{2\bar{3}}], [\omega^{3\bar{1}} + \lambda\omega^{3\bar{2}}] \rangle.$$

- Para $\rho = 1$, $D = -1$, $\lambda = 0$, no existen álgebras de Lie nilpotentes de dimensión real 6.

Queda por estudiar cuáles de las álgebras de la Tabla A con $\rho = 1$ verifican la condición

$$\lambda^2 = D + \bar{D} + D\bar{D} + 1 \tag{3.1}$$

y cuáles no. De esta forma, se puede averiguar en cuál de los dos casos que nos faltan para el bigrado $(1, 1)$ está cada una, y con ello, su grupo de cohomología:

- Empezamos centrándonos en \mathfrak{h}_2 con estructura compleja J no Abeliana. Se cumple que $1 = 2\Re D + |D|^2 + 1$, luego $|D|^2 = -2\Re D$. Tomando $D = x + iy$ se tiene $x^2 + y^2 + 2x = 0$, lo cual es cierto para $D = (-1 \pm \sqrt{1 - y^2}) + iy$ con $y \in (0, 1)$ (recordar que necesitamos $y > 0$). En otro caso, no se cumplirá (3.1).
- Pasamos ahora a \mathfrak{h}_4 con J no Abeliana. Como $\lambda = 1$ y $D \in \mathbb{R} - \{0\}$ la condición (3.1) se puede reescribir como $1 = 2D + D^2 + 1$ y el único D para el cual se cumple es $D = -2$ (pues el caso $D = 0$ no es posible).
- Para \mathfrak{h}_5 con J no Abeliana, se distinguen varios casos:
 - Si $\lambda = 0$, escribiendo $D = x + iy$, la condición (3.1) queda $x^2 + 2x + y^2 + 1 = 0$. Resolviendo esta ecuación en función de x se obtiene $x = -1 \pm iy$, luego debe ser $y = 0$ y $x = -1$. Sin embargo, la Tabla 1 dice que en este caso la parte real y la parte imaginaria de D deben cumplir $x > -\frac{1}{4}$, luego (3.1) nunca puede verificarse.

- Si $\lambda \neq 0$, la parte real de D siempre es cero, luego debe ser $D = iy$. Sustituyendo en (3.1) obtenemos $\lambda^2 = y^2 + 1$, lo cual sólo puede ser posible para $\lambda > 1$. En tal caso, debido a la condición que aparece en la tabla, se tiene que $0 \leq y < \frac{\lambda^2 - 1}{2}$, lo que lleva a que $y > 0$ y $2y < \lambda^2 - 1 = y^2 \Leftrightarrow 0 < y^2 - 2y \Leftrightarrow y > 2$. Expresando todo esto en términos de λ resulta que para que se cumpla (3.1) debe ser $D = i\sqrt{\lambda^2 - 1}$ y $\lambda^2 > 5$.

- Consideramos ahora \mathfrak{h}_6 . Es evidente que $1 = \lambda^2 = 0 + 1$, luego siempre se cumple la condición (3.1).

Resumiendo:

- Álgebra de Lie \mathfrak{h}_2 :

$$H_{BC}^{1,1} = \langle [\omega^{1\bar{1}}], [\omega^{1\bar{2}}], [\omega^{2\bar{1}}], [\omega^{2\bar{2}}], \underbrace{[\omega^{1\bar{3}} + \frac{D}{D+1}\omega^{2\bar{3}} - \frac{1}{D+1}\omega^{3\bar{1}} - \bar{D}\omega^{3\bar{2}}]}_{\text{sólo si } \rho=\lambda=1, D=(-1 \pm \sqrt{1-y^2})+iy, y>0} \rangle.$$

- Álgebra de Lie \mathfrak{h}_3 :

$$H_{BC}^{1,1} = \langle [\omega^{1\bar{1}}], [\omega^{1\bar{2}}], [\omega^{2\bar{1}}], [\omega^{2\bar{2}}] \rangle.$$

- Álgebra de Lie \mathfrak{h}_4 :

$$H_{BC}^{1,1} = \langle [\omega^{1\bar{1}}], [\omega^{1\bar{2}}], [\omega^{2\bar{1}}], [\omega^{2\bar{2}}], \underbrace{[\omega^{1\bar{3}} + 2\omega^{2\bar{3}} + \omega^{3\bar{1}} + 2\omega^{3\bar{2}}]}_{\text{sólo si } \rho=\lambda=1, D=-2} \rangle.$$

- Álgebra de Lie \mathfrak{h}_5 :

- Caso abeliano:

$$H_{BC}^{1,1} = \langle [\omega^{1\bar{1}}], [\omega^{1\bar{2}}], [\omega^{2\bar{1}}], [\omega^{2\bar{2}}], \underbrace{[\omega^{1\bar{3}} + \omega^{2\bar{3}}], [\omega^{3\bar{1}} + \omega^{3\bar{2}}]}_{\text{sólo si } D=0} \rangle.$$

- Caso no abeliano:

$$H_{BC}^{1,1} = \langle [\omega^{1\bar{1}}], [\omega^{1\bar{2}}], [\omega^{2\bar{1}}], [\omega^{2\bar{2}}], \underbrace{[\omega^{1\bar{3}} + \frac{D\lambda}{D+1}\omega^{2\bar{3}} - \frac{\lambda}{D+1}\omega^{3\bar{1}} - \bar{D}\omega^{3\bar{2}}]}_{\text{sólo si } D=i\sqrt{\lambda^2-1}, \lambda^2>5} \rangle.$$

- Álgebra de Lie \mathfrak{h}_6 :

$$H_{BC}^{1,1} = \langle [\omega^{1\bar{1}}], [\omega^{1\bar{2}}], [\omega^{2\bar{1}}], [\omega^{2\bar{2}}], [\omega^{1\bar{3}} - \omega^{3\bar{1}}] \rangle.$$

- Álgebra de Lie \mathfrak{h}_8 :

$$H_{BC}^{1,1} = \langle [\omega^{1\bar{1}}], [\omega^{1\bar{2}}], [\omega^{1\bar{3}}], [\omega^{2\bar{1}}], [\omega^{2\bar{2}}], [\omega^{3\bar{1}}] \rangle.$$

A continuación se tiene:

$$H_{BC}^{3,0} = \langle [\omega^{123\bar{1}}] \rangle,$$

$$H_{BC}^{2,1} = \langle [\omega^{12\bar{1}}], [\omega^{12\bar{2}}], [\omega^{13\bar{2}}], [\omega^{23\bar{1}} + \lambda \omega^{23\bar{2}}], [\omega^{12\bar{3}} - \rho \omega^{23\bar{2}}], [\omega^{13\bar{1}} - D \omega^{23\bar{2}}], \underbrace{[\omega^{133\bar{1}}]}_{\text{sólo para } \mathfrak{h}_8} \rangle,$$

$$H_{BC}^{3,1} = \langle [\omega^{123\bar{1}}], [\omega^{123\bar{2}}], \underbrace{[\omega^{1233\bar{1}}]}_{\text{si } \rho=0} \rangle.$$

Centremos ahora nuestra atención en el caso de $H_{BC}^{2,2}$. Según hemos visto anteriormente, la forma $\omega^{12\bar{1}\bar{2}}$ es exacta cuando $\lambda^2 \neq 2\Re D - \rho$. Necesitaremos pues averiguar en qué casos se cumple esta condición, para tener en cuenta las variaciones que esto pueda producir en la cohomología.

- En \mathfrak{h}_2 existen dos casos, ya que esta álgebra admite J 's Abelianas y J 's no Abelianas.
 - Si J es Abeliana, tenemos $\rho = 0 = \lambda$ e $\Im D = 1$. Si $\Re D \neq 0$ resulta que $\omega^{12\bar{1}\bar{2}}$ es exacta y en caso contrario, no lo es. Esto indica que:

$$H_{BC}^{2,2} = \langle \underbrace{[\omega^{12\bar{1}\bar{2}}]}_{\text{sólo si } D=i}, [\omega^{12\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{12\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{13\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{23\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{23\bar{2}\bar{3}}] \rangle.$$

- Si J es no Abeliana, $\rho = 1 = \lambda$ e $\Im D > 0$, y entonces la forma $\omega^{12\bar{1}\bar{2}}$ no define una clase de cohomología cuando $\Re D \neq 1$. De esta manera:

$$H_{BC}^{2,2} = \langle \underbrace{[\omega^{12\bar{1}\bar{2}}]}_{\text{sólo si } \Re D=1}, [\omega^{12\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{12\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{23\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{13\bar{2}\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}\bar{3}} + \omega^{23\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{3}} + \bar{D} \omega^{13\bar{2}\bar{3}} + D \omega^{23\bar{1}\bar{3}}] \rangle.$$

- Si ahora consideramos \mathfrak{h}_3 , tenemos que $\lambda = 0 = \rho$ y $D = \pm 1$. La igualdad nunca se cumple.

$$H_{BC}^{2,2} = \langle [\omega^{12\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{12\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{13\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{23\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{23\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{3}} \mp \omega^{23\bar{2}\bar{3}}] \rangle.$$

- Para \mathfrak{h}_4 hay dos posibilidades según J sea Abelianas o no lo sea:
 - o Supongamos que J es Abelianas. Entonces $\rho = 0, \lambda = 1$ y $D = \frac{1}{4}$, con lo cual tenemos que $1 = \lambda^2 \neq 2\Re D - \rho = 1/2$. La forma siempre es exacta y queda:

$$H_{BC}^{2,2} = \langle [\omega^{12\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{12\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{23\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{3}} - \frac{1}{4}\omega^{23\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{2}\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}\bar{3}} + \omega^{23\bar{2}\bar{3}}] \rangle.$$

- o Si J es no Abelianas, $\rho = 1 = \lambda$ y $D \in \mathbb{R} - \{0\}$ luego la forma es exacta para $D \neq 1$.

$$H_{BC}^{2,2} = \langle \underbrace{[\omega^{12\bar{1}\bar{2}}]}_{\text{sólo si } D=1}, [\omega^{12\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{12\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{23\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{13\bar{2}\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}\bar{3}} + \omega^{23\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{3}} - D\omega^{23\bar{2}\bar{3}}] \rangle.$$

- Veamos ahora qué ocurre con \mathfrak{h}_5 según la Abelianidad de J .
 - o Si J es Abelianas, $\rho = 0, \lambda = 1$ y $D \in [0, \frac{1}{4}]$. Resulta que la forma es exacta para $D \neq \frac{1}{2}$, lo cual siempre ocurre en este caso. Así:

$$H_{BC}^{2,2} = \langle [\omega^{12\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{12\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{23\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{3}} - D\omega^{23\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{2}\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}\bar{3}} + \omega^{23\bar{2}\bar{3}}] \rangle.$$

- o En el caso de que J no sea Abelianas ($\rho = 1$), tenemos varias opciones. Para poder discutir las, supongamos que $D = x + iy$.

Si $\lambda = 0$, observemos que $\omega^{12\bar{1}\bar{2}}$ es exacta siempre que $0 \neq 2x - 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$. Pero además, debido a la discusión que hemos llevado a cabo para las formas cerradas, la cohomología también variará dependiendo de si D es real o no. De hecho, si $\Im D = 0$ aparecerá una nueva clase. Notemos además que en ese caso la parte real de D deberá cumplir que $0 < 1 + 4x \Leftrightarrow \frac{-1}{4} < x = \Re D$. Con todo lo anterior, queda:

$$H_{BC}^{2,2} = \langle \underbrace{[\omega^{12\bar{1}\bar{2}}]}_{\text{sólo si } \Re D = \frac{1}{2}}, [\omega^{12\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{12\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{13\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{23\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{23\bar{1}\bar{3}}], \underbrace{[\omega^{13\bar{1}\bar{3}} - D\omega^{23\bar{2}\bar{3}}]}_{\text{sólo si } \Im D = 0, \Re D > \frac{-1}{4}} \rangle.$$

Si $\lambda \neq 0$, sabemos que $\Re D = 0$ por lo que la condición a verificar para decidir en qué casos $\omega^{12\bar{1}\bar{2}}$ es exacta es: $\lambda^2 \neq -\rho = -1$. Como λ sólo toma valores reales, esto siempre se cumple y la clase $[\omega^{12\bar{1}\bar{2}}]$ no aparecerá en la cohomología. Se obtiene:

$$H_{BC}^{2,2} = \langle [\omega^{12\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{12\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{23\bar{1}\bar{2}}], [\lambda\omega^{13\bar{1}\bar{3}} + \bar{D}\omega^{13\bar{2}\bar{3}} + D\omega^{23\bar{1}\bar{3}}], \\ [\omega^{13\bar{2}\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}\bar{3}} + \lambda\omega^{23\bar{2}\bar{3}}] \rangle.$$

- Ahora consideramos \mathfrak{h}_6 , para la cual $\rho = 1 = \lambda$ y $D = 0$. Claramente $1 = \lambda^2 \neq 2D - \rho = -1$, luego $\omega^{12\bar{1}\bar{2}}$ es exacta.

$$H_{BC}^{2,2} = \langle [\omega^{12\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{12\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{23\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{13\bar{2}\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}\bar{3}} + \omega^{23\bar{2}\bar{3}}] \rangle.$$

- Para \mathfrak{h}_8 tenemos que $\lambda = 0 = \rho = D$, luego $\omega^{12\bar{1}\bar{2}}$ no es exacta y nos queda el grupo de cohomología:

$$H_{BC}^{2,2} = \langle [\omega^{12\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{12\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{12\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{23\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{13\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{23\bar{1}\bar{3}}] \rangle.$$

Para finalizar, en todos los casos siempre se tiene:

$$H_{BC}^{3,2} = \langle [\omega^{123\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{123\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{123\bar{2}\bar{3}}] \rangle,$$

$$H_{BC}^{3,3} = \langle [\omega^{123\bar{1}\bar{2}\bar{3}}] \rangle.$$

3.2. Familia 2

Consideramos las ecuaciones de estructura siguientes:

$$\begin{cases} d\omega^1 = 0, \\ d\omega^2 = \omega^{1\bar{1}}, \\ d\omega^3 = \rho\omega^{12} + B\omega^{1\bar{2}} + c\omega^{2\bar{1}}, \end{cases}$$

donde $\rho = 0, 1$, $B \in \mathbb{C}$ y $c \in \mathbb{R}$ con $c \geq 0$. Además, $(\rho, B, c) \neq (0, 0, 0)$.

En este caso se toman las ecuaciones dadas en la Proposición 2.2.3 para estructuras complejas nilpotentes pero haciendo $\varepsilon = 1$. La reducciones posteriores aparecen explicadas en [7].

Todas las álgebras de Lie sobre las cuales aparecen definidas estas estructuras complejas son nilpotentes de paso 3 a excepción de \mathfrak{h}_7 , que tiene paso 2. Como antes, ρ es igual a cero para las estructuras abelianas y a uno para las que no lo son.

A la vista de las ecuaciones, resulta claro que:

$$\begin{aligned}\partial\omega^1 &= 0, & \bar{\partial}\omega^1 &= 0, \\ \partial\omega^2 &= 0, & \bar{\partial}\omega^2 &= \omega^{1\bar{1}}, \\ \partial\omega^3 &= \rho\omega^{1\bar{2}}, & \bar{\partial}\omega^3 &= B\omega^{1\bar{2}} + c\omega^{2\bar{1}}.\end{aligned}$$

Conjugando las ecuaciones de estructura se obtienen las diferenciales de las formas bigraduadas como $(0, 1)$.

$$\begin{aligned}d\omega^{\bar{1}} &= 0, \\ d\omega^{\bar{2}} &= \underbrace{-\omega^{1\bar{1}}}_{(1,1)}, \\ d\omega^{\bar{3}} &= \underbrace{-c\omega^{1\bar{2}} - \bar{B}\omega^{2\bar{1}}}_{(1,1)} + \underbrace{\rho\omega^{\bar{1}\bar{2}}}_{(0,2)}.\end{aligned}$$

Como ocurría para la Familia 1, aplicando la fórmula de la diferencial del producto exterior de formas, se hallan el resto de diferenciales para las distintas bigraduaciones.

Formas de tipo $(2, 0)$:

$$\begin{aligned}d\omega^{12} &= 0, \\ d\omega^{13} &= \underbrace{-c\omega^{12\bar{1}}}_{(2,1)}, \\ d\omega^{23} &= \underbrace{B\omega^{12\bar{2}} - \omega^{13\bar{1}}}_{(2,1)}.\end{aligned}$$

Para las formas de tipo $(1, 1)$ se tiene:

$$\begin{aligned}d\omega^{1\bar{1}} &= 0 = d\omega^{1\bar{2}}, \\ d\omega^{1\bar{3}} &= \underbrace{\bar{B}\omega^{12\bar{1}}}_{(2,1)} - \underbrace{\rho\omega^{1\bar{1}\bar{2}}}_{(1,2)}, \\ d\omega^{2\bar{1}} &= 0, \\ d\omega^{2\bar{2}} &= \underbrace{-\omega^{12\bar{1}}}_{(2,1)} + \underbrace{\omega^{1\bar{1}\bar{2}}}_{(1,2)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega^{2\bar{3}} &= \underbrace{-c\omega^{12\bar{2}}}_{(2,1)} + \underbrace{\omega^{1\bar{1}\bar{3}} - \rho\omega^{2\bar{1}\bar{2}}}_{(1,2)}, \\
d\omega^{3\bar{1}} &= \underbrace{\rho\omega^{12\bar{1}}}_{(2,1)} - \underbrace{B\omega^{1\bar{1}\bar{2}}}_{(1,2)}, \\
d\omega^{3\bar{2}} &= \underbrace{\rho\omega^{12\bar{2}} - \omega^{13\bar{1}}}_{(2,1)} + \underbrace{c\omega^{2\bar{1}\bar{2}}}_{(1,2)}, \\
d\omega^{3\bar{3}} &= \underbrace{\rho\omega^{12\bar{3}} - c\omega^{13\bar{2}} - \bar{B}\omega^{23\bar{1}}}_{(2,1)} + \underbrace{B\omega^{12\bar{3}} + c\omega^{2\bar{1}\bar{3}} - \rho\omega^{3\bar{1}\bar{2}}}_{(1,2)}.
\end{aligned}$$

Conjugando las diferenciales obtenidas para las formas de tipo $(2, 0)$, se obtienen las de $(0, 2)$:

$$\begin{aligned}
d\omega^{\bar{1}\bar{2}} &= 0, \\
d\omega^{\bar{1}\bar{3}} &= \underbrace{-c\omega^{1\bar{1}\bar{2}}}_{(1,2)}, \\
d\omega^{\bar{2}\bar{3}} &= \underbrace{-\omega^{1\bar{1}\bar{3}} + \bar{B}\omega^{2\bar{1}\bar{2}}}_{(1,2)}.
\end{aligned}$$

Ahora pasamos a las formas de grado 3. Para el bigrado $(3, 0)$:

$$d\omega^{123} = 0.$$

Se sigue con las formas de tipo $(2, 1)$:

$$\begin{aligned}
d\omega^{12\bar{1}} &= 0 = d\omega^{12\bar{2}}, \\
d\omega^{12\bar{3}} &= \underbrace{\rho\omega^{12\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)}, \\
d\omega^{13\bar{1}} &= 0, \\
d\omega^{13\bar{2}} &= \underbrace{-c\omega^{12\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)}, \\
d\omega^{13\bar{3}} &= \underbrace{\bar{B}\omega^{123\bar{1}}}_{(3,1)} - \underbrace{c\omega^{12\bar{1}\bar{3}} + \rho\omega^{13\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)}, \\
d\omega^{23\bar{1}} &= \underbrace{-B\omega^{12\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)},
\end{aligned}$$

$$d\omega^{23\bar{2}} = \underbrace{-\omega^{123\bar{1}}}_{(3,1)} \underbrace{-\omega^{13\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)},$$

$$d\omega^{23\bar{3}} = \underbrace{-c\omega^{123\bar{2}}}_{(3,1)} + \underbrace{B\omega^{12\bar{2}\bar{3}} - \omega^{13\bar{1}\bar{3}} + \rho\omega^{23\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)}.$$

Formas de tipo (1, 2):

$$d\omega^{1\bar{1}\bar{2}} = 0 = d\omega^{1\bar{1}\bar{3}},$$

$$d\omega^{1\bar{2}\bar{3}} = \underbrace{-\bar{B}\omega^{12\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)},$$

$$d\omega^{2\bar{1}\bar{2}} = 0,$$

$$d\omega^{2\bar{1}\bar{3}} = \underbrace{-c\omega^{12\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)},$$

$$d\omega^{2\bar{2}\bar{3}} = \underbrace{-\omega^{12\bar{1}\bar{3}}}_{(2,2)} + \underbrace{\omega^{1\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(1,3)},$$

$$d\omega^{3\bar{1}\bar{2}} = \underbrace{\rho\omega^{12\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)},$$

$$d\omega^{3\bar{1}\bar{3}} = \underbrace{\rho\omega^{12\bar{1}\bar{3}} - c\omega^{13\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)} \underbrace{-B\omega^{1\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(1,3)},$$

$$d\omega^{3\bar{2}\bar{3}} = \underbrace{\rho\omega^{12\bar{2}\bar{3}} - \omega^{13\bar{1}\bar{3}} + \bar{B}\omega^{23\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)} + \underbrace{c\omega^{2\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(1,3)}.$$

Conjugando la diferencial de la forma de tipo (3, 0), se ve claramente que la de la forma (0, 3) queda:

$$d\omega^{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = 0.$$

Para el bigrado (3, 1):

$$d\omega^{123\bar{1}} = 0 = d\omega^{123\bar{2}},$$

$$d\omega^{123\bar{3}} = \underbrace{-\rho\omega^{123\bar{1}\bar{2}}}_{(3,2)}.$$

Para las formas de tipo (2, 2):

$$d\omega^{12\bar{1}\bar{2}} = 0 = d\omega^{12\bar{1}\bar{3}} = d\omega^{12\bar{2}\bar{3}} = d\omega^{13\bar{1}\bar{2}} = d\omega^{13\bar{1}\bar{3}},$$

$$d\omega^{13\bar{2}\bar{3}} = \underbrace{-\bar{B}\omega^{123\bar{1}\bar{2}}}_{(3,2)} - \underbrace{c\omega^{12\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(2,3)},$$

$$d\omega^{23\bar{1}\bar{2}} = 0,$$

$$d\omega^{23\bar{1}\bar{3}} = \underbrace{-c\omega^{123\bar{1}\bar{2}}}_{(3,2)} - \underbrace{B\omega^{12\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(2,3)},$$

$$d\omega^{23\bar{2}\bar{3}} = \underbrace{-\omega^{123\bar{1}\bar{3}}}_{(3,2)} - \underbrace{\omega^{13\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(2,3)}.$$

Para las formas de tipo (1, 3):

$$d\omega^{1\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = 0 = d\omega^{2\bar{1}\bar{2}\bar{3}},$$

$$d\omega^{3\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = \underbrace{\rho\omega^{12\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(2,3)}.$$

Formas de tipo (3, 2):

$$d\omega^{123\bar{1}\bar{2}} = 0 = d\omega^{123\bar{1}\bar{3}} = d\omega^{123\bar{2}\bar{3}}.$$

Formas de tipo (2, 3):

$$d\omega^{12\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = 0 = d\omega^{13\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = d\omega^{23\bar{1}\bar{2}\bar{3}}.$$

Finalmente, para la única forma que hay en la base de formas de tipo (3, 3):

$$d\omega^{123\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = 0.$$

Faltan por hallar las diferenciales cruzadas, es decir, las $\partial\bar{\partial}$. Haciendo los cálculos, se ve que todas ellas se anulan a excepción de la siguiente:

$$\partial\bar{\partial}\omega^{3\bar{3}} = \partial(B\omega^{1\bar{2}\bar{3}} + c\omega^{2\bar{1}\bar{3}} - \rho\omega^{3\bar{1}\bar{2}}) = -B\bar{B}\omega^{12\bar{1}\bar{2}} - c^2\omega^{12\bar{1}\bar{2}} - \rho^2\omega^{12\bar{1}\bar{2}} = -(B\bar{B} + c^2 + \rho)\omega^{12\bar{1}\bar{2}}.$$

Como $(\rho, B, c) \neq (0, 0, 0)$, debe ser $B\bar{B} + c^2 + \rho \neq 0$ y por tanto la forma $\omega^{12\bar{1}\bar{2}}$ siempre es exacta, lo que habrá que tener en cuenta a la hora de cocientar para hallar las clases del grupo de cohomología $H_{BC}^{2,2}$.

Ahora se necesitan calcular las formas cerradas para cada bigrado, es decir, aquellas para las cuales $d\omega = 0$. Usando la misma notación que para la Familia 1 se tiene:

– Formas cerradas de tipo (1, 0): $Z_{BC}^{1,0} = \langle \omega^1 \rangle.$

– Formas cerradas de tipo (2, 0):

Es claro que $\omega^{12} \in Z_{BC}^{2,0}$. Para ver si hay algún elemento más se toma $\omega = \alpha\omega^{13} + \beta\omega^{23}$ y se impone $0 = d\omega = \alpha d\omega^{13} + \beta d\omega^{23}$, consiguiendo el sistema:

$$\begin{cases} -\alpha c = 0, \\ \beta B = 0, \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Observemos que éste conduce a la siguiente conclusión:

$$\begin{aligned} c \neq 0: & \quad Z_{BC}^{2,0} = \langle \omega^{12} \rangle. \\ c = 0: & \quad Z_{BC}^{2,0} = \langle \omega^{12}, \omega^{13} \rangle. \end{aligned}$$

– Formas cerradas de tipo (1, 1):

A la vista de los cálculos de las diferenciales, es evidente que $\{\omega^{1\bar{1}}, \omega^{1\bar{2}}, \omega^{2\bar{1}}\} \subset Z_{BC}^{1,1}$. Hay que estudiar si este subespacio contiene más elementos de tipo (1, 1). Para ello, tomamos $\omega = \alpha\omega^{1\bar{3}} + \beta\omega^{2\bar{2}} + \delta\omega^{2\bar{3}} + \gamma\omega^{3\bar{1}} + \sigma\omega^{3\bar{2}} + \tau\omega^{3\bar{3}}$ tal que $d\omega = 0$, lo que genera el sistema:

$$\begin{cases} \alpha\bar{B} - \beta + \gamma\rho = 0, \\ \tau\rho = 0, \\ \tau c = 0, \\ -\alpha\rho + \beta - \gamma B = 0, \\ \tau B = 0, \\ \sigma = 0 = \delta. \end{cases}$$

Observar que si $\tau \neq 0$, necesariamente $(\rho, B, c) = (0, 0, 0)$ lo cual no es posible por las condiciones impuestas. Por tanto, debe ser $\tau = 0$ y el sistema se reduce a uno de dos ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \alpha\bar{B} - \beta + \gamma\rho = 0, \\ -\alpha\rho + \beta - \gamma B = 0. \end{cases}$$

Notar que al menos habrá un parámetro libre. Distinguimos casos según el valor de ρ .

- Si $\rho = 0$, el sistema queda:

$$\begin{cases} \alpha\bar{B} - \beta = 0 \Rightarrow \beta = \alpha\bar{B}, \\ \beta - \gamma B = 0 \Rightarrow \beta = \gamma B, \end{cases}$$

y por tanto:

- Si $B = \bar{B} = 0$, entonces $\beta = 0$ y α, γ libres. Aparecen dos formas cerradas más: $\omega^{1\bar{3}}, \omega^{3\bar{1}}$.
- Si $B \neq 0$, se tiene que $\bar{B} \neq 0$ por lo que basta tomar $\alpha = \frac{\beta}{B}$ y $\gamma = \frac{\beta}{B}$. Hay un elemento más en $Z_{BC}^{1,1}$ que es: $\frac{1}{B}\omega^{1\bar{3}} + \omega^{2\bar{2}} + \frac{1}{B}\omega^{3\bar{1}}$.

■ Para $\rho = 1$ las ecuaciones quedan:

$$\begin{cases} \alpha\bar{B} - \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \beta = \gamma + \alpha\bar{B}, \\ -\alpha + \beta - \gamma B = 0 \Rightarrow \beta = \alpha + \gamma B, \end{cases}$$

luego debe ser: $\gamma + \alpha\bar{B} = \alpha + \gamma B \Leftrightarrow \alpha(\bar{B} - 1) = \gamma(B - 1)$.

- Si $B = \bar{B} = 1$, queda $\beta = \gamma + \alpha$ y se encuentran dos nuevas formas cerradas que son: $\omega^{1\bar{3}} + \omega^{2\bar{2}}, \omega^{2\bar{2}} + \omega^{3\bar{1}}$.
- Si $B \neq 1$, entonces $\gamma = \alpha\frac{\bar{B}-1}{B-1}$ y $\beta = \alpha\frac{B\bar{B}-1}{B-1}$. Para este caso hay otra forma cerrada que es: $\omega^{1\bar{3}} + \frac{B\bar{B}-1}{B-1}\omega^{2\bar{2}} + \frac{\bar{B}-1}{B-1}\omega^{3\bar{1}}$.

En resumen,

$$\rho = 0, \quad B = 0, \quad c \neq 0: \quad Z_{BC}^{1,1} = \langle \omega^{1\bar{1}}, \omega^{1\bar{2}}, \omega^{1\bar{3}}, \omega^{2\bar{1}}, \omega^{3\bar{1}} \rangle.$$

$$\rho = 0, \quad B \neq 0: \quad Z_{BC}^{1,1} = \langle \omega^{1\bar{1}}, \omega^{1\bar{2}}, \omega^{2\bar{1}}, \frac{1}{B}\omega^{1\bar{3}} + \omega^{2\bar{2}} + \frac{1}{B}\omega^{3\bar{1}} \rangle.$$

$$\rho = 1, \quad B = 1: \quad Z_{BC}^{1,1} = \langle \omega^{1\bar{1}}, \omega^{1\bar{2}}, \omega^{2\bar{1}}, \omega^{1\bar{3}} + \omega^{2\bar{2}}, \omega^{2\bar{2}} + \omega^{3\bar{1}} \rangle.$$

$$\rho = 1, \quad B \neq 1: \quad Z_{BC}^{1,1} = \langle \omega^{1\bar{1}}, \omega^{1\bar{2}}, \omega^{2\bar{1}}, \omega^{1\bar{3}} + \frac{B\bar{B}-1}{B-1}\omega^{2\bar{2}} + \frac{\bar{B}-1}{B-1}\omega^{3\bar{1}} \rangle.$$

– Formas cerradas de tipo $(3, 0)$: $Z_{BC}^{3,0} = \langle \omega^{12\bar{3}} \rangle$.

– Formas cerradas de tipo $(2, 1)$:

En primer lugar se puede ver que $\omega^{12\bar{1}}, \omega^{12\bar{2}}, \omega^{13\bar{1}} \in Z_{BC}^{2,1}$. Tomemos

$$\omega = \alpha\omega^{12\bar{3}} + \beta\omega^{13\bar{2}} + \delta\omega^{13\bar{3}} + \gamma\omega^{23\bar{1}} + \sigma\omega^{23\bar{2}} + \tau\omega^{23\bar{3}} \in Z_{BC}^{2,1}$$

y veamos qué condiciones deben cumplir los parámetros α , β , δ , γ , σ y τ . Imponiendo $d\omega = 0$ se llega al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \alpha\rho - \beta c - \gamma B = 0, \\ \delta c = 0, \\ \delta\rho - \sigma = 0, \\ \delta\bar{B} - \sigma = 0, \\ \tau = 0, \end{cases}$$

del cual se deduce que: $\delta\rho = \sigma = \delta\bar{B}$.

- Si $\rho = 0$, necesariamente $\sigma = 0$, lo que conduce a distinguir dos casos:
 - Si $B = \bar{B} = 0$, el sistema queda reducido a las ecuaciones

$$\begin{cases} \beta c = 0, \\ \delta c = 0. \end{cases}$$

Como en este caso $(\rho, B) = (0, 0)$, necesariamente $c \neq 0$ y debe ser $\beta = 0 = \delta$. Aparecen dos nuevas formas cerradas: $\omega^{12\bar{3}}$ y $\omega^{23\bar{1}}$.

- Si $B \neq 0$, resulta que $\delta = 0$ y queda una única ecuación:

$$-\beta c - \gamma B = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{-\beta c}{B}.$$

Se obtienen las siguientes formas: $\omega^{12\bar{3}}$, $\omega^{13\bar{2}} - \frac{c}{B}\omega^{23\bar{1}}$.

- Para $\rho = 1$, el sistema queda:

$$\begin{cases} \alpha - \beta c - \gamma B = 0, \\ \delta c = 0 \Rightarrow \sigma c = 0, \\ \delta - \sigma = 0 \Rightarrow \delta = \sigma, \\ \delta\bar{B} - \sigma = 0 \Rightarrow \sigma(\bar{B} - 1) = 0, \end{cases}$$

luego ahora hay cuatro incógnitas. La última ecuación motiva los siguientes casos:

- Si $B = \bar{B} = 1$, queda:

$$\begin{cases} \alpha - \beta c - \gamma = 0, \\ \sigma c = 0, \end{cases}$$

y la segunda ecuación vuelve a inducir una nueva subdivisión en dos casos:

- Si $c = 0$, entonces $\alpha = \gamma$ y se añaden tres nuevas formas cerradas al subespacio $Z_{BC}^{2,1}$: $\omega^{13\bar{2}}$, $\omega^{12\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}}$, $\omega^{13\bar{3}} + \omega^{23\bar{2}}$.
- Si por el contrario $c \neq 0$, debe ser $\sigma = 0 = \delta$ y de la ecuación $\alpha - \beta c - \gamma = 0$ se deduce $\gamma = \alpha - \beta c$. Para este caso existen dos formas cerradas más: $\omega^{12\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}}$, $\omega^{13\bar{2}} - c\omega^{23\bar{1}}$.
- Si $B \neq 1$, se tiene $\sigma = 0 = \delta$ y la ecuación que queda es $\alpha - \beta c - \gamma B = 0$. Despejando, vemos que $\alpha = \beta c + \gamma B$, lo que lleva a la aparición de dos formas cerradas: $c\omega^{12\bar{3}} + \omega^{13\bar{2}}$, $B\omega^{12\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}}$.

Resumiendo, lo que se obtiene para el bigrado $(2, 1)$ es lo siguiente:

$$\rho = 0, \quad B = 0, \quad c \neq 0: \quad Z_{BC}^{2,1} = \langle \omega^{12\bar{1}}, \omega^{12\bar{2}}, \omega^{12\bar{3}}, \omega^{13\bar{1}}, \omega^{23\bar{1}} \rangle.$$

$$\rho = 0, \quad B \neq 0: \quad Z_{BC}^{2,1} = \langle \omega^{12\bar{1}}, \omega^{12\bar{2}}, \omega^{12\bar{3}}, \omega^{13\bar{1}}, \omega^{13\bar{2}} - \frac{c}{B}\omega^{23\bar{1}} \rangle.$$

$$\rho = 1, \quad B = 1, \quad c = 0: \quad Z_{BC}^{2,1} = \langle \omega^{12\bar{1}}, \omega^{12\bar{2}}, \omega^{13\bar{1}}, \omega^{13\bar{2}}, \omega^{12\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}}, \omega^{13\bar{3}} + \omega^{23\bar{2}} \rangle.$$

$$\rho = 1, \quad B = 1, \quad c \neq 0: \quad Z_{BC}^{2,1} = \langle \omega^{12\bar{1}}, \omega^{12\bar{2}}, \omega^{13\bar{1}}, \omega^{12\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}}, \omega^{13\bar{2}} - c\omega^{23\bar{1}} \rangle.$$

$$\rho = 1, \quad B \neq 1: \quad Z_{BC}^{2,1} = \langle \omega^{12\bar{1}}, \omega^{12\bar{2}}, \omega^{13\bar{1}}, c\omega^{12\bar{3}} + \omega^{13\bar{2}}, B\omega^{12\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}} \rangle.$$

– Formas cerradas de tipo $(3, 1)$:

$$\rho = 0: \quad Z_{BC}^{3,1} = \langle \omega^{123\bar{1}}, \omega^{123\bar{2}}, \omega^{123\bar{3}} \rangle.$$

$$\rho = 1: \quad Z_{BC}^{3,1} = \langle \omega^{123\bar{1}}, \omega^{123\bar{2}} \rangle.$$

– Formas cerradas de tipo $(2, 2)$:

Observando las diferenciales de las formas de tipo $(2, 2)$, es evidente que

$$\{\omega^{12\bar{1}\bar{2}}, \omega^{12\bar{1}\bar{3}}, \omega^{12\bar{2}\bar{3}}, \omega^{13\bar{1}\bar{2}}, \omega^{13\bar{1}\bar{3}}, \omega^{23\bar{1}\bar{2}}\} \subset Z_{BC}^{2,2}.$$

Para ver si hay alguna forma más, basta considerar $\omega = \alpha\omega^{13\bar{2}\bar{3}} + \beta\omega^{23\bar{1}\bar{3}} + \gamma\omega^{23\bar{2}\bar{3}}$ e imponer $d\omega = 0$. En tal caso, aparece el sistema:

$$\begin{cases} \alpha\bar{B} + \beta c = 0, \\ \alpha c + \beta B = 0, \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Luego el problema queda reducido a resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Estudiamos el rango:

$$\det \begin{pmatrix} \bar{B} & c \\ c & B \end{pmatrix} = B\bar{B} - c^2.$$

- Si $c^2 \neq B\bar{B}$, entonces el rango de la matriz es dos por lo que existe una única solución al sistema que debe ser la trivial. Es decir, $Z_{BC}^{2,2}$ no tiene más elementos que los ya enumerados.
- Si $c^2 = B\bar{B}$, el rango es uno y se distinguen dos casos:
 - Si $c = 0$, debe ser $B = 0$ con lo cual aparecen dos elementos: $\omega^{132\bar{3}}$, $\omega^{231\bar{3}}$.
 - Si $c \neq 0$, entonces $\beta = \frac{-\alpha\bar{B}}{c}$ y queda: $\omega^{132\bar{3}} - \frac{\bar{B}}{c}\omega^{231\bar{3}}$.

Teniendo todo esto en cuenta queda:

$$c = 0, \quad B = 0: \quad Z_{BC}^{2,2} = \langle \omega^{121\bar{2}}, \omega^{121\bar{3}}, \omega^{122\bar{3}}, \omega^{131\bar{2}}, \omega^{131\bar{3}}, \omega^{132\bar{3}}, \omega^{231\bar{2}}, \omega^{231\bar{3}} \rangle$$

$$c \neq 0, \quad c^2 = B\bar{B}: \quad Z_{BC}^{2,2} = \langle \omega^{121\bar{2}}, \omega^{121\bar{3}}, \omega^{122\bar{3}}, \omega^{131\bar{2}}, \omega^{131\bar{3}}, \omega^{231\bar{2}}, \omega^{132\bar{3}} - \frac{\bar{B}}{c}\omega^{231\bar{3}} \rangle$$

$$c^2 \neq B\bar{B}: \quad Z_{BC}^{2,2} = \langle \omega^{121\bar{2}}, \omega^{121\bar{3}}, \omega^{122\bar{3}}, \omega^{131\bar{2}}, \omega^{131\bar{3}}, \omega^{231\bar{2}} \rangle$$

$$- \text{Formas cerradas de tipo } (3, 2): \quad Z_{BC}^{3,2} = \langle \omega^{1231\bar{2}}, \omega^{1231\bar{3}}, \omega^{1232\bar{3}} \rangle.$$

$$- \text{Formas cerradas de tipo } (3, 3): \quad Z_{BC}^{3,3} = \langle \omega^{1231\bar{2}\bar{3}} \rangle.$$

Pasemos ya a calcular la cohomología de Bott-Chern de la Familia 2. Al igual que ocurría en el caso de la Familia 1, bastará restringirse a los valores de los parámetros ρ , B y c que aparecen en la Tabla 1, pues cualquier otros valores dan álgebras isomorfas a las de esta tabla.

TABLA B

	ρ	B	c	\mathfrak{g}
ABELIANAS	0	0	1	\mathfrak{h}_{15}
	0	1	$c \neq 1$	
	0	1	1	\mathfrak{h}_9
NO ABELIANAS	1	0	1	\mathfrak{h}_{10}
	1	1	0	\mathfrak{h}_7
	1	$ B = 1$ $B \neq 1$	0	\mathfrak{h}_{16}
	1	$B \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$	$ B - 1 $	\mathfrak{h}_{11}
	1	$\Im B \neq 0$	$ B - 1 $	\mathfrak{h}_{12}
	1	$c \neq B - 1 $ $(c, B) \neq (0, 1)$ $c^4 - 2(B ^2 + 1)c^2 + (B ^2 - 1)^2 < 0$		\mathfrak{h}_{13}
	1	$c \neq B - 1 $ $(c, B) \neq (0, 1)$ $c^4 - 2(B ^2 + 1)c^2 + (B ^2 - 1)^2 = 0$		\mathfrak{h}_{14}
	1	$c \neq B - 1 $ $(c, B) \neq (0, 1)$ $c^4 - 2(B ^2 + 1)c^2 + (B ^2 - 1)^2 > 0$		\mathfrak{h}_{15}

Teniendo en cuenta todo lo anterior y la Proposición 1.3.1, los grupos de cohomología de Bott-Chern son los siguientes.

Para todas las álgebras reales nilpotentes que aparecen en la Tabla B:

$$H_{BC}^{1,0} = \langle [\omega^1] \rangle.$$

Sin embargo, al pasar a $H_{BC}^{2,0}$ se tiene:

$$H_{BC}^{2,0} = \langle [\omega^{12}], \underbrace{[\omega^{13}]}_{\text{sólo si } c=0} \rangle.$$

Para el bigrado (1, 1):

$$H_{BC}^{1,1} = \langle [\omega^{1\bar{1}}], [\omega^{1\bar{2}}], [\omega^{2\bar{1}}], \underbrace{[\omega^{1\bar{3}} + \rho\omega^{2\bar{2}}], [\omega^{3\bar{1}} + \rho\omega^{2\bar{2}}]}_{\text{sólo si } B=\rho}, \underbrace{[(B - \rho)\omega^{1\bar{3}} + (B\bar{B} - \rho)\omega^{2\bar{2}} + (\bar{B} - \rho)\omega^{3\bar{1}}]}_{\text{sólo si } B \neq \rho} \rangle,$$

y para el (3, 0):

$$H_{BC}^{3,0} = \langle [\omega^{123}] \rangle.$$

En el caso de las formas de tipo (2, 1) resulta más complicado dar una expresión general, por lo que se distinguen casos de acuerdo a la Tabla B:

- Para \mathfrak{h}_7 , tenemos $(\rho, B, c) = (1, 1, 0)$ con lo cual:

$$H_{BC}^{2,1} = \langle [\omega^{12\bar{1}}], [\omega^{12\bar{2}}], [\omega^{13\bar{1}}], [\omega^{13\bar{2}}], [\omega^{12\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}}], [\omega^{13\bar{3}} + \omega^{23\bar{2}}] \rangle.$$

- Para \mathfrak{h}_9 , los parámetros son $(\rho, B, c) = (0, 1, 1)$ luego:

$$H_{BC}^{2,1} = \langle [\omega^{12\bar{1}}], [\omega^{12\bar{2}}], [\omega^{12\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}}], [\omega^{13\bar{2}} - \omega^{23\bar{1}}] \rangle.$$

- Si se considera \mathfrak{h}_{10} , queda $(\rho, B, c) = (1, 0, 1)$ y así:

$$H_{BC}^{2,1} = \langle [\omega^{12\bar{1}}], [\omega^{12\bar{2}}], [\omega^{13\bar{1}}], [\omega^{23\bar{1}}], [\omega^{13\bar{2}} + \omega^{12\bar{3}}] \rangle.$$

- Para \mathfrak{h}_{11} , $\rho = 1$, $B \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ y $c = |B - 1|$ y se obtiene:

$$H_{BC}^{2,1} = \langle [\omega^{12\bar{1}}], [\omega^{12\bar{2}}], [\omega^{13\bar{1}}], [\omega^{13\bar{2}} + |B - 1| \omega^{12\bar{3}}], [B\omega^{12\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}}] \rangle.$$

- Considerando \mathfrak{h}_{12} , resulta que $\rho = 1$, $\Im m B \neq 0$ (por lo que $B \neq 1$) y $c = |B - 1|$.
Queda:

$$H_{BC}^{2,1} = \langle [\omega^{12\bar{1}}], [\omega^{12\bar{2}}], [\omega^{13\bar{1}}], [\omega^{13\bar{2}} + |B - 1| \omega^{12\bar{3}}], [B\omega^{12\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}}] \rangle.$$

- Para \mathfrak{h}_{13} y \mathfrak{h}_{14} se tiene que $\rho = 1$. Según el valor de B aparecen dos casos:

- Si $B = 1$, entonces la tercera condición queda $c^2(c^2 - 4) < 0$ para \mathfrak{h}_{13} , lo que lleva a $0 < c < 2$, y $c^2(c^2 - 4) = 0$ para \mathfrak{h}_{14} , lo que sólo es posible si $c = 2$. Así:

$$H_{BC}^{2,1} = \langle [\omega^{12\bar{1}}], [\omega^{12\bar{2}}], [\omega^{13\bar{1}}], [\omega^{12\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}}], [\omega^{13\bar{2}} - c\omega^{23\bar{1}}] \rangle.$$

- Para $B \neq 1$ y c cumpliendo las condiciones de la Tabla B. Se obtiene:

$$H_{BC}^{2,1} = \langle [\omega^{12\bar{1}}], [\omega^{12\bar{2}}], [\omega^{13\bar{1}}], [B\omega^{12\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}}], [\omega^{13\bar{2}} + c\omega^{12\bar{3}}] \rangle.$$

- Para \mathfrak{h}_{15} puede ser $\rho = 0$ o bien $\rho = 1$. Empezamos haciendo esta subdivisión:

- Si $\rho = 0$, B puede ser 0 ó 1 y queda:

$$H_{BC}^{2,1} = \langle [\omega^{12\bar{1}}], [\omega^{12\bar{2}}], [\omega^{12\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}}], [B\omega^{13\bar{2}} - c\omega^{23\bar{1}}] \rangle.$$

- Cuando $\rho = 1$, la discusión según los parámetros B y c es análoga a la de \mathfrak{h}_{13} , \mathfrak{h}_{14} , por lo cual:

$$H_{BC}^{2,1} = \langle [\omega^{12\bar{1}}], [\omega^{12\bar{2}}], [\omega^{13\bar{1}}], [B\omega^{12\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}}], \underbrace{[\omega^{13\bar{2}} - c\omega^{23\bar{1}}]}_{\text{si } B=1}, \underbrace{[\omega^{13\bar{2}} + c\omega^{12\bar{3}}]}_{\text{si } B \neq 1} \rangle.$$

(Observar que debido a las condiciones de la tabla, el caso $|B| = 1$ se da cuando el parámetro c cumple $c > 2$).

- Pasamos a \mathfrak{h}_{16} . En este caso, $\rho = 1$, $c = 0$ y $|B| = 1$ con $B \neq 1$, por lo que queda:

$$H_{BC}^{2,1} = \langle [\omega^{12\bar{1}}], [\omega^{12\bar{2}}], [\omega^{13\bar{1}}], [\omega^{13\bar{2}}], [B\omega^{12\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}}] \rangle.$$

El grupo de cohomología de Bott-Chern $(3, 1)$ es:

$$H_{BC}^{3,1} = \langle [\omega^{123\bar{1}}], [\omega^{123\bar{2}}], \underbrace{[\omega^{123\bar{3}}]}_{\text{sólo si } \rho=0} \rangle.$$

Para calcular el de $(2, 2)$, hay que tener en cuenta que la forma $\omega^{12\bar{1}\bar{2}}$ siempre es exacta, luego al cocientar se elimina.

Cuando se consideran \mathfrak{h}_7 , \mathfrak{h}_{10} y \mathfrak{h}_{16} , siempre se verifica que $c^2 \neq B\bar{B} = |B|^2$, por lo que el grupo de cohomología $(2, 2)$ de todos ellos es:

$$H_{BC}^{2,2} = \langle [\omega^{12\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{12\bar{2}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{23\bar{1}\bar{2}}] \rangle.$$

Quedan por estudiar los de \mathfrak{h}_9 , \mathfrak{h}_{11} , \mathfrak{h}_{12} , \mathfrak{h}_{13} , \mathfrak{h}_{14} y \mathfrak{h}_{15} .

- Para \mathfrak{h}_9 debe ser $c = 1 = B$, luego resulta evidente que $c^2 = |B|^2$, lo que lleva a que su grupo de cohomología $(2, 2)$ es:

$$H_{BC}^{2,2} = \langle [\omega^{12\bar{1}3}], [\omega^{12\bar{2}3}], [\omega^{13\bar{1}2}], [\omega^{13\bar{1}3}], [\omega^{23\bar{1}2}], [\omega^{13\bar{2}3} - \omega^{23\bar{1}3}] \rangle.$$

- Para \mathfrak{h}_{11} y \mathfrak{h}_{12} se toma $B = x + iy$ y $c = |B - 1|$, con lo cual $c^2 = |B - 1|^2 = (x - 1)^2 + y^2$. Por tanto, tenemos que $c^2 = B^2$ sin más que elegir $-2x + 1 = 0$, esto es, $x = \frac{1}{2}$ e y cualquiera o cero, según estemos en un álgebra u otra. Se tiene así lo siguiente:

$$H_{BC}^{2,2} = \langle [\omega^{12\bar{1}3}], [\omega^{12\bar{2}3}], [\omega^{13\bar{1}2}], [\omega^{13\bar{1}3}], [\omega^{23\bar{1}2}], \underbrace{[\omega^{13\bar{2}3} - \omega^{23\bar{1}3}]}_{\text{si } \Re B = \frac{1}{2}} \rangle.$$

- Se consideran ahora \mathfrak{h}_{13} , \mathfrak{h}_{14} , \mathfrak{h}_{15} (como la condición a verificar por B y c es similar, parece sensato estudiarlas a la vez). Observar que:

- Tomando $c = 0 = B$, nos queda $c^4 - 2(|B|^2 + 1)c^2 + (|B|^2 - 1)^2 = 1 > 0$, luego estos valores sólo son válidos para \mathfrak{h}_{15} , en cuyo caso:

$$H_{BC}^{2,2} = \langle [\omega^{12\bar{1}3}], [\omega^{12\bar{2}3}], [\omega^{13\bar{1}2}], [\omega^{13\bar{1}3}], [\omega^{13\bar{2}3}], [\omega^{23\bar{1}2}], [\omega^{23\bar{1}3}] \rangle.$$

- Si ahora $c \neq 0$ con $c^2 = |B|^2$, resulta que $c^4 - 2(|B|^2 + 1)c^2 + (|B|^2 - 1)^2 = c^4 - 2(c^2 + 1)c^2 + (c^2 - 1)^2 = -4c^2 + 1$. Según el álgebra tomada, c deberá verificar una u otra condición:

- Para \mathfrak{h}_{13} , debe ser $-4c^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < c$.
- Para \mathfrak{h}_{14} , queda $-4c^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$.
- Si estamos en \mathfrak{h}_{15} , resulta que $-4c^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow 0 < c < \frac{1}{2}$.

Y en estos casos:

$$H_{BC}^{2,2} = \langle [\omega^{12\bar{1}3}], [\omega^{12\bar{2}3}], [\omega^{13\bar{1}2}], [\omega^{13\bar{1}3}], [\omega^{23\bar{1}2}], [|B| \omega^{13\bar{2}3} - \bar{B} \omega^{23\bar{1}3}] \rangle.$$

- Si no se dan ninguno de los dos casos anteriores, queda:

$$H_{BC}^{2,2} = \langle [\omega^{12\bar{1}3}], [\omega^{12\bar{2}3}], [\omega^{13\bar{1}2}], [\omega^{13\bar{1}3}], [\omega^{23\bar{1}2}] \rangle.$$

(Observar que \mathfrak{h}_{15} con J Abelianca cae dentro de este supuesto).

Y el resto de grupos de cohomología son los siguientes en todos los casos:

$$H_{BC}^{3,2} = \langle [\omega^{123\bar{1}2}], [\omega^{123\bar{1}3}], [\omega^{123\bar{2}3}] \rangle,$$

$$H_{BC}^{3,3} = \langle [\omega^{123\bar{1}23}] \rangle.$$

3.3. Familia 3

En esta última familia las ecuaciones de estructura son las siguientes:

$$\begin{cases} d\omega^1 = 0, \\ d\omega^2 = \omega^{13} + \omega^{1\bar{3}}, \\ d\omega^3 = \varepsilon i \omega^{1\bar{1}} + i\delta(\omega^{1\bar{2}} - \omega^{2\bar{1}}), \end{cases}$$

donde $\delta = \pm 1$ y $\varepsilon = 0, 1$. Observar que si $\varepsilon = 0$, tenemos el álgebra \mathfrak{h}_{19}^- , y si $\varepsilon = 1$, se obtiene \mathfrak{h}_{26}^+ . Por tanto, esta familia modela las ecuaciones de estructura de aquellas álgebras de Lie nilpotentes de dimensión real 6 que sólo admiten estructuras complejas no nilpotentes.

De las ecuaciones de estructura de esta familia se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned} \partial\omega^1 &= 0, & \bar{\partial}\omega^1 &= 0, \\ \partial\omega^2 &= \omega^{13}, & \bar{\partial}\omega^2 &= \omega^{1\bar{3}}, \\ \partial\omega^3 &= 0, & \bar{\partial}\omega^3 &= \varepsilon i \omega^{1\bar{1}} + i\delta(\omega^{1\bar{2}} - \omega^{2\bar{1}}). \end{aligned}$$

Conjugando, se tiene:

$$\begin{aligned} d\omega^{\bar{1}} &= 0, \\ d\omega^{\bar{2}} &= \underbrace{-\omega^{3\bar{1}}}_{(1,1)} + \underbrace{\omega^{\bar{1}\bar{3}}}_{(0,2)}, \\ d\omega^{\bar{3}} &= \underbrace{\varepsilon i \omega^{1\bar{1}} - i\delta(\omega^{1\bar{2}} - \omega^{2\bar{1}})}_{(1,1)}. \end{aligned}$$

Para el bigrado $(2, 0)$:

$$\begin{aligned} d\omega^{12} &= 0, \\ d\omega^{13} &= \underbrace{i\delta\omega^{12\bar{1}}}_{(2,1)}, \\ d\omega^{23} &= \underbrace{\varepsilon i \omega^{12\bar{1}} + i\delta\omega^{12\bar{2}} - \omega^{13\bar{3}}}_{(2,1)}. \end{aligned}$$

Pasamos ahora a las formas de grado total 2 bigraduadas como $(1, 1)$:

$$d\omega^{1\bar{1}} = 0,$$

$$d\omega^{1\bar{2}} = \underbrace{\omega^{13\bar{1}}}_{(2,1)} - \underbrace{\omega^{1\bar{1}3}}_{(1,2)},$$

$$d\omega^{1\bar{3}} = \underbrace{-i\delta\omega^{12\bar{1}}}_{(2,1)},$$

$$d\omega^{2\bar{1}} = \underbrace{\omega^{13\bar{1}}}_{(2,1)} - \underbrace{\omega^{1\bar{1}3}}_{(1,2)},$$

$$d\omega^{2\bar{2}} = \underbrace{\omega^{13\bar{2}} + \omega^{23\bar{1}}}_{(2,1)} - \underbrace{\omega^{12\bar{3}} - \omega^{2\bar{1}3}}_{(1,2)},$$

$$d\omega^{2\bar{3}} = \underbrace{\varepsilon i\omega^{12\bar{1}} - i\delta\omega^{12\bar{2}} + \omega^{13\bar{3}}}_{(2,1)},$$

$$d\omega^{3\bar{1}} = \underbrace{-i\delta\omega^{1\bar{1}2}}_{(1,2)},$$

$$d\omega^{3\bar{2}} = \underbrace{\varepsilon i\omega^{1\bar{1}2} - i\delta\omega^{2\bar{1}2} - \omega^{3\bar{1}3}}_{(1,2)},$$

$$d\omega^{3\bar{3}} = \underbrace{\varepsilon i\omega^{13\bar{1}} - i\delta(\omega^{13\bar{2}} - \omega^{23\bar{1}})}_{(2,1)} + \underbrace{\varepsilon i\omega^{1\bar{1}3} + i\delta(\omega^{12\bar{3}} - \omega^{2\bar{1}3})}_{(1,2)}.$$

Para hallar las diferenciales de las formas de tipo (0, 2), se conjugan las halladas para las formas de tipo (2, 0) y obtenemos:

$$d\omega^{\bar{1}2} = 0,$$

$$d\omega^{\bar{1}3} = \underbrace{-i\delta\omega^{1\bar{1}2}}_{(1,2)},$$

$$d\omega^{\bar{2}3} = \underbrace{-\varepsilon i\omega^{1\bar{1}2} - i\delta\omega^{2\bar{1}2} - \omega^{3\bar{1}3}}_{(1,2)}.$$

Para la única forma de la base de tipo (3, 0):

$$d\omega^{123} = 0.$$

Pasando al bigrado (2, 1) aparecen:

$$d\omega^{12\bar{1}} = 0,$$

$$d\omega^{12\bar{2}} = \underbrace{-\omega^{123\bar{1}}}_{(3,1)} + \underbrace{\omega^{12\bar{1}3}}_{(2,2)},$$

$$\begin{aligned}
d\omega^{12\bar{3}} &= 0 = d\omega^{13\bar{1}}, \\
d\omega^{13\bar{2}} &= \underbrace{i\delta\omega^{12\bar{1}\bar{2}} + \omega^{13\bar{1}\bar{3}}}_{(2,2)}, \\
d\omega^{13\bar{3}} &= \underbrace{-i\delta\omega^{123\bar{1}}}_{(3,1)} + \underbrace{i\delta\omega^{12\bar{1}\bar{3}}}_{(2,2)}, \\
d\omega^{23\bar{1}} &= \underbrace{-i\delta\omega^{12\bar{1}\bar{2}} + \omega^{13\bar{1}\bar{3}}}_{(2,2)}, \\
d\omega^{23\bar{2}} &= \underbrace{\varepsilon i\omega^{12\bar{1}\bar{2}} + \omega^{13\bar{2}\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}\bar{3}}}_{(2,2)}, \\
d\omega^{23\bar{3}} &= \underbrace{\varepsilon i\omega^{123\bar{1}} - i\delta\omega^{123\bar{2}}}_{(3,1)} + \underbrace{\varepsilon i\omega^{12\bar{1}\bar{3}} + i\delta\omega^{12\bar{2}\bar{3}}}_{(2,2)}.
\end{aligned}$$

Y para (1, 2) se obtiene:

$$\begin{aligned}
d\omega^{1\bar{1}\bar{2}} &= 0 = d\omega^{1\bar{1}\bar{3}}, \\
d\omega^{1\bar{2}\bar{3}} &= \underbrace{i\delta\omega^{12\bar{1}\bar{2}} + \omega^{13\bar{1}\bar{3}}}_{(2,2)}, \\
d\omega^{2\bar{1}\bar{2}} &= \underbrace{\omega^{13\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)} + \underbrace{\omega^{1\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(1,3)}, \\
d\omega^{2\bar{1}\bar{3}} &= \underbrace{-i\delta\omega^{12\bar{1}\bar{2}} + \omega^{13\bar{1}\bar{3}}}_{(2,2)}, \\
d\omega^{2\bar{2}\bar{3}} &= \underbrace{-\varepsilon i\omega^{12\bar{1}\bar{2}} + \omega^{13\bar{2}\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}\bar{3}}}_{(2,2)}, \\
d\omega^{3\bar{1}\bar{2}} &= 0, \\
d\omega^{3\bar{1}\bar{3}} &= \underbrace{-i\delta\omega^{13\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)} - \underbrace{i\delta\omega^{1\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(1,3)}, \\
d\omega^{3\bar{2}\bar{3}} &= \underbrace{-\varepsilon i\omega^{13\bar{1}\bar{2}} - i\delta\omega^{23\bar{1}\bar{2}}}_{(2,2)} + \underbrace{\varepsilon i\omega^{1\bar{1}\bar{2}\bar{3}} - i\delta\omega^{2\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(1,3)}.
\end{aligned}$$

Para el bigrado (0, 3) queda:

$$d\omega^{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = 0.$$

Ahora pasamos a las formas de grado 4, empezando por las de la bigraduación (3, 1).

$$d\omega^{123\bar{1}} = 0,$$

$$d\omega^{123\bar{2}} = \underbrace{-\omega^{123\bar{1}\bar{3}}}_{(3,2)},$$

$$d\omega^{123\bar{3}} = 0.$$

Para las formas de tipo (2, 2):

$$d\omega^{12\bar{1}\bar{2}} = 0 = d\omega^{12\bar{1}\bar{3}},$$

$$d\omega^{12\bar{2}\bar{3}} = \underbrace{-\omega^{123\bar{1}\bar{3}}}_{(3,2)},$$

$$d\omega^{13\bar{1}\bar{2}} = 0 = d\omega^{13\bar{1}\bar{3}},$$

$$d\omega^{13\bar{2}\bar{3}} = \underbrace{i\delta\omega^{123\bar{1}\bar{2}}}_{(3,2)} + \underbrace{i\delta\omega^{12\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(2,3)},$$

$$d\omega^{23\bar{1}\bar{2}} = \underbrace{-\omega^{13\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(2,3)},$$

$$d\omega^{23\bar{1}\bar{3}} = \underbrace{-i\delta\omega^{123\bar{1}\bar{2}}}_{(3,2)} - \underbrace{i\delta\omega^{12\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(2,3)},$$

$$d\omega^{23\bar{2}\bar{3}} = \underbrace{-\varepsilon i\omega^{123\bar{1}\bar{2}}}_{(3,2)} + \underbrace{\varepsilon i\omega^{12\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(2,3)}.$$

Formas de tipo (1, 3):

$$d\omega^{1\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = 0,$$

$$d\omega^{2\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = \underbrace{\omega^{13\bar{1}\bar{2}\bar{3}}}_{(2,3)},$$

$$d\omega^{3\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = 0.$$

Para la base de formas de tipo (3, 2) se obtiene:

$$d\omega^{123\bar{1}\bar{2}} = 0 = d\omega^{123\bar{1}\bar{3}} = d\omega^{123\bar{2}\bar{3}}.$$

Para la de (2, 3) tenemos:

$$d\omega^{12\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = 0 = d\omega^{13\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = d\omega^{23\bar{1}\bar{2}\bar{3}}.$$

Y finalmente, para la forma básica de tipo (3, 3):

$$d\omega^{123\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = 0.$$

Quedan por calcular las diferenciales $\partial\bar{\partial}$. Teniendo en cuenta lo anterior, se ve que todas ellas son cero exceptuando las que se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}\partial\bar{\partial}\omega^2 &= \partial\omega^{1\bar{3}} = -i\delta\omega^{12\bar{1}}, \\ \partial\bar{\partial}\omega^{\bar{2}} &= \partial\omega^{1\bar{3}} = -i\delta\omega^{1\bar{1}2}, \\ \partial\bar{\partial}\omega^{2\bar{2}} &= \partial(-\omega^{1\bar{2}\bar{3}} - \omega^{2\bar{1}\bar{3}}) = -2\omega^{13\bar{1}\bar{3}}, \\ \partial\bar{\partial}\omega^{3\bar{3}} &= \partial(\varepsilon i\omega^{1\bar{1}\bar{3}} + i\delta\omega^{12\bar{3}} - i\delta\omega^{2\bar{1}\bar{3}}) = -\delta^2\omega^{12\bar{1}\bar{2}} - \delta^2\omega^{12\bar{1}\bar{2}} = -2\omega^{12\bar{1}\bar{2}}, \\ \partial\bar{\partial}\omega^{23\bar{3}} &= \partial(\varepsilon i\omega^{12\bar{1}\bar{3}} + i\delta\omega^{12\bar{2}\bar{3}}) = -i\delta\omega^{123\bar{1}\bar{3}}, \\ \partial\bar{\partial}\omega^{3\bar{2}\bar{3}} &= \partial(\varepsilon i\omega^{1\bar{1}\bar{2}\bar{3}} - i\delta\omega^{2\bar{1}\bar{2}\bar{3}}) = -i\delta\omega^{13\bar{1}\bar{2}\bar{3}}.\end{aligned}$$

Ya que $\delta = \pm 1$, ninguna de estas diferenciales se anula. Siguiendo la notación descrita en el apartado correspondiente a la Familia 1 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}B_{\text{BC}}^{2,1} &= \langle \omega^{12\bar{1}} \rangle, & B_{\text{BC}}^{1,2} &= \langle \omega^{1\bar{1}2} \rangle, \\ B_{\text{BC}}^{2,2} &= \langle \omega^{12\bar{1}\bar{2}}, \omega^{13\bar{1}\bar{3}} \rangle, \\ B_{\text{BC}}^{3,2} &= \langle \omega^{123\bar{1}\bar{3}} \rangle, & B_{\text{BC}}^{2,3} &= \langle \omega^{13\bar{1}\bar{2}\bar{3}} \rangle.\end{aligned}$$

Para el resto de bigraduaciones, este subespacio es el trivial.

Para poder hallar los grupos de cohomología de Bott-Chern quedan por calcular las formas cerradas, es decir, aquellas que pertenecen al subespacio $Z_{\text{BC}}^{p,q}$, para cada par p, q .

– Formas cerradas de tipo $(1, 0)$:

En primer lugar, se tiene que $\omega^1 \in Z_{\text{BC}}^{1,0}$. Para saber si hay más, se considera $\omega = \alpha\omega^2 + \beta\omega^3$ verificando $d\omega = 0$, y así se llega a las ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta\varepsilon i = 0, \\ \beta i\delta = 0 \xleftrightarrow{i,\delta \neq 0} \beta = 0. \end{cases}$$

Por tanto, $Z_{\text{BC}}^{1,0} = \langle \omega^1 \rangle$.

– Formas cerradas de tipo $(2, 0)$:

A partir de los cálculos de las diferenciales se sabe que $\omega^{12} \in Z_{\text{BC}}^{2,0}$. Hay que estudiar si existe algún elemento más, para lo cual se toma $\omega = \alpha\omega^{13} + \beta\omega^{23}$ y se impone $0 = d\omega = \alpha d\omega^{13} + \beta d\omega^{23}$. Gracias a esto, aparece el sistema:

$$\begin{cases} \alpha i\delta + \beta \varepsilon i = 0 \Leftrightarrow \alpha\delta + \beta\varepsilon = 0, \\ \beta i\delta = 0, \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Como $\beta = 0$ y $\delta \neq 0$, debe ser $\alpha = 0$ y así: $Z_{BC}^{2,0} = \langle \omega^{12} \rangle$.

– Formas cerradas de tipo (1, 1):

En un principio, se tiene $\omega^{1\bar{1}} \in Z_{BC}^{1,1}$. Para ver si hay más elementos en este subespacio se toma $\omega = \alpha\omega^{1\bar{2}} + \beta\omega^{1\bar{3}} + \gamma\omega^{2\bar{1}} + \sigma\omega^{2\bar{2}} + \tau\omega^{2\bar{3}} + \psi\omega^{3\bar{1}} + \chi\omega^{3\bar{2}} + \eta\omega^{3\bar{3}}$, e imponiendo $d\omega = 0$, el problema se reduce a hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -\beta i\delta + \tau \varepsilon i = 0 \xrightarrow{\tau=0} \beta i\delta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0, \\ \alpha + \gamma + \eta \varepsilon i = 0, \\ \sigma - \eta i\delta = 0, \\ \tau = 0, \\ \sigma + \eta i\delta = 0, \\ -\psi i\delta + \chi \varepsilon i = 0 \xrightarrow{\chi=0} \psi i\delta = 0 \Leftrightarrow \psi = 0, \\ -\alpha - \gamma + \eta \varepsilon i = 0, \\ \chi = 0. \end{cases}$$

Luego debe ser $\beta = \tau = \psi = \chi = 0$, con lo cual el sistema queda reducido a:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + \eta \varepsilon i = 0, \\ -\alpha - \gamma + \eta \varepsilon i = 0, \\ \sigma - \eta i\delta = 0, \\ \sigma + \eta i\delta = 0. \end{cases}$$

A partir de las dos últimas ecuaciones se llega a que $\eta i\delta = \sigma = -\eta i\delta$, lo que implica $\eta = 0 = \sigma$. Por tanto, sólo queda la condición $\alpha + \gamma = 0$; es decir, $\gamma = -\alpha$.

De esta manera: $Z_{BC}^{1,1} = \langle \omega^{1\bar{1}}, \omega^{1\bar{2}} - \omega^{2\bar{1}} \rangle$.

– Formas cerradas de tipo (3, 0): $Z_{BC}^{3,0} = \langle \omega^{123} \rangle$.

– Formas cerradas de tipo (2, 1):

De los cálculos de las diferenciales, se puede deducir que $\{\omega^{12\bar{1}}, \omega^{12\bar{3}}, \omega^{13\bar{1}}\} \subset Z_{BC}^{2,1}$. Ahora se toma $\omega = \alpha\omega^{12\bar{2}} + \beta\omega^{13\bar{2}} + \gamma\omega^{13\bar{3}} + \sigma\omega^{23\bar{1}} + \tau\omega^{23\bar{2}} + \psi\omega^{23\bar{3}}$, e imponiendo que $d\omega = 0$, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -\alpha - \gamma i\delta + \psi \varepsilon i = 0, \\ \psi i\delta = 0 \Leftrightarrow \psi = 0, \\ \beta i\delta - \sigma i\delta + \tau \varepsilon i = 0, \\ \alpha + \gamma i\delta + \psi \varepsilon i = 0, \\ \beta + \sigma = 0, \\ \tau = 0, \end{cases}$$

que se reduce al siguiente:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma i\delta = 0, \\ (\beta - \sigma)i\delta = 0, \\ \beta + \sigma = 0. \end{cases}$$

Para que se cumplan las dos últimas ecuaciones es necesario que $\beta = \sigma = 0$, lo que lleva a que la única ecuación que queda es la primera, que implica $\alpha = -\gamma i\delta$.

Así, $Z_{BC}^{2,1} = \langle \omega^{12\bar{1}}, \omega^{12\bar{3}}, \omega^{13\bar{1}}, -i\delta\omega^{12\bar{2}} + \omega^{13\bar{3}} \rangle$.

– Formas cerradas de tipo $(3, 1)$: $Z_{BC}^{3,1} = \langle \omega^{123\bar{1}}, \omega^{123\bar{3}} \rangle$.

– Formas cerradas de tipo $(2, 2)$:

De las expresiones obtenidas para las diferenciales de las formas de tipo $(2, 2)$ deducimos que $\omega^{12\bar{1}\bar{2}}, \omega^{12\bar{1}\bar{3}}, \omega^{13\bar{1}\bar{2}}, \omega^{13\bar{1}\bar{3}}$ son formas cerradas. Para ver si hay más, se toma $\omega = \alpha\omega^{12\bar{2}\bar{3}} + \beta\omega^{13\bar{2}\bar{3}} + \gamma\omega^{23\bar{1}\bar{2}} + \sigma\omega^{23\bar{1}\bar{3}} + \tau\omega^{23\bar{2}\bar{3}}$ y se impone $d\omega = 0$. Conseguimos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \beta i\delta - \sigma i\delta - \tau \varepsilon i = 0, \\ \alpha = 0, \\ \beta i\delta - \sigma i\delta + \tau \varepsilon i = 0, \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Observar que basta quedarse con la primera y la tercera. Ahora se distinguen dos casos según el valor de ε :

- Para $\varepsilon = 0$, τ puede ser cualquiera y simplemente se tiene $\beta = \sigma$. Así:

$$Z_{BC}^{2,2} = \langle \omega^{12\bar{1}\bar{2}}, \omega^{12\bar{1}\bar{3}}, \omega^{13\bar{1}\bar{2}}, \omega^{13\bar{1}\bar{3}}, \omega^{23\bar{2}\bar{3}}, \omega^{13\bar{2}\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}\bar{3}} \rangle.$$

- Si $\varepsilon = 1$, τ debe ser cero y $\beta = \sigma$. Se obtiene:

$$Z_{BC}^{2,2} = \langle \omega^{12\bar{1}\bar{2}}, \omega^{12\bar{1}\bar{3}}, \omega^{13\bar{1}\bar{2}}, \omega^{13\bar{1}\bar{3}}, \omega^{13\bar{2}\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}\bar{3}} \rangle.$$

- Formas cerradas de tipo (3, 2): $Z_{BC}^{3,2} = \langle \omega^{123\bar{1}\bar{2}}, \omega^{123\bar{1}\bar{3}}, \omega^{123\bar{2}\bar{3}} \rangle.$
- Formas cerradas de tipo (3, 3): $Z_{BC}^{1,3} = \langle \omega^{123\bar{1}\bar{2}\bar{3}} \rangle.$

Notar que se tienen las siguientes álgebras según el valor del parámetro ε :

TABLA C

ε	\mathfrak{g}
0	\mathfrak{h}_{19}^-
1	\mathfrak{h}_{26}^+

Teniendo esto en cuenta, se pueden calcular salvo isomorfismo los grupos de cohomología de Bott-Chern de las dos álgebras reales nilpotentes de dimensión 6 que admiten estructuras complejas no nilpotentes (en la Tabla C):

$$H_{BC}^{1,0} = \langle [\omega^1] \rangle,$$

$$H_{BC}^{2,0} = \langle [\omega^{12}] \rangle,$$

$$H_{BC}^{1,1} = \langle [\omega^{1\bar{1}}], [\omega^{1\bar{2}} - \omega^{2\bar{1}}] \rangle,$$

$$H_{BC}^{3,0} = \langle [\omega^{123}] \rangle,$$

$$H_{BC}^{2,1} = \langle [\omega^{12\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}}], [-i\delta \omega^{12\bar{2}} + \omega^{13\bar{3}}] \rangle,$$

$$H_{BC}^{3,1} = \langle [\omega^{123\bar{1}}], [\omega^{123\bar{3}}] \rangle,$$

$$H_{BC}^{2,2} = \langle [\omega^{12\bar{1}\bar{3}}], [\omega^{13\bar{1}\bar{2}}], \underbrace{[\omega^{23\bar{2}\bar{3}}]}_{\text{para } \mathfrak{h}_{19}^-}, [\omega^{13\bar{2}\bar{3}} + \omega^{23\bar{1}\bar{3}}] \rangle,$$

$$H_{BC}^{3,2} = \langle [\omega^{123\bar{1}\bar{2}}], [\omega^{123\bar{2}\bar{3}}] \rangle,$$

$$H_{BC}^{3,3} = \langle [\omega^{123\bar{1}\bar{2}\bar{3}}] \rangle.$$

3.4. Resumen

Para finalizar este capítulo, se adjuntan unas tablas resumiendo todas las posibles dimensiones de los grupos de cohomología de Bott-Chern para cada álgebra de Lie nilpotente de dimensión 6 con estructura compleja.

Los cálculos para la variedad de Iwasawa (un caso especial del álgebra \mathfrak{h}_5 no contemplado por las familias anteriores) se pueden ver en [2], así como los de sus pequeñas deformaciones.

\mathfrak{h}_2											
ρ	λ	D	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
0	0	$\Im m D = 1$	2	1	4	1	6	3	7	3	1
		$\Re e D = 0$							6		
		$\Re e D \neq 0$							7		
		$\Re e D = -1 \pm \sqrt{1-y^2}$			5						
		$\Re e D \neq -1 \pm \sqrt{1-y^2}$									
1	1	$\Im m D = y > 0$	2	1	4	1	6	2	6	3	1
		$\Re e D \neq 1$							7		
		$\Re e D = 1$									

\mathfrak{h}_3						
ρ	λ	D	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$
0	0	± 1	2	1	4	3

\mathfrak{h}_4											
ρ	λ	D	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
0	1	$\frac{1}{4}$	2	1	4	1	6	3	6	3	1
		-2									
1	1	$D \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}$	2	1	5	1	6	2	6	3	1
		1			4				7		

\mathfrak{h}_5 con J Abeliانا ($\rho = 0$)										
λ	D	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
1	0	2	2	6	1	6	3	6	3	1
	$D \in (0, \frac{1}{4})$	1	1	4						

\mathfrak{h}_5 con J no Abeliانا ($\rho = 1$)										
λ		$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
Iwasawa										
λ	$D=x+iy$	2	3	4	1	6	2	8	3	1
$\lambda = 0$										
$0 < \lambda^2 < \frac{1}{2}$	0	2	2	4	1	6	2	7		J_3
$\frac{1}{2} \leq \lambda^2 < 1$									3	J_4
$\lambda^2 > 1$								6		
$\lambda = 0$	$x = \frac{1}{2}, y = 0$	2	1	4	1	6	2	8	3	J_5
$\lambda = 0$	$x = \frac{1}{2}, 0 < y^2 < \frac{3}{4}$									
	$y = 0, x \in (-\frac{1}{4}, \infty) - \{0, \frac{1}{2}\}$	2	1	4	1	6	2	7	3	J_6
$\lambda = 0$	$y > 0, x \neq \frac{1}{2}, 4y^2 < 1 + 4x$									
	$x = 0, 0 < y < \frac{\lambda^2}{2}$									
	$x = 0, 0 < y < \frac{1-\lambda^2}{2}$	2	1	4	1	6	2	7	3	J_7
	$x = 0, 0 < y < \frac{\lambda^2-1}{2}$									
$\lambda^2 > 5$	$x = 0, 0 < y < \frac{\lambda^2-1}{2}, y \neq \sqrt{\lambda^2-1}$	2	1	4	1	6	2	6	3	1
$\lambda^2 > 5$	$x = 0, y = \sqrt{\lambda^2-1} < \frac{\lambda^2-1}{2}$			5						J_8

\mathfrak{h}_6										
ρ	λ	D	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
1	1	0	2	2	5	1	6	2	6	3
										1

\mathfrak{h}_7											
ρ	B	c	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
1	1	0	1	2	5	1	6	2	5	3	1

\mathfrak{h}_8											
ρ	λ	D	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
0	0	0	2	2	6	1	7	3	8	3	1

\mathfrak{h}_9											
ρ	B	c	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
0	1	1	1	1	4	1	5	3	6	3	1

\mathfrak{h}_{10}											
ρ	B	c	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
1	0	1	1	1	4	1	5	2	5	3	1

\mathfrak{h}_{11}											
ρ	B	c	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
1	$B \in \mathbb{R} - \{0, \frac{1}{2}, 1\}$	$ B - 1 $	1	1	4	1	5	2	5	3	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							6		J_1
											J_2

\mathfrak{h}_{12}											
ρ	B	c	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
1	$\Re B \neq \frac{1}{2}, \Im B \neq 0$	$ B - 1 $	1	1	4	1	5	2	5	3	1
	$\Re B = \frac{1}{2}, \Im B \neq 0$								6		J_1
											J_2

\mathfrak{h}_{13}												
ρ	B	c	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$	
1		$0 < c \leq \frac{1}{2}$			5				5			J_1
		$\frac{1}{2} < c < 2$							6			J_2
1		$B \neq 1, 0 < c \leq \frac{1}{2},$ $c \neq B - 1 , (c, B) \neq (0, 1),$ $c^4 - 2(B ^2 + 1)c^2 + (B ^2 - 1)^2 < 0$	1	1	4	1	5	2	5	3	1	J_3
		$B \neq 1, c > \frac{1}{2},$ $c \neq B - 1 , (c, B) \neq (0, 1),$ $c^4 - 2(B ^2 + 1)c^2 + (B ^2 - 1)^2 < 0$								6		J_4

\mathfrak{h}_{14}												
ρ	B	c	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$	
1	1	2	1	1	5	1	5	2	5	3	1	
	$ B = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			6							
	$c \neq B-1 ,$ $(c, B) \neq (0, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (2, 1),$ $c^4 - 2(B ^2 + 1)c^2 + (B ^2 - 1)^2 = 0$	4			5							
											J_1	
												J_2
												J_3

\mathfrak{h}_{15} con J Abeliana ($\rho = 0$)											
B	c	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$	
0	1	1	5	1	1	5	3	5	3	1	
1	$c \neq 0, 1$										
	0	2	4								
											J_1
											J_2
											J_3

\mathfrak{h}_{15} con J no Abeliana ($\rho = 1$)											
B	c	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$	
0	0	1	2	4	1	5	2	7	3	1	
$ B \neq 0, 1$	0										
1	$c > 2$			5				5			
$ B = c$	$0 < c < \frac{1}{2}$		1		1	5	2	6	3	1	
	$c \neq 0, B-1 ,$ $B \neq 1, B \neq c,$ $c^4 - 2(B ^2 + 1)c^2 + (B ^2 - 1)^2 > 0$			4				5			
											J_4
											J_5
											J_6
											J_7
											J_8

\mathfrak{h}_{16}											
ρ	B	c	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
1	$ B =1$ $B \neq 1$	0	1	2	4	1	5	2	5	3	1

	$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
\mathfrak{h}_{19}^-	1	1	2	1	3	2	4	2	1
\mathfrak{h}_{26}^+							3		

Capítulo 4

Aplicaciones

En este último capítulo vemos un par de aplicaciones de los grupos de cohomología de Bott-Chern hallados en el Capítulo 3 al estudio de la geometría compleja de nilvariedades. En primer lugar, calculamos un invariante complejo que nos medirá lo que la nilvariedad se aleja de cumplir el $\partial\bar{\partial}$ -Lema. Como segunda aplicación, mostramos el comportamiento de la cohomología de Bott-Chern a lo largo de deformaciones de la estructura compleja.

4.1. El $\partial\bar{\partial}$ -Lema y la cohomología de Bott-Chern

Recientemente, Angella y Tomassini obtienen en [3] una desigualdad en términos de los grupos de cohomología de de Rham, Aeppli y Bott-Chern que permite estudiar en qué medida una variedad compleja compacta cumple el llamado $\partial\bar{\partial}$ -Lema. En esta sección, recordamos este concepto, y procedemos al estudio de tal condición para las nilvariedades de dimensión 6 con estructura compleja invariante.

Definición 4.1.1. *Sea M una variedad compleja compacta. Se dice que M cumple el $\partial\bar{\partial}$ -Lema si cada forma compleja exacta, ∂ -cerrada y $\bar{\partial}$ -cerrada es $\partial\bar{\partial}$ -exacta.*

De la definición anterior y de la definición de los grupos de cohomología de Bott-Chern se sigue directamente el siguiente resultado.

Proposición 4.1.2. *Sea M una variedad compleja compacta. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (I) *M cumple el $\partial\bar{\partial}$ -Lema;*

(II) $\ker \partial \cap \ker \bar{\partial} \cap \operatorname{im} d = \operatorname{im} \partial \bar{\partial}$;

(III) la aplicación natural $H_{\text{BC}}^{p,q}(M) \longrightarrow H_{\text{dR}}^{p+q}(M; \mathbb{C})$ es inyectiva.

Teorema 4.1.3. [3] *Sea M una variedad compleja compacta. Para cada $k \in \mathbb{N}$, se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\sum_{p+q=k} (\dim H_{\text{BC}}^{p,q}(M) + \dim H_{\text{A}}^{p,q}(M)) \geq 2 \dim H_{\text{dR}}^k(M; \mathbb{C}). \quad (4.1)$$

Más aún, la igualdad en (4.1) se cumple para todo $k \in \mathbb{N}$ si y sólo si M cumple el $\partial\bar{\partial}$ -Lema.

Si n es la dimensión compleja de M , para cada $j = 1, \dots, 2n$ denotaremos por $\alpha_j(M)$ los enteros no negativos dados por

$$\alpha_j(M) = \sum_{p+q=j} (h_{\text{BC}}^{p,q}(M) + \dim H_{\text{A}}^{p,q}(M)) - 2b_j(M).$$

Entonces $\alpha(M) = \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j(M)$ es un invariante complejo que toma valores no negativos y que mide lo que se aleja la variedad compleja M de cumplir el $\partial\bar{\partial}$ -Lema.

Cabe observar que las nilvariedades no cumplen el $\partial\bar{\partial}$ -Lema, salvo en el caso de los toros complejos: en efecto, si M es una variedad compleja compacta que cumple el $\partial\bar{\partial}$ -Lema entonces M es formal (véase [10] para la definición de formalidad y la demostración de la implicación). Sin embargo, una nilvariedad es formal si y sólo si es un toro [12].

En dimensión compleja 3, debido a las dualidades en las cohomologías de Bott-Chern y Aeppli tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_0(M) &= h_{\text{BC}}^{0,0}(M) + h_{\text{BC}}^{3,3}(M) - 2b_0(M), \\ \alpha_1(M) &= 2(h_{\text{BC}}^{1,0}(M) + h_{\text{BC}}^{3,2}(M) - b_1(M)), \\ \alpha_2(M) &= 2h_{\text{BC}}^{2,0}(M) + h_{\text{BC}}^{1,1}(M) + h_{\text{BC}}^{2,2}(M) + 2h_{\text{BC}}^{3,1}(M) - 2b_2(M), \\ \alpha_3(M) &= 4h_{\text{BC}}^{3,0}(M) + 4h_{\text{BC}}^{2,1}(M) - 2b_3(M), \\ \alpha_4(M) &= \alpha_2(M), \\ \alpha_5(M) &= \alpha_1(M), \\ \alpha_6(M) &= \alpha_0(M). \end{aligned}$$

Por tanto, cuando $n = 3$ resulta que $\alpha(M) = 2\alpha_0(M) + 2\alpha_1(M) + 2\alpha_2(M) + \alpha_3(M)$. En particular, el invariante $\alpha(M)$ es par.

Como consecuencia de los resultados de los capítulos anteriores, a partir de la siguiente proposición es posible calcular el invariante α para toda estructura compleja J

invariante sobre una nilvariedad M de dimensión 6, excepto cuando \mathfrak{h}_7 es el álgebra de Lie subyacente a M .

Proposición 4.1.4. *Sea (M, J) una nilvariedad de dimensión 6 con una estructura compleja J invariante, y sea \mathfrak{g} el álgebra de Lie subyacente. Supongamos que $\mathfrak{g} \not\cong \mathfrak{h}_7$. Denotemos por α_j^i , el invariante $\alpha_j(M, J_i)$, $j = 1, 2, 3$, donde los superíndices i indican cada una de las estructuras complejas que se distinguen al calcular la cohomología de Bott-Chern, según aparecen en las tablas de la Sección 3.4. Entonces:*

- (I) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_1$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$;
- (II) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_2$, $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i) = (2, |4 - i|, 8)$, $i = 1, \dots, 5$;
- (III) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_3$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 1, 8)$;
- (IV) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_4$, $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i) = (2, |3 - i|, 8)$, $i = 1, \dots, 4$;
- (V) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_5$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2, 6, 8)$, para J_1 e Iwasawa,
 $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i) = (2, i, 8)$, $i = 2, 3$,
 $(\alpha_1^4, \alpha_2^4, \alpha_3^4) = (2, 2, 8)$,
 $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i) = (2, |7 - i|, 8)$, $i = 5, \dots, 8$;
- (VI) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_6$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2, 1, 4)$;
- (VII) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_8$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 2, 4)$;
- (VIII) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_9$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 4, 8)$;
- (IX) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_{10}$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2, 3, 8)$;
- (X) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_{11}$ y \mathfrak{h}_{12} , $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i) = (2, 2 + i, 8)$, $i = 1, 2$,
- (XI) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_{13}$, $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i) = (2, 5 + i, 12)$, $i = 1, 2$,
 $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i) = (2, 2 + i, 12)$, $i = 3, 4$;
- (XII) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_{14}$, $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i) = (2, 6, 12)$, $i = 1, 2$,
 $(\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3) = (2, 5, 12)$;
- (XIII) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_{15}$, $(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_3^1) = (2, 8, 12)$,
 $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i) = (2, 7, 12)$, $i = 2, 5$,
 $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i) = (2, 9, 12)$, $i = 3, 4$,

$$(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i) = (2, 6, 12), \quad i = 6, 7,$$

$$(\alpha_1^8, \alpha_2^8, \alpha_3^8) = (2, 5, 12);$$

(XIV) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_{16}$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2, 7, 12)$;

(XV) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_{19}^-$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 2, 4)$;

(XVI) Para $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_{26}^+$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2, 3, 4)$.

Por consiguiente, las únicas nilvariedades que satisfacen el $\partial\bar{\partial}$ -Lema son aquellas que tienen a \mathfrak{h}_1 como álgebra de Lie subyacente, es decir, los toros complejos (como ya habíamos señalado anteriormente).

Las más cercanas a cumplirlo sin llegar a hacerlo, serían \mathfrak{h}_8 y \mathfrak{h}_{19}^- , para las cuales $\alpha = 8$, y la más distante sería \mathfrak{h}_{15} con las estructuras complejas J_3 y J_4 , pues en ese caso $\alpha = 34$.

4.2. Comportamiento por deformación

En esta sección consideramos algunas familias explícitas J_t de estructuras complejas para mostrar el comportamiento de la cohomología de Bott-Chern y la variación del invariante complejo α a lo largo de ellas. Como hemos indicado en el Capítulo 1, las funciones $h_{\text{BC}}^{p,q}(J_t)$, y por tanto la función $\alpha(J_t)$, son semi-continuas superiores.

DEFORMACIÓN DE ESTRUCTURAS COMPLEJAS SOBRE \mathfrak{h}_4 .

Sea $N = \Gamma \backslash G$ una nilvariedad con álgebra de Lie subyacente \mathfrak{h}_4 y sea $\{e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6\}$ una base de 1-formas invariantes a izquierda sobre G tales que

$$de^1 = de^2 = de^3 = de^4 = 0, \quad de^4 = e^{12}, \quad de^6 = e^{14} + e^{23}.$$

Consideramos la familia de estructuras complejas $\{J_t\}_{t \neq 0}$ dada por:

$$Je^1 = -e^4, \quad Je^3 = -t(e^3 - e^4), \quad Je^5 = e^6,$$

lo que permite definir la siguiente base de $\mathfrak{g}^{1,0}$:

$$\omega^1 = e^1 - iJ_t e^1 = e^1 + ie^4, \quad \omega^2 = e^2 - iJ_t e^2 = e^2 + it(e^3 - e^4),$$

$$\omega^3 = 2(e^5 - iJ_t e^5) = 2(e^5 - ie^6).$$

Derivando, se obtiene $d\omega^1 = d\omega^2 = 0$ y

$$\begin{aligned}
d\omega^3 &= 2de^5 - 2de^6 = 2(e^1 \wedge e^2) - 2i(e^1 \wedge e^4) - 2i(e^2 \wedge e^3) \\
&= (e^1 + ie^4) \wedge (2e^2) - 2ie^4 \wedge e^2 - 2i(e^1 \wedge e^4) - 2i(e^2 \wedge e^3) \\
&= \omega^1 \wedge (\omega^2 + \omega^{\bar{2}}) + 2ie^2 \wedge e^4 - 2ie^2 \wedge e^3 - 2ie^1 \wedge e^4 \\
&= \omega^{12} + \omega^{1\bar{2}} + 2e^2 \wedge (ie^4 - ie^3) - 2ie^1 \wedge e^4 \\
&= \omega^{12} + \omega^{1\bar{2}} + \frac{1}{t}(\omega^2 + \omega^{\bar{2}}) \wedge \omega^{\bar{2}} - 2ie^1 \wedge e^4 \\
&= \omega^{12} + \omega^{1\bar{1}} + \omega^{1\bar{2}} + \frac{1}{t}\omega^{2\bar{2}}.
\end{aligned}$$

Luego $\{J_t\}_{t \in (0,1]}$ es una deformación de la estructura compleja J_1 dada por:

$$d\omega^1 = d\omega^2 = 0, \quad d\omega^3 = \omega^{12} + \omega^{1\bar{1}} + \omega^{1\bar{2}} + \omega^{2\bar{2}}.$$

Estas son precisamente las ecuaciones de una estructura compleja no abeliana sobre \mathfrak{h}_4 con $D = 1$, cuyos grupos de cohomología de Bott-Chern tienen dimensiones:

$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
2	1	4	1	6	2	7	3	1

Cuando t se acerca a cero, $D = \frac{1}{t}$ se mueve en $(1, \infty)$, lo que provoca un cambio en la estructura compleja que aparece reflejado en $h_{BC}^{2,2}$, que pasa de 7 a 6, es decir, tenemos $h_{BC}^{2,2}(J_t) = 6, \forall t \in (0, 1)$. Luego tal y como hemos señalado en la Sección 1.3, las dimensiones de los grupos de cohomología de Bott-Chern no aumentan por pequeñas deformaciones.

Como consecuencia hemos obtenido una nilvariedad (distinta de Iwasawa [2]) en la que los grupos de cohomología de Bott-Chern no son invariantes por pequeñas deformaciones de la estructura compleja.

Notar que esa disminución en la dimensión del grupo de cohomología $H_{BC}^{2,0}$ hace que J_1 esté más lejos de satisfacer el $\partial\bar{\partial}$ -Lema que el resto de estructuras parametrizadas por la familia $\{J_t\}_{t \in (0,1]}$, pues $\alpha(N, J_1) = 14$ y para $t \in (0, 1)$, se tiene $\alpha(N, J_t) = 12$.

DEFORMACIÓN DE ESTRUCTURAS COMPLEJAS SOBRE \mathfrak{h}_5 .

Ahora consideramos el álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{h}_5 , con base real $\{e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6\}$ cumpliendo:

$$de^1 = de^2 = de^3 = de^4 = 0, \quad de^5 = e^{13} - e^{24}, \quad de^6 = e^{14} + e^{23}.$$

En primer lugar, consideramos la estructura compleja J sobre \mathfrak{h}_5 , dada por:

$$Je^1 = -e^2, \quad Je^3 = -(2e^2 + e^4), \quad Je^5 = -e^6.$$

Esta definición da lugar a la base compleja $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ de tipo $(1, 0)$ dada por:

$$\begin{aligned} \omega^1 &= e^1 - iJe^1 = e^1 + ie^2, & \omega^2 &= e^3 - iJe^3 = e^3 + i(2e^2 + e^4), \\ \omega^3 &= e^5 - iJe^5 = e^5 + ie^6. \end{aligned}$$

Observar que $d\omega^1 = 0 = d\omega^2$ y

$$\begin{aligned} d\omega^3 &= de^5 + ide^6 = e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4 + ie^1 \wedge e^4 + ie^2 \wedge e^3 \\ &= e^1 \wedge (e^3 + ie^4) + e^2 \wedge (-e^4 + ie^3) \\ &= e^1 \wedge (e^3 + 2ie^2 + ie^4) - e^1 \wedge (2ie^2) + e^2 \wedge (-e^4 + ie^3 - 2e^2) \\ &= \frac{1}{2}(\omega^1 + \omega^{\bar{1}}) \wedge \omega^2 - \frac{1}{2}(\omega^1 + \omega^{\bar{1}}) \wedge (\omega^1 - \omega^{\bar{1}}) + \frac{1}{2}(\omega^1 - \omega^{\bar{1}}) \wedge \omega^2 \\ &= \omega^{12} + \omega^{1\bar{1}}. \end{aligned}$$

A la vista de la Tabla 1 resulta que tenemos una estructura compleja no abeliana con $D = 0 = \lambda$. Tal y como aparece en [7], vamos a considerar una deformación a lo largo de $\Re \mathfrak{e}D$ dejando $\lambda = 0$ fijo. Para cada $x = \Re \mathfrak{e}D \neq 0$ se define:

$$\begin{aligned} J_{0,x}e^1 &= \frac{1}{\sqrt{1+4x}} [(4x-1)e^2 + 2xe^4], & J_{0,x}e^2 &= \sqrt{1+4x}e^1 + \frac{2x}{\sqrt{1+4x}}e^3, \\ J_{0,x}e^3 &= -\sqrt{1+4x}(2e^2 + e^4), & J_{0,x}e^4 &= -2\sqrt{1+4x}e^1 + \frac{1-4x}{\sqrt{1+4x}}e^3, \\ J_{0,x}e^5 &= \frac{-1}{\sqrt{1+4x}}e^6, & J_{0,x}e^6 &= \sqrt{1+4x}e^5. \end{aligned}$$

Notemos que $J_{0,0} = J$.

Teniendo en cuenta la tabla de la Sección 3.4 correspondiente a \mathfrak{h}_5 , vemos que cuando $\lambda = 0 = y$ se produce una pequeña variación desde $x = 0$ hacia la parte positiva o hacia la parte negativa de la recta real, por lo que siempre hay un salto en $h_{\text{BC}}^{2,0}$ de 2 a 1.

De la misma manera, cuando $x = 1/2$ y se hace una pequeña variación, aparece un cambio en $h_{\text{BC}}^{2,2}$, que disminuye de 8 a 7.

Por tanto, tomando la deformación anterior tenemos lo siguiente: Partimos de un punto x mayor que $D = -1/4$ pero próximo a él. Entonces $(N, J_{0,x})$ es una nilvariedad compleja con las siguientes dimensiones de los grupos de cohomología de Bott-Chern:

$h_{\text{BC}}^{1,0}$	$h_{\text{BC}}^{2,0}$	$h_{\text{BC}}^{1,1}$	$h_{\text{BC}}^{3,0}$	$h_{\text{BC}}^{2,1}$	$h_{\text{BC}}^{3,1}$	$h_{\text{BC}}^{2,2}$	$h_{\text{BC}}^{3,2}$	$h_{\text{BC}}^{3,3}$
2	1	4	1	6	2	7	3	1

Vamos aproximando x a 0 sin que esto suponga ningún cambio visible en los $h_{\text{BC}}^{p,q}$ anteriores, pero al llegar a 0, se produce una variación en $h_{\text{BC}}^{2,0}$, que pasa de 1 a 2. Al continuar hacia la parte positiva este cambio se deshace y volvemos a tener $h_{\text{BC}}^{2,0} = 1$. Si seguimos recorriendo el eje positivo, al llegar a $x = 1/2$ encontramos un nuevo salto, esta vez en $h_{\text{BC}}^{2,2}$, que pasa de 7 a 8. Al superar este punto, recuperamos $h_{\text{BC}}^{2,2} = 7$ y las dimensiones de los grupos de cohomología de Bott-Chern permanecen estables para los restantes $x > \frac{1}{2}$.

En cuanto al invariante α se tiene:

$$\alpha(N, J_{0,x}) = \begin{cases} 18, & \text{si } D = 0, \\ 16, & \text{si } D = \frac{1}{2}, \\ 14, & \text{si } D \in (-\frac{1}{4}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty). \end{cases}$$

A continuación, vamos a considerar otra estructura compleja J de partida y con ella, otra deformación sobre \mathfrak{h}_5 , esta vez a lo largo de $\Im m D$.

Ahora J viene dada de la siguiente manera:

$$J e^1 = -e^2, \quad J e^3 = \frac{-2}{1-\lambda} e^2 - \frac{1+\lambda}{1-\lambda} e^4, \quad J e^5 = -e^6,$$

lo que da lugar a la base compleja:

$$\omega^1 = e^1 + i e^2, \quad \omega^2 = \frac{1}{1+\lambda}(e^3 - e^1) + \frac{i}{1-\lambda}(e^2 + e^4), \quad \omega^3 = e^5 + i e^6.$$

Se puede ver que $d\omega^1 = d\omega^2 = 0$ y $d\omega^3 = \omega^{1\bar{2}} + \omega^{1\bar{1}} + \lambda\omega^{1\bar{2}}$. Comparando esta expresión con las ecuaciones de estructura de \mathfrak{h}_5 que aparecen en la Tabla 1, se tiene que $D = 0$ y $\lambda \geq 0$ con $\lambda \neq 1$.

Dado $t \in [0, \frac{1}{2})$, se considera la siguiente deformación:

$$\begin{aligned} J_t e^1 &= \frac{4d(1-\lambda)}{a^2} e^1 - \frac{1-\lambda^2}{a} e^2 - \frac{2d(1-\lambda)^2}{a^2} e^3 + \frac{8d^2(1-\lambda)}{a^3} e^4, \\ J_t e^2 &= \frac{1-\lambda^2}{a} e^1 + \frac{2d(1-\lambda^2)}{a^2} e^4, \\ J_t e^3 &= \frac{-2d}{(1-\lambda)^2} e^1 - \frac{2a}{(1-\lambda^2)(1-\lambda)} e^2 - \frac{(1+\lambda)^2}{a} e^4, \\ J_t e^4 &= \frac{-2(1-\lambda)}{a} e^1 + \frac{2d}{1-\lambda^2} e^2 + \frac{(1-\lambda)^2}{a} e^3 - \frac{4d(1-\lambda)}{a^2} e^4, \\ J_t e^5 &= \frac{2d}{1-\lambda^2} e^5 - \frac{4d^2+(1-\lambda^2)^2}{a(1-\lambda^2)} e^6, \\ J_t e^6 &= \frac{a}{1-\lambda^2} e^5 - \frac{2d}{1-\lambda^2} e^6, \end{aligned}$$

donde $a = \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 - 4d^2}$ y d es una función que depende de λ y de t , y que viene dada como sigue:

$$d(t, \lambda) = \begin{cases} t, & \text{si } \lambda = 0, \\ t\lambda^2/4, & \text{si } 0 < \lambda^2 < 1/2, \\ t(1 - \lambda^2)/4, & \text{si } 1/2 \leq \lambda^2 < 1, \\ t(\lambda^2 - 1)/4, & \text{si } \lambda^2 > 1. \end{cases}$$

Observar que $J_0 = J$.

Con el cambio de la estructura compleja, hay un cambio en la base compleja y con ella, en las ecuaciones de estructura de la nilvariedad, que ahora vienen dadas por:

$$d\omega^1 = d\omega^2 = 0, \quad d\omega^3 = \omega^{12} + \omega^{1\bar{1}} + \lambda\omega^{1\bar{2}} + id(t, \lambda)\omega^{2\bar{2}}.$$

Tenemos así $D = id(t, \lambda)$, por lo que al variar t se produce una deformación en la estructura compleja a lo largo de la cual $\Re D = 0$ y $\Im D = d(t, \lambda)$. Es decir, nos movemos en el eje imaginario de D .

Para ver cómo cambian los grupos de cohomología de Bott-Chern, conviene distinguir dos casos:

- Para $\lambda = 0$ partimos de una estructura compleja J_0 cuyos grupos de cohomología de Bott-Chern tienen dimensiones:

$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
2	2	4	1	6	2	7	3	1

Como $\lambda = 0$, resulta que $\Im D = d(t, 0) = t \in [0, \frac{1}{2})$, luego al hacer variar t desde el cero hacia la parte positiva, aparecen dos cambios en los grupos de cohomología: $h_{BC}^{2,0}$ pasa de 2 a 1 y $h_{BC}^{2,2}$ baja de 7 a 6.

Por tanto, en este caso el invariante α varía de la siguiente manera:

$$\alpha(N, J_t) = \begin{cases} 18, & \text{si } D = 0, \\ 12, & \text{si } D = it \text{ con } 0 < t < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- Para cualquier $\lambda > 0$ con $\lambda \neq 1$ se tiene:

$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
2	2	4	1	6	2	6	3	1

para la estructura compleja de partida J_0 . Conservando λ fijo, el hecho de que $\Im m D = d(t, \lambda)$ y que $t \in [0, \frac{1}{2})$ implica que $\Im m D$ debe cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 0 \leq \Im m D = \frac{t\lambda^2}{4} < \frac{\lambda^2}{8}, & 0 < \lambda^2 < \frac{1}{2}, \\ 0 \leq \Im m D = \frac{t(1-\lambda^2)}{4} < \frac{1-\lambda^2}{8}, & \frac{1}{2} < \lambda^2 < 1, \\ 0 \leq \Im m D = \frac{t(\lambda^2-1)}{4} < \frac{\lambda^2-1}{8}, & \lambda^2 > 1. \end{cases}$$

De nuevo, si consideramos una deformación lo suficientemente pequeña, las dimensiones de los grupos de cohomología de Bott-Chern no aumentan, pues el único cambio que aparece se da en $h_{BC}^{2,0}$ que pasa de 2 a 1.

Pero observemos que en la tabla resumen existe un cambio en el grupo de cohomología $H_{BC}^{1,1}$ cuando $\lambda^2 > 5$, $\Re e D = 0$ y $\Im m D = \sqrt{\lambda^2 - 1}$, luego sería posible que esta misma familia no sólo diese una pequeña deformación de J_0 , sino también de una cierta J_{t_0} cuando $\lambda^2 > 5$. Vamos a estudiar este caso.

Dada $\lambda^2 > 5$, para que lo anterior sea posible necesitamos que $\sqrt{\lambda^2 - 1} = \frac{t(\lambda^2-1)}{4}$, lo cual es cierto para $t = \frac{4}{\sqrt{\lambda^2-1}}$. Sin embargo, t varía de 0 a 1/2 lo que nos lleva a imponer $\frac{4}{\sqrt{\lambda^2-1}} < \frac{1}{2}$, condición que implica $\lambda^2 > 65$.

De esta manera, cuando $\lambda^2 > 65$ la familia anterior también da una deformación de la estructura $J_{4/\sqrt{\lambda^2-1}}$ que provoca un cambio visible en el grupo de cohomología $H_{BC}^{1,1}$, cuya dimensión pasa de 5 a 4.

Por tanto, para $\lambda^2 > 65$ la deformación $\{J_t\}_{t \in [0, 1/2)}$ generaría dos saltos en el valor de α . Uno al pasar de $t = 0$ a $t > 0$, donde disminuiría de 16 a 12, y otro al llegar a $t = \frac{4}{\sqrt{\lambda^2-1}}$, donde aumentaría de 12 a 14, punto tras el cual recuperaría su valor. Para los $0 < \lambda^2 < 65$ con $\lambda \neq 1$, este segundo salto en el valor del invariante α no se produciría.

Notemos que en particular al tomar $\lambda = 0$, esta segunda deformación sobre \mathfrak{h}_5 modifica las dimensiones de *dos* grupos de cohomología de Bott-Chern. Este hecho también se puede apreciar en [2] para el caso de las pequeñas deformaciones de la variedad de Iwasawa.

DEFORMACIÓN DE ESTRUCTURAS COMPLEJAS SOBRE \mathfrak{h}_{15} .

En las deformaciones vistas anteriormente siempre nos movíamos dentro de las estructuras complejas no Abelianas del álgebra de Lie nilpotente considerada. Sin embargo, ahora vamos a ver una deformación sobre \mathfrak{h}_{15} que permite saltar de estructuras Abelianas a no Abelianas.

Consideramos la siguiente familia de estructuras complejas, donde $t \in \mathbb{R}$:

$$J_t e^1 = -\sqrt{\frac{3(3 - \sin t)(7 + 3 \sin t)}{(5 + \sin t)(11 - \sin t)}} e^2,$$

$$J_t e^3 = \sqrt{\frac{3(3 - \sin t)(11 - \sin t)}{(5 + \sin t)(7 + 3 \sin t)}} e^4,$$

$$J_t e^5 = -\sqrt{\frac{(11 - \sin t)(7 + 3 \sin t)}{3(3 - \sin t)(5 + \sin t)}} e^6.$$

Sea $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ la base compleja de tipo $(1, 0)$ dada por:

$$4\omega^1 = \sqrt{(5 + \sin t)(11 - \sin t)} e^1 + i\sqrt{3(3 - \sin t)(7 + 3 \sin t)} e^2,$$

$$8\omega^2 = (5 + \sin t)(7 + 3 \sin t) e^3 - i\sqrt{3(3 - \sin t)(5 + \sin t)(11 - \sin t)(7 + 3 \sin t)} e^4,$$

$$128\omega^3 = (5 + \sin t)(7 + 3 \sin t) \left[3(3 - \sin t)\sqrt{(5 + \sin t)(11 - \sin t)} e^5 \right. \\ \left. + i(11 - \sin t)\sqrt{3(3 - \sin t)(7 + 3 \sin t)} e^6 \right].$$

Las ecuaciones de estructura de la nilvariedad correspondiente para cada t son:

$$\begin{cases} d\omega^1 = 0, \\ d\omega^2 = \omega^{1\bar{1}}, \\ d\omega^3 = \frac{1 - \sin t}{2}\omega^{1\bar{2}} + 2\omega^{1\bar{2}} + \frac{1 + \sin t}{4}\omega^{2\bar{1}}. \end{cases}$$

Mirando la Tabla 1, resulta evidente que para que la estructura compleja sea Abeliana es necesario que $\frac{1 - \sin t}{2} = 0$, es decir, que sea $t = \frac{1 + 4k}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. En tal caso, basta reparametrizar para conseguir unas ecuaciones como las de dicha tabla con $c = \frac{1}{4}$.

En otro caso, la estructura no es Abeliana y reparametrizando, nos encontramos con que las ecuaciones pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{cases} d\omega^1 = 0, \\ d\omega^2 = \omega^{1\bar{1}}, \\ d\omega^3 = \omega^{1\bar{2}} + \frac{4}{1 - \sin t}\omega^{1\bar{2}} + \frac{1 + \sin t}{2(1 - \sin t)}\omega^{2\bar{1}}. \end{cases}$$

Es decir, tenemos $B = \frac{4}{1 - \sin t} \in \mathbb{R}$ y $c = \frac{1 + \sin t}{2(1 - \sin t)}$.

Vamos a estudiar cómo varían las dimensiones de los grupos de cohomología de Bott-Chern a lo largo de esta familia de estructuras complejas sobre \mathfrak{h}_{15} .

Partimos de la estructura Abeliiana $J_{(4k+1)\pi/2}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Puesto que siempre se tiene $c = 1/2$, es evidente que:

$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
1	1	4	1	5	3	5	3	1

Al variar ligeramente t la estructura deja de ser Abeliiana, lo que provoca que la dimensión del grupo de cohomología $H_{BC}^{3,1}$ pase de 3 a 2.

Pero esta misma familia $\{J_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ también da deformaciones de estructuras complejas no Abelianas en otras estructuras complejas no Abelianas. Este hecho se puede comprobar mirando, como antes, las dimensiones de los grupos de cohomología de Bott-Chern.

Si hacemos $c = 0$, debe ser $t = \frac{3+4k}{2} \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en cuyo caso queda $B = 2$ y la nilvariedad compleja (N, J_t) cumple:

$h_{BC}^{1,0}$	$h_{BC}^{2,0}$	$h_{BC}^{1,1}$	$h_{BC}^{3,0}$	$h_{BC}^{2,1}$	$h_{BC}^{3,1}$	$h_{BC}^{2,2}$	$h_{BC}^{3,2}$	$h_{BC}^{3,3}$
1	2	4	1	5	2	5	3	1

Al variar ligeramente t , el parámetro c deja de ser cero, lo que se traduce en un cambio en $h_{BC}^{2,0}$, que pasa de 2 a 1.

En resumen, las dimensiones de los grupos de cohomología cambian periódicamente en los intervalos de longitud 2π , y con ellos el invariante complejo α , que vale 30 cuando $t = \frac{1+4k}{2} \pi$, ó $t = \frac{3+4k}{2} \pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) y 26 en para el resto de valores de t .

Bibliografía

- [1] A. Andrada, M.L. Barberis, I.G. Dotti, Classification of abelian complex structures on 6-dimensional Lie algebras, *J. London Math. Soc.* **83** (2011), 232–255.
- [2] D. Angella, The cohomologies of the Iwasawa manifold and of its small deformations, *J. Geom. Anal.*, DOI: 10.1007/s12220-011-9291-z.
- [3] D. Angella, A. Tomassini, On the $\partial\bar{\partial}$ -Lemma and Bott-Chern cohomology, *Invent. Math.*, DOI: 10.1007/s00222-012-0406-3.
- [4] F.A. Belgun, On the metric structure of non-Kähler complex surfaces, *Math. Ann.* **317** (2000), 1-40.
- [5] C. Benson, C.S. Gordon, Kähler and symplectic structures on nilmanifolds, *Topology* **27** (1988), 513–518.
- [6] R. Bott, S.-S. Chern, Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections, *Acta Math.* **114** (1965), 71—112.
- [7] M. Ceballos, A. Otal, L. Ugarte, R. Villacampa, Classification of complex structures on 6-dimensional nilpotent Lie algebras, arXiv:1111.5873 [math.DG].
- [8] L.A. Cordero, M. Fernández, A. Gray, L. Ugarte, Nilpotent complex structures on compact nilmanifolds, *Rend. Circolo Mat. Palermo* **49** suppl. (1997), 83-100.
- [9] L.A. Cordero, M. Fernández, A. Gray, L. Ugarte, Compact nilmanifolds with nilpotent complex structures: Dolbeault cohomology, *Trans. Amer. Math. Soc.* **352** (2000), 5405–5433.
- [10] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, D. Sullivan, Real homotopy theory of Kähler manifolds, *Invent. Math.* **29** (1975), 245–274.

-
- [11] A. Fino, G. Grantcharov, Properties of manifolds with skew-symmetric torsion and special holonomy, *Adv. Math.* **189** (2004), 439–450.
- [12] K. Hasegawa, Minimal models of nilmanifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **106** (1989), 65–71.
- [13] A. Hattori, Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **8** (1960), 298–331.
- [14] A.I. Mal'cev, A class of homogeneous spaces, English translation *Amer. Math. Soc. Transl.* **39** (1951).
- [15] J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Adv. Math.* **21** (1976), 293–329.
- [16] A. Newlander, L. Nirenberg, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, *Ann. Math.* **65** (1957), 391–404.
- [17] K. Nomizu, On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups, *Ann. Math.* **59** (1954), 531–538.
- [18] S. Rollenske, Geometry of nilmanifolds with left-invariant complex structure and deformations in the large, *Proc. London Math. Soc.* **99** (2009), 425–460.
- [19] S. Rollenske, The Kuranishi space of complex parallelisable nilmanifolds, *J. Eur. Math. Soc.* **13** (2011), no. 3, 513–531.
- [20] S. Salamon, Complex structures on nilpotent Lie algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **157** (2001), 311–333.
- [21] M. Schweitzer, Autour de la cohomologie de Bott-Chern, arXiv:0709.3528v1 [math.AG].
- [22] L. Ugarte, Hermitian structures on six dimensional nilmanifolds, *Transform. Groups* **12** (2007), 175–202.
- [23] L. Ugarte, R. Villacampa, Balanced hermitian geometry on 6-dimensional nilmanifolds, arXiv:1104.5524v2 [math.DG].
- [24] H.C. Wang, Complex parallelizable manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **5** (1954), 771–776.