UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Vectores Minimales y Subespacios Invariantes

Memoria presentada por D. Daniel Rodríguez Luis para optar al grado de Máster en Iniciación a la Investigación en Matemáticas.

Fdo. Daniel Rodríguez Luis

Vº Bº del Director

Fdo. Dña Eva A. Gallardo Gutiérrez.
Profesora Titular del Departamento de Análisis Matemático
de la Universidad Complutense de Madrid.

Zaragoza, 2012.

Índice general

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales.
$\mathbb{R}$	Cuerpo de los números reales.
$\mathbb{C}$	Cuerpo de los números complejos.
$\lvert \cdot \rvert$	Valor absoluto.
$\lVert \cdot \rVert$	Norma.
$\mathcal{H}$	Espacio de Hilbert.
$\mathcal{X}$	Espacio de Banach.
$\mathcal{X}^*$	Espacio dual de $\mathcal{X}$.
$\mathcal{L}(\mathcal{X})$	Operadores lineales y continuos sobre $\mathcal{X}$.
$\mathcal{K}(\mathcal{X})$	Operadores compactos sobre $\mathcal{X}$.
$\{T\}'$	Conmutante de T.
$B_{\mathcal{X}}$	Bola unidad abierta en $\mathcal{X}$.
$\overline{B_{\mathcal{X}}}$	Bola unidad cerrada en $\mathcal{X}$.
$\operatorname{Ker} T$	Núcleo del operador T.
$R(T)$	Imagen o rango del operador T.
$\sigma(T)$	Espectro del operador T.
$r(T)$	Radio espectral del operador T.
$suppf$	Soporte de la función f.

Agradecimientos

En primer lugar quería agradecer a mi directora, la Dra. Eva Gallardo Gutiérrez, no sólo por su incalculable ayuda en la comprensión de las ideas, resultados y razonamientos en torno al problema del subespacio invariante, sino también por su afán de perfeccionismo, sencillez y humildad por el trabajo propio.

Considero que es de justicia agradecer al Prof. Fernando Pérez González, maestro en la Universidad de la Laguna y máximo responsable de que mi futuro académico esté vinculado a la Prof. Eva Gallardo Gutiérrez.

Por último, agradecer a la Universidad de Zaragoza, en particular al departamento de Análisis Matemático, por la oportunidad de formar parte de una familia con un gran valor intelectual y humano.

Introducción

Existen numerosos resultados y problemas abiertos dentro del análisis funcional que involucran la existencia de subespacios invariantes para un operador lineal y continuo. El teorema de la forma canónica de Jordan para espacios de Banach de dimensión finita o el teorema espectral para operadores normales son algunos de estos resultados, donde la esencia reside en saber el comportamiento de un operador lineal y continuo respecto a sus subespacios invariantes.

En este sentido, el teorema de la forma canónica de Jordan afirma que si $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach de dimensión finita, T un operador lineal y $\mathcal{M}$ un subespacio T invariante no trivial, entonces T se expresa como

$$P^{-1}TP = \begin{pmatrix} T^{(1)} & T^{(12)} \\ 0 & T^{(2)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow T \sim \begin{pmatrix} T^{(1)} & T^{(12)} \\ 0 & T^{(2)} \end{pmatrix},$$

donde P es una matriz de cambio de base y $T^{(1)} = T_{|\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ es la restricción de T a $\mathcal{M}$. Es decir, T se expresa (salvo semejanzas) como suma directa de sus restricciones a ciertos subespacios invariantes. Por tanto, no es sorprendente esperar que existan relaciones entre la estructura de un operador T y de la del retículo de sus subespacios invariantes, esto es, $\mathrm{Lat}(T)$.

Ahora bien, dado un espacio de Banach $\mathcal{X}$ con $\dim \mathcal{X} \geq 2$ y un operador T lineal y continuo en $\mathcal{X}$, ¿es siempre posible encontrar un subespacio cerrado no trivial $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$, esto es $\{0\} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{X}$, verificando que $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$?. Esta cuestión, de naturaleza "naive", aparentemente surge tras los trabajos de Beurling donde caracteriza los subespacios cerrados e invariantes para el operador multiplicación M_z en el espacio de Hardy H^2 (véase [8]) y el de von Neumann, donde se prueba la existencia subespacios cerrados e invariantes no triviales para operadores compactos en espacios de Hilbert (que nunca llegó a publicarse).

Es claro que dicha cuestión tiene un respuesta positiva para espacios de Banach complejos $\mathcal{X}$ de dimensión finita, sin más que considerar el subespacio cerrado, T invariante y no trivial

$$\operatorname{Ker}(T-\lambda I)=\{x\in\mathcal{X}:(T-\lambda I)x=0\},$$

esto es, el subespacio asociado al autovalor λ del operador T. A diferencia del caso complejo, para espacios de Banach reales y de dimensión finita existen operadores lineales que no poseen subespacios invariantes no triviales. Por ejemplo, si consideramos el operador lineal T en $\mathbb{R}^2$ dado por la matriz

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

respecto a la base canónica, entonces los únicos subespacios cerrados e invariantes son los triviales. En efecto, ya que en caso contrario, si $\mathcal{M}$ es un subespacio cerrado no trivial, entonces necesariamente $\dim\mathcal{M}=1$. Por lo tanto, existe $x_0\in\mathcal{X}$ vector no nulo tal que $\mathcal{M}=\langle\{x_0\}\rangle$ y, por ser T invariante, $Tx_0=\lambda x_0$ para cierto $\lambda\in\mathbb{R}$. Ya que $T^2=-I$, se tiene que

$$-x_0=-Ix_0=T^2x_0=T(Tx_0)=\lambda Tx_0=\lambda^2x_0,$$

y al ser $x_0\neq 0$, concluimos que necesariamente $\lambda^2+1=0$. Como esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$, tal subespacio $\mathcal{M}$ no puede existir. Sin embargo, si $\dim\mathcal{X}\geq 3$ entonces es posible conseguir subespacios cerrados e invariantes de dimensión 1 ó 2.

Luego, podemos afirmar que dado un espacio de Banach $\mathcal{X}$ real de dimensión finita y T un operador lineal en $\mathcal{X}$, T posee un subespacio cerrado e invariante no trivial si y sólo si bien $\dim\mathcal{X}\geq 3$ o bien $\dim\mathcal{X}=2$ y T admite autovalores.

¿Qué ocurre cuando el espacio de Banach no es de dimensión finita? En este caso, conviene observar que no siempre es posible obtener subespacios cerrados e invariantes a partir de aquellos asociados a los autovalores del operador T. Así, el operador desplazamiento S definido en ℓ^1 por

$$T(x_1,x_2,\dots)=(0,x_1,x_2,\dots),\quad (x_1,x_2,\dots)\in\ell^1,$$

no tiene autovalores.

No obstante, si $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach no separable, siempre es posible encontrar subespacios cerrados e invariantes no triviales asociados a un operador lineal y continuo T sin más que considerar $\mathcal{M}=\overline{\operatorname{span}\{T^nx_0:n\in\mathbb{N}\}}$, siendo $x_0\in\mathcal{X}$ vector no nulo.

En el caso en que $\mathcal{X}$ sea un espacio de Banach separable y T un operador lineal y continuo no nulo tal que $\operatorname{Ker}T\neq\{0\}$ ó $\overline{R(T)}\neq\mathcal{X}$, es claro que siempre es posible asegurar la existencia de un subespacio cerrado e invariante no trivial, ya que tanto el núcleo como la clausura del rango del operador son cerrados, T invariantes y no triviales.

En 1975, Per Enflo presentó la existencia de un espacio de Banach **separable** y un operador T lineal, continuo, **inyectivo y de rango denso** sin subespacios cerrados e invariantes no triviales en *Seminaire Maurey-Schwartz*, celebrado en la École Polytechnique de París. Sin embargo, pasarían casi doce años hasta que su contrajemplo fuera oficialmente publicado en *Acta Mathematica*, retraso que se debió a la enorme complejidad del mismo (véase [14]).

A continuación, daremos una idea sobre la construcción de dicho contraejemplo: decir que los únicos subespacios cerrados e invariantes para un operador T lineal y continuo son los triviales es equivalente a que $\overline{\text{span}\{T^k x : k \geq 0\}} = \mathcal{X}$ para todo $x \in \mathcal{X}$. En efecto:

- Si existiese $x_0 \in \mathcal{X}$, $x_0 \neq 0$, vector no cíclico entonces $\mathcal{M} = \overline{\text{span}\{T^k x_0 : k \geq 0\}}$ es un subespacio cerrado e invariante no trivial.
- Si $\{0\} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{X}$ tal que $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ entonces, para $x_0 \in \mathcal{M}$, $x_0 \neq 0$, se tiene que $\overline{\text{span}\{T^k x : k \geq 0\}} \subset \mathcal{M}$.

El punto de partida es el hecho de que todo operador T que tenga un vector cíclico, esto es, $\overline{\text{span}\{T^k x : k \geq 0\}} = \mathcal{X}$ para cierto $x \in \mathcal{X}$, puede representarse como el operador de multiplicación por la variable z en el espacio de los polinomios dotado de una cierta norma. Esto se debe a que si x_0 es un vector cíclico, y en virtud de que $\dim \mathcal{X} = \infty$, el conjunto $\{T^k x_0\}_{k \geq 0}$ es linealmente independiente. De esta manera, a la suma finita $\sum_{k=0}^{n} a_k T^k x_0$ podemos asociarle el polinomio $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ y definir una norma en $\mathcal{P}[z]$ dada por

$$\|p_n\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k T^k x_0 \right\|_{\mathcal{X}},$$

donde $\mathcal{P}[z] = \{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k : n \in \mathbb{N}\}$. Del caracter cíclico del vector x_0 se sigue que el completado de $\mathcal{P}[z]$, denotado por $\overline{\mathcal{P}[z]}^{\|\cdot\|}$, con la norma antes descrita es un espacio de Banach isométrico a $\mathcal{X}$. Además, se observa que

$$T\left(\sum_{k \geq 0} a_k T^k x_0\right) = \sum_{k \geq 0} a_k T^{k+1} x_0 \xrightarrow{\text{se identifica}} \sum_{k \geq 0} a_k z^{k+1} = z \sum_{k \geq 0} a_k z^k.$$

Por lo tanto, podemos representar el operador T como el operador de multiplicación M_z en $\mathcal{P}[z]$ dotado con la norma $\| \cdot \|$. Con dicha representación, el vector x_0 se identifica con el polinomio constante 1 que es cíclico en $\mathcal{P}$, esto es, $\overline{\text{span}\{1, z, z^2, \dots\}} = \mathcal{P}$. Por ello, para afirmar que un polinomio $p \in \mathcal{P}$ es cíclico es suficiente probar que $1 \in \overline{\text{span}\{p(z), zp(z), z^2p(z), \dots\}}$.

Con vista a construir un operador T sin subespacios cerrados e invariantes no triviales, exigimos en primer lugar que todo polinomio $p \in \mathcal{P}$ sea cíclico para el operador de multiplicación, esto es, para todo $p \in \mathcal{P}$ y para todo $\varepsilon > 0$, exista $q \in \mathcal{P}[z]$ tal que $\|pq - 1\| < \varepsilon$.
Como lo que se pretende es asegurar que todo polinomio p del espacio de Banach $\overline{\mathcal{P}[z]}^{\|\cdot\|}$ sea cíclico, basta con exigir en segundo lugar que para toda $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesión de polinomios en $\mathcal{P}$ y para todo $\varepsilon > 0$, exista $\{q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\mathcal{P}[z]$ tal que $\|p_jq_j - 1\| < \varepsilon$ con $\sup_j \|q_j\|_{op} < \infty$, donde $\|q_j\|_{op} = \|q_j(T)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$. En efecto, ya que si $r \in \overline{\mathcal{P}[z]}^{\|\cdot\|}$, entonces existen $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}[z]$ tales que $\|r - p_j\| < \varepsilon$ y $\|p_jq_j - 1\| < \varepsilon$, garantizando que

$$\|rq_j - 1\| \leq \|rq_j - p_jq_j\| + \|p_jq_j - 1\| \leq \varepsilon(\sup_j \|q_j\|_{op} + 1).$$

Por lo tanto, en virtud de la primera de las exigencias, concluimos que r es cíclico para el operador de multiplicación por M_z.

Más tarde, aunque se publicaría antes, C. Read contruyó un operador lineal y continuo en ℓ^1 sin subespacios cerrados e invariantes no triviales (véase [22]). Posteriormente, A.M. Davie (véase [6]) simplificó el ejemplo dado por Read.

Por lo tanto, en general, no todo operador lineal y continuo en un espacio de Banach posee un subespacio cerrado e invariante no trivial. A pesar de haber resuelto el caso más general, todos los contraejemplos hasta la fecha son sobre espacios de Banach no reflexivos, por lo que es natural preguntarse ¿qué ocurre para el caso reflexivo? ¿es posible que todo operador lineal y acotado en un espacio de Banach reflexivo posea un subespacio cerrado e invariante no trivial?

En la actualidad, y por todo lo anteriormente expuesto, el problema del subespacio invariante aborda la cuestión: dado un espacio de Banach reflexivo $\mathcal{X}$ de dimensión infinita, separable y un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, ¿existe siempre un subespacio cerrado no trivial $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$, esto es $\{0\} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{X}$, verificando que $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$?.

A la hora de extender la clase de operadores que poseen subespacios cerrados e invariantes, cabe preguntarse qué ocurre con aquellos operadores que conmutan con uno del que sí se conocen subespacios cerrados e invariantes no triviales. En esta línea, dado un operador T en un espacio de Banach

$\mathcal{X}$, diremos que un subespacio cerrado no trivial $\mathcal{M}$ es *hiperinvariante* si se mantiene invariante para todo operador que conmute con T, esto es, si $S\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ para todo $S \in \{T\}'$, donde $\{T\}' = \{S \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : TS = ST\}$. Este tipo de subespacios con esa propiedad de invarianza tan particular existen, por ejemplo, si $KerT \neq \{0\}$ o $\overline{R(T)} \neq \mathcal{X}$, pues ambos son subespacios cerrados e invariantes no triviales bajo cualquier operador que conmute con T.

Quizás el logro más significativos en esta dirección sea una versión del Teorema de Lomonosov, en el que se afirma que todo operador lineal y continuo T en un espacio de Banach $\mathcal{X}$ de dimensión infinita que conmute con un operador compacto K no nulo posee un subespacio cerrado e invariante no trivial (véase [19]). Si además el operador T es no escalar, esto es, $T \neq \lambda I$, se tiene un subespacio cerrado e hiperinvariante no trivial. La importancia de este resultado no sólo reside en dicha afirmación, sino que además proporciona una respuesta positiva para operadores compactos y polinomialmente compactos que, gracias a los trabajos de von Neumann, N. Aronszajn, K. T. Smith, A. R. Bernstein y A. Robinson, sólo se conocían la existencia de subespacios cerrados e invariantes.

Observamos que dado un espacio de Banach $\mathcal{X}$ complejo de dimensión infinita y una cadena de operadores $S, T, K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ tales que S conmuta con T, T conmuta con K y K operador compacto, entonces S posee un subespacio cerrado e invariante no trivial. A la vista de esto, cabe preguntarse: ¿es posible extender la longitud de la cadena de operadores de forma que el primero de ellos posea un subespacio cerrado e invariante no trivial? Esta cuestión fue resuelta de manera negativa por Vladimir Troitsky probando que si $T : \ell^1 \to \ell^1$ es el operador sin subespacios cerrados e invariantes no triviales construido por C. Read, entonces es posible construir una cadena de operadores T, S_1, S_2, K tal que T conmuta con S_1, S_1 conmuta con S_2 y S_2 conmuta con K siendo este último un operador compacto (véase [27]).

El problema sobre la existencia de subespacios invariantes en espacios reflexivos es, a día de hoy, un problema abierto dentro del análisis funcional al que podemos añadir cuestiones aún sin resolver. No obstante, un trabajo de reciente publicación da una respuesta positiva a la cuestión sobre la existencia de un espacio de Banach en el que todo operador lineal y continuo posee un subespacio cerrado e invariante no trivial (véase [4]). En esencia, los autores construyen un espacio de Banach $\mathcal{X}$ de dimensión infinita en el que todo operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ es suma de un operador compacto y un operador escalar y, en virtud del Teorema de Lomonosov, posee subespacio cerrado e invariante no trivial.

Hace poco más de una década, Shamim Ansari y Per Enflo desarrollaron una técnica nueva para generar subespacios cerrados e invariantes de operadores en espacios de Hilbert (véase [3]). Esta propuesta consiste en encontrar vectores de norma mínima (vectores minimales) en ciertos conjuntos que involucran al operador inyectivo y de rango denso T en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ del que se desean conocer tales subespacios. El objetivo es aportar una respuesta, bien sea positiva o negativa, que arroje un poco de luz sobre el problema del subespacio invariante en espacios reflexivos.

El objetivo de este Trabajo de Fin de Máster ha sido estudiar el comportamiento de los vectores minimales para ciertas clases de operadores. En particular, el trabajo "Extremal vectors and invariant subspaces"(Transactions of American Mathematical Society 350 (1998), no. 2, 539–558), donde Ansari y Enflo demuestran que el método funciona en casos aparentemente no relacionados: operadores normales y operadores compactos cuasinilpotentes.Asímismo, en "Some results on extremal vectors and invariant subspaces"(Proceedings of American Mathemathical Society 131 (2003), no. 2, 379–387), donde Enflo y Höim investigan las conexiones entre los distintos parámetros asociados con los vectores minimales. Y en "Convergence properties of minimal vectors for normal operators and weighted shifts"(Proceedings of American Mathemathical Society 133, (2004), no. 2, 501-510), donde Chalendar y Partington estudian el comportamiento de la sucesión de vectores minimales asociada a ciertas clases de operadores en espacios L^p reflexivos, incluyendo operadores de multiplicación y operadores de desplazamiento bilateral con peso.

Capítulo 1

Conceptos Básicos

En este capítulo introducimos el concepto de vector minimal y λ-vector minimal asociados a un operador lineal, continuo, inyectivo y de rango denso. Estudiaremos bajo qué condiciones podemos asegurar tanto la existencia como la unicidad de dichos vectores, así como las propiedades que éstos verifican. Finalmente, analizamos el comportamientos de los vectores minimales asociados a ciertos operadores, como los quiasinilpotentes, y su relación con la existencia de subespacios invariantes.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach complejo y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,, \|x_0\|)$, definimos el conjunto

$$K_n^\varepsilon := (T^n)^{-1}(\overline{B(x_0, \varepsilon)}) = \{y \in \mathcal{X} : \|T^n y - x_0\| \leq \varepsilon\}. \tag{1.0.1}$$

Observamos que:

1. $0 \notin K_n^\varepsilon$.
2. K_n^ε es cerrado y convexo para todo $n \in \mathbb{N}$, al ser T^n lineal y continuo.
3. $K_n^\varepsilon \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, al ser T de rango denso (y por tanto T^n también lo es).

Fijados $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$, el ínfimo de la norma de los vectores de K_n^ε, esto es,

$$d_n^\varepsilon = \text{ínf}\{\|y\| : y \in K_n^\varepsilon\}, \tag{1.0.2}$$

satisface que $d_n^\varepsilon > 0$.

Definición 1.1. Fijado $\lambda > 1$, se denominan *λ-vectores minimales* a aquellos $y_n^\varepsilon \in K_n^\varepsilon$ tales que $d_n^\varepsilon \leq \|y_n^\varepsilon\| \leq \lambda d_n^\varepsilon$. Para $\lambda = 1$, si existen, se denominan *vectores minimales* asociados al operador T con parámetros x_0, n y ε.

Nota 1.1. Para $\lambda > 1$, los λ-vectores minimales siempre existen. En efecto, fijados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$, por la definición de d_n^ε, se tiene que para todo $\delta > 0$ existe $y_n^\varepsilon \in K_n^\varepsilon$ tal que

$$d_n^\varepsilon \leq \|y_n^\varepsilon\| \leq d_n^\varepsilon + \delta d_n^\varepsilon = (1+\delta)d_n^\varepsilon = \lambda d_n^\varepsilon.$$

Sin embargo, no en todos los espacios de Banach se puede encontrar vectores minimales.

Ciertas condiciones sobre el espacio $\mathcal{X}$ son suficientes para garantizar la existencia de los vectores minimales asociados a un operador T lineal, continuo, inyectivo y de rango denso. Una de ellas se recoge en la Proposición 1.1.

Antes de enunciarla, recordamos que un espacio normado es *estrictamente convexo* si para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$ linealmente independientes se cumple la desigualdad triangular estricta, esto es, $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$.

Proposición 1.1. *Sea $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach reflexivo y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ inyectivo y de rango denso. Entonces existen los vectores minimales y_n^ε para $x_0 \in \mathcal{X}$, $\varepsilon \in (0\,, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$ parámetros fijados cumpliendo*

$$\|T^n y_n^\varepsilon - x_0\| = \varepsilon. \tag{1.0.3}$$

Si además $\mathcal{X}$ es estrictamente convexo, dichos vectores minimales son únicos.

Demostración. Sean $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$ fijos. De la definición (1.0.2) se sigue que existe una sucesión en K_n^ε, que denotaremos por $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, de manera que $\|z_k\| \to d_n^\varepsilon$ cuando $k \to \infty$. Como la sucesión $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada, existe una subsucesión, a saber, $\{z_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente a un vector $z_0 \in \mathcal{X}$, esto es, $z_{k_m} \xrightarrow{w} z_0$. Ahora bien:

1. $\underline{z_0 \in K_n^\varepsilon}$: En efecto, ya que $z_{k_m} \xrightarrow{w} z_0$ cuando $m \to \infty$ y K_n^ε subconjunto convexo y cerrado de $\mathcal{X}$ se tiene que

$$(K_n^\varepsilon)^w = (\overline{K_n^\varepsilon})^w = (\overline{K_n^\varepsilon})^{\|\cdot\|},$$

   esto es, el conjunto de puntos límite en la topología débil coincide con el conjunto de puntos límite en la topología generada por la norma, que es consecuencia de la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach y la convexidad de K_n^ε (véase [[13, corolario 3, pp 11]).

2. $\underline{\|z_0\| = d_n^\varepsilon}$: Por el apartado anterior, se tiene que $d_n^\varepsilon \leq \|z_0\|$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $d_n^\varepsilon < \|z_0\|$. Como $\|z_k\| \to d$ existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq \nu$ se tiene que

$$\|z_k\| - d_n^\varepsilon < \frac{\|z_0\| - d_n^\varepsilon}{2}.$$

En particular, para $k_m \geq \nu$, se tiene que $\|z_{k_m}\| < \|z_0\|$. De esta manera

$$0 < \|z_0\| - \|z_{k_m}\| \leq \|z_{k_m} - z_0\| = \sup\{|\varphi(z_{k_m} - z_0)| : \varphi \in \mathcal{X}^*,\ \|\varphi\| = 1\}.$$

De la definición de supremo se sigue que para todo $0 < \delta < \|z_{k_m} - z_0\|$, existe $s \in \mathbb{N}$ y $\varphi_s \in \mathcal{X}^*$ con $\|\varphi_s\| = 1$ tal que

$$0 < \delta < |\varphi_s(z_{k_m} - z_0)| \leq \sup_{\|\varphi\|=1} |\varphi(z_{k_m} - z_0)|.$$

Como además $z_{k_m} \xrightarrow{w} z_0$ se tiene que

$$0 < \lim_{m\to\infty} |\varphi_s(z_{k_m} - z_0)| = \lim_{m\to\infty} |\varphi_s(z_{k_m}) - \varphi_s(z_0)| = 0.$$

Luego $\|z_0\| = d_n^\varepsilon$.

De esta manera se conluye que z_0 es un vector minimal asociado a T.

Fijados $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$, denotamos por y_n^ε al vector minimal asociado al operador T . Veamos que dicho vector satisface la condición (1.0.3). Por reducción al absurdo, supongamos que $\|T^n y_n^\varepsilon - x_0\| < \varepsilon$. De esta manera $T^n y_n^\varepsilon \in B(x_0, \varepsilon)$ y por lo tanto existe $t \in (0, 1)$ de forma que $(1-t)T^n y_n^\varepsilon \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$, esto es

$$\|T^n(\ (1-t)y_n^\varepsilon\ ) - x_0\| = \|(1-t)T^n y_n^\varepsilon - x_0\| \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto $(1-t)y_n^\varepsilon \in K_n^\varepsilon$ y con $\|(1-t)y_n^\varepsilon\| = (1-t)\|y_n^\varepsilon\| < \|y_n^\varepsilon\|$, lo que contradice la minimalidad del vector y_n^ε.

Por último, veamos que si $\mathcal{X}$ es estrictamente convexo, se tiene unicidad. Supongamos que existen dos vectores minimales $y_{n,1}^\varepsilon, y_{n,2}^\varepsilon \in K_n^\varepsilon$ satisfaciendo $\|y_{n,1}^\varepsilon\| = \|y_{n,2}^\varepsilon\| = d_n^\varepsilon$. De aquí se desprende que $y_{n,1}^\varepsilon = y_{n,2}^\varepsilon$ o bien $y_{n,1}^\varepsilon = -y_{n,2}^\varepsilon$, donde descartamos esta última posibilidad. Por lo tanto, si suponemos que son distintos, al ser K_n^ε convexo, se sigue que

$$\frac{y_{n,1}^\varepsilon + y_{n,2}^\varepsilon}{2} \in K_n^\varepsilon \text{ con } \left\|\frac{y_{n,1}^\varepsilon + y_{n,2}^\varepsilon}{2}\right\| < \frac{\|y_{n,1}^\varepsilon\|}{2} + \frac{\|y_{n,2}^\varepsilon\|}{2} = d,$$

lo cual es una contradicción. □

Nota 1.2. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, inyectivo, de rango denso y tal que $\|T\| = 1$. Sea $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$. Si suponemos la existencia de la sucesión de vectores minimales $\{y_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ asociados a dicho operador, en virtud el resultado anterior

$$\varepsilon = \|T^{m+1} y_{m+1}^\varepsilon - x_0\| = \|T^m(T y_{m+1}^\varepsilon) - x_0\|,$$

y de la definición del vector minimal y_m se sigue que

$$\|y_m^\varepsilon\| \leq \|T y_{m+1}^\varepsilon\| \leq \|T\|\|y_{m+1}^\varepsilon\| \leq \|y_{m+1}^\varepsilon\|.$$

Esto significa que, en el caso de que existan los vectores minimales, la sucesión de las normas de dichos vectores es creciente. En general, se tiene que $\|y_m^\varepsilon\| \leq \|y_{m+k}^\varepsilon\|$, para todo $m, k \in \mathbb{N}$, o de manera equivalente

$$0 < \frac{\|y_m^\varepsilon\|}{\|y_{m+k}^\varepsilon\|} \leq 1.$$

Esto último se traduce en que, siempre que se asegure la existencia de los vectores minimales, cualquier subsucesión $\{y_{m_j}\}_{j=1}^\infty$ verifica que su ratio está acotada, es decir,

$$0 < \frac{\|y_{m_{j-1}}\|}{\|y_{m_j}\|} \leq 1, \quad \forall \{m_j\} \text{ subsucesión.}$$

Un comportamiento similar al anterior puede obtenerse si fijamos $m \in \mathbb{N}$ en lugar de ε. Dado $0 < h < \varepsilon$, denotemos por y^ε e $y^{\varepsilon-h}$ los vectores minimales al nivel $m \in \mathbb{N}$ con parámetros ε y $\varepsilon - h$, respectivamente. En virtud del resultado anterior se tiene que

$$\|T^m y^{\varepsilon-h} - x_0\| = \varepsilon - h < \varepsilon,$$

y de la definición del vector minimal y^ε se sigue que $\|y^\varepsilon\| \leq \|y^{\varepsilon-h}\|$. En general, para todo $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0\,, \|x_0\|)$ con $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ se tiene que $\|y^{\varepsilon_2}\| \leq \|y^{\varepsilon_1}\|$, o de manera equivalente

$$0 < \frac{\|y^{\varepsilon_2}\|}{\|y^{\varepsilon_1}\|} \leq 1.$$

Esto último significa que, fijado $m \in \mathbb{N}$, la función que a cada $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$ le asigna $\|y^\varepsilon\|$ es una función monótona decreciente.

Nota 1.3. En los espacios de Banach reflexivos siempre es posible construir una norma estrictamente convexa que sea equivalente a la que posee dicho espacio (véase [12], pp. 42, 289). Por lo tanto, dado $\mathcal{X}$ un espacio de Banach reflexivo, consideraremos $\mathcal{X}$ dotado de la norma estrictamente convexa, garantizando así la existencia y unicidad de los vectores minimales asociados a un operador lineal, continuo, inyectivo y de rango denso.

El espacio $\ell^1(\mathbb{Z})$ no es ni relfexivo ni estrictamente convexo, por lo que el resultado anterior no puede aplicarse para asegurar la existencia de los vectores minimales asociados al operadores desplazamiento bilateral T. Sin embargo, dados $x_0 \in \ell^1(\mathbb{Z})$ vector no nulo y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$, usando un argumento de compacidad débil* se prueba que existen los vectores minimales asociados a T, x_0 y ε verificando $\|T^n y_n^\varepsilon - x_0\|_1 = \varepsilon$.

A continuación, veremos un ejemplo de la no unicidad de los vectores minimales en $\ell^1(\mathbb{Z})$. Para ello, consideremos el operador desplazamiento bilateral T en $\ell^1(\mathbb{Z})$ definido por $Te_k = e_{k+1}$, donde $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ denota la base canónica en $\ell^1(\mathbb{Z})$. Sean $x_0 \in \ell^1(\mathbb{Z})$ vector no nulo de la forma $x_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k$, $\varepsilon \in (0, \|x_0\|_1)$ y supongamos que

$$x_0 - T^n y_n^\varepsilon = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_k.$$

Se puede comprobar que

$$y_n^\varepsilon = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k - d_k) e_{k-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De la definición del vector minimal y_n^ε, resulta el siguiente problema de optimización

$$\text{mín} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k - d_k| \quad \text{sujeto a} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_k| = \varepsilon.$$

Ya que

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e_k \right\|_1 = \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k| e_k \right\|_1,$$

para toda sucesión $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, es suficiente calcular los vectores minimales cuando $x_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k$ con $c_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. En este caso, se tiene $0 \leq d_k \leq c_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, quedando por resolver el siguiente problema de optimización

$$\text{mín} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k - d_k \quad \text{sujeto a} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_k| = \varepsilon.$$

En particular, para $x_0 = e_0 + e_1$ y $\varepsilon = 1$, se tiene que $d_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ y la solución al correspondiente problema de optimización es cualquier combinación convexa de la forma $d_0 + d_1 = 1$ y por lo tanto $x_0 - T^n y_n^\varepsilon = \lambda e_0 + (1-\lambda) e_1$ para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Luego $y_n^\varepsilon = (1-\lambda) e_{-n} + \lambda e_{1-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$.

1.1. Vectores minimales en espacios de Hilbert

En todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ podemos asegurar la existencia y unicidad de los vectores minimales asociados a un operador lineal, continuo, inyectivo y de rango denso. A continuación se demuestran ciertas propiedades de dichos vectores así como una ecuación de punto fijo que satisfacen.

Proposición 1.2. *Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ inyectivo y de rango denso. Sean $x_0 \in \mathcal{H}$ vector no nulo, $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$ parámetros. Entonces existe una constante negativa $\mu_n = \mu_n(x_0, \varepsilon)$ tal que los vectores minimales verifican la ecuación de punto fijo*

$$y_n^\varepsilon = \mu_n^\varepsilon T^{*n}(T^n y_n^\varepsilon - x_0). \tag{1.1.4}$$

Demostración. Fijamos $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$, $n \in \mathbb{N}$ y denotemos y_n^ε vector minimal asociado al operador T. Si $\omega \in \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ de forma que

$$\|T^n(y_n^\varepsilon + \lambda\omega) - x_0\| \leq \|T^n y_n^\varepsilon - x_0\| = \varepsilon,$$

de la definición del vector minimal y_n^ε se sigue que $\|y_n^\varepsilon + \lambda\omega\| \geq \|y_n^\varepsilon\|$. Si desarrollamos estas expresiones en función del producto escalar, resulta que

$$\begin{aligned} &2\Re\langle \lambda\omega, T^{*n}(T^n y_n^\varepsilon - x_0)\rangle + \lambda^2\|T^n\omega\|^2 \leq 0 \\ &2\Re\langle \lambda\omega, y_n^\varepsilon\rangle + \lambda^2\|\omega\|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

De aquí se sigue que, necesariamente, existe una constante $\mu_n^\varepsilon < 0$ de forma que $y_n^\varepsilon = \mu_n^\varepsilon T^{*n}(T^n y_n^\varepsilon - x_0)$. Para ver esto, supongamos que no existe tal constante. Esto significa que no son múltiplos (mediante una constante negativa) el uno del otro. Por lo tanto, si tomamos

$$\omega_0 = -\frac{y_n^\varepsilon}{\|y_n^\varepsilon\|} - \frac{T^{*n}(T^n y_n^\varepsilon - x_0)}{\|T^{*n}(T^n y_n^\varepsilon - x_0)\|},$$

tenemos que

$$\Re\langle \omega_0, y_n^\varepsilon\rangle < 0 \qquad \text{y} \qquad \Re\langle \omega_0, T^{*n}(T^n y_n^\varepsilon - x_0)\rangle < 0.$$

Sustituyendo en (1.1.5) resulta

$$\begin{aligned} 2\Re\langle \omega_0, T^{*n}(T^n y_n^\varepsilon - x_0)\rangle + \lambda\|T^n\omega_0\|^2 &\leq 0 \\ 2\Re\langle \omega_0, y_n^\varepsilon\rangle + \lambda\|\omega_0\|^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Tomando λ suficientemente pequeño, la segunda desigualdad deja de ser cierta. $\square$

Corolario 1.3. *Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operador inyectivo y de rango denso. Sean $x_0 \in \mathcal{H}$ vector no nulo, $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Si denotamos* θ_n^ε *el ángulo formado por* $T^n y_n^\varepsilon - x_0$ *y* $T^n y_n^\varepsilon$*, entonces* $\theta_n^\varepsilon > \pi/2$.

2. $\|T^n y_n^\varepsilon\|^2 < \|x_0\|^2 - \varepsilon^2$.

3. *Si* $y \in \mathcal{H}$*,* $z \perp y_n^\varepsilon$ *si y sólo si* $T^n z \perp T^n y_n^\varepsilon - x_0$.

4. *Si* $x \in \mathcal{H}$ *es tal que* $\|T^n x - x_0\| \leq \varepsilon$*, entonces* $\|y_n^\varepsilon\|^2 \leq |\langle x, y_n^\varepsilon\rangle|$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. 1. Se observa que

$$\cos\,\theta_n^\varepsilon = \frac{\langle T^n y_n^\varepsilon - x_0 \ ,\ T^n y_n^\varepsilon\rangle}{\|T^n y_n^\varepsilon - x_0\|\|T^n y_n^\varepsilon\|} = \frac{\langle T^{*n}(T^n y_n^\varepsilon - x_0)\ ,\ y_n^\varepsilon\rangle}{\varepsilon\ \|T^n y_n^\varepsilon\|}$$
$$= \frac{(\mu_n^\varepsilon)^{-1}\|y_n^\varepsilon\|^2}{\varepsilon\ \|T^n y_n^\varepsilon\|} < 0,$$

Por lo tanto $\theta_n^\varepsilon > \pi/2$.

2. Ya que $x_0 = (x_0 - T^n y_n^\varepsilon) + T^n y_n^\varepsilon$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|x_0\|^2 &= \langle (x_0 - T^n y_n^\varepsilon) + T^n y_n^\varepsilon\ ,\ (x_0 - T^n y_n^\varepsilon) + T^n y_n^\varepsilon\rangle\\ &= \|T^n y_n^\varepsilon - x_0\|^2 + \|T^n y_n^\varepsilon\|^2 + 2Re\langle x_0 - T^n y_n^\varepsilon\ ,\ T^n y_n^\varepsilon\rangle\\ &= \varepsilon^2 + \|T^n y_n^\varepsilon\|^2 - 2Re\langle T^n y_n^\varepsilon - x_0\ ,\ T^n y_n^\varepsilon\rangle,\end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que y_n^ε cumple la restricción (1.0.3). Ahora bien, ya que y_n^ε verifica la ecuación de punto fijo (1.1.4), resulta

$$\langle T^n y_n^\varepsilon - x_0\ ,\ T^n y_n^\varepsilon\rangle = \langle T^{*n}(T^n y_n^\varepsilon - x_0)\ ,\ y_n^\varepsilon\rangle = (\mu_n^\varepsilon)^{-1}\|y_n^\varepsilon\|^2 < 0.$$

Por lo tanto $\|x_0\|^2 > \varepsilon^2 + \|T^n y_n^\varepsilon\|^2$, esto es, $\|T^n y_n^\varepsilon\|^2 < \|x_0\|^2 - \varepsilon^2$.

3. Usando de nuevo la ecuación (1.1.4), se tiene que, dado $y \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}y \perp y_n^\varepsilon \Leftrightarrow \langle y\, ,\, y_n^\varepsilon\rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle y\, ,\, \mu_n^\varepsilon T^{*n}(T^n y_n^\varepsilon - x_0)\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow \langle T^n y\, ,\, T^n y_n^\varepsilon - x_0\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow T^n y \perp T^n y_n^\varepsilon - x_0.\end{aligned}$$

4. Fijado $n \in \mathbb{N}$, consideremos el plano generado por los vectores x_0 y $T^n y_n^\varepsilon$, esto es, $\text{span}\{x_0, T^n y_n^\varepsilon\}$. Si suponemos que $x = \alpha y_n^\varepsilon + r$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ y $r \perp y_n^\varepsilon$, puesto que

$$|\langle x, y_n^\varepsilon\rangle| = |\alpha||\langle y_n^\varepsilon, y_n^\varepsilon\rangle| = |\langle |\alpha| y_n^\varepsilon + r, y_n^\varepsilon\rangle|,$$

basta probar el resultado para $0 \leq \alpha < 1$. Luego $T^n x = \alpha T^n y_n^\varepsilon + T^n r$. Escribimos $T^n r = u + v$ donde $u \in \text{span}\{x_0, T^n y_n^\varepsilon\}$ y $v \in \text{span}\{x_0, T^n y_n^\varepsilon\}^\perp$. Se observa que

$$\langle u, x_0 - T^n y_n^\varepsilon\rangle = \langle u, x_0 - T^n y_n^\varepsilon\rangle + \langle v, x_0 - T^n y_n^\varepsilon\rangle = \langle T^n r, x_0 - T^n y_n^\varepsilon\rangle = 0.$$

Por lo tanto $u \perp x_0 - T^n y_n^\varepsilon$. Además, ya que $x_0 - T^n y_n^\varepsilon - u$ pertenece al subespacio $\operatorname{span}\{x_0, T^n y_n^\varepsilon\}$, del Teorema de Pitágoras se sigue que

$$\|x_0 - T^n x\|^2 = \|x_0 - \alpha T^n y_n^\varepsilon - u\|^2 + \|v\|^2 \geq \|x_0 - \alpha T^n y_n^\varepsilon - u\|^2.$$

En virtud de la ecuación (1.1.4) se tiene que $\langle x_0 - T^n y_n^\varepsilon, T^n y_n^\varepsilon \rangle > 0$ y por consiguiente

$$\varepsilon^2 = \|x_0 - T^n y_n^\varepsilon\|^2 = \langle x_0 - T^n y_n^\varepsilon, x_0 - T^n y_n^\varepsilon \rangle < \langle x_0 - \alpha T^n y_n^\varepsilon, x_0 - T^n y_n^\varepsilon \rangle,$$

unido a que $u \perp x_0 - T^n y_n^\varepsilon$, permite concluir que $\|x_0 - T^n x\| > \varepsilon$.

□

Sean $\mathcal{X}$ espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ inyectivo y de rango denso. Sea $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$ y denotemos por $\{y_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de vectores minimales asociados a dicho operador. Para cada nivel $n \in \mathbb{N}$, se define la función

$$\begin{aligned} \Phi_n : (0\ ,\ \|x_0\|) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \varepsilon &\longmapsto \Phi_n(\varepsilon) = \|y_n^\varepsilon\| \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Esta función mide, en cada nivel $n \in \mathbb{N}$ y para cada $\varepsilon > 0$, la norma del vector minimal y_n^ε. El siguiente resultado recoge ciertas propiedades asociadas a esta función.

Proposición 1.4. *La función Φ_n verifica que:*

1. *Si $x_0 \notin R(T)$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\Phi_n(\varepsilon) \to \infty$ cuando $\varepsilon \to 0$.*

2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, Φ_n es convexa en $(0\,,\,\|x_0\|)$.*

3. *Si θ_n^ε denota el ángulo entre $T^n y_n^\varepsilon - x_0$ y $T^n y_n^\varepsilon$, entonces*
$$\Phi_n'(\varepsilon) = \frac{\|y_n^\varepsilon\|}{\cos\,\theta_n^\varepsilon \|T^n y_n^\varepsilon\|}.$$

4. *Si μ_n^ε es la constante presente en la ecuación (1.1.4), entonces*
$$\mu_n^\varepsilon = \frac{\Phi_n'(\varepsilon)\Phi_n(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

Demostración. 1. Fijado $n \in \mathbb{N}$, supongamos, por reducción al absurdo, que existe $M > 0$ de forma que $\|y_n^{\varepsilon_k}\| \leq M$ cuando $\varepsilon_k \to 0$. Al ser $\mathcal{H}$ Hilbert, y por tanto reflexivo, existe un $y_0 \in \mathcal{H}$ y una subsucesión $\{y_n^{\varepsilon_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n^{\varepsilon_{k_j}} \xrightarrow{w} y_0$ cuando $j \to \infty$, y por tanto $T^n y_n^{\varepsilon_{k_j}} \xrightarrow{w} T^n y_0$ cuando $j \to \infty$. Como además $\|T^n y_n^{\varepsilon_{k_j}} - x_0\| = \varepsilon_{k_j} \to 0$ cuando $j \to \infty$, se tiene que $T y_n^{\varepsilon_{k_j}} \xrightarrow{w} x_0$ cuando $j \to \infty$. Luego, necesariamente $T^n y_0 = x_0$.

2. Fijado $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $y_n^{\varepsilon_1}$, $y_n^{\varepsilon_2}$ los vectores minimales para ε_1 y ε_2, respectivamente. Dado $\lambda \in [0,1]$, definimos $\varepsilon_\lambda = \lambda\varepsilon_1 + (1-\lambda)\varepsilon_2$. Ya que

$$\|T^n(\ \lambda y_1^{\varepsilon_1} + (1-\lambda)y_n^{\varepsilon_2} \ ) - x_0\| \leq \lambda\varepsilon_1 + (1-\lambda)\varepsilon_2 = \varepsilon_\lambda,$$

se sigue de la definición de vector minimal que

$$\|y_n^{\varepsilon_\lambda}\| \leq \|\lambda y_n^{\varepsilon_1} + (1-\lambda)y_n^{\varepsilon_2}\| = \lambda\|y_n^{\varepsilon_1}\| + (1-\lambda)\|y_n^{\varepsilon_2}\|,$$

esto es, $\Phi_n(\lambda\varepsilon_1 + (1-\lambda)\varepsilon_2) \leq \lambda\Phi_n(\varepsilon_1) + (1-\lambda)\Phi_n(\varepsilon_2)$.

3. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\|x_0\| = 1$. Elegimos $\varepsilon \in (0,1)$ y $h > 0$ de manera que $\varepsilon - h > \varepsilon \sin\theta_n^\varepsilon$. Denotemos por y_n^ε e $y_n^{\varepsilon-h}$ los vectores minimales de los conjuntos K_n^ε y $K_n^{\varepsilon-h}$, respectivamente.
Consideremos el plano formado por los vectores x_0 y $T^n y_n^\varepsilon$. Entonces

$$\Phi_n'(\varepsilon) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi_n(\varepsilon) - \Phi_n(\varepsilon - h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\|y_n^\varepsilon\| - \|y_n^{\varepsilon-h}\|}{h}. \qquad (1.1.7)$$

Por un lado, ya que $\theta_n^\varepsilon > \pi/2$, existen $s, t > 0$ tales que

$$\|(1+t)T^n y_n^\varepsilon - x_0\| = \varepsilon \sin\theta_n^\varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|(1+s)T^n y_n^\varepsilon - x_0\| = \varepsilon - h.$$

Una idea geométrica de este hecho puede verse en la Figura 1.1(a), donde

$$\overrightarrow{OA} = T^n y_n^\varepsilon, \qquad \overrightarrow{OB} = (1+t)T^n y_n^\varepsilon, \qquad \overrightarrow{OC} = (1+s)T^n y_n^\varepsilon.$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras en la Figura 1.1(b) se tiene que

$$\|(1+s)T^n y_n^\varepsilon - (1+t)T^n y_n^\varepsilon\| = \sqrt{(\varepsilon-h)^2 - \varepsilon^2 \sin^2\theta_n^\varepsilon}.$$

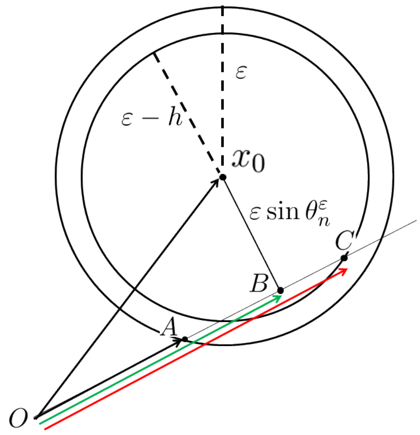
Ahora bien, recurriendo de nuevo a la Figura 1.1(b) tenemos que

$$\|(1+t)T^n y_n^\varepsilon - T^n y_n^\varepsilon\| = \|T^n y_n^\varepsilon - x_0\| \cos(\pi - \theta_n^\varepsilon) = \varepsilon\cos(\pi - \theta_n^\varepsilon),$$

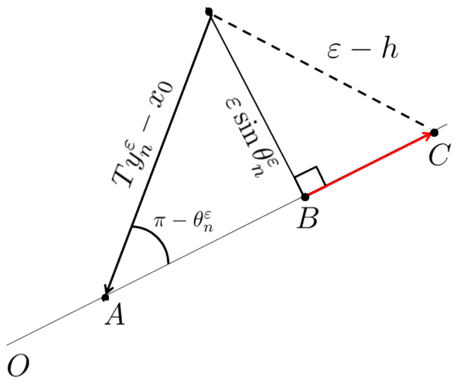
Por lo tanto

$$\|(1+s)T^n y_n^\varepsilon - T^n y_n^\varepsilon\| = \varepsilon\cos(\pi - \theta_n^\varepsilon) - \sqrt{(\varepsilon-h)^2 - \varepsilon^2 \sin^2\theta_n^\varepsilon}. \quad (1.1.8)$$

Además, recurriendo nuevamente a la Figura 1.1(a) y usando el hecho de que $\|T^n y_n^\varepsilon\| = \|(1+t)T^n y_n^\varepsilon\| - \|(1+t)T^n y_n^\varepsilon - T^n y_n^\varepsilon\|$, obtenemos que $\|T^n y_n^\varepsilon\| = \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\theta_n^\varepsilon} - \varepsilon\cos(\pi - \theta_n^\varepsilon)$. En efecto, ya que observando la Figura 1.1(a) y el Teorema de



(a)



(b)

Figura 1.1: Idea Geométrica y Teorema de Pitágoras.

Pitágoras $1 = \|x_0\|^2 = \|(1+t)T^n y_n^\varepsilon\|^2 + \varepsilon^2 \sin^2(\pi - \theta_n^\varepsilon)$ con lo que $\|(1+t)T^n y_n^\varepsilon\| = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta_n^\varepsilon}$ y como además

$$\|T^n y_n^\varepsilon\| = \|(1+t)T^n y_n^\varepsilon\| - \|(1+t)T^n y_n^\varepsilon - T^n y_n^\varepsilon\|,$$

se tiene que $\|T^n y_n^\varepsilon\| = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta_n^\varepsilon} - \varepsilon \cos(\pi - \theta_n^\varepsilon)$.

Ahora bien, ya que

$$\|T^n\Big((1+s)y_n^\varepsilon\Big) - x_0\| = \|(1+s)T^n y_n^\varepsilon - x_0\| = \varepsilon - h,$$

de la definición del vector minimal $y_n^{\varepsilon-h}$ se sigue que $\|y_n^{\varepsilon-h}\| \leq (1+s)\|y_n^\varepsilon\|$, esto es,

$$\|y_n^{\varepsilon-h}\| \leq \left(1 + \frac{\varepsilon\cos(\pi - \theta_n^\varepsilon) - \sqrt{(\varepsilon-h)^2 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta_n^\varepsilon}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta_n^\varepsilon} - \varepsilon\cos(\pi - \theta_n^\varepsilon)}\right)\|y_n^\varepsilon\|, \tag{1.1.9}$$

donde el valor de s se obtiene despejando de (1.1.8).

Por otro lado, al ser $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert, podemos escribir $\mathcal{H} = \langle y_n^\varepsilon\rangle \oplus \langle y_n^\varepsilon\rangle^\perp$. Por lo tanto, si $y_n^{\varepsilon-h} = a y_n^\varepsilon + r$ donde $r \perp y_n^\varepsilon$ y $a > 1$, en virtud del Corolario 1.3 se tiene que

$$T^n y_n^\varepsilon = aT^n y_n^\varepsilon + Tr \text{ donde } Tr \perp T^n y_n^\varepsilon - x_0,$$

con lo que $\|aT^n y_n^\varepsilon - T^n y_n^\varepsilon\| = h/\cos(\pi - \theta_n^\varepsilon)$ y así

$$\left(1 + \frac{h}{\cos(\pi - \theta_n^\varepsilon)\Big(\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta_n^\varepsilon} - \varepsilon\cos(\pi - \theta_n^\varepsilon)\Big)}\right)\|y_n^\varepsilon\| \leq \|y_n^{\varepsilon-h}\|. \tag{1.1.10}$$

Sustituyeno las expresiones (1.1.9) y (1.1.10) en (1.1.7) resulta

$$-\frac{\|y_n^\varepsilon\|}{h}\left(\frac{\varepsilon\cos(\pi-\theta_n^\varepsilon)-\sqrt{(\varepsilon-h)^2-\varepsilon^2\sin^2\theta_n^\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta_n^\varepsilon}-\varepsilon\cos(\pi-\theta_n^\varepsilon)}\right)\le\frac{\|y_n^\varepsilon\|-\|y_n^{\varepsilon-h}\|}{h} \tag{1.1.11}$$

$$\frac{\|y_n^\varepsilon\|-\|y_n^{\varepsilon-h}\|}{h}\le\frac{-\|y_n^\varepsilon\|}{\cos(\pi-\theta_n^\varepsilon)\Big(\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta_n^\varepsilon}-\varepsilon\cos(\pi-\theta_n^\varepsilon)\Big)}. \tag{1.1.12}$$

Por último, haciendo h tender a cero en la expresión (1.1.11) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to0}\frac{\varepsilon\cos(\pi-\theta_n^\varepsilon)-\sqrt{(\varepsilon-h)^2-\varepsilon^2\sin^2\theta_n^\varepsilon}}{h(\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta_n^\varepsilon}-\varepsilon\cos(\pi-\theta_n^\varepsilon))}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{\varepsilon\cos(\pi-\theta_n^\varepsilon)-\sqrt{(\varepsilon-h)^2-\varepsilon^2\sin^2(\pi-\theta_n^\varepsilon)}}{h(\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta_n^\varepsilon}-\varepsilon\cos(\pi-\theta_n^\varepsilon))}\\
&=\frac{1}{\cos(\pi-\theta_n^\varepsilon)(\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta_n^\varepsilon}-\varepsilon\cos(\pi-\theta_n^\varepsilon))}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0}\frac{\|y_n^\varepsilon\|-\|y_n^{\varepsilon-h}\|}{h}&=\frac{-\|y_n^\varepsilon\|}{\cos(\pi-\theta_n^\varepsilon)\Big(\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta_n^\varepsilon}-\varepsilon\cos(\pi-\theta_n^\varepsilon)\Big)}\\
&=\frac{\|y_n^\varepsilon\|}{\cos\,\theta_n^\varepsilon\|T^ny_n^\varepsilon\|}.
\end{aligned}$$

4. En virtud de (1.1.4), se tiene que

$$\langle y_n^\varepsilon,y\rangle=\mu_n^\varepsilon\langle T^ny_n^\varepsilon-x_0,T^ny\rangle,\quad\forall y\in\mathcal{X}.$$

En particular, $\|y_n^\varepsilon\|^2=\mu_n^\varepsilon\langle T^ny_n^\varepsilon-x_0,T^ny_n^\varepsilon\rangle$, con lo que

$$\begin{aligned}
\mu_n^\varepsilon&=\frac{\|y_n^\varepsilon\|^2}{\langle T^ny_n^\varepsilon-x_0,T^ny_n^\varepsilon\rangle}=\frac{\|y_n^\varepsilon\|^2}{\cos\,\theta_n^\varepsilon\|T^ny_n^\varepsilon-x_0\|\|T^ny_n^\varepsilon\|}\\
&=\frac{\|y_n^\varepsilon\|}{\cos\,\theta_n^\varepsilon\|T^ny_n^\varepsilon\|}\frac{\|y_n^\varepsilon\|}{\varepsilon}=\frac{\Phi_n'(\varepsilon)\Phi_n(\varepsilon)}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

□

Intuitivamente, el Corolario 1.3 permite conocer, de manera geométrica, en que región de la frontera de la bola $\overline{B(x_0,\varepsilon)}$ se sitúan los vectores $T^ny_n^\varepsilon$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Esto es debido a que, para cada n natural se tiene que $\theta_n>\pi/2$, y por consiguiente dichos vectores se encuentran en el arco con extremos abiertos señalado de color rojo en la Figura 1.2(a) para dimensión dos.

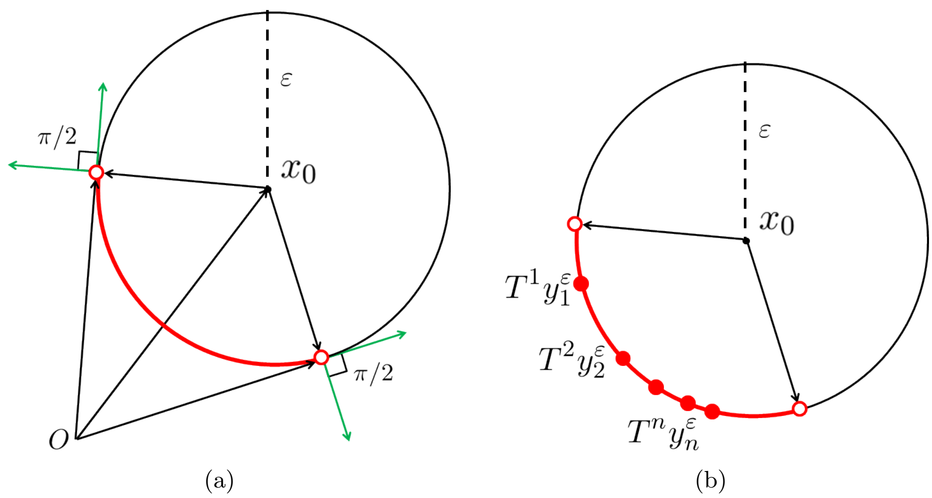


Figura 1.2: Presencia de los vectores $T^n y_n^\varepsilon$ en $\overline{B(x_0, \varepsilon)}$.

Una pregunta que surge de manera natural, y a la vista de la Figura 1.2(b) , es bajo qué condiciones podemos asegurar la convergencia de la sucesión de vectores $\{T^n y_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$. La respuesta a esta cuestión se recoge en el Corolario 1.6 . Antes de enunciarlo, veamos un lema que será de utilidad en la demostración de dicho resultado.

Lema 1.5. *Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ inyectivo y de rango denso. Sean $x_0 \in \mathcal{H}$, $\|x_0\| = 1$ con $x_0 \notin R(T)$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$ y denotemos por $\{y_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de vectores minimales asociada a T, x_0 y ε. Supongamos que*

- *Existe $\{\ell_m(T)\}_{m\in\mathbb{N}}$ sucesión de polinomios en la variable T tal que $\|T^j \ell_j(T)\| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y $T^j \ell_j(T) \to I$ en la topología fuerte de operadores.*
- *$\|y_{n-1}^\varepsilon\|/\|y_n^\varepsilon\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Entonces

1. *Para $\delta > 0$ y para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $C = C(\delta, m)$ tal que $\|y_{n+m}^{\varepsilon+\delta}\| \leq C\|y_n^\varepsilon\|$.*
2. *Si $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, entonces $\|y_n^\varepsilon\|/\|y_n^{\varepsilon_1}\| \to \infty$ cuando $n \to \infty$.*
3. *Si denotamos θ_n^ε el ángulo formado por $T^n y_n^\varepsilon - x_0$ y $T^n y_n^\varepsilon$, entonces $\theta_n^\varepsilon \to \pi/2$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. 1. Sea $\{\ell_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de polinomios en la variable T tal que $\|T^j \ell_j(T)\| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y $T^j \ell_j(T) \to I$ en la topología fuerte de operadores. Elegimos $m \in \mathbb{N}$ verificando que $\|T^m \ell_m(T)x_0 - x_0\| \leq \delta$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\|T^{m+n}\ell_m(T)y_n^\varepsilon - x_0\| &= \|T^m\ell_m(T)(T^n y_n^\varepsilon) - x_0\| \\ &\leq \|T^m\ell_m(T)(T^n y_n^\varepsilon - x_0)\| + \|T^m\ell_m(T)x_0 - x_0\| \\ &\leq \varepsilon + \delta.\end{aligned}$$

De la minimalidad del vector $y_{n+m}^{\varepsilon+\delta}$ se sigue que

$$\|y_{n+m}^{\varepsilon+\delta}\| \leq \|\ell_m(T)y_n^\varepsilon\| \leq \|\ell_m(T)\|\|y_n^\varepsilon\| = C\|y_n^\varepsilon\|.$$

2. Para $\delta > 0$, elegimos $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \delta$. En virtud del apartado anterior, se tiene que
$$\frac{\|y_{n+1}^\varepsilon\|}{\|y_{n+1}^{\varepsilon_1}\|} = \frac{\|y_{n+1}^\varepsilon\|}{\|y_{n+1}^{\varepsilon+\delta}\|} \geq \frac{1}{C}\frac{\|y_{n+1}^\varepsilon\|}{\|y_n^\varepsilon\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

3. Supongamos que $\theta_n^\varepsilon \geq \frac{\pi}{2} + \delta$ para cierto $\delta > 0$. Elegimos $h > 0$ de forma que $\varepsilon > \varepsilon - h > \varepsilon \sin\theta_n^\varepsilon$. Procediendo de manera análoga a la Proposición 1.4 existe $s > 0$ tal que
$$\|T^n\Big((1+s)y_n^\varepsilon\Big) - x_0\| = \|(1+s)T^n y_n^\varepsilon - x_0\| = \varepsilon - h.$$
Si denotamos $\varepsilon_1 = \varepsilon - h$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$ con $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, de la minimalidad del vector $y_n^{\varepsilon_1}$ se sigue que
$$\|y_n^{\varepsilon_1}\| \leq \|(1+s)y_n^{\varepsilon_2}\| = (1+s)\|y_n^{\varepsilon_2}\|.$$
Por lo tanto $\|y_n^{\varepsilon_1}\|/\|y_n^{\varepsilon_2}\| \leq (1+s)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, contradiciendo el resultado obtenido en el apartado anterior.

□

Corolario 1.6. *Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ inyectivo y de rango denso. Sean $x_0 \in \mathcal{H}$, $\|x_0\| = 1$ con $x_0 \notin R(T)$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$ y denotemos por $\{y_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de vectores minimales asociada a T, x_0 y ε. Supongamos que*

1. *Existe $\{\ell_m(T)\}_{m\in\mathbb{N}}$ sucesión de polinomios en la variable T tal que $\|T^j\ell_j(T)\| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y $T^j\ell_j(T) \to I$ en la topología fuerte de operadores.*

2. *$\|y_{n-1}^\varepsilon\|/\|y_n^\varepsilon\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Entonces $\|T^{n+1}y_{n+1}^\varepsilon - T^n y_n^\varepsilon\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Sea $T^n y_n^\varepsilon = \alpha_n x_0 + \beta_n s_n$ donde $\|s_n\| = 1$, $s_n \perp s_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ya que

$$1 = \|x_0\|^2 = \|T^n y_n^\varepsilon - x_0 + T^n y_n^\varepsilon\|^2 = \varepsilon^2 + |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 + 2\Re\langle T^n y_n^\varepsilon - x_0, T^n y_n^\varepsilon\rangle,$$

del Lema 1.5 se sigue que $|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 \to 1 - \varepsilon^2$ cuando $n \to \infty$. Si $\alpha_n = a_n + ib_n$ con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se observa que

$$\varepsilon^2 = \|T^n y_n^\varepsilon - x_0\|^2 = |\alpha_n - 1| + |\beta_n| = 1 + |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 - 2a_n.$$

Por lo tanto $a_n \to 1 - \varepsilon^2$ cuando $n \to \infty$, que unido al hecho de $\theta_n^\varepsilon \to \pi/2$ cuando $n \to \infty$ permite deducir que $b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Luego $\alpha_n \to 1 - \varepsilon^2$ cuando $n \to \infty$.

Sea $\delta > 0$ arbitrario. Para $m = 1$ y en virtud del Lema 1.5 se tiene que $\|y_{n+1}^{\varepsilon+\delta}\| \leq C\|y_n^\varepsilon\|$. Por lo tanto, tenemos que $Ty_{n+1}^{\varepsilon+\delta} = Ay_n^\varepsilon + r_n$ donde $r_n \perp t_n^\varepsilon$ y $|A| \leq C\|T\|$. De esta manera

$$T^{n+1} y_{n+1}^{\varepsilon+\delta} = AT^n y_n^\varepsilon + T^n r_n \text{ con } T^n r_n \perp x_0 - T^n y_n^\varepsilon. \tag{1.1.13}$$

Ahora bien, si $T^{n+1} y_{n+1}^{\varepsilon+\delta} = \alpha'_{n+1} x_0 + \beta'_{n+1} s'_n$ donde $\|s'_n\| = 1$, $s'_n \perp x_0$, usando un razonamiento similar al utilizado con anterioridad se deduce que

$$\alpha'_{n+1} \to 1 - (\varepsilon + \delta)^2 \text{ cuando } n \to \infty. \tag{1.1.14}$$

Consideremos la proyección ortogonal $z^{(n)}$ del vector $T^{n+1} y_{n+1}^{\varepsilon+\delta}$ sobre $\text{span}\{x_0, T^n y_n^\varepsilon\}$. Del Lema 1.5 y la ecuación (1.1.13) se sigue que

$$\langle z^{(n)}, x_0 - T^n y_n^\varepsilon\rangle \to 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

que unido con la ecuación (1.1.14) afirma la existencia de una función $g(\delta)$, con $g(\delta) \to 0$ cuando $\delta \to 0$, tal que

$$\|T^{n+1} y_{n+1}^{\varepsilon+\delta} - T^n y_n^\varepsilon\| \leq g(\delta) \text{ para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Para terminar, si $y_{n+1}^{\varepsilon+\delta} = A' y_{n+1}^\varepsilon + r_{n+1}$ con $|A'| < 1$ y $r_{n+1} \perp y_{n+1}^\varepsilon$, de forma análoga resulta

$$\|T^{n+1} y_{n+1}^{\varepsilon+\delta} - T^{n+1} y_{n+1}^\varepsilon\| \leq g(\delta) \text{ para } n \text{ suficientemente grande.}$$

□

A continuación probaremos un resultado que será de gran utilidad en capítulos posteriores y hace referencia al comportamiento de la sucesión de vectores minimales asociada un operador T cuasinilpotente en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, esto es, un operador T lineal y continuo en $\mathcal{H}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$.

Lema 1.7. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,,\|x_0\|)$ denotemos por $\{y_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de vectores minimales asociado a dicho operador. Si T es cuasinilpotente entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|y^\varepsilon_{n_{k-1}}\|}{\|y^\varepsilon_{n_k}\|} = 0.$$

para cierta subsucesión $\{y^\varepsilon_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que no existe tal subsucesión. En particular, para la sucesión original, existe una constante $t > 0$ tal que $\|y^\varepsilon_{n-1}\|/\|y^\varepsilon_n\| > t$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se observa que

$$\|y_1^\varepsilon\| > t\|y_2^\varepsilon\| > \ldots > t^{n-1}\|y_n^\varepsilon\|.$$

Como además

$$\|T^n y_n^\varepsilon - x_0\| = \|T(T^{n-1}y_n^\varepsilon) - x_0\|,$$

de la minimalidad del vector y_1^ε se sigue que $\|y_1^\varepsilon\| \le \|T^{n-1}y_n^\varepsilon\|$. De esta manera

$$\|T^{n-1}\|\|y_n^\varepsilon\| \ge \|T^{n-1}y_n^\varepsilon\| \ge \|y_1^\varepsilon\| \ge t^{n-1}\|y_n^\varepsilon\|.$$

Por lo tanto $\|T^{n-1}\| \ge t^{n-1}$ y haciendo n tender a infinito resulta

$$\lim_{n\to\infty} \|T^{n-1}\|^{1/(n-1)} \ge t > 0,$$

contradiciendo que T sea cuasinilpotente. □

Nota 1.4. El resultado anterior también es válido para la sucesión de λ-vectores minimales asociada a un operador cuasinilpotente en un espacio de Banach más general.

Capítulo 2

Algunos resultados conocidos

Es este capítulo veremos algunos resultado positivos en relación a la existencia de subespacios invariantes para operadores compactos, normales y cuasinilpotentes. Además, en el siguiente capítulo veremos que es posible obtener estos resultados a partir de la técnica de los vectores minimales.

2.1. Operadores compactos

En esta sección expondremos distintos resultados que afirman la existencia de subespacios cerrados e invariantes no triviales para operadores compactos. Recordemos que dado $\mathcal{X}$ espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, se dice que T es *compacto* si $\overline{\{Tx : x \in B_{\mathcal{X}}\}}$ es un conjunto compacto de $\mathcal{X}$. También, puede caracterizarse la compacidad de un operador a través de sucesiones, esto es, T es un operador compacto si y sólo si $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, para toda $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión acotada en $\mathcal{X}$.

Ejemplo 2.1.

1. Sea $V : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de Volterra definido por $Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$. Dado $\alpha > 0$, el subespacio

$$\mathcal{M}_\alpha = \{f \in L^2[0,1] : f(t) = 0 \text{ c.t.p } t \in [0,\alpha]\},$$

es cerrado, V invariante y no trivial. Además, el operador V es compacto y todos sus subespacios cerrados invariantes son de la forma M_α con $\alpha \in [0,1]$ (véase [21], pp. 68).

2. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una sucesión tal que $k_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Para $1 \le p \le \infty$, sea $T : \ell^p \to \ell^p$ el operador lineal y continuo definido por

$$T(x_1, x_2, \dots) = (k_1x_1, k_2x_2, \dots), \quad (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p.$$

Se verifica que T es compacto. En efecto, ya que los operadores definidos por

$$T_n = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n, 0, \dots), \quad n \in \mathbb{N}$$

son compactos para todo $n \in \mathbb{N}$, al ser continuos y $\dim R(T_n) = n$, y además
$$\|T - T_n\| \leq \sup\{|k_j| : j \geq n+1\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Como señalamos en la introducción, von Neumann probó, en un trabajo que no llegó a publicarse, que todo operador lineal y compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ posee un subespacio cerrado e invariante no trivial usando proyecciones ortogonales.

Más tarde, en 1954, N. Aronszajn y K. T. Smith extendieron el resultado de von Neumann para un espacio de Banach en general (véase [5]) y posteriormente A. R. Bernstein y A. Robinson probaron que el resultado era también cierto para operadores polinomialmente compactos, usando técnicas de análisis no estándar (véase [7]). Posteriormente, P.R. Halmos obtuvo el mismo resultado usando técnicas del análisis funcional (véase [17]).

Por último, en 1973, V. Lomonosov demostró que en un espacio de Banach, todo operador lineal y continuo que conmute con un operador compacto posee un subespacio cerrado e invariante no trivial usando el teorema del punto fijo de Schauder (véase [19]). El resultado obtenido por Lomonosov es de suma importancia, pues todos los resultados anteriores se obtienen como consecuencia de éste.

Teorema 2.1. *(Lomonosov, 1973) Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Si $T, K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ con K un operador compacto no nulo y tal que $TK = KT$, entonces T admite un subespacio cerrado e invariante no trivial.*

Demostración. Supongamos que $\|K\| = 1$ y sea $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo tal que $\|Kx_0\| > 1$. Esto siempre es posible pues, al ser $K \neq 0$ existirá un $x \in \mathcal{X}$ no nulo de manera que $Kx \neq 0$. Si definimos $x_0 = (1/\lambda)x$ donde $0 < \lambda < \|Kx\|$ se tiene que $\|Kx_0\| = \|Kx\|/\lambda > 1$.

Sea $U_0 = \{x \in \mathcal{X} : \|x - x_0\| \leq 1\} = x_0 + \overline{B}_{\mathcal{X}}$ y consideremos $\overline{K(U_0)}$. Por cómo hemos elegido x_0 se tiene que $\|x_0\| > 1$. Además $\overline{K(U_0)}$ es compacto, convexo y tal que $0 \notin \overline{K(U_0)}$, como se muestra en la Figura 2.1. La parte de compacidad se tiene como consecuencia de que el operador K es compacto. Con respecto a la convexidad también es cierta y es consecuencia de la linealidad de K y la convexidad de U_0. Por último, $0 \notin \overline{K(U_0)}$ ya que para todo $x \in \mathcal{X}$ se tiene que
$$\|Kx - Kx_0\| = \|K(x - x_0)\| \leq \|x - x_0\| \leq 1.$$
Por lo tanto $Kx \in (Kx_0 + \overline{B}_{\mathcal{X}})$ con $\|Kx_0\| > 1$. Ahora bien, si existiese $x \in \mathcal{X}$ vector no nulo tal que $S_x = \overline{\{P(T)x : P \text{ polinomio }\}} \neq \mathcal{X}$, habríamos acabado pues dicho subespacio es cerrado, T invariante y no trivial. Por lo tanto, supongamos que para todo $x \in \mathcal{X}$, $x \neq 0$, se tiene que $S_x = \mathcal{X}$. En

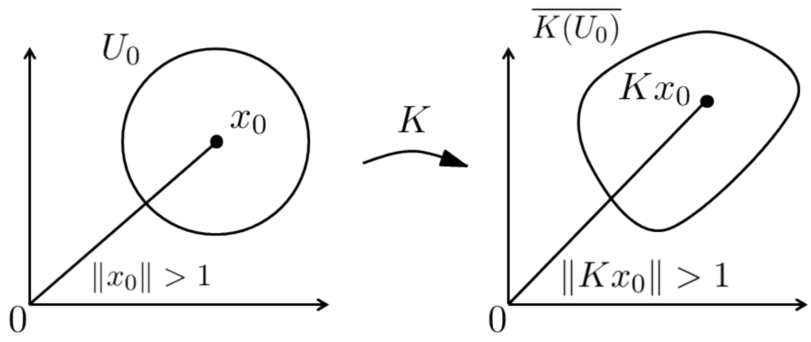


Figura 2.1: Conjuntos U_0 y $\overline{K(U_0)}$.

particular, para cada $x \in \overline{K(U_0)}$ existe un polinomio $P_x(T)$ en la variable T de manera que $\|x_0 - P_x(T)x\| < 1$. De esta manera, para cada $x \in \overline{K(U_0)}$ se puede definir un entorno abierto

$$V_x = \{y \in \mathcal{X} : \|x_0 - P_x(T)y\| < 1\},$$

y, por compacidad, existirá $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ recubrimiento finito de $\overline{K(U_0)}$. Con ello, consideramos la función continua $F : \overline{K(U_0)} \to \overline{K(U_0)}$ definida por

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) K(P_{x_i}(T)x),$$

siendo $\{f_i\}_{i=1}^n$ una partición de la unidad asociada al recubrimiento $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ dadas por $f_i = g_i/g$, donde

$$g_i(z) = \text{máx}\{0, 1 - \|x_0 - P_{x_i}(z)\|\} \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{i=1}^{n} g_i(z), \quad i = 1, \ldots, n.$$

En virtud del teorema del punto fijo de Schauder, existe $a \in \overline{K(U_0)}$ no nulo tal que $F(a) = a$. Por último, definimos el operador lineal y continuo en $\mathcal{X}$ de la forma

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a) K(P_{x_i}(T)x),$$

y el subespacio cerrado y T invariante $\mathcal{M}_H = \{x \in \mathcal{X} : Hx = x\}$. Por un lado, $\mathcal{M}_H \neq \{0\}$ pues $H(a) = F(a) = a$. Por otro lado $\mathcal{M}_H \neq \mathcal{X}$ ya que en ese caso contrario si $Hx = x$ para todo $x \in \mathcal{X}$, al ser H compacto con $R(H) = \mathcal{X}$ cerrado, llegaríamos a que $\dim X < +\infty$, (véase [[24],pp. 98]) contradiciendo las hipótesis del enunciado.
Luego, $\mathcal{M}_H$ es subespacio cerrado y T invariante no trivial. $\square$

Posteriormente Hilden desarrolló una prueba similar a la de Lomonosov, y en la que eludía el uso del teorema del punto fijo de Schauder.

Teorema 2.2. *(Hilden, 1977) Sea $\mathcal{X}$ espacio de Banach de dimensión infinita. Si $T, K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ con K un operador compacto no nulo y tal que $TK = KT$, entonces T admite un subespacio cerrado e invariante no trivial.*

La demostración que incluimos aquí fue probada por A.J Michael en [20].

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que T no posee subespacios invariantes no triviales. Supongamos además que K no tiene autovalores, ya que en caso contrario podemos construir el subespacio cerrado T invariante

$$W_\lambda = \{x \in \mathcal{X} : Kx = \lambda x\}, \quad \lambda \in \sigma(K),$$

con $W_\lambda \neq \{0\}$ y $W_\lambda \neq \mathcal{X}$, al ser K no escalar. Luego K es cuasinilpotente. Puesto que los únicos espacios T invariantes son los triviales, entonces para cada $x \in \mathcal{X}$ vector no nulo se tiene que $\overline{\{P(T)x : P \text{ polinomio }\}} = \mathcal{X}$. Sea $x_0 \in \mathcal{X}$, $x_0 \neq 0$, tal que $\|Kx_0\| > 1$. Razonando de manera análoga al Teorema de Lomonosov, obtenemos un recubrimiento finito $\overline{K(U_0)} = \cup_{i=1}^n V_{x_i}$ con

$$V_x = \{y \in \mathcal{X} : \|x_0 - P_x(T)y\| < 1\},$$

donde $U_0 = \{x \in \mathcal{X} : \|x - x_0\| \leq 1\}$. Denotemos $C = \text{máx}_{i=1,\ldots,n} \|P_{x_i}(T)\|$.

A continuación, utilizamos la *ténica de ping-pong de Hilden*: ya que $Kx_0 \in K(U_0)$, existe $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $Kx_0 \in V_{x_{i_1}}$, esto es, $P_{x_{i_1}}(T)Kx_0 \in U_0$. De esta manera, $KP_{x_{i_1}}(T)Kx_0 \in K(U_0)$ y procediendo como antes existe $i_2 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $KP_{x_{i_1}}(T)Kx_0 \in V_{x_{i_2}}$, esto es, $P_{x_{i_2}}(T)KP_{x_{i_1}}(T)Kx_0 \in U_0$, como se muestra en la Figura 2.2.

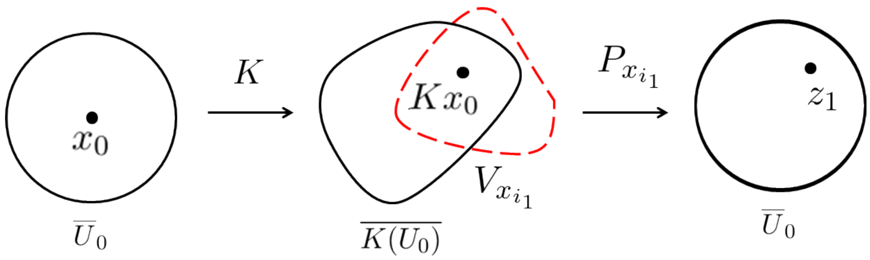


Figura 2.2: Técnica de ping-pong de Hilden.

Por último, si denotamos por $z_0 = x_0$ y definimos la sucesión $\{z_k\}_{k=0}^n \subset \overline{U}_0$ mediante la recurrencia $z_{k+1} = P_{x_{i_k}}(T)Kz_k$, como $TK = KT$, se tiene que

$$\|z_n\| = \|P_{x_{i_n}}(T)K \ldots P_{x_{i_1}}(T)Kx_0\| \leq \|(CK)^n\|\|x_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Por lo tanto, $z_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, contradiciendo el hecho de que $0 \notin \overline{U}_0$. Luego, T posee subespacio cerrado e invariante no trivial. $\square$

Como comentamon en la introducción de esta sección, los resultado de von Neumann, R. Bernstein y A. Robinson son consecuencia directa del Teorema de Lomonosov.

Corolario 2.3. 1. *Todo operador compacto no nulo K tiene un subespacio cerrado e invariante no trivial.*

2. *Todo operador polinomialmente compacto no nulo $P(K)$ tiene un subespacio cerrado e invariante no trivial.*

2.2. Operadores cuasinilpotentes

Recordemos que dado $\mathcal{X}$ espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, se dice que T es *cuasinilpotente* si $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$. Si $T^N = 0$ para cierto $N \in \mathbb{N}$, se dice que T es *nilpotente.*

Para espacios de Banach $\mathcal{X}$ de dimensión infinita, todo operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ nilpotente posee un subespacio cerrado, T invariante y no trivial, sin más que considerar

$$\mathcal{M} = \overline{span\{T^n x_0 : n \in \mathbb{N}\}} = \overline{span\{x_0, Tx_0, \ldots, T^{N-1}x_0\}},$$

donde $N \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo. Se observa que $1 \leq \dim \mathcal{M} \leq N$.

Ejemplo 2.2.

1. Para $1 \leq p \leq \infty$, sea $T : \ell^p \to \ell^p$ operador lineal y continuo definido por

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, 0, x_3, 0, \ldots), \quad (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^p.$$

Se observa que $T^2 = 0$. Por lo tanto T es nilpotente. Si $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ representa la base canónica en ℓ^p, entonces

$$\mathcal{M} = \overline{\text{span}\{e_1, Te_1\}} = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$$

es un subespacio cerrado, T invariante y no trivial.

2. Sea $\{\alpha_n\}_{n\geq 2}$ la sucesión de números reales dada por $\alpha_n = n^{-n}$ para $n \geq 2$. Para $1 \leq p \leq \infty$, sea $T : \ell^p \to \ell^p$ el operador lineal y continuo definido por

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (\alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \ldots), \quad (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^p.$$

Se observa que

$$T^N(x_1, x_2, \ldots) = (\alpha_2 \ldots \alpha_{N+1} x_{N+1},\ \alpha_3 \ldots \alpha_{N+2} x_{N+2},\ \ldots), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Puesto que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|T^n x\|^p = \sum_{j=2}^{\infty} |\alpha_j \dots \alpha_{n+j-1}|^p |x_{n+j-1}|^p \leq \alpha_2^p \dots \alpha_{n+1}^p \|x\|^p \leq \alpha_{n+1}^p \|x\|^p,$$

entonces $\|T^n\|^{1/n} \leq (\alpha_{n+1})^{1/n} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto T es cuasinilpotente.

El siguiente resultado afirma la existencia de subespacios cerrados e invariantes no triviales para ciertos operadores cuasinilpotentes definidos en espacios de Banach real que poseen un cierto orden, esto es, espacios en los que es posible comparar dos vectores con respecto a una cierta relación.

Antes de enunciarlo, recordamos que una relación binaria "$\geq$"sobre un conjunto no vacío X se denomina *una relación de orden* si satisface las siguietes propiedades:

1. (Reflexividad) Para todo $x \in X$ se tiene que $x \geq x$.
2. (Antisimetría) Si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $x_1 \geq x_2$ y $x_2 \geq x_1$ entonces $x_1 = x_2$.
3. (Transitividad) Si $x_1, x_2, x_3 \in X$ son tales que $x_1 \geq x_2$ y $x_2 \geq x_3$ entonces $x_1 \geq x_3$.

Recordemos también que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $\mathcal{X}$ se denomina *base de Schauder* si para todo $x \in \mathcal{X}$ existe una única sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, esto es,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Cada base de Schauder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $\mathcal{X}$ sobre el cuerpo de los números reales da a lugar a conjunto cerrado

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : \alpha_n \geq 0 \text{ para todo } n = 1, 2, \dots \right\},$$

al que se denomina *cono* y cuya utilidad radica en la definición de la relación de orden $x \geq y$ (o equivalentemente $y \leq x$) si y sólo si $x - y \in C$, para todo $x, y \in \mathcal{X}$. Además, asociado a dicha base de Schauder y a cada $n \in \mathbb{N}$, los funcionales lineales y continuos c_n^* definidos por $c_n^*(x) = \alpha_n$, donde $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, verifican que $c_n^*(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$.

De esta manera, un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ definido en un espacio de Banach real con base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se denomina *positivo* respecto a dicha base si $T(C) \subseteq C$, esto es, si $Tx \geq 0$ para todo $x \geq 0$.

Teorema 2.4. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach real con una base de Schauder. Si $T, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ son operadores positivos que conmutan entre sí verificando que*

$$\lim_{n\to\infty} \|Q^n x_0\|^{1/n} = 0,$$

para cierto $x_0 \geq 0$ vector no nulo entonces T posee un subespacio cerrado e invariante no trivial.

Demostración. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base de Schauder de $\mathcal{X}$ y $\{c_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funcionales descritos anteriormente asociado a dicha base. Supongamos que $Qx_0 \neq 0$, ya que en caso contrario al ser $QT = TQ$ se tiene que $\operatorname{Ker} Q$ es un subespacio cerrado y T invariante no trivial. Por lo tanto, si $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ se tiene que $Qx_k \neq 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Si C denota el cono definido por la base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ya que $x_k \in C$, haciendo un escalamiento apropiado del vector x_0 podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 \leq x_k \leq x_0$.

Sea $P : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ la proyección lineal y continua sobre el subespacio generador por el vector x_k definida por $Px = c_n^*(x)x_k$. Se observa que $0 \leq Px \leq x$ para todo $x \geq 0$. Veamos que para todo $m \geq 0$ se tiene que $PT^m Qx_k = 0$.

Para ello, sea $n \geq 0$ fijo y $PT^m Qx_k = \alpha x_k$ para cierto $\alpha \geq 0$. Ya que P es un operador positivo y la composición de operadores positivos es un operador positivo, resulta

$$0 \leq \alpha^n x_k = (PT^m Q)^n x_k \leq (T^m Q)^n x_k = T^{mn} Q^n x_k \leq T^{mn} Q^n x_0.$$

De la positividad del funcional c_k^*, se sigue que

$$0 \leq \alpha^n = c_k^*(\alpha^n x_k) \leq c_n^*(T^{mn} Q^n x_0).$$

Por lo tanto, como $0 \leq \alpha^n = \|c_k^*\| \|T\|^{mn} \|Q^n x_0\|$, se tiene

$$0 \leq \alpha = \|c_k^*\|^{1/n} \|T\|^m \|Q^n x_0\|^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Luego, concluimos que necesariamente $\alpha = 0$. Para terminar, consideremos el subespacio cerrado

$$\mathcal{M} = \overline{span\{T^m Qx_k : m \geq 0\}}.$$

Es claro que $\mathcal{M}$ es un subespacio T invariante no nulo, al ser $Qx_k \neq 0$. Además, $\mathcal{M} \neq \mathcal{X}$ ya que para todo $x = T^m Qx_k$ con $m \geq 0$, en virtud de lo probado anteriormente, se tiene que $c_k^*(x) = c_k^*(Px) = 0$ y por continuidad $c_k^*(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{M}$.

Luego, $\mathcal{M}$ es un subespacio cerrado y T invariante no trivial. □

Corolario 2.5. *Si $\mathcal{X}$ un espacio de Banach real, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base del mismo y $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador cuasinilpotente positivo respecto a dicha base, entonces Q posee un subespacio cerrado e invariante no trivial.*

En 1997, C. Read en [23] construyó un operador cuasinilpotente en ℓ^1 sin subespacios cerrados e invariantes no triviales usando técnicas introducidas en su famoso trabajo de 1986.

2.3. Operadores normales

Recordemos que dado $\mathcal{X}$ espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, se dice que T es *normal* si $TT^* = T^*T$, donde T^* es el operador adjunto a T.

Ejemplo 2.3. Sean (X, Ω, μ) un espacio de medida σ-finito y $\mathcal{H} = L^2(X, \Omega, \mu)$. Para $\phi \in L^\infty(X, \Omega, \mu)$ fijada, el operador de multiplicación M_ϕ definido en $\mathcal{H}$ de la forma

$$(M_\phi f)(x) = \phi(x) f(x), \quad x \in X,$$

es normal con $M_\phi^* = M_{\overline{\phi}}$. Además, dado $A \in \Omega$, el subespacio

$$\mathcal{M}_A = \{f \in L^2(X, \Omega, \mu) : f(x) = 0, \text{ c.t.p } x \in A^c\},$$

es cerrado, M_ϕ invariante y no trivial.

Una versión del teorema espectral afirma que todo operador normal T es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación. Este resultado será de gran utilidad para establecer la existencia de subespacios cerrados hiperinvariantes del operador T a través del operador de multiplicación.

Antes de enunciarlo, veamos algunos resultados referentes a operadores normales que serán necesarios en la demostración del teorema espectral.

Teorema 2.6. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es normal, entonces $r(T) = \|T\|$.*

Demostración. Si T es un operador normal, se tiene que

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2.$$

Tomando supremo en $\{x \in \mathcal{H} : \|x\| = 1\}$, resulta $\|T^*\| = \|T\|$. Además, con esta información se observa que

$$\begin{aligned}&\|T^*T\| \leq \|T\|\|T^*\| = \|T\|^2\\&\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*T\|\|x\|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$. Para ver que $r(T) = \|T\|$, de la fórmula de Gelfand para el radio espectral del operador T basta probar que $\|T^2\| = \|T\|^2$. Esta igualdad se sigue del hecho de que

$$\|T^2\|^2 = \|(T^2)^*(T^2)\| = \|T^*T^*TT\| = \|(T^*T)^*(T^*T)\| = \|T^*T\|^2 = (\|T\|^2)^2.$$

Luego $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \|T\|$. □

Teorema 2.7. *Si $\mathfrak{U}$ es un álgebra de Banach conmutativa sobre $\mathbb{C}$ que contiene a la identidad, entonces para todo $x \in \mathfrak{U}$ se tiene que*

$$\sigma(x) = \{\phi(x) : \phi \text{ es un homeomorfismo de } \mathfrak{U} \text{ sobre } \mathbb{C}\}.$$

Una demostración de este resultado puede verse en [24].

Teorema 2.8. *Si $\mathfrak{B}$ es un subálgebra maximal conmutativa de un álgebra de Banach $\mathfrak{U}$ sobre $\mathbb{C}$, entonces para todo $x \in \mathfrak{B}$ se tiene que $\sigma_{\mathfrak{B}}(x) = \sigma_{\mathfrak{U}}(x)$ donde $\sigma_{\mathfrak{B}}(x), \sigma_{\mathfrak{U}}(x)$ denotan el espectro de x relativo a $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{U}$, respectivamente.*

Demostración. Claramente, si $x - \lambda$ tiene inversa en $\mathfrak{B}$, también posee inversa en $\mathfrak{U}$. Por lo tanto $\sigma_{\mathfrak{U}}(x) \subseteq \sigma_{\mathfrak{B}}(x)$. Supongamos que $(x-\lambda)y = y(x-\lambda) = 1$ para cierto $y \in \mathfrak{U}$. Entonces, para cada $z \in \mathfrak{B}$ subálgebra conmutativa se observa que

$$yz = yz(x-\lambda)y = y(x-\lambda)zy = zy.$$

Por lo tanto y conmuta con todo elemento de $\mathfrak{B}$, y de la maximalidad del mismo se sigue que $y \in \mathfrak{B}$. Luego $\sigma_{\mathfrak{B}}(x) \subseteq \sigma_{\mathfrak{U}}(x)$. □

Teorema 2.9. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es normal y $P(\cdot,\cdot)$ es un polinomio en dos variables, entonces*

$$\sigma(P(T, T^*)) = \{p(z, \overline{z}) : z \in \sigma(T)\}.$$

Demostración. Sea $\mathfrak{U}$ la subálgebra conmutativa maximal de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ que contiene a T y T^*. De los Teoremas 2.7 y 2.8 se sigue que

$$\begin{aligned}\sigma(P(T,T^*)) &= \{\phi(P(T,T^*)) : \phi \text{ es un homeomorfismo de } \mathfrak{U} \text{ sobre } \mathbb{C}\}\\ &= \{P(\phi(T), \phi(T^*)) : \phi \text{ es un homeomorfismo de } \mathfrak{U} \text{ sobre } \mathbb{C}\}.\end{aligned}$$

Ya que $\sigma(T) = \{\phi(T) : \phi$ es un homeomorfismo de $\mathfrak{U}$ sobre $\mathbb{C}\}$, basta probar que $\phi(T^*) = \overline{\phi(T)}$ para todo ϕ. Supongamos que $\phi(T) = a + ib$, $\phi(T^*) = c + id$ para ϕ fijado. Veamos, en primer lugar, que $d = -b$. Para ello, si consideramos el operador autoadjunto $B = T + T^*$ se observa que $\phi(B) = (a + c) + i(b + d)$ y por ser $\sigma(B) \subset \mathbb{R}$, se tiene que necesariamente $b + d = 0$, esto es, $d = -b$. Para probar que $c = a$, basta con considerar el operador iT y proceder de manera análoga.

□

Teorema 2.10. *(Teorema espectral) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal. Entonces existe un espacio de medida finita $(X, \mathcal{B}, \mu)$ siendo μ una medida regular y una aplicación $\phi \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ tal que T es unitariamente equivalente al operador de multiplicación M_ϕ definido sobre $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$.*

Demostración. En primer lugar, nos ocuparemos del caso en el que

$$\mathcal{M}_{x_0} = \overline{\operatorname{span}\{T^m(T^*)^n x_0 : m, n \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{H},$$

para cierto $x_0 \in \mathcal{H}$ vector no nulo, que será de utilidad para demostrar el caso general.

Por lo tanto, supongamos que existe $x_0 \in \mathcal{H}$ vector no nulo tal que $\mathcal{M}_{x_0} = \mathcal{H}$, esto es, $\overline{\{P(T, T^*)x_0 : P \text{ polinomio en dos variables}\}} = \mathcal{H}$. Sea $X = \sigma(T)$. En virtud del Teorema de Stone-Weierstrass se tiene que el espacio de los polinomios en las variables z y $\overline{z}$,

$$\mathcal{P}[z, \overline{z}] = \{P(z, \overline{z}) : P \text{ polinomio en dos variables}\},$$

es denso en $C(X)$ uniformemente. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\|x_0\| = 1$. Definimos el funcional lineal sobre $\mathcal{P}[z, \overline{z}]$ de la forma $F(P) = \langle P(T, T^*)x_0, x_0\rangle$. En virtud de los Teoremas 2.6 y 2.9 se tiene que

$$|F(P)| \leq \|P(T, T^*)\| = r(P(T, T^*)) = \sup_{z \in X} |P(z, \overline{z})|,$$

donde $r(P(T, T^*))$ denota el radio espectral de $P(T, T^*)$.

Por lo tanto, F un funcional lineal y acotado sobre $\mathcal{P}[z, \overline{z}]$ y con $\|F\| \leq 1$. Como además $\mathcal{P}[z, \overline{z}]$ es denso en $C(X)$, se sigue que F admite una extensión a un funcional lineal y acotado $\widehat{F}$ sobre $C(X)$ tal que $\|F\| = \|\widehat{F}\|$.

A continuación, probamos que $\widehat{F}$ es positivo, esto es, si $f \in C(X)$ con $f(z) \geq 0$ para todo $z \in X$ entonces $\widehat{F}(f) \geq 0$. Para ello, definimos $g(z) = \sqrt{f(z)}$ para todo $z \in X$. En virtud del Teorema de Stone-Weierstrass para funciones reales se sigue que para todo $\varepsilon > 0$, existe un polinomio de coeficientes y variables reales x e y, denotado por $q(x, y)$, y tal que

$$|q^2(x, y) - g^2(x + iy)| < \varepsilon, \quad \forall x + iy \in X.$$

Ahora bien, sea $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ y $C = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ operadores reales y autoadjuntos tales que $A = B + iC$. Se observa que

$$\begin{aligned}|\langle q^2(B, C)x_0, x_0\rangle - \widehat{F}(f)| &= |\langle (q^2(B, C) - g^2(B + iC))x_0, x_0\rangle| \\ &\leq \sup_{x+iy\in X} |q^2(x, y) - g^2(x + iy)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Ya que $q(B, C)$ es autoadjunto, se tiene que

$$\langle q^2(B, C)x_0, x_0\rangle = \langle q(B, C)x_0, q(B, C)x_0\rangle = \|q(B, C)x_0\|^2 \geq 0.$$

Luego, necesariamente, $\widehat{F}(f) \geq 0$. Por lo tanto, del Teorema de representación de Riesz se sigue que existe una medida de Borel finita y regular μ sobre X tal que $\widehat{F}(f) = \int_X f\, d\mu$ para todo $f \in C(X)$.

Por último, veamos que T es unitariamente equivalente al operador de multiplicación M_z en $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Consideremos $U : \mathcal{P}[z, \overline{z}] \subset L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \to \mathcal{H}$ operador definido por $UP(z, \overline{z}) = P(T, T^*)x_0$ para todo $P \in \mathcal{P}[z, \overline{z}]$. Se observa que U es una isometría, ya que

$$\begin{aligned}\|P\|^2_{L^2(X,\mu)} &= \int_X |P(z, \overline{z})|^2\, d\mu = \int_X P(z, \overline{z})\overline{P(z, \overline{z})}\, d\mu \\ &= \widehat{F}(P(z, \overline{z})\overline{P(z, \overline{z})}) = \langle P(T, T^*)[P(T, T^*)]^*x_0, x_0\rangle \\ &= \langle P(T, T^*)x_0, P(T, T^*)x_0\rangle = \|P(T, T^*)x_0\|^2 = \|UP\|^2.\end{aligned}$$

Esto último se debe a que si $P(z, \overline{z}) = \sum_{i,j} a_{ij} z^i\overline{z}^j$, entonces $\overline{P(z, \overline{z})} = \sum_{i,j} \overline{a_{ij}}\, \overline{z}^i z^j$. Por lo tanto $F(\overline{P(z, \overline{z})}) = \langle \overline{P(T, T^*)}x_0, x_0\rangle = \langle [P(T, T^*)]^*x_0, x_0\rangle$.

Puesto que $\{P(T, T^*)x_0 : P \in \mathbb{P}\}$ es denso en $\mathcal{H}$, U admite una extensión a un operador lineal, acotado $\widehat{U}$ de $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ sobre $\mathcal{H}$ con $\widehat{U}_{|\mathbb{P}} = U$ y tal que $\|\widehat{U}\| = 1$. En particular, para todo $P \in \mathcal{P}[z, \overline{z}]$ se tiene que

$$\widehat{U}^{-1}T\widehat{U}P(z, \overline{z}) = \widehat{U}^{-1}TP(T, T^*)x_0 = \widehat{U}^{-1}(\widehat{U}(zP(z, \overline{z}))) = M_zP(z, \overline{z}).$$

Por un argumento de densidad, se tiene que $\widehat{U}^{-1}T\widehat{U}f = M_zf$ para todo $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Por lo tanto $\widehat{U}^{-1}T\widehat{U} = M_z$.

Para el caso general, ya que $T\mathcal{M}_{x_0} \subset \mathcal{M}_{x_0}$ y $T^*\mathcal{M}_{x_0} \subset \mathcal{M}_{x_0}$, en virtud del lema de Zorn existe una colección $\{\mathcal{M}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subespacios de $\mathcal{H}$ ortogonales dos a dos tales que

$$\mathcal{H} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_n \oplus \ldots,$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $T\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_n$, $T^*\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_n$ y $T|\mathcal{M}_n$ tiene un vector cíclico. En virtud del caso expuesto anteriormente, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una medida regular y finita μ_n sobre $X_n = \sigma(T|\mathcal{M}_n)$ tal que $T_{|\mathcal{M}_n}$ es unitariamente equivalente al operador de multiplicación M_z en $L^2(X_n, \mu_n)$. Dividiendo por una cantidad positiva adecuada, para cada $n \in \mathbb{N}$ supogamos que $\mu_n(X_n) \leq 2^{-n}$ y denotemos por $\phi_n(z) = z$ para todo $z \in X_n$.

Puesto que para todo $n \in \mathbb{N}$, $T_{|\mathcal{M}_n}$ es unitariamente equivalente al operador de multiplicación M_{ϕ_n} en $L^2(X_n, \mu_n)$, se tiene que T es unitariamente equivalente a $\sum_{n=1}^{\infty} \oplus M_{\phi_n}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \oplus L^2(X_n, \mu_n)$.

Por último, veamos la manera de considerar $\sum_{n=1}^{\infty} \oplus L^2(X_n, \mu_n)$ como un espacio $L^2(X, \mu)$, para cierto conjunto X y cierta medida μ, de forma que $\sum_{n=1}^{\infty} \oplus M_{\phi_n}$ sea unitariamente equivalente a M_ϕ, para cierto $\phi \in L^\infty(X, \mu)$.

Tras un renombramiento de los conjuntos X_n para obtener una colección disjunta, definimos $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Consideremos los subconjuntos medibles de X aquellos de la forma $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, donde S_n es un subconjunto medible de X_n, para cada $n \in \mathbb{N}$ y la medida finita $\mu(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(S_n)$ para dichos subconjuntos medibles con $\mu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty$. Si definimos $\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \chi_{X_n}$ se tiene que $\phi \in L^\infty(X, \mu)$. Luego M_ϕ en $L^2(X, \mu)$ es unitariamente equivalente a $\sum_{n=1}^{\infty} \oplus M_{\phi_n}$, y por tanto a T. $\square$

En virtud del resultado anterior, para determinar subespacios cerrados e invariantes de un operador normal T basta con conocer aquellos subespacios cerrados e invariantes del operador de multiplicación que es unitariamente equivalente a T.

Como ya mencionamos en el Ejemplo 2.3, si denotamos por M_ϕ al operador de multiplicación sobre $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ que proporciona el Teorema 2.10, para cada $B \in \mathcal{B}$, el subespacio

$$\mathcal{M}_B = \{f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu) : f(x) = 0, \text{ c.t.p } x \text{ fuera de } B\},$$

es cerrado, M_ϕ invariante y no trivial.

Por lo tanto, si $U : \mathcal{H} \to L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ es una isometría biyectiva tal que $T = U^{-1} M_\phi U$, entonces para cada $B \in \mathcal{B}$ el subespacio $\mathcal{N}_B := U^{-1}\mathcal{M}_B$ es cerrado, T invariante y no trivial.

Shamim Ansari y Per Enflo usando la técnica de vectores minimales probaron, bajo ciertas condiciones, que si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un operador normal entonces T posse un subespacio cerrado e hiperinvariante no trivial (véase [3]). En la demostración de este resultado se utiliza la descomposición espectral de T, que en virtud de lo anteriormente expuesto, implicaría la existencia de un subespacio cerrado e invariantes no trivial. Esta observación fue hecha por Hari Bercovici, quien fuera recensor del trabajo de Ansari y Enflo.

La existencia de subespacios cerrados e invariantes no triviales para operadores normales también proporciona una respuesta positiva para los operadores autoadjuntos y unitarios.

Capítulo 3

Vectores minimales y subespacios hiperinvariantes

Como comentamos en el capítulo anterior, veremos cómo obtener resultados positivos sobre la existencia de subespacios invariantes a partir de la ténica de los vectores minimales. Además, una condición referente al comportamiento de la sucesión de vectores minimales asociados a un operador T permite construir un subespacio cerrado e hiperinvariante no trivial para dicho operador.

3.1. Operadores compactos

A continuación, se demuestra que todo operador compacto K no nulo tiene subespacio cerrado e invariante no trivial usando vectores minimales asociados a dicho operador en espacios de Hilbert, una técnica que fue introducida por S. Ansari y P. Enlfo (véase [3]).

Teorema 3.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Entonces todo operador compacto no nulo K tiene un subespacio cerrado e invariante no trivial.*

De hecho, este resultado proporciona un subespacio cerrado e hiperinvariante no trivial.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\overline{R(K)} = \mathcal{H}$ y K inyectivo. Además, si K es compacto se tiene que $\sigma(K) = \sigma_p(K) \cup \{0\}$, y como no posee autovalores se tiene que $\sigma(K) = \{0\}$ con lo que su $\rho(K) = 0$. Por lo tanto, en virtud de la fórmula de Gelfand $\lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{1/n} = \rho(K)$, concluimos que K es cuasinilpotente.

Dados $x_0 \in \mathcal{H}$ no nulo, $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$, denotemos $\{y_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de vectores minimales asociada a x_0, ε y K, que existe y es única en virtud de la Proposición 1.1. Sea $T \in \{K\}'$ con $\|T\| = 1$. Como K es cuasinilpotente, existe una subsucesión de vectores minimales $\{y_{n_j}^{\varepsilon}\}_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\|y_{n_j-1}^{\varepsilon}\|}{\|y_{n_j}^{\varepsilon}\|} = 0. \tag{3.1.1}$$

Ahora bien, como para todo $j \in \mathbb{N}$ se tiene que $K^{n_j} y_{n_j}^{\varepsilon} \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$, pasando a una subsucesión si fuese necesario, existen $y_0, z_0 \in \mathcal{H}$ tales que

$$K^{n_j} y_{n_j}^{\varepsilon} \xrightarrow{w} y_0 \quad , \quad K^{n_j-1} y_{n_j-1}^{\varepsilon} \xrightarrow{w} z_0.$$

Como $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, podemos descomponerlo de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{Y}_j \oplus \mathcal{Y}_j^{\perp}$ con $\mathcal{Y}_j = \langle\{y_{n_j}^{\varepsilon}\}\rangle$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, para todo $j \in \mathbb{N}$

$$T y_{n_j-1}^{\varepsilon} = \alpha_{n_j-1} y_{n_j}^{\varepsilon} + \omega_{n_j-1},$$

donde $\alpha_{n_j-1} \in \mathbb{C}$ y $\omega_{n_j-1} \in \mathcal{Y}_j^{\perp}$. A partir de esta representación se deduce que $\alpha_{n_j} \to 0$ cuando $j \to \infty$, ya que $\langle T y_{n_j-1}^{\varepsilon}, y_{n_j}^{\varepsilon}\rangle = \alpha_{n_j-1}\|y_{n_j}^{\varepsilon}\|^2$ y en virtud de la ecuación 3.1.1 y la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\alpha_{n_j}| = \frac{|\langle T y_{n_j-1}^{\varepsilon}, y_{n_j}^{\varepsilon}\rangle|}{\|y_{n_j}^{\varepsilon}\|^2} \leq \frac{\|y_{n_j-1}^{\varepsilon}\|}{\|y_{n_j}^{\varepsilon}\|} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Como además $T K^{n_j} y_{n_j-1}^{\varepsilon} = \alpha_{n_j-1} K^{n_j} y_{n_j}^{\varepsilon} + K^{n_j}\omega_{n_j-1}$, del Corolario 1.3 se sigue que

$$\langle T K^{n_j} y_{n_j-1}^{\varepsilon}, K^{n_j} y_{n_j}^{\varepsilon} - x_0\rangle = \alpha_{n_j-1}\langle K^{n_j} y_{n_j}^{\varepsilon}, K^{n_j} y_{n_j}^{\varepsilon} - x_0\rangle.$$

Debido a que $\alpha_{n_j} \to 0$ cuando $j \to \infty$ y al hecho de que

$$|\langle K^{n_j} y_{n_j}^{\varepsilon}, K^{n_j} y_{n_j}^{\varepsilon} - x_0\rangle| \leq \varepsilon\|K^{n_j} y_{n_j}^{\varepsilon}\| \leq \varepsilon(\|x_0\| + \varepsilon) \text{ para todo } j \in \mathbb{N},$$

se tiene que

$$\lim_{j\to\infty} \langle T K^{n_j} y_{n_j-1}^{\varepsilon}, K^{n_j} y_{n_j}^{\varepsilon} - x_0\rangle = \langle T K z_0, y_0 - x_0\rangle = 0.$$

Esto último es equivalente a que $\langle T z_0, K^*(y_0 - x_0)\rangle = 0$. Por lo tanto, como $\|y_0\|^2 \leq \liminf \|K^{n_j} y_{n_j}^{\varepsilon}\|^2 \leq \|x_0\|^2 - \varepsilon^2$, esto es, $\varepsilon^2 \leq \|x_0\|^2 - \|y_0\|^2$. Por ello, $y_0 - x_0 \neq 0$ y ya que $\overline{R(K)} = \mathcal{H}$ se tiene que $K^*(y_0 - x_0) \neq 0$. Por consiguiente se tiene que $\langle S z_0, K^*(y_0 - x_0)\rangle = 0$ para todo $S \in \{K\}'$.

Con todo esto, se observa que el subespacio

$$\mathcal{M} = \operatorname{span}\overline{\{S z_0 : SK = KS\}},$$

es cerrado, S invariante y no trivial, pues $K^*(y_0 - x_0) \in \mathcal{M}^{\perp}$ con $K^*(y_0 - x_0) \neq 0$. □

3.2. Operadores cuasinilpotentes

El siguiente resultado pone de manifiesto, bajo ciertas condiciones adicionales, la existencia de un subespacio cerrado e invariante no trivial para operadores cuasinilpotentes en espacios de Hilbert usando la técnica de vectores minimales. Antes de enunciarlo, veamos un teorema que será de utilidad para tal finalidad.

Teorema 3.2. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Supongamos $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un operador inyectivo, cuasinilpotente y sea $B_0 \in \{Q\}'$ operador no nulo tal que $B_0Q \neq 0$, esto es, $R(Q) \nsubseteq \operatorname{Ker} B_0$. Entonces existen sucesiones $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$ convergentes débilmente a s_0 y t_0, respectivamente, con $B_0s_0 \neq 0$, y una sucesión $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ convergente a cero tales que*

$$|\langle A_{m,n}s_n, t_n\rangle| < \beta_n, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

para toda sucesión $\{A_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ en la bola unidad de $\{Q\}'$.

Demostración. Sea $B_0 \in \{Q\}'$ tal que $B_0Q \neq 0$. Si $R(Q)$ no es denso en $\mathcal{H}$, entonces considerando $\mathcal{M} = \overline{R(Q)}$ subespacio Q hiperinvariante el resultado es cierto sin más que elegir $s_0 \in \mathcal{M}$, $t_0 \in \mathcal{M}^\perp$ tal que $B_0s_0 \neq 0$, y definiendo las sucesiones $s_k = s_0$, $t_k = t_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión de números reales positivos convergente a cero. En efecto, pues para todo $A_{m,n}$ en la bola unidad de $\{Q\}'$ se tiene que

$$|\langle A_{m,n}s_n, t_n\rangle| = |\langle A_{m,n}s_0, t_0\rangle| = 0 < \beta_k,$$

ya que $A_{m,n}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$.

Por lo tanto podemos suponer que $\overline{R(Q)} = \mathcal{H}$. Sea $x_0 \in \mathcal{H}$ vector no nulo y tal que $B_0Qx_0 \neq 0$ y sea ε satisfaciendo

$$0 < \varepsilon < \text{mín}\{\|Qx_0\|, (1/\|B_0\|)\|B_0x_0\|\}.$$

Sea $\{y_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de vectores minimales asociada al operador cuasinilpotente Q con parámetro x_0 y ε. Ya que Q es cuasinilpotente, existe una subsucesión $\{y_{n_j}^\varepsilon\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\|y_{n_j}^\varepsilon\|}{\|y_{n_j+1}^\varepsilon\|} = 0.$$

Ya que $Q^{n_j}y_{n_j}^\varepsilon \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, existe una subsucesión, que denotaremos de la misma manera, convergente en la topología débil a un vector no nulo y_0, esto es, $Q^{n_j}y_{n_j}^\varepsilon \xrightarrow{w} y_0$. Procediendo de manera análoga, se puede afirmar que existe s_0 vector no nulo tal que $Q^{n_j+1}y_{n_j+1} \xrightarrow{w} z_0$. Como además $\overline{B(x_0, \varepsilon)}^w = \overline{B(x_0, \varepsilon)}^{\|\cdot\|}$, se tiene que $\|y_0 - x_0\| \leq \varepsilon$, $\|z_0 - x_0\| \leq \varepsilon$ y

$\|B_0y_0 - B_0x_0\| \leq \|B_0\|\varepsilon$, de donde se sigue que $B_0y_0 \neq 0$.

A continuación veamos que $y_0 - x_0 \neq 0$, lo que implica que $Q^*(y_0 - x_0) \neq 0$. Esto se debe a que $\mathcal{H} = \operatorname{Ker} Q^* \oplus \overline{R(Q)}$, y ya que Q tiene rango denso, resulta $\operatorname{Ker} Q^* = \{0\}$. Al ser $\{y_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de vectores minimales asociada al operador Q, para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 &= \|Q^{n_k+1}y^\varepsilon_{n_k+1} - x_0\|^2 = \langle Q^{n_k+1}y^\varepsilon_{n_k+1} - x_0, Q^{n_k+1}y^\varepsilon_{n_k+1} - x_0\rangle \\
&= \langle Q^{n_k+1}y^\varepsilon_{n_k+1} - x_0, Q^{n_k+1}y^\varepsilon_{n_k+1}\rangle - \langle x_0, Q^{n_k+1}y^\varepsilon_{n_k+1} - x_0\rangle \\
&= \langle y^\varepsilon_{n_k+1}, (Q^{n_k+1})^*(Q^{n_k+1}y^\varepsilon_{n_k+1} - x_0)\rangle - \langle x_0, Q^{n_k+1}y^\varepsilon_{n_k+1} - x_0\rangle \\
&= (\mu^\varepsilon_{n_k+1})^{-1}\|y^\varepsilon_{n_k+1}\|^2 - \langle x_0, Q^{n_k+1}y^\varepsilon_{n_k+1} - x_0\rangle \\
&< -\langle x_0, Q^{n_k+1}y^\varepsilon_{n_k+1} - x_0\rangle,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que $\mu^\varepsilon_{n_k+1} < 0$. Por lo tanto

$$\langle x_0, Q^{n_k+1}y^\varepsilon_{n_k+1} - x_0\rangle < -\varepsilon^2.$$

Haciendo k tender a infinito se tiene que $\langle x_0, z_0 - x_0\rangle < -\varepsilon^2$, lo que implica que $z_0 - x_0 \neq 0$ y $Q^*(z_0 - x_0) \neq 0$. Con todo esto, definiendo

$$\begin{aligned}
s_k &= Q^{n_k}y^\varepsilon_{n_k}, \\
t_k &= Q^*(Q^{n_k+1}y^\varepsilon_{n_k+1} - x_0), \\
\beta_k &= (\|y^\varepsilon_{n_k}\|/\|y^\varepsilon_{n_k+1}\|)(\|x_0\|^2 - \varepsilon^2)^{1/2}\varepsilon, \quad k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

se obtienen sucesiones $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$ que convergen débilmente a los vectores no nulos $t_0 := y_0$ y $s_0 := Q^*(z_0 - x_0)$, respectivamente y además $B_0t_0 = B_0y_0 \neq 0$. Sea $\{A_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ sucesión de operadores lineales y continuos en la bola unidad de $\{Q\}'$. Ya que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H} = \langle\{y^\varepsilon_{n_k}\}\rangle \oplus \langle\{y^\varepsilon_{n_k}\}\rangle^\perp$, se tiene que

$$A_{m,n_k}y^\varepsilon_{n_k} = \alpha^{(m)}_{n_k}y^\varepsilon_{n_k} + \omega^{(m)}_{n_k}, \quad \alpha^{(m)}_{n_k} \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}.$$

Para todo $m, k \in \mathbb{N}$ se observa que

$$|\alpha^{(m)}_{n_k}|\|y^\varepsilon_{n_k+1}\|^2 = |\langle A_{m,n_k}y^\varepsilon_{n_k}, y^\varepsilon_{n_k+1}\rangle| \leq \|y^\varepsilon_{n_k}\|\|y^\varepsilon_{n_k+1}\|,$$

y por lo tanto

$$|\alpha^{(m)}_{n_k}| \leq \frac{\|y^\varepsilon_{n_k}\|}{\|y^\varepsilon_{n_k+1}\|}.$$

Puesto que para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $A_{m,n} \in \{Q\}'$ se tiene que

$$QA_{m,n_k}Q^{n_k}y^\varepsilon_{n_k} = Q^{n_k+1}A_{m,n_k}y^\varepsilon_{n_k} = \alpha^{(m)}_{n_k}Q^{n_k+1}y^\varepsilon_{n_k+1} + Q^{n_k+1}\omega^{(m)}_{n_k},$$

y como $Q^{n_k+1}\omega_{n_k}^{(m)} \perp Q^{n_k+1}y_{n_k+1}^{\varepsilon} - x_0$, al ser $\omega_{n_k}^{(m)} \perp y_{n_k+1}^{\varepsilon}$, resulta

$$\begin{aligned}
|\langle A_{m,n_k}s_k, t_k\rangle| &= |\langle A_{m,n_k}Q^{n_k}y_{n_k}^{\varepsilon}, Q^*(Q^{n_k+1}y_{n_k+1}^{\varepsilon} - x_0)\rangle| \\
&= |\langle QA_{m,n_k}Q^{n_k}y_{n_k}^{\varepsilon}, Q^{n_k+1}y_{n_k+1}^{\varepsilon} - x_0\rangle| \\
&= |\alpha_{n_k}^{(m)}||\langle Q^{n_k+1}y_{n_k+1}^{\varepsilon}, Q^{n_k+1}y_{n_k+1}^{\varepsilon} - x_0\rangle| \\
&= |\alpha_{n_k}^{(m)}||\langle Q^{n_k+1}y_{n_k+1}^{\varepsilon}, Q^{n_k+1}y_{n_k+1}^{\varepsilon} - x_0\rangle| \\
&\leq |\alpha_{n_k}^{(m)}|\|Q^{n_k+1}y_{n_k+1}^{\varepsilon}\|\|Q^{n_k+1}y_{n_k+1}^{\varepsilon} - x_0\| \\
&\leq \frac{\|y_{n_k}^{\varepsilon}\|}{\|y_{n_k+1}^{\varepsilon}\|}(\|x_0\|^2 - \varepsilon^2)^{1/2}\varepsilon = \beta_k,
\end{aligned}$$

con $\beta_k \to 0$ cuando $k \to \infty$ debido a que $\|y_{n_k}^{\varepsilon}\|/\|y_{n_k+1}^{\varepsilon}\| \to 0$ cuando $k \to \infty$. □

Corolario 3.3. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Supongamos $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un operador inyectivo y cuasinilpotente. Sean $\{D_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{Q\}'$ una sucesión convergente en la topología débil de operadores a $D \in \{Q\}'$, $D \neq 0$, y $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores compactos tales que*

$$\lim_{m\to\infty} \|D_m - K_m\| = 0.$$

Entonces Q posee un subespacio cerrado e hiperinvarinte no trivial.

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\overline{R(Q)} = \mathcal{H}$ pues en caso contrario $\mathcal{M} = \overline{R(Q)}$ es un subespacio cerrado, no trivial y tal que $A\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ para todo $A \in \{Q\}'$. Por lo tanto $DQ = QD \neq 0$.

Si definimos $B_0 := D$, en virtud del teorema anterior existen sucesiones $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$ que convergen débilmente a los vectores no nulos t_0 y s_0 y además satisfaciendo que $z_0 := B_0 s_0 \neq 0$.

Consideremos el subespacio cerrado, no nulo y Q hiperinvariante

$$\mathcal{M}_{z_0} := \overline{\operatorname{span}\{Az_0 : AQ = QA\}}.$$

Basta con probar que $\mathcal{M}_{z_0} \neq \mathcal{H}$. Para ello, veamos que $\langle Az_0, t_0\rangle = 0$ para todo $A \in \{Q\}'$, y por tanto $t_0 \in \mathcal{M}_{z_0}^{\perp}$. Puesto que $t_0 \neq 0$, se tiene el resultado. Sea $A_0 \in \{Q\}'$ con $\|A_0\| \leq 1$ tal que $A_0 z_0 = A_0 B_0 s_0 \neq 0$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\|D_m\| \leq 1$. Definimos la sucesión $\{A_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}} \subset \{Q\}'$ dada por $A_{m,k} := A_0 D_m$ para todo $m, k \in \mathbb{N}$. En virtud del teorema anterior, se tiene que

$$\langle A_{m,k}s_k, t_k\rangle = \langle A_0 D_m s_k, t_k\rangle < \beta_k, \quad k, m \in \mathbb{N},$$

donde $\beta_k \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Ya que $\{D_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge en la topología débil de operadores a D se tiene que $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ también converge en la topología débil de operadores a D. Por ello, dado $\delta > 0$ arbitrario, es suficiente probar que existe $M_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $|\langle A_0 K_m s_0, t_0\rangle| \leq \delta$ para todo $m > M_\delta$. En efecto, pues en ese caso

$$|\langle Az_0, t_0\rangle| = |\langle ADs_0, t_0\rangle| = \lim_{m\to\infty} |\langle AK_m s_0, t_0\rangle| \leq \delta.$$

Sea $\nu \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq \nu$ se cumple que $\beta_k < \delta/2$. Elegimos $M_\delta \in \mathbb{N}$ verificando que

$$\|D_m - K_m\| < \frac{\delta}{2\|A_0\|(\sup_k \|s_k\|\|t_k\|)}, \quad m > M_\delta.$$

Por lo tanto, para todo $k > \nu$ y todo $m > M_\delta$ se tiene que

$$\begin{aligned} |\langle A_0 K_m s_k, t_k\rangle| &\leq |\langle A_0 D_m s_k, t_k\rangle| + |\langle A_0(D_m - K_m)s_k, t_k\rangle| \\ &\leq \beta_k + \|A_0\|\|D_m - K_m\|\|s_k\|\|t_k\| < \delta. \end{aligned}$$

Sea $m_0 > M_\delta$ fijo. Ya que $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a s_0 y $A_0 K_{m_0}$ es compacto se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \|A_0 K_{m_0} s_k - A_0 K_{m_0} s_0\| = 0,$$

y como además $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a t_0 se concluye que

$$|\langle A_0 K_{m_0} s_0, t_0\rangle| = \lim_{k\to\infty} |\langle A_0 K_{m_0} s_k, t_k\rangle| < \delta.$$

□

3.3. Más resultados

Para concluir este capítulo, se presenta un resultado que afirma la existencia de subespacios cerrados e hiperinvariantes de un operador T a partir de la sucesión de λ-vectores minimales asociados a dicho operador. En él, se exige un comportamiento de dicha sucesión similar al que presenta para operadores cuasinilpotentes y una convergencia en norma a un vector no nulo que será la piedra angular de la construcción del subespacio.

Antes de enunciarlo, veamos el lema fundamental sobre el que se basa dicho resultado y que es consecuencia del Teorema de Hahn-Banach.

Lema 3.4. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,, \|x_0\|)$ denotemos por y_n^ε a un λ-vector minimal asociado. Entonces, existen $f_n \in \mathcal{X}^*$ con $\|f_n\| = 1$ y $\beta > 0$ tales que*

1. $|f_n(x_0)| \geq \beta + \varepsilon$.

2. $\beta \leq |f_n(T^n y_n^\varepsilon)| \leq \lambda\beta$.

3. $|T^{*n} f_n(y_n^\varepsilon)| \geq \frac{1}{\lambda}\|T^{*n} f_n\|\|y_n^\varepsilon\|$.

Demostración. Por definición

$$d_n^\varepsilon = \text{ínf}\{\|y\| : \|T^n y - x_0\| \leq \varepsilon\} > 0.$$

Consideremos los conjuntos

$$B(x_0, \varepsilon) = \{y \in \mathcal{X} : \|y - x_0\| < \varepsilon\},$$
$$T^n B(0, d_n^\varepsilon) = \{T^n z : z \in B(0, d_n^\varepsilon)\}.$$

Como ambos conjuntos son convexos, disjuntos y el primero de ellos abierto, en virtud de la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach existe $g_n \in \mathcal{X}^*$ con $\|g_n\| = 1$ y una constante $\beta > 0$ tal que

$$Re(g_n(y)) \geq \beta \qquad , \qquad Re(g_n(T^n z)) \leq \beta,$$

para todo $y \in B(x_0, \varepsilon)$ y para todo $z \in B(0, d_n^\varepsilon)$.
En particular se tiene que $Re(g_n(x_0)) \geq \beta + \varepsilon$. Además se tiene que $\|T^{*n} g_n\| \leq \beta / d_n^\varepsilon$ y como $T^n y_n^\varepsilon \in B(x_0, \varepsilon)$ se tiene que $Re(g_n(T^n y_n^\varepsilon)) \geq \beta$. Por lo tanto

$$|g_n(T^n y_n^\varepsilon)| \geq Re(g_n(T^n y_n^\varepsilon)) \geq \beta,$$
$$|g_n(T^n y_n^\varepsilon)| = |(T^{*n} g_n) y_n^\varepsilon)| \leq \|T^{*n} g_n\|\|y_n^\varepsilon\| \leq \frac{\beta}{d_n^\varepsilon}\|y_n^\varepsilon\| \leq \lambda\beta,$$

donde la última desigualdad se obtiene del hecho de que $\|y_n^\varepsilon\| \leq \lambda d_n^\varepsilon$. Por último

$$|(T^{*n} g_n) y_n^\varepsilon)| = |g_n(T^n y_n^\varepsilon)| \geq \beta \geq d_n^\varepsilon \|T^{*n} g_n\| \geq \frac{1}{\lambda}\|y_n^\varepsilon\|\|T^{*n} g_n\|.$$

□

Teorema 3.5. *En las mismas hipótesis del lema anterior, supongamos que existe una subsucesión* $\{y_{n_k}^\varepsilon\}_{k\in\mathbb{N}}$ *de* λ*-vectores minimales tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|y_{n_{k-1}}^\varepsilon\|}{\|y_{n_k}^\varepsilon\|} = 0,$$

y una sucesión uniformemente acotada $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{T\}'$ *de forma que la sucesión* $\{A_k T^{n_k - 1} y_{n_k - 1}^\varepsilon\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge en norma a un elemento no nulo. Entonces* T *tiene un espacio hiperinvariante.*

Demostración. Dado $y_{n_k}^{\varepsilon}$ λ-vector minimal a nivel $n_k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$, en virtud del lema anterior existe $f_{n_k} \in \mathcal{X}^*$ con $\|f_{n_k}\| = 1$ y $\beta_{n_k} > 0$ verificando

$$|f_{n_k}(x_0)| \geq \beta_{n_k} + \varepsilon, \tag{3.3.2}$$

$$\beta_{n_k} \leq |f_{n_k}(T^{n_k} y_{n_k}^{\varepsilon})| \leq \lambda \beta_{n_k}, \tag{3.3.3}$$

$$|T^{*n_k} f_{n_k}(y_{n_k}^{\varepsilon})| \geq \tfrac{1}{\lambda} \|T^{*n_k} f_{n_k}\| \|y_{n_k}^{\varepsilon}\|. \tag{3.3.4}$$

Sea $D \in \{T\}'$. Si definimos $g_{n_k} = (f_{n_k} \circ T^{n_k}) \in \mathcal{X}^*$, en virtud de la desigualdad (3.3.3) se tiene que $\mathcal{X}$ puede descomponerse como suma directa de la forma

$$\mathcal{X} = \langle \{y_{n_k}^{\varepsilon}\} \rangle \oplus \operatorname{Ker} g_{n_k}.$$

Como D, $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ para todo $k \in \mathbb{N}$, escribimos

$$DA_k y_{n_{k-1}}^{\varepsilon} = \alpha_{n_k} y_{n_k}^{\varepsilon} + \omega_{n_k},$$

donde $\alpha_{n_k} \in \mathbb{C}$ y $\omega_{n_k} \in \operatorname{Ker} g_{n_k}$. Además, esta escritura es única, pues si suponemos que $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $\omega_1, \omega_2 \in \operatorname{Ker} g_{n_k}$ son tales que $\alpha y_{n_k} + \omega_1 = x = \beta y_{n_k}^{\varepsilon} + \omega_2$ se tiene que $(\alpha - \beta) y_{n_k}^{\varepsilon} = (\omega_2 - \omega_1)$ con $y_{n_k} \notin \operatorname{Ker} g_{n_k}$ y $(\omega_2 - \omega_1) \in \operatorname{Ker} g_{n_k}$. Luego, necesariamente $\alpha = \beta$ y $\omega_1 = \omega_2$.

De esta manera, aplicando el funcional g_{n_k}, se tiene que

$$g_{n_k}(DA_k y_{n_{k-1}}^{\varepsilon}) = \alpha_{n_k} g_{n_k}(y_{n_k}^{\varepsilon}), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

y usando la desigualdad (3.3.4) resulta

$$|g_{n_k}(DA_k y_{n_{k-1}}^{\varepsilon})| = |\alpha_{n_k}| |g_{n_k}(y_{n_{k-1}}^{\varepsilon})| \geq \frac{1}{\lambda} |\alpha_{n_k}| \|g_{n_k}\| \|y_{n_{k-1}}^{\varepsilon}\|,$$

esto es,

$$|\alpha_{n_k}| \leq \lambda \frac{|g_{n_k}(DA_k y_{n_{k-1}}^{\varepsilon})|}{\|g_{n_k}\| \|y_{n_k}^{\varepsilon}\|} \leq \lambda \|D\| \|A_k\| \frac{\|y_{n_{k-1}}^{\varepsilon}\|}{\|y_{n_k}^{\varepsilon}\|}.$$

Ya que $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ está uniformemente acotada se deduce que $\alpha_{n_k} \to 0$ cuando $k \to \infty$. Puesto que $D, A_k \in \{T\}'$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $DA_k y_{n_{k-1}}^{\varepsilon} = \alpha_{n_k} y_{n_k}^{\varepsilon} + \omega_{n_k}$ se tiene que

$$(DA_k T^{n_k} y_{n_{k-1}}^{\varepsilon}) = T^{n_k}(DA_k y_{n_{k-1}}^{\varepsilon}) = \alpha_{n_k} T^{n_k} y_{n_k}^{\varepsilon} + T^{n_k} \omega_{n_k},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} f_{n_k}(DA_k T^{n_k} y_{n_{k-1}}^{\varepsilon}) &= \alpha_{n_k} f_{n_k}(T^{n_k} y_{n_k}^{\varepsilon}) + f_{n_k}(T^{n_k} \omega_{n_k}) \\ &= \alpha_{n_k} g_{n_k}(y_{n_k}^{\varepsilon}) + g_{n_k}(\omega_{n_k}) \\ &= \alpha_{n_k} g_{n_k}(y_{n_k}^{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Usando nuevamente la desigualdad (3.3.3) resulta que

$$|f_{n_k}(DA_k T^{n_k} y_{n_{k-1}}^{\varepsilon})| = \alpha_{n_k} |g_{n_k}(y_{n_k}^{\varepsilon})| \leq \lambda |\alpha_{n_k}| \beta_{n_k}$$

Ya que la sucesión $\{\beta_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ está uniformemente acotada, se llega a que

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(DA_kT^{n_k}y^{\varepsilon}_{n_{k-1}}) = 0.$$

Como además $A_kT^{n_k-1}y^{\varepsilon}_{n_k-1}$ converge a z_0 en norma siendo, con $z_0 \neq 0$, resulta $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(DTz_0) = 0$. En efecto, ya que $\|f_{n_k}\| = 1$ y usando que son funciones lineales y acotados

$$|f_{n_k}(DTz_0)-f_{n_k}(DA_kT^{n_k}y^{\varepsilon}_{n_k-1})| \leq \|f_{n_k}\|\|D\|\|T\|\|z_0-A_kT^{n_k-1}y^{\varepsilon}_{n_k-1}\| \to 0$$

cuando $k\to\infty$.

Como $B_{\mathcal{X}^*}$ es compacta en la topología débil*, existe una subsucesión de $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, que denotaremos de la misma manera, convergente a $\Phi\in\mathcal{X}^*$ con $\|\Phi\| = 1$. Por lo tanto

$$\Phi(DTz_0) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(DTz_0) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(DA_kT^{n_k}y^{\varepsilon}_{n_{k-1}}) = 0.$$

Usando la desigualdad (3.3.2) y el hecho de que f_{n_k} converge a Φ en la topología débil*, se tiene que $|\Phi(x_0)| > 0$. Por lo tanto $\Phi \neq 0$.
Con todo esto, se observa que el subespacio

$$\mathcal{M} = \overline{\operatorname{span}\{STz_0 : ST = TS\}},$$

es cerrado, T invariante y no trivial, ya que $Tz_0 \neq 0$ al ser T inyectivo y $\mathcal{M} \subset \operatorname{Ker}\Phi \subsetneq \mathcal{X}$.

□

Corolario 3.6. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, y supongamos que existe una subsucesión de λ-vectores minimales tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|y^{\varepsilon}_{n_{k-1}}\|}{\|y^{\varepsilon}_{n_k}\|} = 0.$$

Si se verifica una de las siguientes condiciones:

1. $\{T^{n_k-1}y^{\varepsilon}_{n_k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge en norma a un elemento no nulo.*
2. $\{T^{n_k}y^{\varepsilon}_{n_k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge en norma a un elemento no nulo.*

Entonces T tiene un subespacio hiperinvariante.

Demostración.

1. En este caso $A_k = I_d$ para todo $k\in\mathbb{N}$.
2. En este caso $A_k = T$ para todo $k\in\mathbb{N}$.

En ambos casos se verifican la condición de acotación uniforme. □

Bibliografía

[1] Abramovich Y.A., Aliprantis C.D, *An Invitation to Operator Theory*, American Mathematical Society, 2002.

[2] Abramovich Y.A, Avgerinos E., Yannelis N.C., *Functional Analysis and Economic Theory*, Springer-Verlag New York, 1998.

[3] Ansari S., Enflo P., Extremal vectors and invariant subspaces. *Trans. Amer. Math. Soc. 350* (1998), no. 2, 539–558.

[4] Argyros S.A, Haydon R.G., A hereditarily indecomposable L^∞-space that solves the scalar-plus-compact problem. *Acta Math* (2011), **60**, 1-54.

[5] Aronszajn N., Smith K.T., Invariant subspaces of completely continuous operators. *Ann. of Math. (2)*, **60** (1954), 345–350.

[6] Beauzamy B., *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*, North-Holland, 1988.

[7] Bernstein A. R., Robinson A., Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos. *Pacific J. Math.*, **16** (1966), 421-431.

[8] Beurling A., On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. *Acta Math*, **82** (1949), 239-255.

[9] Chalendar I., Partington J., *Modern approaches to the invariant subspace problem*, Cambridge University Press, 2011.

[10] Chalendar I., Partington J., Convergence properties of minimal vectors for normal operators and weighted shifts. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133** (2004), no. 2, 501-510.

[11] Conway J.B., *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag New York, 1990.

[12] Deville R., Godefroy G., Zizler V., *Smoothness and renorming in Banach spaces*, Vol 64 de Pitman Monographs and Surveys in

Pure and Applied Mathematics, editorial Longman Scientific & Technical, 1993.

[13] Diestel J., *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag New York, 1984.

[14] Enflo P., On the invariant subspace problem for Banach spaces. *Acta Math.*, **158** (1987), no. 3-4 213-313.

[15] Enflo P., Höim T., Some results on extremal vectors an invariant subspaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131** (2003), no. 2, 379–387.

[16] Halmos P.R., *Finite-dimensional Vector Spaces*, Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Co., 1958.

[17] Halmos P.R., Invariant subspaces of polynomially compact operators. *Pacific J. Math.*, **16** (1966), 433-437.

[18] Jung I., Ko E., Pearcy C., On quasinilpotent operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131** (2003), no. 7, 2121–2127.

[19] Lomonosov V., Invariant subspaces for operators commuting with compact operatos. *Funct. Anal. Appl.*, **7** (1973), 213-214.

[20] Michaels A.J., Hilden's simple proof of Lomonosov's invariant subspace problem. *Adv. Math.*, **25** (1977), no. 1, 56-58.

[21] Radjavi H., Rosenthal P., *Invariant Subspaces*, Springer-Verlag Berlin, 1973.

[22] Read C., A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ^1. *Bull. London Math. Soc.*, **17** (1985), no. 4, 305-317.

[23] Read C., Quasinilpotent operators and the invariant subspace problem. *J. London Math. Soc. (2)*, **56** (1997), no. 3, 595–606.

[24] Rudin W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[25] Satake I., *Linear algebra*, Marcel Dekker, 1975.

[26] Tradacete P., El problema del subespacio invariante en espacios de Banach. *Gaceta de la RSME.*, **14** (2011), no. 3, 491-509.

[27] Troritsky V., Lomonosov's theorem cannot be extended to chains of four operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128** (2000), no. 2, 521-525.