

# Modelo de redes de flujo con transición dinámica de régimen lámina libre/presión

---

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Mecánica Aplicada

Programa Oficial de Postgrado en Ingeniería Mecánica y Materiales

Curso 2011/12

Septiembre 2012

Autor: **Javier Fernández Pato**

Directora: **Dra. Pilar García-Navarro**



**Universidad**  
Zaragoza

Universidad de Zaragoza  
Escuela de Ingeniería y Arquitectura



# **Modelo de redes de flujo con transición dinámica de régimen lámina libre/presión**

## **Resumen**

La simulación numérica de flujos de agua en sistemas de drenaje urbano es uno de los ámbitos en donde se pone de manifiesto la necesidad de combinar flujos en lámina libre a presión atmosférica con situaciones en las que el conducto se encuentra presurizado, tanto en régimen estacionario como transitorio.

Las ecuaciones que gobiernan los dos tipos de flujo son diferentes, por lo tanto, es necesario tener en cuenta el cambio lámina libre/presión a la hora de programar un modelo numérico completo que sea capaz de resolver transitorios independientemente de la región de trabajo.

En este trabajo se desarrolla un modelo de simulación numérica capaz de resolver redes de tuberías cuyo régimen mayoritario de funcionamiento sea el de lámina libre, pero que se puedan ver presurizadas ante situaciones puntuales. Para ello, se propone adaptar la formulación matemática a través del método de la rendija de Preissmann, mediante en cuál se consigue una estimación razonable de la presión del agua en el conducto.

El método numérico empleado se basa en el esquema de Roe de primer orden, enmarcado dentro de la familia de los métodos de volúmenes finitos. Se trata de un método adaptado a las situaciones transitorias bruscas, capaz de trabajar en régimen subcrítico, supercrítico y mixto. Para su validación, se han resuelto varios casos con solución analítica o datos empíricos correspondientes a experimentos de laboratorio. Mediante la aplicación a casos más complejos, como confluencias o redes de tuberías, se ha evaluado la sensibilidad del método a los cambios de régimen en este tipo de situaciones más realistas.



# Índice general

1. Introducción y objetivos.....	11
2. Modelo matemático.....	13
2.1. Ecuaciones de conservación.....	13
2.1.1. Ecuación de conservación de la masa.....	13
2.1.2. Ecuación de conservación del momento lineal.....	14
2.2. Flujo en lámina libre (shallow water).....	14
2.3. Sistemas transitorios presurizados (water hammer).....	21
3. Modelo de la rendija de Preissmann.....	27
4. Discretización mediante volúmenes finitos.....	29
4.1. Esquema de Roe explícito de primer orden.....	29
4.2. Discretización de los términos fuente.....	31
4.3. Condiciones de contorno.....	32
4.3.1. Condiciones de contorno físicas.....	32
4.3.2. Condiciones de contorno y régimen de flujo.....	32
4.3.3. Confluencias.....	33
4.4. Condición de estabilidad.....	34
5. Validación del modelo.....	37
5.1. Fondo con obstáculo y flujo estacionario.....	37
5.2. Estado estacionario en un canal.....	39
5.3. Rotura de presa.....	40
5.4. Test de Wiggert.....	43
5.5. Propagación de discontinuidades en flujo mixto.....	45
5.6. Transitorio en flujo completamente presurizado.....	46
6. Aplicación a redes.....	49
6.1. Estado estacionario en una unión de conductos.....	49

6.2. Flujo transitorio en una unión de conductos.....	51
6.3. Flujo transitorio en una red de tuberías.....	54
7. Conclusiones y trabajo futuro.....	61
Apéndice A. Diagrama de flujo.....	65
Apéndice B. Aplicación del método de Roe a las ecuaciones de lámina libre.....	67

# Índice de figuras

Figura 1. Nomenclatura y sistema de coordenadas.....	15
Figura 2. Volumen de control con las fuerzas de presión, fricción y peso.....	15
Figura 3. Volumen de control.....	21
Figura 4. Esquema de fuerzas.....	22
Figura 5. Esquema de la rendija de Preissmann.....	27
Figura 6. Situación de lámina libre (izquierda) y presurización (derecha).....	27
Figura 7. Esquema de la propagación de la señal a través de las paredes de una celda.....	30
Figura 8. Condiciones de contorno a la entrada (izq) y a la salida (dcha) para el caso subcrítico.....	33
Figura 9. Condiciones de contorno a la entrada (izq) y a la salida (dcha) para el caso supercrítico.....	33
Figura 10. Esquema de la confluencia.....	33
Figura 11. Ejemplo de un caso estable (izq) con $CFL < 1$ y un caso inestable (dcha) con $CFL > 1$ . .....	35
Figura 12. Caso test #1.1 - Flujo transcrítico con onda de choque. Arriba: nivel de agua (azul), estado inicial (linea discontinua) y altura del fondo (gris). Abajo: caudal.....	38
Figura 13. Caso test #1.2 - Flujo subcrítico. Arriba: nivel de agua (azul), estado inicial (linea discontinua) y altura del fondo (gris). Abajo: caudal.....	38
Figura 14. Caso test #1.3 - Flujo transcrítico sin onda de choque. Arriba: nivel de agua (azul), estado inicial (linea discontinua) y altura del fondo (gris). Abajo: caudal.....	38
Figura 15. Caso test #2.1. Arriba: nivel de agua (azul), estado inicial (linea discontinua) y altura del fondo (gris). Abajo: caudal.....	39
Figura 16. Caso test #2.2. Arriba: nivel de agua (azul), estado inicial (linea discontinua) y altura del fondo (gris). Abajo: caudal.....	40
Figura 17. Caso test #3.1.....	41
Figura 18. Caso test #3.2. Nivel de agua (arriba) y caudal (abajo) en los tiempos $t=0.3$ s (rojo), $t=1$ s (verde) y $t=2$ s (azul). Estado inicial (linea discontinua).....	41

Figura 19. Caso test #3.3. Nivel de agua (arriba) y caudal (abajo) en los tiempos t=0.3 s (rojo), t=1 s (verde) y t=2 s (azul). Estado inicial (linea discontinua).....	42
Figura 20. Caso test #3.3 - Nivel de agua (arriba) y caudal (abajo) para el estado estacionario. ....	42
Figura 21. Montaje experimental de Wiggert.....	43
Figura 22. Condiciones de contorno aguas arriba (izq) y aguas abajo (dcha).....	43
Figura 23. Resultados numéricos obtenidos para las cuatro sondas (CFL=0.9).....	44
Figura 24. Resultados numéricos obtenidos para la sonda 2 con CFL=0.6 (izq) y CFL=0.75 (dcha).....	44
Figura 25. Resultados numéricos obtenidos para la sonda 2 con anchuras de 3 cm (izq) y 1,5 cm (dcha).....	44
Figura 26. Resultados numéricos obtenidos para la sonda 2 con $\Delta x=0.5$ m (arriba, izq), $\Delta x=0.125$ m (arriba, dcha), $\Delta x=0.05$ m (abajo, izq) y $\Delta x=0.025$ m (abajo, dcha).....	45
Figura 27. Propagación de la discontinuidad. Nivel de agua en los tiempos t=100 s (rojo), t=200 s (verde) y t=300 s (azul). Estado inicial (linea discontinua). Techo y fondo del conducto (gris).....	46
Figura 28. Simulación del golpe de ariete. Nivel de agua en los tiempos t=3 s (rojo), t=6 s (verde) y t=9 s (azul). Estado inicial (linea discontinua). Techo del conducto (gris).....	47
Figura 29. Efectos en la solución al modificar la anchura de la rendija. Nivel de agua en los tiempos t=3 s (rojo), t=6 s (verde) y t=9 s (azul). Estado inicial (linea discontinua). Techo del conducto (gris).....	47
Figura 30. Esquema de la unión.....	49
Figura 31. Caso #6.1. Flujo subcrítico. Estado inicial (linea discontinua). Fondo del conducto (gris).....	50
Figura 32. Caso #6.2. Flujo subcrítico en la confluencia. Estado inicial (linea discontinua). Fondo del conducto (gris).....	50
Figura 33. Caso #6.3. Flujo supercrítico en la confluencia. Estado inicial (linea discontinua). Fondo del conducto (gris).....	51
Figura 34. Señal triangular para el caudal de entrada.....	52
Figura 35. Caso transitorio sin presurización ( $Q_{MÁX}=2.8$ m <sup>3</sup> /s). Calado en función del	

tiempo para los puntos $x=500$ m (rojo), $x=1000$ m (verde) y $x=5000$ m (azul). CFL=0,9. N=100 celdas.....	52
Figura 36. Caso transitorio con presurización (QMÁX=3.2 m <sup>3</sup> /s). Calado en función del tiempo para los puntos $x=500$ m (rojo), $x=1000$ m (verde) y $x=5000$ m (azul). CFL=0,9. N=100 celdas.....	53
Figura 37. Caso transitorio sin presurización (QMÁX=2.8 m <sup>3</sup> /s). Calado en función del tiempo para los puntos $x=500$ m (rojo), $x=1000$ m (verde) y $x=5000$ m (azul). CFL=0,9. N=200 celdas.....	53
Figura 38. Caso transitorio con presurización (QMÁX=3.2 m <sup>3</sup> /s). Calado en función del tiempo para los puntos $x=500$ m (rojo), $x=1000$ m (verde) y $x=5000$ m (azul). CFL=0,9. N=200 celdas.....	54
Figura 39. Vista en planta y en perfil de la red de siete tuberías.....	55
Figura 40. Estado estacionario para la red de siete tuberías. Estado inicial (linea discontinua). Fondo de los conductos (gris).....	56
Figura 41. Calado en función del tiempo en el centro (rojo) y al final (azul) de cada tramo. Caudal máximo = 2.0 m <sup>3</sup> /s. $\Delta x=10$ m. N=10 celdas.....	57
Figura 42. Caudal en función del tiempo en el centro (rojo) y al final (azul) de cada tramo. Caudal máximo = 2.0 m <sup>3</sup> /s. $\Delta x=10$ m. N=10 celdas.....	58
Figura 43. Calado en función del tiempo en el centro (rojo) y al final (azul) de cada tramo. Caudal máximo = 3.0 m <sup>3</sup> /s. $\Delta x=10$ m. N=10 celdas.....	59
Figura 44. Caudal en función del tiempo en el centro (rojo) y al final (azul) de cada tramo. Caudal máximo = 3.0 m <sup>3</sup> /s. $\Delta x=10$ m. N=10 celdas.....	60



## 1. Introducción y objetivos

La simulación numérica de flujo de agua en sistemas de drenaje urbano se caracteriza por la dificultad de necesitar una disposición en red mallada donde puedan darse tantos flujos estacionarios como transitorios. Además, las conducciones se desarrollan fundamentalmente en lámina libre pero tienen una capacidad limitada que puede superarse si el volumen de agua a transportar aumenta rápidamente. En esas circunstancias el régimen de flujo cambia y el flujo se presuriza. El flujo en lámina libre es físicamente diferente del flujo a presión y, por lo tanto, son distintos tanto los modelos matemáticos que se usan para formularlos como los métodos numéricos que se emplean para su discretización. Un modelo completo de drenaje urbano debe ser capaz de reproducir no sólo estados estacionarios y transitorios sino las transiciones de flujo en lámina libre a flujo a presión, lo cual denominaremos flujo mixto.

Los problemas con flujo mixto han sido abordados en las últimas décadas por numerosos investigadores bajo dos puntos de vista muy diferenciados. La primera forma de plantear el problema consiste en resolver de forma separada el flujo presurizado y el de lámina libre (e.g., Guo & Song 1990, Fuamba 2002). Las transiciones entre los dos tipos de flujo se tratan como condiciones de contorno interiores. Este tipo de modelos resultan más complejos aunque permiten simular presiones subatmosféricas en la tubería.

Por otra parte, numerosos autores como García-Navarro & Priestley 1993, León et al. 2009 o Kerger et al. 2010 llevan a cabo simulaciones del flujo presurizado aplicando las ecuaciones de lámina libre en una rendija hipotética muy estrecha situada en la parte superior del conducto (método de Preissmann). La altura de agua en la rendija proporciona una medida de la presión en la tubería. La gran ventaja de este modelo es el uso de un único sistema de ecuaciones para la resolución del problema completo. Este modelo ha sido empleado con éxito para simular transiciones graduales entre los dos regímenes, pero presenta malos resultados en transiciones bruscas (e.g., Trajkovic et al. 1999, Yen 2001). Esto se debe principalmente a problemas de estabilidad debido al cambio instantáneo en la anchura del canal cuando el sistema se presuriza, ya que esto deriva en una diferencia notable entre las velocidades de propagación de las ondas (desde ~10 m/s en lámina libre hasta ~1000 m/s en flujo presurizado). La primera idea lógica para solventar estas inestabilidades es aumentar la anchura de la rendija, perdiendo con ello, parte de la fiabilidad de los resultados, debido a la no conservación de masa y cantidad de movimiento, pero incluso con anchuras del orden del 10% de la de la tubería no se consigue que desaparezcan por completo (e.g., Trajkovic et al. 1999).

Este trabajo se centra en el desarrollo de un modelo de simulación pensado para redes de drenaje que funcionen mayoritariamente en lámina libre pero que, puntualmente, pueden presurizarse, por lo que está apoyado en la segunda de las opciones planteadas. Por lo tanto, se orienta a la generalización de las ecuaciones y métodos aceptados para la simulación de flujos en lámina libre. La formulación del flujo en lámina libre, en aproximación 1D, se basa en leyes dinámicas promediadas en la sección transversal mojada. La presión motriz es uniforme en la vertical, lo que conduce a una distribución vertical de presión hidrostática que hace desaparecer a esta variable de las ecuaciones. Para trabajar con problemas localmente presurizados, sin modificar las ecuaciones gobernantes de flujo en lámina libre, se empleará el método de la rendija de Preissmann.

El método numérico empleado para todas las simulaciones está basado en el esquema de Roe explícito de primer orden. Dado que los tiempos de simulación no son excesivamente largos, no se ha considerado necesario utilizar un método implícito. Al igual que para los flujos, se ha empleado un esquema descentrado upwind para los términos fuente, ya que resulta conveniente preservar el equilibrio entre ambos (García-Navarro et al. 2000).

Por lo tanto, los objetivos del trabajo se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Desarrollo de un método de simulación numérica explícito, bien adaptado a transitorios bruscos, con presencia de flujo subcrítico, supercrítico y mixto, basado en el esquema de Roe upwind de primer orden.
- Adaptación del mismo tanto a problemas de canales en red como a la convivencia de los regímenes de lámina libre y presurizado.
- Resolución de problemas con solución analítica y de casos de laboratorio con datos experimentales, a modo de validación.
- Estudio de la aplicabilidad mediante un análisis de sensibilidad en problemas más complejos, como puede ser una red de tuberías en la que, en algunos puntos, pueda entrar en juego la presurización del fluido, a través de las condiciones de contorno adecuadas.

El trabajo está organizado de la siguiente forma: en los capítulos 2, 3 y 4 se presenta el modelo matemático y el método numérico empleado, así como distintas consideraciones sobre las condiciones de contorno. En el capítulo 5 se valida el modelo en diferentes casos test de roturas de presa y de presurización en tuberías. En el capítulo 6 se evalúa el método a través de problemas más complejos de flujos transitorios, como son las confluencias o las redes de tuberías.

## 2. Modelo matemático

### 2.1. Ecuaciones de conservación

En este capítulo se deducirán las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento tanto de flujos en lámina libre como presurizados. El punto de partida será la aplicación del teorema del transporte de Reynolds al fluido circulante en el interior de un volumen de control. Para una variable genérica  $S$  el teorema del transporte de Reynolds se puede expresar como:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} S dV = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} S dV + \int_{A(t)} S \vec{v}_R \cdot \hat{n} dA \quad (1)$$

donde

$$\vec{v}_R = \vec{v} - \vec{w} \quad (2)$$

es la velocidad relativa entre el fluido  $v$  y la superficie de control  $w$  y  $D/Dt$  representa la derivada sustancial, definida por:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \quad (3)$$

#### 2.1.1. Ecuación de conservación de la masa

Si particularizamos la ecuación (1) con  $S=\rho$  podemos deducir de forma sencilla la ecuación de continuidad. Por conservación de la masa:

$$S dV = \rho dV = dm \Rightarrow \frac{Dm}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV + \int_{A(t)} \rho \vec{v}_R \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (4)$$

La ecuación (4) representa la forma integral conservativa de la ecuación de continuidad. El primer término representa la variación temporal de masa y el segundo el flujo instantáneo de la misma.

### 2.1.2. Ecuación de conservación del momento lineal

Análogamente, sustituyendo en el teorema del transporte de Reynolds  $\mathbf{S}=\rho\mathbf{v}$  obtenemos la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV + \int_{A(t)} \rho \vec{v} (\vec{v}_R \cdot \hat{n}) dA = \sum \vec{F} \quad (5)$$

La ecuación (5) representa la forma integral conservativa de la ecuación de conservación del momento lineal. El primer sumando representa la variación de momento lineal contenido en el volumen de control y el segundo es el balance de flujo de dicha magnitud a través de la superficie de control.

## 2.2. Flujo en lámina libre (*shallow water*)

Las ecuaciones consideradas son las correspondientes al flujo en lámina libre (*shallow water*) o ecuaciones de Saint-Venant, las cuáles constituyen una simplificación de las ecuaciones generales de conservación, de forma que su validez queda limitada al rango de aguas poco profundas. Para su deducción (García-Navarro et al. 2009) se establecen las siguientes hipótesis de trabajo:

- El flujo se supone incompresible y homogéneo.
- El flujo es unidimensional y la velocidad se supone uniforme en la sección transversal, es decir, solamente es función de la dirección de propagación.
- Se aplicará un modelo de fricción para flujo estacionario (Manning) para considerar las pérdidas energéticas con las paredes del cauce.
- Se asume un modelo de presiones hidrostático promediado en la vertical, desde el fondo hasta la superficie libre.
- La pendiente media del fondo  $\theta$  es pequeña, por lo que se pueden aplicar las siguientes aproximaciones:  $\cos\theta \sim 1$ ,  $\sin\theta \sim \tan\theta \sim \theta$ .

La figura 1 muestra la nomenclatura y el sistema de coordenadas empleado en este apartado. Consideraremos un volumen de control contenido entre dos secciones  $x_1$  y  $x_2$  separadas una distancia  $\Delta x$ , como el mostrado en la figura 2. Partiremos de la ecuación integral de la conservación de la masa (4):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (6)$$

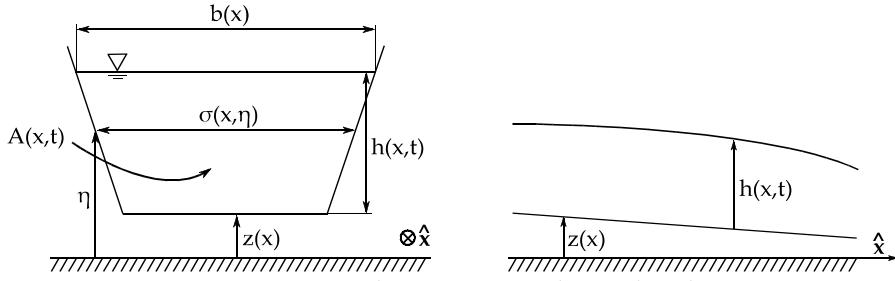


Figura 1. Nomenclatura y sistema de coordenadas.

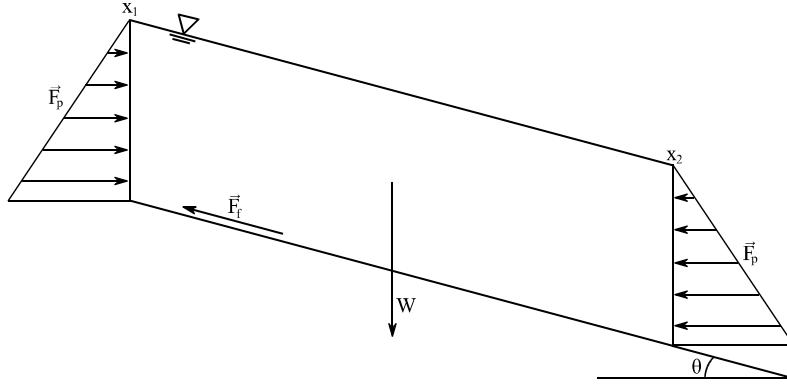


Figura 2. Volumen de control con las fuerzas de presión, fricción y peso.

La conservación de la masa para el volumen de control sin aportes ni pérdidas de caudal obliga a que el flujo neto de masa que entra en dicho volumen entre dos tiempos  $t_1$  y  $t_2$  sea la integral en el tiempo de la diferencia de los flujos entrantes y salientes:

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\rho A u)_{x_2} - (\rho A u)_{x_1}] dt \quad (7)$$

donde  $u$  es la componente  $x$  de la velocidad del fluido.

Por otro lado, la variación de la masa contenida en el volumen de control será la integral espacial de las variaciones de masa contenida en cada elemento  $dx$  a lo largo del mismo período de tiempo:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho A)_{t_2} - (\rho A)_{t_1}] dx \quad (8)$$

Según la ecuación de continuidad (6), las cantidades (7) y (8) han de ser idénticas:

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\rho A u)_{x_2} - (\rho A u)_{x_1}] dt + \int_{x_1}^{x_2} [(\rho A)_{t_2} - (\rho A)_{t_1}] dx = 0 \quad (9)$$

Por otro lado, la ecuación de conservación del momento lineal (5) aplicada a este volumen de control es:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV + \int_A \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA \quad (10)$$

La variación de momento lineal en el volumen de control entre  $t_1$  y  $t_2$  ha de ser igual a la suma de las fuerzas exteriores más el flujo neto de cantidad de movimiento que entra en dicho volumen durante ese intervalo de tiempo.

Tomando la componente paralela a la dirección del flujo ( $x$ ), el momento lineal por unidad de longitud será  $\rho A u$  y su flujo a través de una sección transversal  $\rho A u^2$ . Entonces, el flujo neto de cantidad de movimiento entre  $t_1$  y  $t_2$  es:

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\rho A u^2)_{x_2} - (\rho A u^2)_{x_1}] dt \quad (11)$$

Por otro lado, el incremento de momento lineal en el volumen de control será la suma de los incrementos infinitesimales en cada elemento diferencial de volumen:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho A u)_{t_2} - (\rho A u)_{t_1}] dx \quad (12)$$

Por último, es necesario calcular las fuerzas sobre el fluido, asumiendo que solamente actúan el peso, la fuerza de presión y la fricción con las paredes del canal.

La componente  $x$  del peso se puede expresar en términos del ángulo  $\theta$ . Para ello, recurrimos a la hipótesis inicial que asume que el ángulo de la pendiente del fondo es pequeño:

$$S_0 = \tan \theta = -\frac{\partial z}{\partial x} \approx \sin \theta \quad (13)$$

Entonces, la componente del peso paralela a la dirección de la corriente es:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho g A \sin \theta dx \approx \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_0 dx \quad (14)$$

Por lo tanto, la acción de dicha fuerza en el intervalo temporal dado será:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_0 dx dt \quad (15)$$

La fuerza de fricción entre el fluido y las paredes del cauce por unidad de longitud se puede expresar como:

$$\rho g A S_f \quad (16)$$

donde  $S_f$  es la pendiente de la linea energética. Entonces, la acción de la fuerza de rozamiento será:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_f dx dt \quad (17)$$

Para la fuerza de presión en la dirección del flujo sobre el volumen de control, distinguiremos entre las fuerzas sobre las paredes líquidas ( $x_1$  y  $x_2$ ) y las fuerzas sobre las paredes sólidas. Estas últimas solamente estarán presentes en canales no prismáticos.

La fuerza de presión ejercida sobre cualquier sección transversal sigue una distribución hidrostática:

$$g I_1 = \int_0^h \rho g (h - \eta) d \eta \quad (18)$$

donde  $h$  es el calado (ver figura 1). La acción de la fuerza de presión neta entre  $t_1$  y  $t_2$  es:

$$\int_{t_1}^{t_2} g \left[ (I_1)_{x_2} - (I_1)_{x_1} \right] dt \quad (19)$$

Por último, evaluaremos la componente de la reacción en las paredes debida a variaciones en la anchura del canal sobre un volumen diferencial:

$$g I_2 dx = \left[ \int_0^h \rho g (h - \eta) \frac{\partial \sigma(x, \eta)}{\partial x} d \eta \right] dx \quad (20)$$

Integrando a todo el volumen de control:

$$\int_{x_1}^{x_2} g I_2 dx \quad (21)$$

La acción de esta componente de la fuerza es:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} g I_2 dx dt \quad (22)$$

Entonces, la ecuación de conservación para el momento lineal queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} [(\rho A u)_{t_2} - (\rho A u)_{t_1}] dx + \int_{t_1}^{t_2} [(\rho A u^2)_{x_2} - (\rho A u^2)_{x_1}] dt + \dots \\ & \dots + \int_{t_1}^{t_2} g [(I_1)_{x_2} - (I_1)_{x_1}] dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} g I_2 dx dt + \dots \\ & \dots + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_f dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_0 dx dt = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Para obtener la forma diferencial de las ecuaciones (9) y (23), supondremos que las variables son funciones continuas y diferenciables. Entonces, mediante desarrollos en serie de Taylor:

$$\begin{aligned} (\rho A)_{t_2} &= (\rho A)_{t_1} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2) \\ (\rho A u)_{x_2} &= (\rho A u)_{x_1} + \frac{\partial \rho A u}{\partial t} \Delta x + O(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (24)$$

y despreciando los términos de segundo orden, eliminando la densidad y suponiendo que  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \int_{x_1}^{x_2} (A_{t_2} - A_{t_1}) dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial A}{\partial t} dx dt \quad (25)$$

Procediendo de forma análoga en la ecuación de conservación de momento lineal obtenemos el sistema completo en forma diferencial conservativa.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + g I_1 \right) = g I_2 + g A (S_0 - S_f) \quad (27)$$

donde  $Q=Av$  es el caudal.

El sistema puede formularse en forma vectorial:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{R} \quad (28)$$

donde los vectores  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{R}$  representan las variables conservadas, los flujos y los términos fuente, respectivamente:

$$\mathbf{U} = (A, Q)^T \quad (29)$$

$$\mathbf{F} = \left( Q, \frac{Q^2}{A} + g I_1 \right)^T \quad (30)$$

$$\mathbf{R} = \left( 0, g I_2 + g A (S_0 - S_f) \right)^T \quad (31)$$

Además, se puede demostrar, mediante la regla de Leibniz, que:

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = I_2 + A \frac{\partial h}{\partial x} \quad (32)$$

Para el término de fricción se utilizará el modelo de Manning, descrito por:

$$S_f = \frac{Q|Q|n^2}{A^2 R^{4/3}} \quad (33)$$

donde  $n$  es el número de Manning y  $R$  es el radio hidráulico, definido en términos del perímetro mojado  $P$ :

$$R = \frac{A}{P} \quad (34)$$

La matriz jacobiana del sistema es:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix} \quad (35)$$

donde  $c$  es la velocidad de propagación de las ondas en el modelo de aguas poco profundas:

$$c = \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \quad (36)$$

Los autovalores y autovectores del sistema son los siguientes:

$$\lambda^{1,2} = u \pm c, \quad \boldsymbol{e}^{1,2} = (1, u \pm c)^T \quad (37)$$

Como la matriz jacobiana (35) es cuadrada de orden  $m=2$ , posee dos autovalores reales y es diagonalizable (sus autovectores son linealmente independientes), se dice que el sistema pertenece a la familia de ecuaciones hiperbólicas.

Para el caso particular de un canal prismático rectangular:

$$c = \sqrt{g \frac{A}{b}} = \sqrt{gh}, \quad I_1 = \frac{A^2}{2b}, \quad \frac{\partial I_1}{\partial A} = \frac{A}{b}, \quad I_2 = 0 \quad (38)$$

En este tipo de problemas, resulta común la caracterización del tipo de flujo a través del número de Froude (análogo al número de Mach en flujo compresible). Se trata de una magnitud adimensional definida por:

$$Fr = \frac{u}{c} \quad (39)$$

El número de Froude representa el balance entre la inercia del fluido y las fuerzas gravitatorias. En función de su valor, se pueden dar tres situaciones distintas:

- Flujo subcrítico ( $Fr < 1$ ): la velocidad del fluido es menor que la velocidad de las perturbaciones, por lo que el flujo se encuentra controlado principalmente por la fuerza gravitatoria.
- Flujo supercrítico ( $Fr > 1$ ): la velocidad del fluido es mayor que la velocidad de las perturbaciones. Se trata de un flujo rápido, donde el fluido no recibe ninguna información proveniente de la región de aguas abajo. Como se verá más adelante, esta transición puede derivar en la aparición de fenómenos como el salto hidráulico.
- Flujo crítico ( $Fr = 1$ ): representa la frontera entre las dos situaciones anteriores.

Es importante resaltar la importancia de este balance entre ambas velocidades, ya que los autovalores de la matriz jacobiana del sistema dependen directamente de ello. En concreto, el signo de dichos autovalores representa el sentido en el que se puede propagar la

información en el flujo.

### 2.3. Sistemas transitorios presurizados (*water hammer*)

En este apartado se presentan las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de un sistema presurizado en régimen transitorio (Chaudry et al. 1994). Al igual que las ecuaciones de lámina libre, es habitual escribirlas como una simplificación de las ecuaciones generales de conservación, bajo una serie de hipótesis:

- Los flujos radiales de masa y cantidad de movimiento se suponen despreciables frente a los axiales, por lo tanto, se considerará que el flujo es unidireccional.
- Se asumirá un flujo compresible y una tubería elástica.
- Se tomará el promedio en la sección transversal de las variables conservadas, presión  $p$  (o altura piezométrica  $H$ ) y velocidad  $v$ .
- Se aplicará un modelo de fricción para flujo estacionario (Darcy-Weissbach) para considerar las pérdidas energéticas con las paredes del conducto.

Bajo estas condiciones, seguiremos un proceso análogo al de la sección anterior para escribir las ecuaciones de conservación de masa y momento lineal para un sistema presurizado.

Consideremos un tramo de tubería elástica a través del cuál circula un fluido compresible, con un volumen de control asociado representado en la figura 3. Si suponemos que el fluido siempre está en contacto con las paredes de la tubería, se cumple que  $\mathbf{v}=\mathbf{w}$  en dicha región.

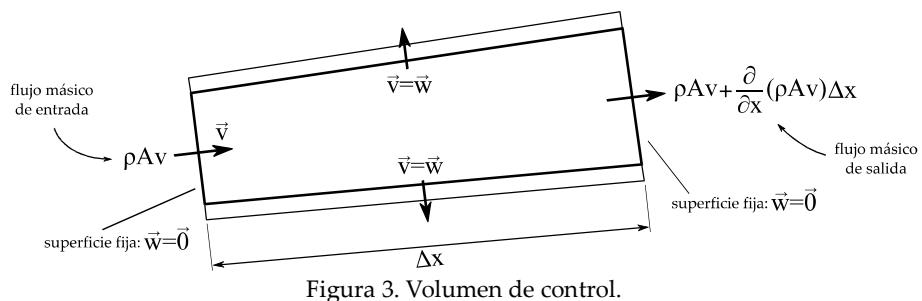


Figura 3. Volumen de control.

De la ecuación (4):

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV + \int_{A(t)} \rho \vec{v}_R \cdot \hat{n} dA = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^{\Delta x} \rho A dx + \sum \rho \vec{v}_R \cdot \hat{n} A = 0 \quad (40)$$

El último sumando solamente es distinto de cero en la entrada y en la salida, como se puede ver en la figura 3, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho A \Delta x) + \sum_{salida} \rho v_R A - \sum_{entrada} \rho v_R A &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho A \Delta x) + \rho A v + \frac{\partial}{\partial x}(\rho A v) \Delta x - \rho A v &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Simplificando, obtenemos la ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho A v) = 0 \quad (42)$$

Si reescribimos la ecuación anterior en términos del flujo másico:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \quad (43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho A v) = -\frac{\partial \dot{m}}{\partial x} \quad (44)$$

A la vista de la expresión anterior, queda claro que la compresibilidad del fluido (a través de la densidad) y la elasticidad del conducto (a través de la sección) pueden afectar al gradiente de flujo másico en la tubería.

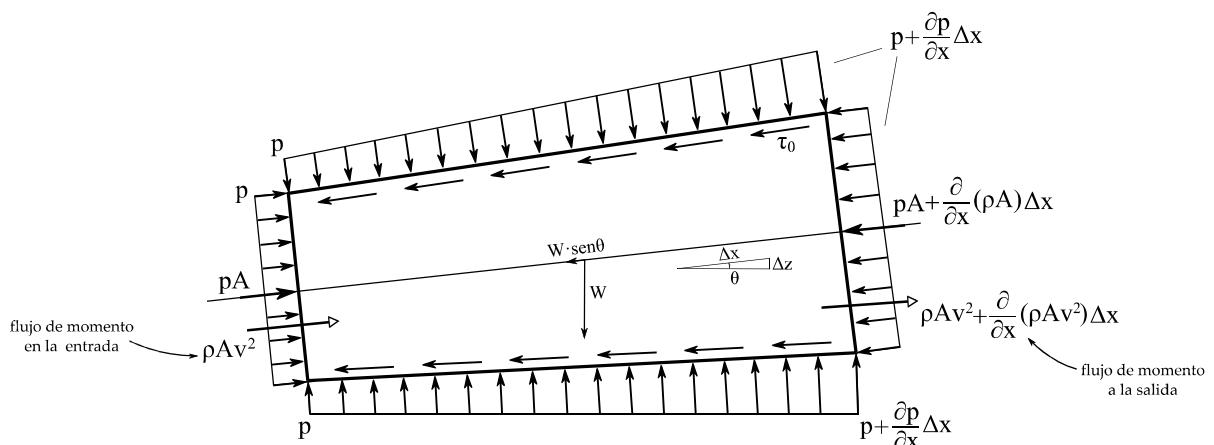


Figura 4. Esquema de fuerzas.

Para la deducción de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, es necesario estudiar el balance total de fuerzas sobre el sistema, es decir, las fuerzas de presión

$p$  y el esfuerzo  $\tau_0$  sobre las paredes de la superficie de control y el peso del fluido contenido en el volumen de control. En la figura 4 se muestra el esquema de fuerzas, así como los flujos de entrada y salida de cantidad de movimiento.

Partiendo de la ecuación general (5) y analizando la componente en la dirección del flujo ( $x$ ):

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho v_x dV + \int_{A(t)} \rho v_x (\vec{v}_R \cdot \hat{n}) dA \Rightarrow \\ &\Rightarrow pA + \frac{1}{2} \left[ p + p + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right] \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x - pA - \frac{\partial}{\partial x} (pA) \Delta x - \dots \\ &\dots - W \sin \theta - \tau_0 P \Delta x = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho v_x A dx + \sum \rho v_x (\vec{v}_R \cdot \hat{n}) A \end{aligned} \quad (45)$$

donde  $P$  es el perímetro de la tubería y  $W$  el peso del fluido contenido en el volumen de control.

Teniendo en cuenta que  $W = \rho g A \Delta x$  y  $\sin \theta = \Delta z / \Delta x = \partial z / \partial x$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} (\Delta x)^2 + p \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial}{\partial x} (pA) \Delta x - \rho g A \Delta z - \tau_0 P \Delta x &= \dots \\ \dots &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho A v) \Delta x + \rho A v^2 + \frac{\partial}{\partial x} (\rho A v^2) \Delta x - \rho A v^2 \end{aligned} \quad (46)$$

Por último, dividiendo por  $\Delta x$  y tomando el límite  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$-A \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \tau_0 P = \frac{\partial}{\partial t} (\rho A v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho A v^2) \quad (47)$$

Es posible reescribir la ecuación (47) de la siguiente forma:

$$-\rho g A \left( \frac{1}{\rho g} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \tau_0 P = v \left[ \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho A v)}{\partial x} \right] + \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (48)$$

El tercer término de la expresión (48) es idénticamente cero, por la ecuación de continuidad (42). Introduciendo la altura piezométrica:

$$H = \frac{p}{\rho g} + z \quad (49)$$

$$-\rho g A \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \tau_0 P = \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (50)$$

Si se particulariza la ecuación (50) para el caso de un conducto circular de diámetro  $D$ , obtenemos la siguiente expresión:

$$P = \pi D \quad , \quad A = \pi \frac{D^2}{4} \rightarrow \frac{1}{g} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{4 \tau_0}{\rho g D} \quad (51)$$

Es habitual encontrar las ecuaciones de conservación deducidas anteriormente en términos de las variaciones de presión. Para poder expresarlas de esta forma, definimos el módulo de compresibilidad del fluido:

$$K = \frac{dp}{d\rho/\rho} \quad (52)$$

Además, en una tubería circular de espesor  $e$  en la que se cumpla que  $p/2 << E/(D/e)$ , el módulo elástico se puede definir de la siguiente forma:

$$E = \frac{D}{e} \frac{dp}{dA/A} \quad (53)$$

Con las definiciones (52), (53) y un pequeño desarrollo matemático, es posible reescribir la ecuación de continuidad en función de las variaciones de presión:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} A + \rho \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\rho}{K} A + \rho \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{DA}{Ee} \quad (54)$$

$$\frac{\partial(\rho A v)}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} A v + \rho \frac{\partial A}{\partial t} v + \rho A \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\rho}{K} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} A v + \rho \frac{DA}{Ee} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} v + \rho A \frac{\partial v}{\partial x} \quad (55)$$

Sustituyendo (54) y (55) en la ecuación de continuidad (42):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{\rho A}{K} + \rho \frac{\partial p}{\partial t} \frac{DA}{Ee} + \frac{\rho}{K} \frac{\partial p}{\partial x} Av + \rho \frac{DA}{Ee} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} v + \rho A \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} \rho \left( 1 + \frac{DK}{eE} \right) + v \frac{\partial p}{\partial x} \rho \left( 1 + \frac{DK}{eE} \right) + \rho K \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \rho \frac{\partial p}{\partial t} + \rho v \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho K}{\left( 1 + \frac{DK}{eE} \right)} \frac{\partial v}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \tag{56}$$

Simplificando:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c_{WH}^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{57}$$

donde  $c_{WH}$  es la velocidad de propagación de las ondas de presión:

$$c_{WH} = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + \frac{DK}{eE}}} \tag{58}$$

En el caso particular de una tubería inelástica:

$$E \rightarrow \infty \Rightarrow C_{WH} \rightarrow \sqrt{K/\rho} \tag{59}$$

La ecuación (59) corresponde a la velocidad máxima de las ondas de presión en la tubería.

Siguiendo un procedimiento análogo para la ecuación de cantidad de movimiento, llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + g \operatorname{sen} \theta + \frac{4\tau_0}{\rho D} = 0 \tag{60}$$

También es frecuente expresar las ecuaciones de conservación en términos de la altura piezométrica, definida en (49):

$$H = \frac{p}{\rho g} + z \Rightarrow p = \rho g (H - z) \Rightarrow dp = d\rho \cdot g (H - z) + \rho g (dH - dz) \tag{61}$$

Introduciendo el módulo de compresibilidad del fluido (52):

$$dp = \frac{\rho g (dH - dz)}{1 - \frac{p}{K}} \quad (62)$$

las ecuaciones de continuidad y momento lineal se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + v \frac{\partial H}{\partial x} + v \operatorname{sen} \theta + \left(1 - \frac{p}{K}\right) \frac{c_{WH}^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (63)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{g}{1 - \frac{p}{K}}\right) \frac{\partial H}{\partial x} + \left(\frac{p/K}{1 - \frac{p}{K}}\right) g \operatorname{sen} \theta + \frac{4\tau_0}{\rho D} = 0 \quad (64)$$

Para los casos en los que el cociente  $p/K$  sea mucho menor que la unidad podemos simplificar las ecuaciones (63) y (64):

$$\frac{\partial H}{\partial t} + v \frac{\partial H}{\partial x} + v \operatorname{sen} \theta + \frac{c_{WH}^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (65)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{4\tau_0}{\rho D} = 0 \quad (66)$$

Normalmente las ecuaciones anteriores se expresan de forma linealizada, lo que supone realizar algunas simplificaciones adicionales, como despreciar  $V \cdot \operatorname{sen} \theta$ , así como los términos convectivos, ya que se considera que la velocidad del flujo es mucho más pequeña que la velocidad de las ondas de presión.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c_{WH}^2}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (67)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{4\tau_0}{\rho D} = 0 \quad (68)$$

Las expresiones (67) y (68) se conocen como ecuaciones clásicas *water-hammer* para flujos unidimensionales.

Cabe destacar que las ecuaciones de flujo a presión forman un sistema hiperbólico completamente análogo al de las ecuaciones de lámina libre, con las variables conservadas de presión y velocidad. Por lo tanto, para su resolución, se podrían emplear métodos numéricos similares a los aplicados en este trabajo para resolver el sistema *shallow water*.

### 3. Modelo de la rendija de Preissmann

Uno de los objetivos de este trabajo es el estudio de casos transitorios de tuberías en cuyo interior, el flujo pasa de lámina libre a un estado presurizado. Para abordar este problema se empleará el método de la rendija de Preissmann, que consiste en modelizar el problema suponiendo la existencia de una rendija ficticia muy fina e infinitamente larga en la parte superior de la tubería, tal como se muestra en la figura 5:

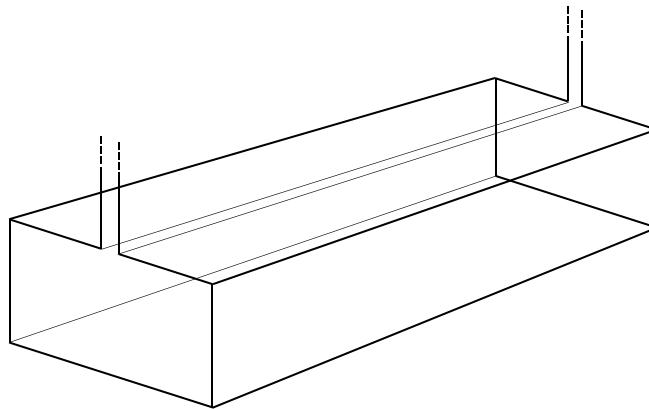


Figura 5. Esquema de la rendija de Preissmann

Cuando el flujo se presuriza, el agua asciende por la rendija, de forma que la altura de la superficie libre se corresponde con la altura de presión del agua en la tubería, tal como se muestra en la figura 6. La principal ventaja del método es que, al seguir siendo un canal abierto, podemos continuar utilizando el sistema de ecuaciones *shallow water*, teniendo en cuenta el cambio de anchura que se produce:

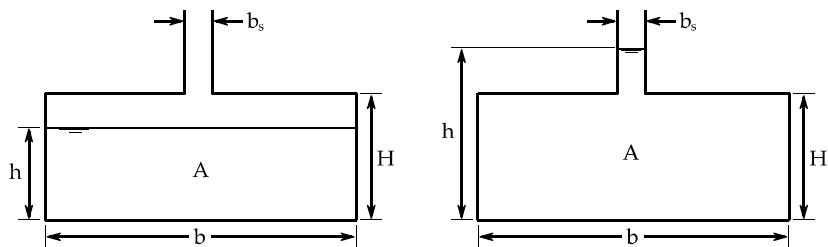


Figura 6. Situación de lámina libre (izquierda) y presurización (derecha).

$$A \leq b \cdot H \rightarrow h = \frac{A}{b} , \quad I_1 = \frac{A^2}{2b} , \quad c = \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} = \sqrt{g \frac{A}{b}} \quad (69)$$

$$A > b \cdot H \rightarrow h = H + \frac{A - b \cdot H}{b_s} ,$$

$$I_1 = b \cdot H \left( \frac{A - b \cdot H}{b_s} + \frac{H}{2} \right) + \frac{(A - b \cdot H)^2}{2 b_s} , \quad c = \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} = \sqrt{g \frac{A}{b_s}} \quad (70)$$

La elección ideal de la anchura para la rendija se realiza igualando la velocidad de las ondas superficiales  $c$  a la de las ondas de presión en la tubería  $c_{WH}$ , obtenida en (58). De esta forma garantizamos una correcta conservación de la masa y de la cantidad de movimiento:

$$c_{WH} = c \Rightarrow b_s = g \frac{A_f}{c_{WH}^2} \quad (71)$$

donde  $A_f$  es la sección de la tubería.

Normalmente, esta elección resulta en unas anchuras muy pequeñas en comparación con el canal/tubería, lo que da lugar a inestabilidades numéricas. Dichas inestabilidades se pueden atenuar aumentando la anchura de la rendija, a costa de introducir un cierto error de masa y momento, ya que se pierde la equivalencia entre las ecuaciones de lámina libre y flujo a presión. A pesar de este hecho, las simulaciones (e.g., Trajkovic et al. 1999) muestran que modificar la anchura ideal de la rendija dentro de un cierto rango no afecta de manera significativa a los resultados numéricos en los casos de flujo mixto (transiciones lámina libre-presión). Sin embargo, como se observará en los siguientes apartados, dicho parámetro cobra una especial relevancia en los flujos puramente presurizados, por lo que se tendrá especial cuidado en su selección.

## 4. Discretización mediante volúmenes finitos

### 4.1. Esquema de Roe explícito de primer orden

El esquema de Roe está basado en una linealización local tal que represente de forma discreta los incrementos espaciales de las variables conservadas y sus respectivos flujos conforme a la siguiente condición:

$$\delta \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{J}} \cdot \delta \mathbf{U} \quad (72)$$

Es necesario construir una matriz jacobiana aproximada, cuyos autovalores  $\tilde{\lambda}_k$  y autovectores  $\tilde{\mathbf{e}}_k$  satisfagan en todos los puntos de la malla las siguientes relaciones:

$$\delta \mathbf{U}_{i+1/2} = \mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i = \sum_k (\tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i+1/2} \quad (73)$$

$$\delta \mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i = \tilde{\mathbf{J}}_{i+1/2} \delta \mathbf{U}_{i+1/2} = \sum_k (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i+1/2} \quad (74)$$

donde se ha empleado la ecuación de autovalores de la matriz jacobiana.

Los coeficientes  $\tilde{\alpha}_k$  representan las coordenadas de la variación de las variables en la base de autovectores de la matriz  $J$ .

Para calcular la variación de  $\mathbf{U}$  en cada pared y propagar las diferentes ondas ( $k$ ) de acuerdo con el signo de sus autovalores, trabajaremos, por el momento, con la parte homogénea del sistema de ecuaciones (28):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0$$

Podemos calcular el nuevo valor de las variables en la celda  $i$  a través de la contribución de cada pared, teniendo en cuenta los signos de la propagación de la onda:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\delta t}{\delta x} \left( \delta \mathbf{F}_{i+1/2}^- + \delta \mathbf{F}_{i-1/2}^+ \right) \quad (75)$$

Empleando (74), la contribución total a la celda  $i$  será:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\delta t}{\delta x} \left[ (\tilde{\lambda}_1^- \tilde{\alpha}_1 \tilde{\mathbf{e}}_1)_{i+1/2} + (\tilde{\lambda}_2^- \tilde{\alpha}_2 \tilde{\mathbf{e}}_2)_{i+1/2} + (\tilde{\lambda}_1^+ \tilde{\alpha}_1 \tilde{\mathbf{e}}_1)_{i-1/2} + (\tilde{\lambda}_2^+ \tilde{\alpha}_2 \tilde{\mathbf{e}}_2)_{i-1/2} \right] \quad (76)$$

donde

$$\tilde{\lambda}_k^+ = \frac{1}{2} (\tilde{\lambda}_k + |\tilde{\lambda}_k|), \quad \tilde{\lambda}_k^- = \frac{1}{2} (\tilde{\lambda}_k - |\tilde{\lambda}_k|) \quad (77)$$

En la figura 7 se muestra un esquema gráfico de las diferentes ondas que se propagan en las dos paredes de la celda, así como la notación empleada para su descripción:

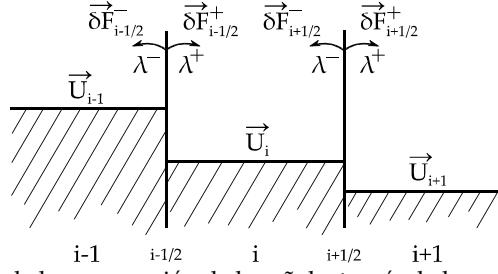


Figura 7. Esquema de la propagación de la señal a través de las paredes de una celda.

En ocasiones se emplea una notación alternativa, a través de una nueva variable, denominada flujo numérico. Combinando las expresiones (76) y (77):

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\delta t}{2 \delta x} \left[ \sum_k (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i+1/2} + \sum_k (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i-1/2} - \sum_k (|\tilde{\lambda}_k| \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i+1/2} + \sum_k (|\tilde{\lambda}_k| \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i-1/2} \right] \quad (78)$$

Recordando la expresión (74):

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F}_{i+1/2} &= \mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i = \sum_k (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i+1/2} \\ \delta \mathbf{F}_{i-1/2} &= \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{i-1} = \sum_k (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i-1/2} \end{aligned} \quad (79)$$

Sustituyendo en (78):

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\delta t}{2 \delta x} \left[ \mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{i-1} - \sum_k (|\tilde{\lambda}_k| \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i+1/2} + \sum_k (|\tilde{\lambda}_k| \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i-1/2} \right] \quad (80)$$

Podemos expresar la expresión (80) en función del flujo numérico:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\delta t}{\delta x} (\mathbf{f}_{i+1/2}^* - \mathbf{f}_{i-1/2}^*) \quad (81)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i+1/2}^* &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i) - \frac{1}{2} \sum_k \left( |\tilde{\lambda}_k| \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i+1/2} \\ \mathbf{f}_{i-1/2}^* &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i-1}) - \frac{1}{2} \sum_k \left( |\tilde{\lambda}_k| \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i-1/2} \end{aligned} \quad (82)$$

Por lo tanto, comparando las expresiones (75) y (81) queda claro que:

$$\mathbf{f}_{i+1/2}^* - \mathbf{f}_{i-1/2}^* = \delta \mathbf{F}_{i+1/2}^- + \delta \mathbf{F}_{i-1/2}^+ \quad (83)$$

En el apéndice B se muestra el desarrollo completo del método de Roe aplicado al sistema de ecuaciones de lámina libre.

## 4.2. Discretización de los términos fuente

Para la discretización de los términos fuente de la ecuación (28), como la pendiente o el rozamiento, emplearemos un esquema upwind, por consistencia con el desarrollo anterior (García-Navarro & Vázquez-Cendón, 2000). Partiremos del resultado (76), el cual podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\delta t}{\delta x} \left[ \left( \sum_{k+} \tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i-1/2}^- + \left( \sum_{k-} \tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i+1/2}^+ \right] \quad (84)$$

donde  $k\pm$  representa los autovalores positivos y negativos, es decir, las velocidades de onda promedio en las paredes de las celdas.

El término fuente puede ser discretizado como se detalla a continuación:

$$(\tilde{\mathbf{R}} \delta x)_i = \sum_k \tilde{\beta}_k \tilde{\mathbf{e}}_k = \left( \sum_{k+} \tilde{\beta}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i-1/2}^- + \left( \sum_{k-} \tilde{\beta}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i+1/2}^+ \quad (85)$$

donde  $\tilde{\beta}$  juega un papel análogo a los coeficientes  $\tilde{\alpha}$  descritos anteriormente.

Ahora podemos añadir la influencia de los términos fuente (85) a la ecuación (84):

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( \sum_{k+} (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k - \tilde{\beta}_k) \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i-1/2} + \left( \sum_{k-} (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k - \tilde{\beta}_k) \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i+1/2} \right] \quad (86)$$

Al igual que con los flujos, la influencia de los términos fuentes sobre la celda  $i$  se divide en la contribuciones a través de las paredes izquierda ( $i-1/2$ ) y derecha ( $i+1/2$ ).

## 4.3. Condiciones de contorno

### 4.3.1. Condiciones de contorno físicas.

Para poder resolver completamente un problema de forma numérica es necesario establecer una serie de condiciones de contorno en los extremos del dominio de discretización. Para ello, si fuera necesario y en función del régimen de flujo, se impondrán condiciones de contorno físicas en las variables de área y/o caudal a la entrada y salida del sistema. Dichos valores en la frontera son aquellos que vienen impuestos por las condiciones reales del problema y que influirán en gran medida en la solución del mismo. En este trabajo se han empleado fundamentalmente tres tipos: nivel de agua constante, caudal uniforme e hidrograma de entrada en función del tiempo para representar, por ejemplo, una onda de avenida.

Extendiendo el cálculo de las contribuciones disponibles (78) a cada celda hasta los propios contornos y usando el hecho de que en las paredes exteriores no existe intercambio de información (ver figuras 8 y 9), es posible calcular todos los puntos del mallado de forma numérica. Posteriormente, se deben imponer las condiciones de contorno físicas que correspondan.

### 4.3.2. Condiciones de contorno y régimen de flujo.

El número de condiciones de contorno físicas que se deben imponer en los contornos depende del tipo de régimen (subcrítico o supercrítico), ya que éste se encuentra estrechamente relacionado con el sentido en el que se propaga la información. En concreto, se pueden dar las cuatro posibilidades que se detallan a continuación:

- Flujo subcrítico a la entrada: se debe imponer solamente una condición de contorno física. La otra variable vendrá determinada por el esquema numérico (figura 8).
- Flujo supercrítico a la entrada: se han de fijar las dos variables, ya que es imposible recibir información de la celda adyacente (figura 9).

- Flujo subcrítico a la salida: al igual que en el caso de flujo subcrítico a la entrada, se impone una condición de contorno física y otra numérica (figura 8).
- Flujo supercrítico a la salida: no es necesario imponer condiciones de contorno físicas. Toda la información proviene de la penúltima celda (figura 9).

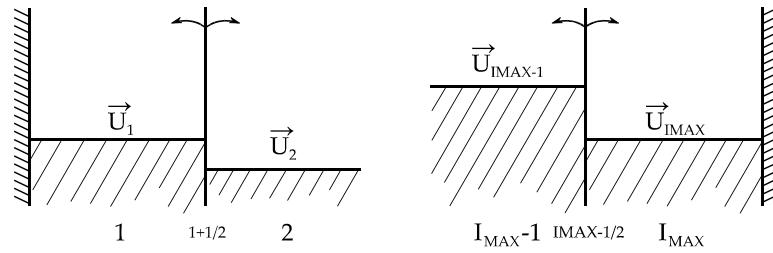


Figura 8. Condiciones de contorno a la entrada (izq) y a la salida (dcha) para el caso subcrítico.

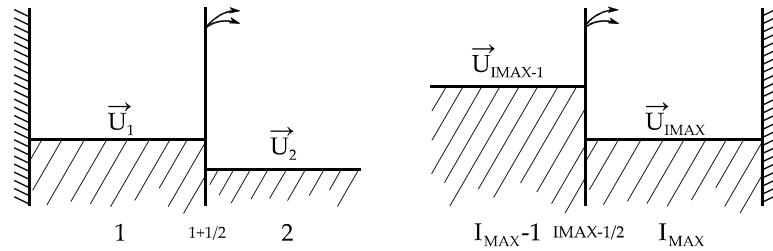


Figura 9. Condiciones de contorno a la entrada (izq) y a la salida (dcha) para el caso supercrítico.

### 4.3.3. Confluencias

En los casos en los que se considere la confluencia de tres tuberías necesitamos establecer tres condiciones de contorno adicionales para poder resolver por completo el problema. En la figura 10 se muestra un esquema de las celdas que participan en la confluencia:

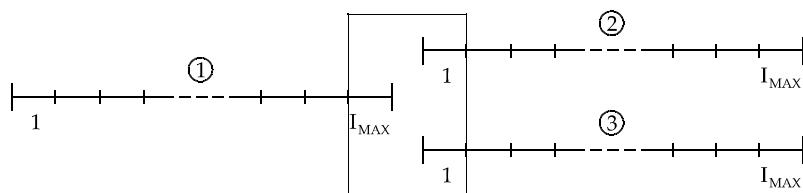


Figura 10. Esquema de la confluencia.

Por un lado, se exigirá que la altura de agua a la entrada de las tuberías 2 y 3 sea igual a la salida de la tubería 1:

$$h_2(1)=h_3(1)=h_1(I_{MAX})$$

En cuanto al caudal, debemos distinguir si el flujo es subcrítico o supercrítico:

$$\text{Caso subcrítico: } Q_1(I_{MAX})=Q_2(1)+Q_3(1)$$

$$\text{Caso supercrítico: } Q_2(1)=Q_3(1)=\frac{1}{2}Q_1(I_{MAX})$$

Para un caso más general con  $N$  tuberías:

$$h_1=h_2=\cdots=h_N \quad , \quad \sum_{i=1}^N Q_i=0 \quad (87)$$

Si en la confluencia se considera la existencia de un pozo con una sección en planta  $A_w$  la condición de contorno para el caudal se ve modificada de la siguiente manera:

$$h_1=h_2=\cdots=h_N=H_w \quad , \quad \sum_{i=1}^N Q_i=A_w \frac{dH_w}{dt} \quad (88)$$

donde  $H_w$  representa la altura de agua en el pozo.

#### 4.4. Condición de estabilidad

En general, un método numérico se considera estable si las perturbaciones de la solución se mantienen acotadas. De lo contrario, el error en la solución crece de forma exponencial y la calidad de los resultados numéricos se ve seriamente comprometida. Una de las principales causas de las inestabilidades numéricas es el hecho de que la región de influencia numérica sea menor que la región de influencia física (ver figura 11). En los esquemas explícitos, como el empleado en este trabajo, la región de influencia numérica viene determinada por el tamaño de celda  $\Delta x$ , ya que el valor de una variable depende de los valores de las celdas contiguas. Por otro lado, la región de influencia física viene dada por la distancia a la cual se ha podido propagar la información a velocidad  $c$ , es decir,  $(|u| \pm c)\Delta t$ . Por lo tanto, una primera forma de escribir la condición de estabilidad es:

$$\Delta x \geq (|u| \pm c) \Delta t \quad (89)$$

De la expresión anterior, se puede deducir que el tamaño máximo para el paso temporal es:

$$\Delta t_{máx} = \frac{\Delta x}{\max(|u|+c)} \quad (90)$$

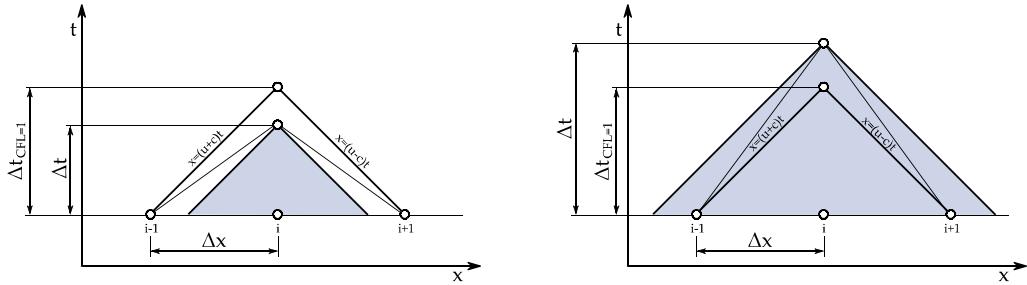


Figura 11. Ejemplo de un caso estable (izq) con  $CFL < 1$  y un caso inestable (dcha) con  $CFL > 1$ .

Definiendo el número de Courant-Friedrichs-Lowy ( $CFL$ ) como:

$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta t_{máx}} \quad (91)$$

se obtiene que la condición de estabilidad para un esquema explícito consiste en mantener este coeficiente por debajo de la unidad.



## 5. Validación del modelo

En este capítulo se aplicará el modelo descrito anteriormente a casos de prueba que, o bien tienen solución exacta o han sido medidos en el laboratorio, con el objetivo de sopesar la validez del mismo. Para todos los casos de este capítulo se han empleado canales o conductos prismáticos de sección rectangular.

### 5.1. Fondo con obstáculo y flujo estacionario

A continuación se reproducirán los tres casos test propuestos en Murillo et al. 2012, en los cuales el fondo del canal presenta una elevación dada por la siguiente función:

$$z(8 \leq x \leq 12) = 0.2 - 0.05(x - 10)^2 \quad (92)$$

La longitud y anchura del canal son 25 m y 1 m, respectivamente, y las condiciones iniciales son:

$$h(x,0) = 0.5 - z(x), \quad u(x,0) = 0 \quad (93)$$

En función de las condiciones de contorno que se impongan a la entrada y a la salida, se obtendrá flujo subcrítico o una transición sub-supercrítico, con o sin onda de choque. Los tres casos test se presentan en la siguiente tabla:

Test	$Q$ aguas arriba	$h$ aguas abajo
#1.1 (flujo transcrítico con onda de choque)	0.18 m <sup>3</sup> /s	0.33 m
#1.2 (flujo transcrítico)	4.42 m <sup>3</sup> /s	2.0 m
#1.3 (flujo transcrítico sin onda de choque)	1.53 m <sup>3</sup> /s	0.66 m ( <i>sub</i> )

Tabla 1. Fondo con obstáculo y flujo estacionario.

En ninguno de los tres casos se ha considerado la fricción con el fondo. Los resultados numéricos obtenidos para el estado estacionario se observan en las figuras 12, 13 y 14:

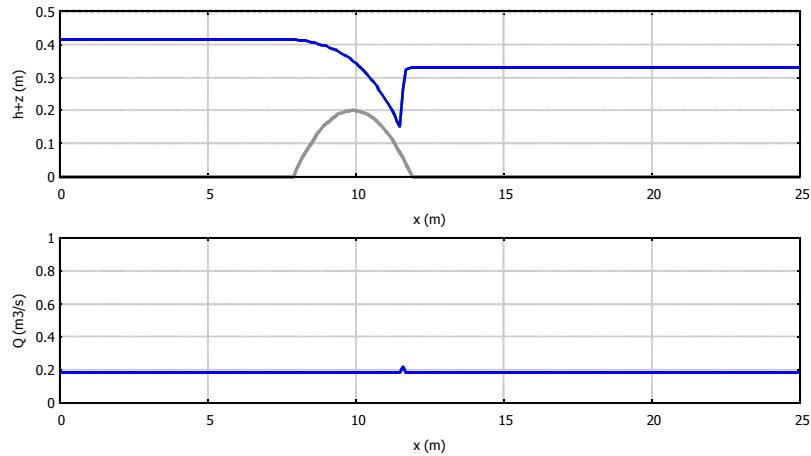


Figura 12. Caso test #1.1 - Flujo transcrítico con onda de choque. *Arriba:* nivel de agua (azul), estado inicial (línea discontinua) y altura del fondo (gris). *Abajo:* caudal.

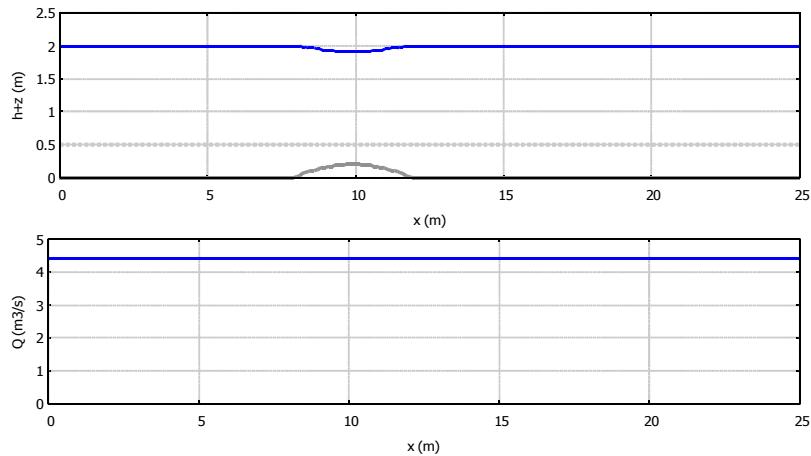


Figura 13. Caso test #1.2 - Flujo subcrítico. *Arriba:* nivel de agua (azul), estado inicial (línea discontinua) y altura del fondo (gris). *Abajo:* caudal.

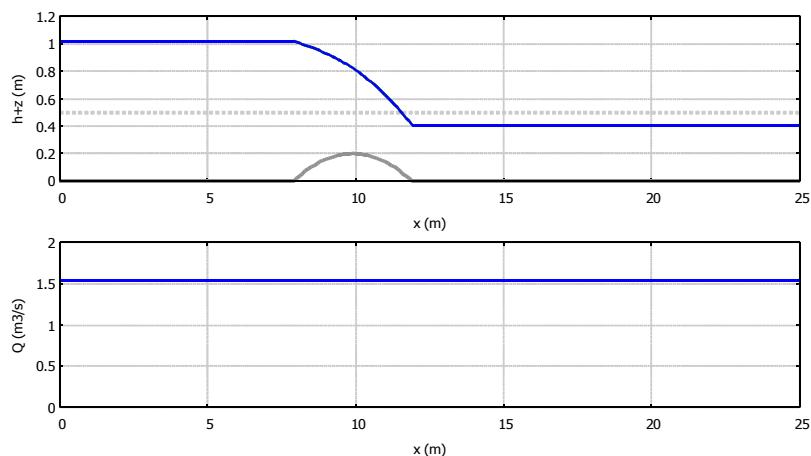


Figura 14. Caso test #1.3 - Flujo transcrítico sin onda de choque. *Arriba:* nivel de agua (azul), estado inicial (línea discontinua) y altura del fondo (gris). *Abajo:* caudal.

Se puede demostrar matemáticamente (y comprobar de forma numérica) que la transición sub-supercrítico tiene lugar en la parte más alta del obstáculo.

## 5.2. Estado estacionario en un canal

Los siguientes casos se realizan en García-Navarro et al. 1993 y consisten en reproducir los estados estacionarios en un canal prismático bajo diferentes condiciones de entrada/salida, así como rozamiento. Como condiciones iniciales se tomará un caudal de  $3 \text{ m}^3/\text{s}$  y un calado de  $2 \text{ m}$ . En la siguiente tabla se reflejan los parámetros empleados para cada uno de los casos:

Test	Fondo	Nº de Manning	CC aguas arriba	CC aguas abajo
#2.1	$z(x) = 4.0 - 0.01$	0.03	$Q=3.0 \text{ m}^3/\text{s}$	$h=2.0 \text{ m}$
#2.2	$z(x) = 4.0 - 0.01$	0.009	$Q=3.0 \text{ m}^3/\text{s}$	$h=3.0 \text{ m}$

Tabla 2. Estado estacionario en un canal

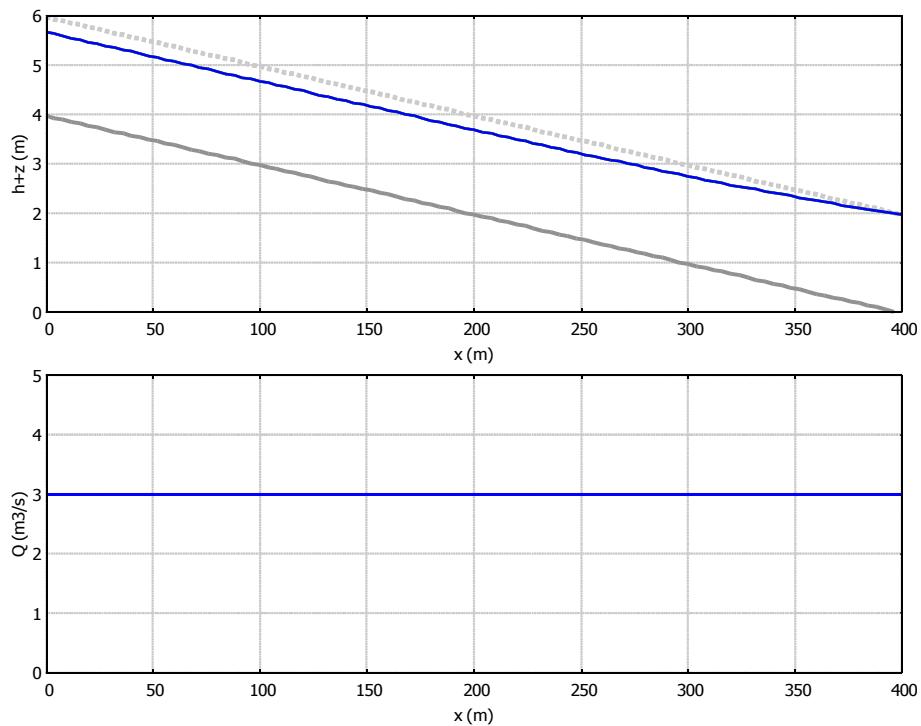


Figura 15. Caso test #2.1. *Arriba*: nivel de agua (azul), estado inicial (línea discontinua) y altura del fondo (gris). *Abajo*: caudal.

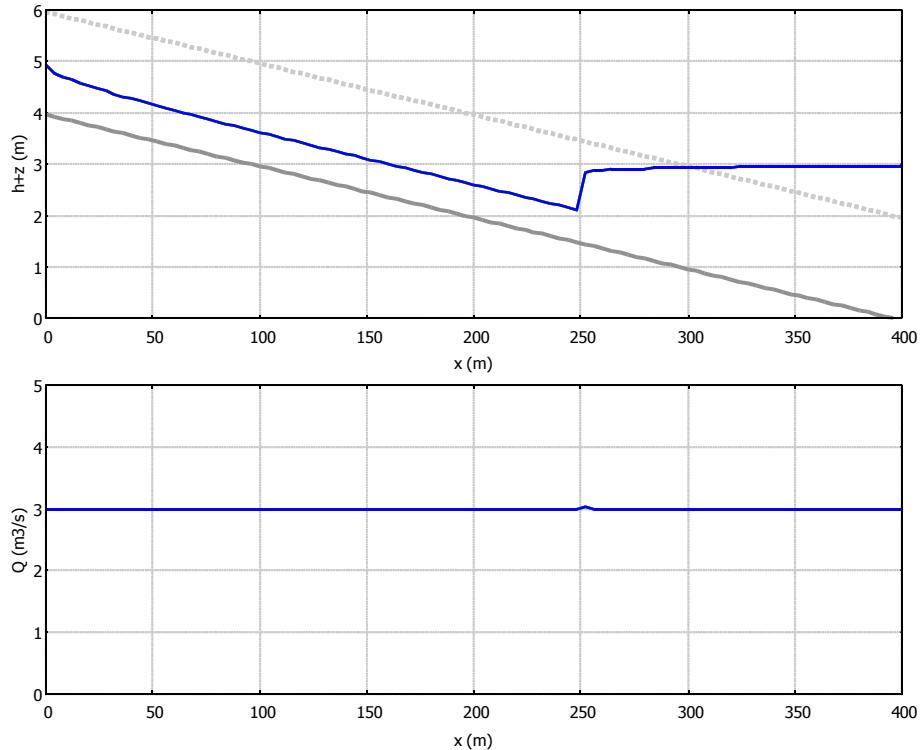


Figura 16. Caso test #2.2. *Arriba:* nivel de agua (azul), estado inicial (línea discontinua) y altura del fondo (gris). *Abajo:* caudal.

En el primer caso (figura 15) se observa el perfil de un flujo completamente subcrítico, mientras que en el segundo caso (figura 16) los regímenes subcrítico y supercrítico se conectan a través de un salto hidráulico.

### 5.3. Rotura de presa

El tercer caso test corresponde a la evolución temporal de una rotura de presa, es decir, partiremos de un desnivel inicial de agua en reposo situado en la mitad del canal y estudiaremos la evolución de las ondas de choque y rarefacción. Se trata de un problema clásico con solución exacta (Stoker 1957) para la validación de esquemas en régimen transitorio sin término de fricción. A continuación, se muestran los resultados obtenidos:

Test	Ratio	Nº de Manning
#3.1	1m : 0.5m	0
#3.2	10m : 1m	0
#3.3	10m : 1m	0.03

Tabla 3. Parámetros para las diferentes roturas de presa.

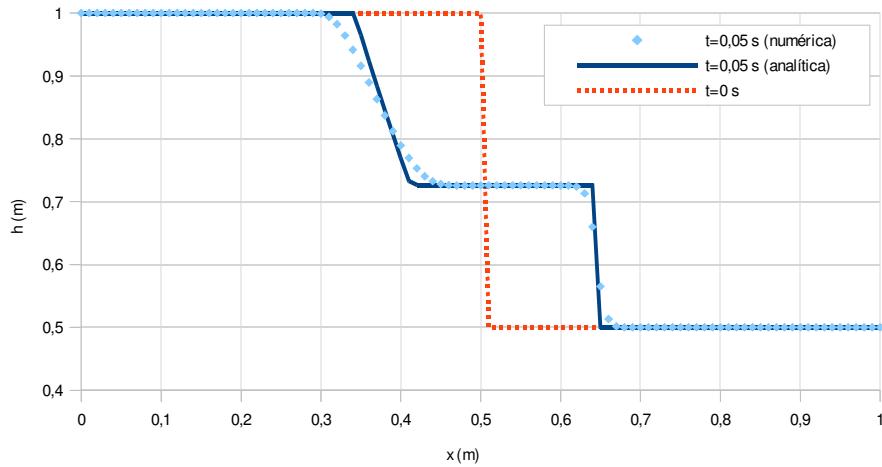


Figura 17. Caso test #3.1

En la figura 17, correspondiente al primer caso sin rozamiento se muestra también la comparación con la solución exacta propuesta por Stoker (1957). En las figuras 18 y 19 se puede apreciar la evolución temporal de las ondas de choque y rarefacción:

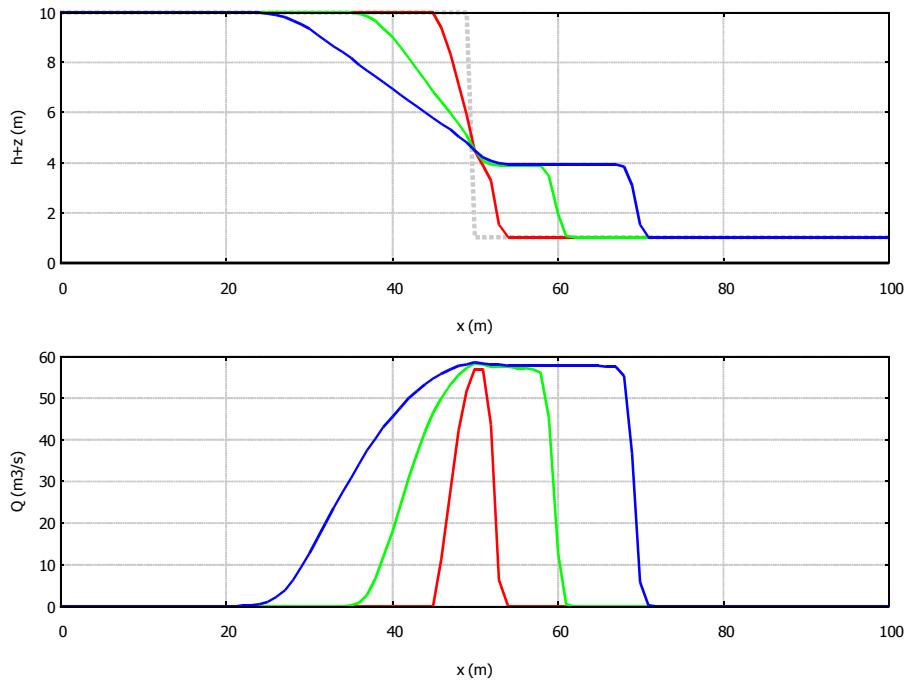


Figura 18. Caso test #3.2. Nivel de agua (arriba) y caudal (abajo) en los tiempos  $t=0.3$  s (rojo),  $t=1$  s (verde) y  $t=2$  s (azul). Estado inicial (línea discontinua).

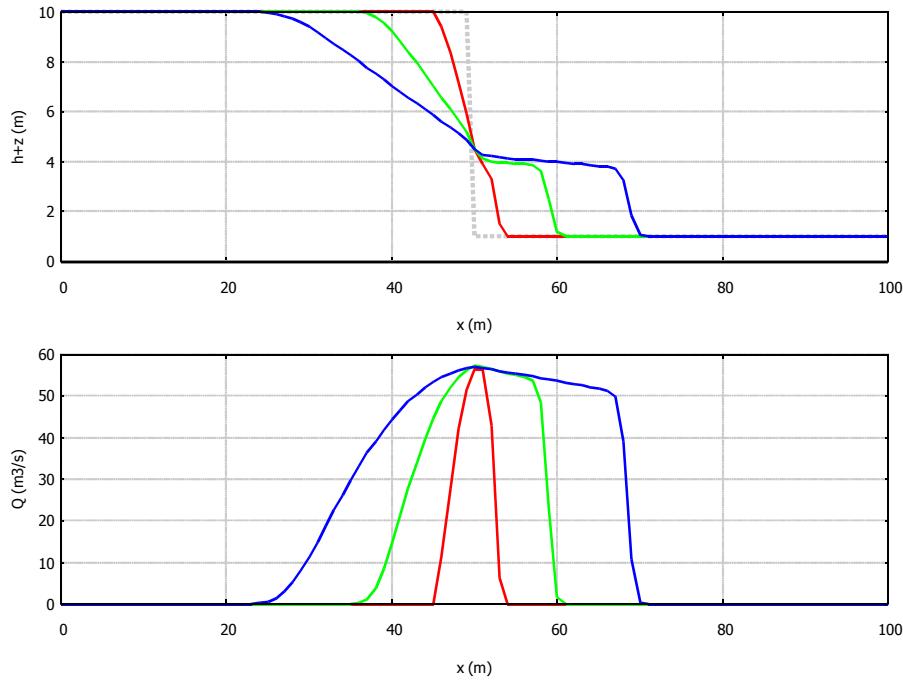


Figura 19. Caso test #3.3. Nivel de agua (*arriba*) y caudal (*abajo*) en los tiempos  $t=0.3$  s (rojo),  $t=1$  s (verde) y  $t=2$  s (azul). Estado inicial (línea discontinua).

Si establecemos las condiciones de contorno de forma que las paredes del canal estén cerradas ( $Q=0$ ), el sistema tiene que evolucionar hasta un estado estacionario en el que el agua alcance un nivel uniforme. Para comprobarlo, se repetirá el último caso test, estableciendo las condiciones de frontera mencionadas y se dejará evolucionar el problema hasta el estado estacionario:

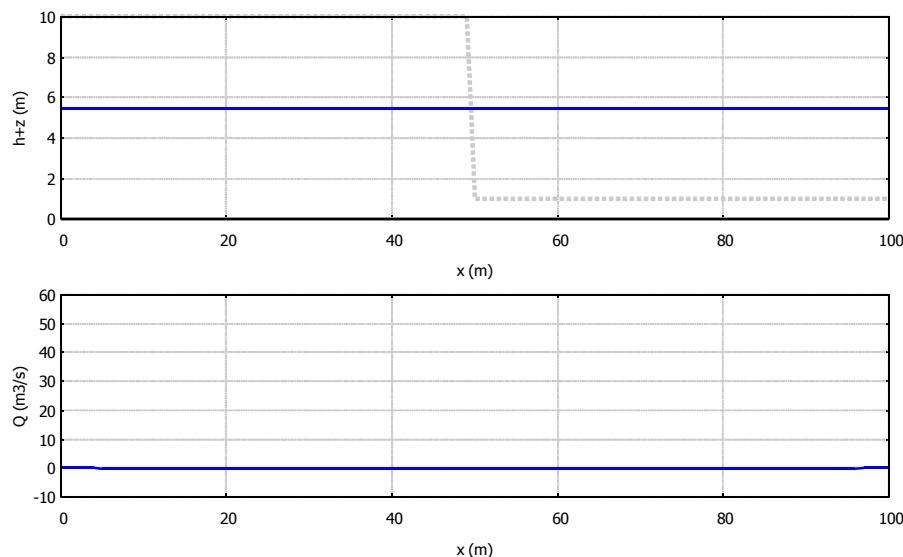


Figura 20. Caso test #3.3 - Nivel de agua (*arriba*) y caudal (*abajo*) para el estado estacionario.

## 5.4. Test de Wiggert

A continuación, aplicaremos el modelo de Preissmann a un montaje experimental diseñado por Wiggert (Wiggert, 1972) y ampliamente reproducido (e.g. Kerger et al. 2010, Bourdarias et al. 2006). El sistema consiste en una tubería horizontal de sección rectangular, con las dimensiones que se muestran en la figura 21:

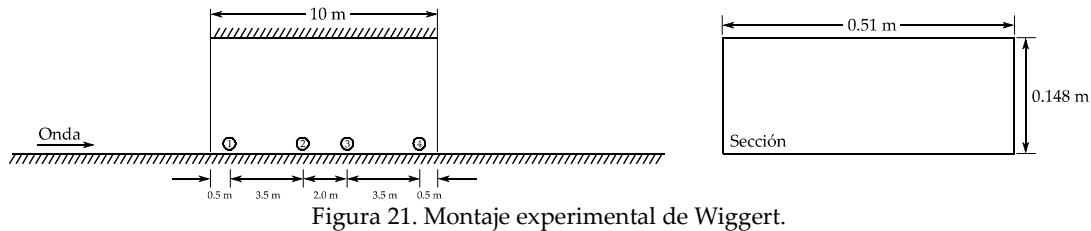


Figura 21. Montaje experimental de Wiggert.

El coeficiente de rugosidad de Manning es igual a  $0.01 \text{ m}^{1/3}\text{s}$ . Tomaremos como condición inicial un nivel uniforme de agua igual a  $0.128 \text{ m}$  y un caudal nulo. Posteriormente, una onda procedente de la parte izquierda provocará que la tubería entre en un estado de presurización. En la figura 22 se muestran las condiciones de contorno físicas impuestas a la entrada y a la salida:

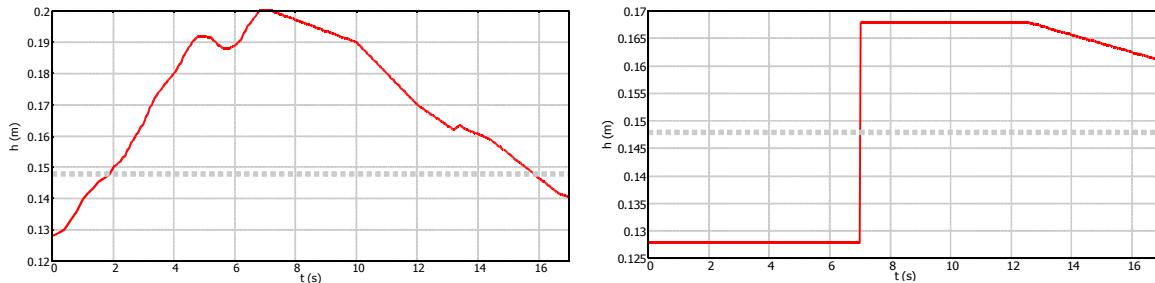


Figura 22. Condiciones de contorno aguas arriba (izq) y aguas abajo (dcha).

En la figura 23 se muestran los resultados numéricos obtenidos con un tamaño de celda de  $0.25 \text{ m}$  para las cuatro sondas situadas en las posiciones que se indican en la figura 21. Por motivos de disponibilidad de los datos experimentales, solamente se realiza la comparación con los mismos en la sonda 2, situada a  $3.5 \text{ m}$  de la entrada. La anchura de la rendija empleada ha sido de  $2 \text{ cm}$ :

Capítulo 5. Validación del modelo

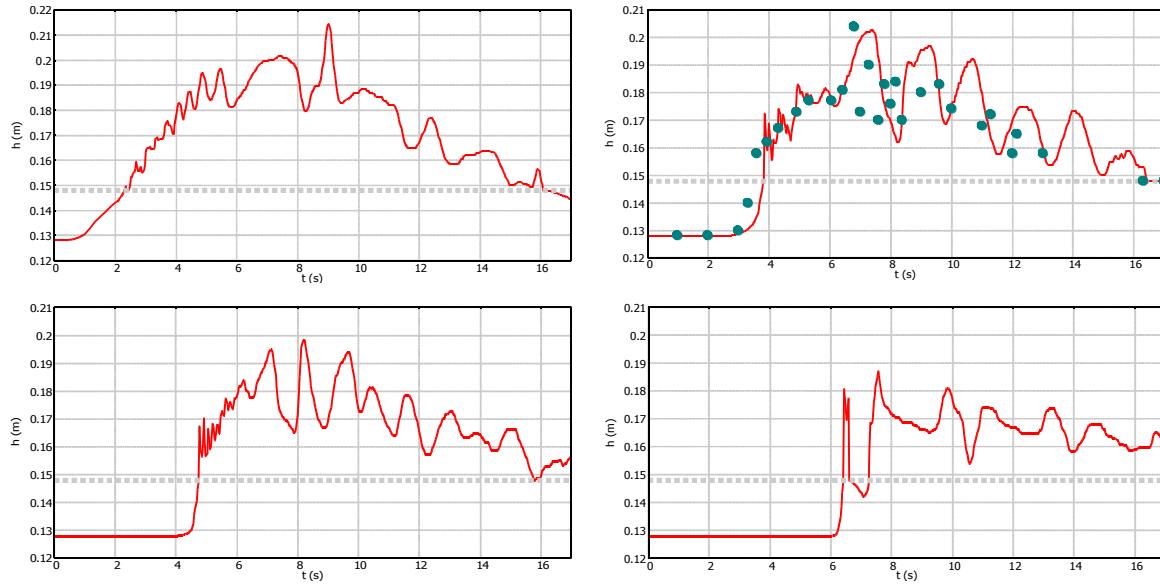


Figura 23. Resultados numéricos obtenidos para las cuatro sondas ( $CFL=0.9$ ).

Repetiendo la simulación empleando valores más pequeños para el número  $CFL$ , vemos que las oscilaciones se reducen en cierta medida, como se aprecia en la figura 24:

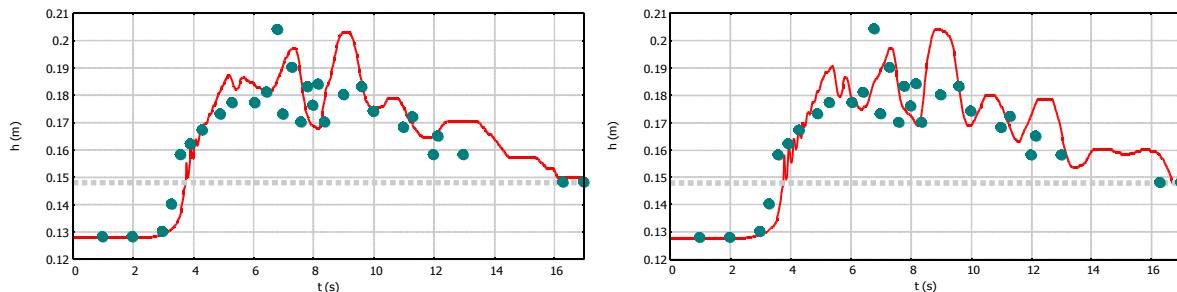


Figura 24. Resultados numéricos obtenidos para la sonda 2 con  $CFL=0.6$  (izq) y  $CFL=0.75$  (dcha).

En la figura 25, se muestran los resultados modificando la anchura de la rendija:

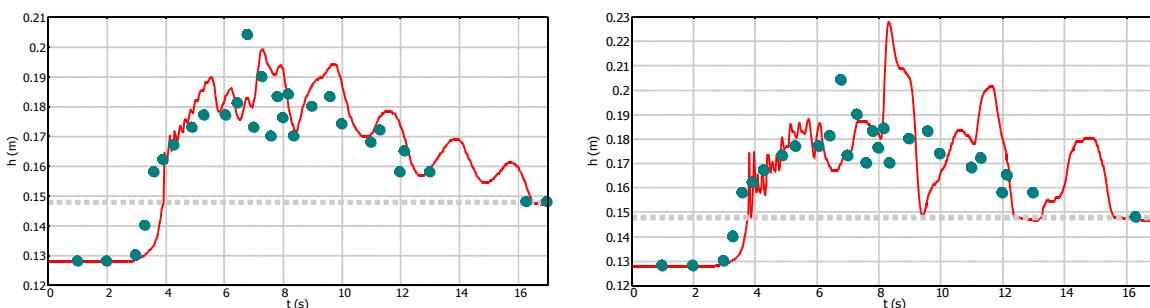


Figura 25. Resultados numéricos obtenidos para la sonda 2 con anchuras de 3 cm (izq) y 1,5 cm (dcha).

Se puede ver como al aumentar la anchura de la rendija disminuyen las inestabilidades de la solución, mientras que al estrecharla se produce el efecto contrario, como era de esperar. Por ello, es importante encontrar un compromiso entre una solución razonablemente estable y un valor para la anchura de la rendija que no comprometa de forma considerable la conservación de masa y momento lineal.

Para comprobar la influencia del tamaño de celda, se ha repetido la simulación con varios mallados diferentes:

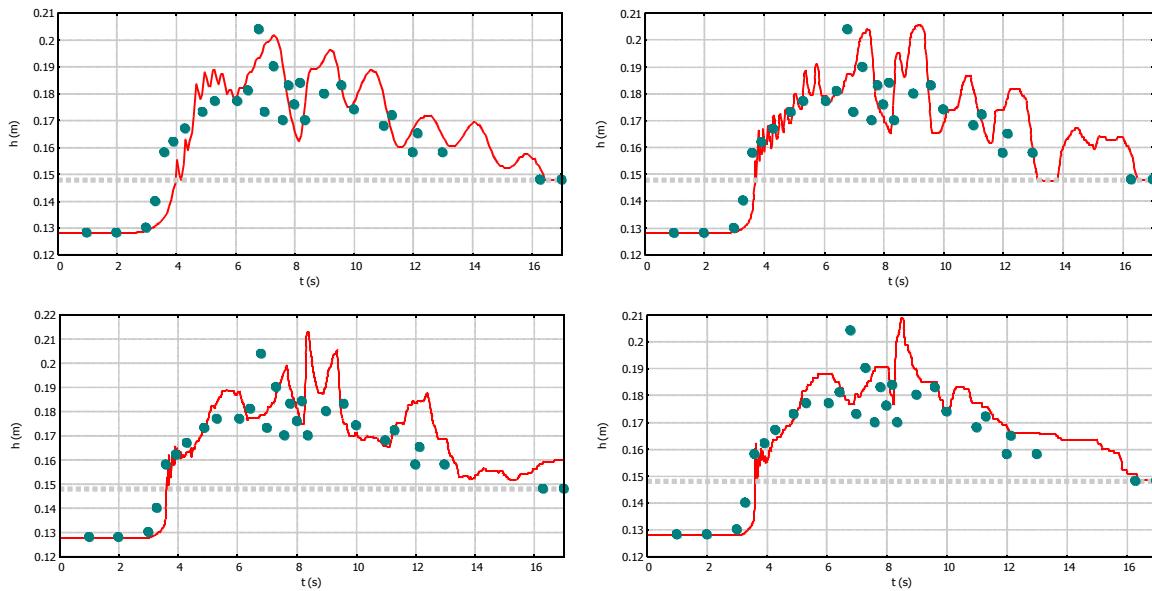


Figura 26. Resultados numéricos obtenidos para la sonda 2 con  $\Delta x=0.5$  m (arriba, izq),  $\Delta x=0.125$  m (arriba, dcha),  $\Delta x=0.05$  m (abajo, izq) y  $\Delta x=0.025$  m (abajo, dcha).

A la vista de los resultados mostrados en la figura 26, las oscilaciones disminuyen a medida que refinamos la malla. Por otro lado, los valores numéricos se aproximan más a los datos experimentales que con la malla gruesa inicial.

## 5.5. Propagación de discontinuidades en flujo mixto.

El siguiente caso que se presenta a continuación tiene como objetivo comprobar la validez del modelo a la hora de simular fuertes transiciones en escalas mayores que la de un experimento de laboratorio. En diversos artículos (León 2007, León et al. 2009) es posible encontrar simulaciones con situaciones similares.

Se considerará un conducto de geometría rectangular ( $b=10$  m,  $H=9.5$  m) con una

longitud de  $10\text{ km}$  y pendiente uniforme del  $0.1\%$  conectado a una válvula de cierre aguas abajo. El coeficiente de rugosidad de Manning se supondrá uniforme e igual a  $0.015$ . Se tomará como condición inicial una altura de agua de  $8.57\text{ m}$  y un caudal uniforme de  $240\text{ m/s}^3$ . En un instante dado se cierra instantáneamente la válvula situada aguas abajo, lo cual crea una discontinuidad brusca que avanzará hacia la región de aguas arriba, presurizando el conducto. En la figura 27 se muestran los resultados numéricos obtenidos para la altura de presión, en tres instantes de tiempo, empleando una malla de 500 celdas y  $CFL=0.5$ . Se observa como, a medida que el pulso avanza hacia la izquierda la presión del conducto aumenta gradualmente.

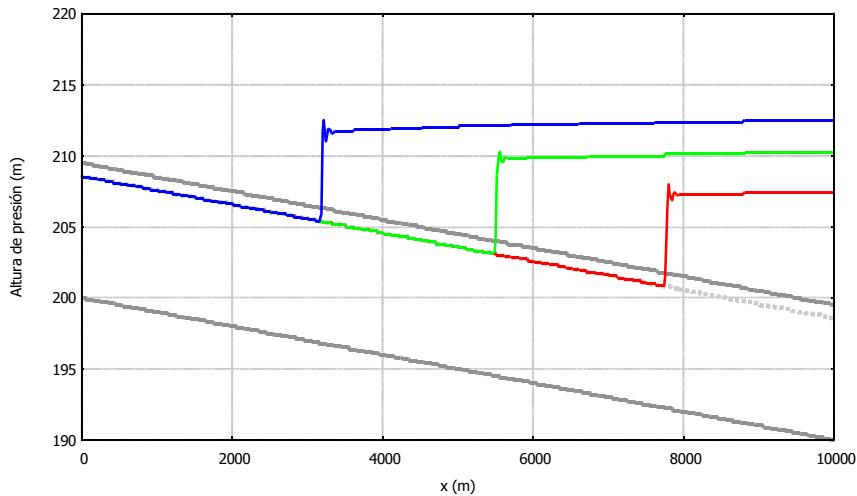


Figura 27. Propagación de la discontinuidad. Nivel de agua en los tiempos  $t=100\text{ s}$  (rojo),  $t=200\text{ s}$  (verde) y  $t=300\text{ s}$  (azul). Estado inicial (línea discontinua). Techo y fondo del conducto (gris).

## 5.6. Transitorio en flujo completamente presurizado.

Al igual que en el apartado anterior, se considerará una situación de dimensiones realistas (León 2006, 2009), consistente en una tubería horizontal sin rozamiento de  $10\text{ km}$  de longitud y sección rectangular ( $b=10\text{ m}$ ,  $H=7.853\text{ m}$ ), que se encuentra completamente presurizada y cuya entrada está en contacto con un reservorio de agua que garantiza un nivel constante de presión ( $200\text{ m}$ ), mientras que la salida está conectada a una válvula de cierre. Se supondrá que la velocidad de las ondas de presión es igual a  $1000\text{ m/s}$  y que la velocidad inicial del flujo es de  $2.0\text{ m/s}$ . En un instante dado, se cierra la válvula de la salida, provocando un golpe de ariete que se propaga en sentido opuesto al flujo.

En la figura 28 se muestran los resultados numéricos obtenidos empleando una malla de 500 celdas y una condición  $CFL=0.8$ :

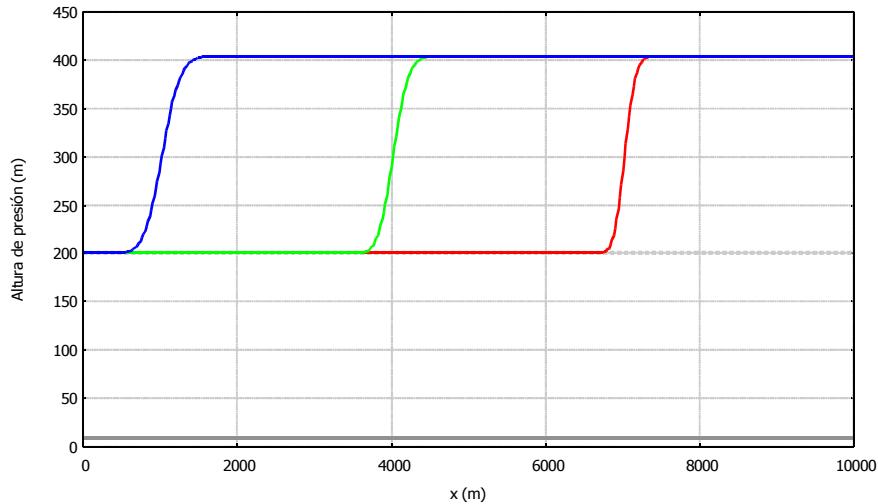


Figura 28. Simulación del golpe de ariete. Nivel de agua en los tiempos  $t=3$  s (rojo),  $t=6$  s (verde) y  $t=9$  s (azul). Estado inicial (línea discontinua). Techo del conducto (gris).

Al tratarse de un flujo puramente presurizado, para garantizar la validez de la solución numérica debemos ser cuidadosos a la hora de seleccionar la anchura de la rendija de Preissmann. Siguiendo el criterio especificado en (71), se obtiene el siguiente valor:

$$c_{WH} = c \Rightarrow b_s = g \frac{A_f}{c_{WH}^2} = 0,77 \text{ mm}$$

Para comprobar la relevancia de este parámetro en flujos transitorios presurizados, se ha repetido la simulación aumentando la anchura de la rendija hasta 1 cm:

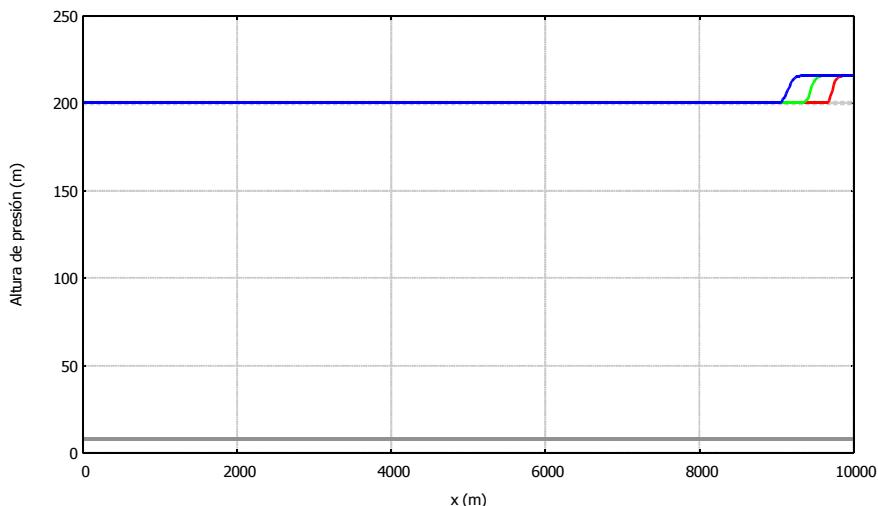


Figura 29. Efectos en la solución al modificar la anchura de la rendija. Nivel de agua en los tiempos  $t=3$  s (rojo),  $t=6$  s (verde) y  $t=9$  s (azul). Estado inicial (línea discontinua). Techo del conducto (gris).

*Capítulo 5. Validación del modelo*

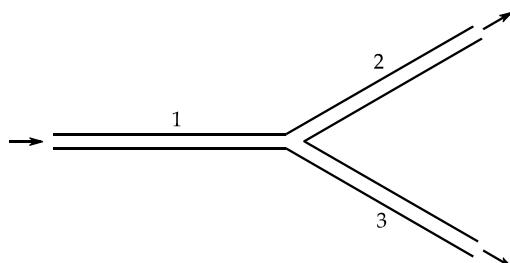
Como se puede ver en la figura 29, la solución numérica es este caso está muy alejada de la realidad (tanto la presión como la velocidad de la discontinuidad), debido a que la velocidad de las ondas superficiales es mucho menor ( $87,8 \text{ m/s}$ ) que la velocidad de las ondas de presión en la tubería ( $1000 \text{ m/s}$ ).

## 6. Aplicación a redes

En este apartado aplicaremos el modelo a distintas conexiones de tuberías que, bajo ciertas condiciones de contorno aguas arriba, pueden verse sometidas a presurización en algunos puntos. Se analizarán tanto casos estacionarios como transitorios.

### 6.1. Estado estacionario en una unión de conductos

Comenzaremos con un caso estacionario de unión en Y (figura 30), propuesto en García-Navarro et al. 1993, en el que una tubería principal se bifurca en dos ramas secundarias iguales.



Las tres tuberías tienen geometría rectangular y comparten longitud ( $L=400\text{ m}$ ), anchura ( $b=1\text{ m}$ ) y coeficiente de Manning ( $n=0.009$ ). Las pendientes y las condiciones iniciales y de contorno se especifican en la tabla 4:

Caso	$S_0(1)$	$S_0(2)$	$S_0(3)$	Condiciones iniciales	CC entrada	CC salida
#6.1	0.001	0.001	0.001	$Q_1(i)=3.0\text{ m}^3/\text{s};$	$Q=3.0\text{ m}^3/\text{s}$	$h=3.0\text{ m}$
#6.2	0.01	0.001	0.001	$Q_2(i)=Q_3(i)=1.5\text{ m}^3/\text{s};$	$Q=3.0\text{ m}^3/\text{s}$	$h=3.0\text{ m}$
#6.3	0.01	0.01	0.01	$h_1(i)=h_2(i)=h_3(i)=2.0\text{ m}$	$Q=3.0\text{ m}^3/\text{s}$	$h=3.0\text{ m}$

Tabla 4. Estado estacionario en una unión de tuberías.

En las figuras 31, 32 y 33 se presentan los resultados para el nivel de agua en los tres casos propuestos:

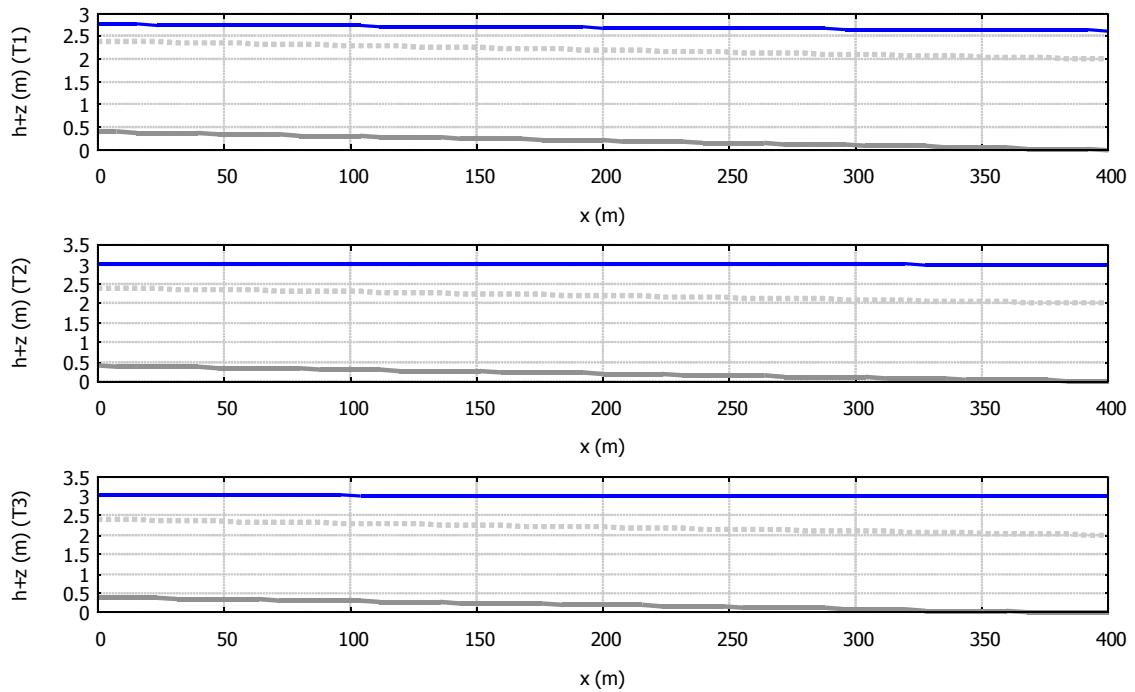


Figura 31. Caso #6.1. Flujo subcrítico. Estado inicial (línea discontinua). Fondo del conducto (gris).

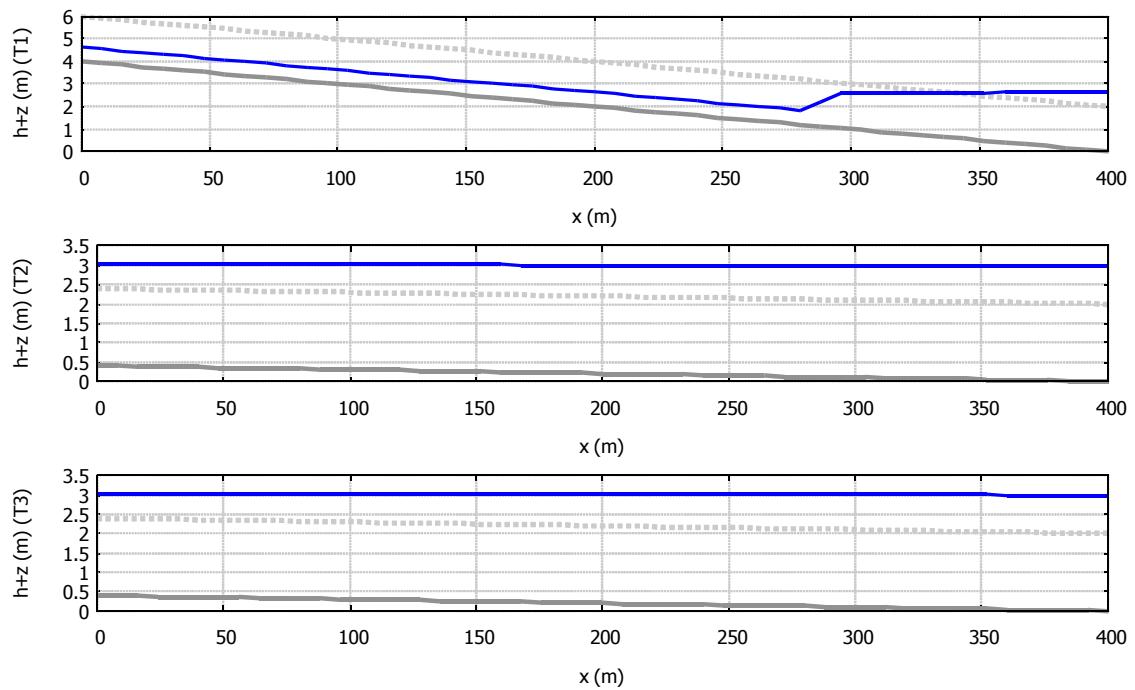


Figura 32. Caso #6.2. Flujo subcrítico en la confluencia. Estado inicial (línea discontinua). Fondo del conducto (gris).

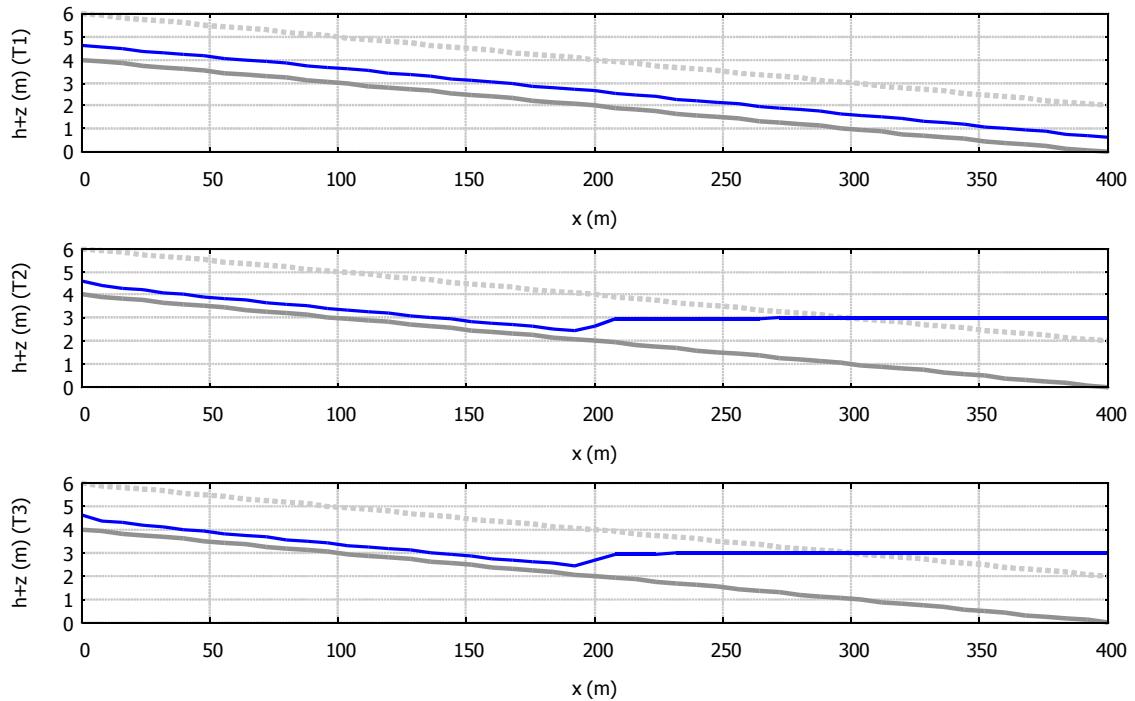


Figura 33. Caso #6.3. Flujo supercrítico en la confluencia. Estado inicial (línea discontinua). Fondo del conducto (gris).

En estos dos últimos casos, aparece un salto hidráulico en el punto donde se produce el cambio de régimen super-subcrítico.

## 6.2. Flujo transitorio en una unión de conductos

A continuación se desarrollará un caso propuesto en Wixey 1990, en el cual se considera una bifurcación similar a la del apartado anterior. La longitud de las tuberías en este caso es de  $5\text{ km}$ , la anchura es de  $1\text{ m}$ , y el número de Manning es  $0.01$  para todos los tramos. La altura de los conductos también se considerará constante e igual a  $1\text{ m}$ . Las pendientes de las tuberías principal y secundarias son  $0.002$  y  $0.001$ , respectivamente. Primero se ha calculado un estado estacionario partiendo de las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$Q_1(i)=0.1\text{ m}^3/\text{s} , \quad Q_2(i)=Q_3(i)=0.05\text{ m}^3/\text{s} , \quad h_1(i)=h_2(i)=h_3(i)=0.2\text{ m} , \quad Q_1(1)=0.1\text{ m}^3/\text{s}$$

Tomando como condición inicial dicho estado estacionario, se impondrá como condición de contorno a la entrada una función de onda triangular para el caudal con las características mostradas en la figura 34:

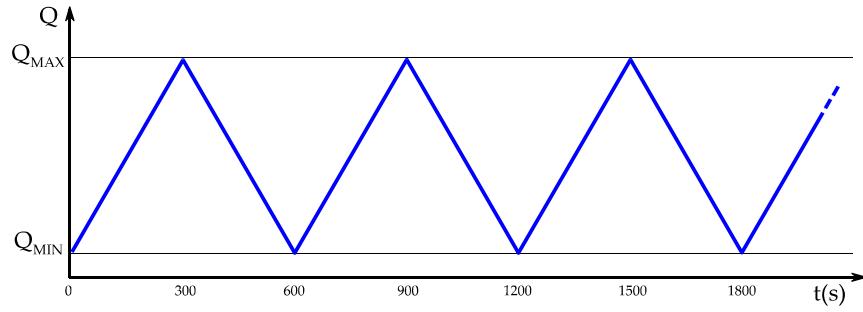


Figura 34. Señal triangular para el caudal de entrada.

Como valor mínimo para el caudal tomaremos el mismo que en la simulación del estado estacionario,  $Q_{\text{MIN}}=0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ . En cuanto al valor de pico, se realizarán simulaciones con dos valores distintos. En el primer caso, tomaremos un valor de  $2.8 \text{ m}^3/\text{s}$ , de forma que en ningún momento la altura de agua sea superior al techo de la tubería y, por lo tanto, el sistema no entre en condiciones de presurización. Posteriormente, se repetirá la simulación con un valor de  $3.2 \text{ m}^3/\text{s}$ , donde entrará en juego el método de la rendija de Preissmann para estimar el cálculo de la presión. En las figuras 35 y 36 se presentan los resultados obtenidos con  $CFL=0.9$  y una malla de 100 celdas para los dos casos descritos. En las figuras 37 y 38 se muestran los resultados de la simulación con una malla de 200 celdas. Vemos que los resultados son similares, aunque la forma de la onda se captura con mayor precisión, debido al refinamiento de la malla.

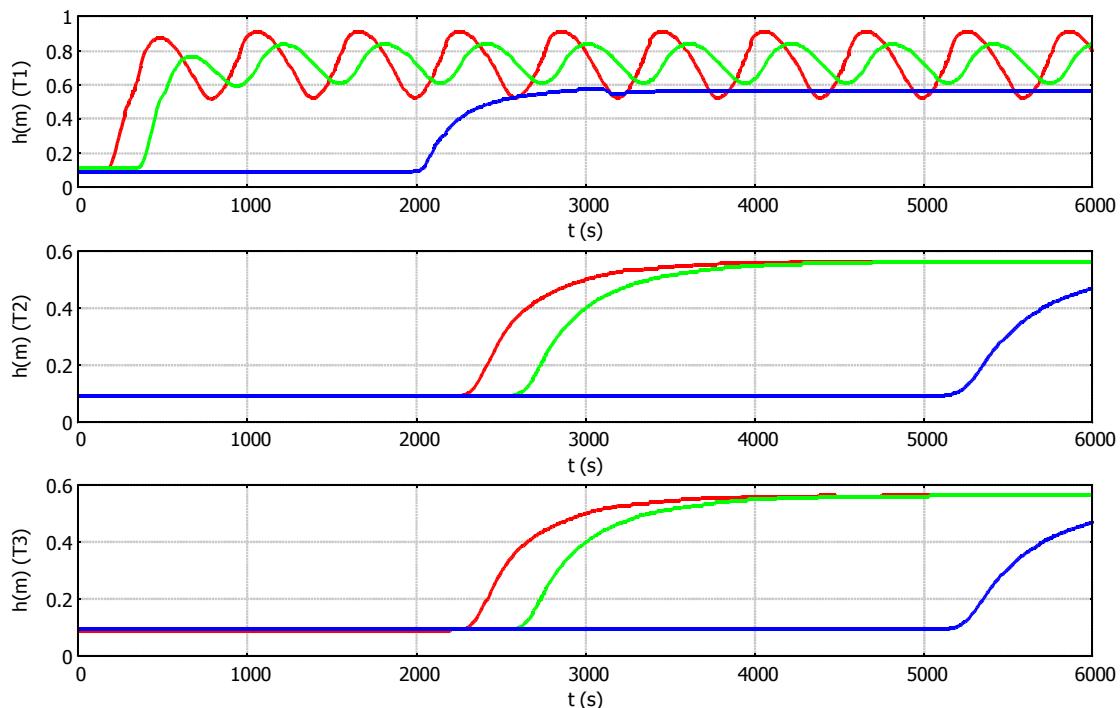


Figura 35. Caso transitorio sin presurización ( $Q_{\text{MÁX}}=2.8 \text{ m}^3/\text{s}$ ). Calado en función del tiempo para los puntos  $x=500$  m (rojo),  $x=1000$  m (verde) y  $x=5000$  m (azul).  $CFL=0,9$ .  $N=100$  celdas.

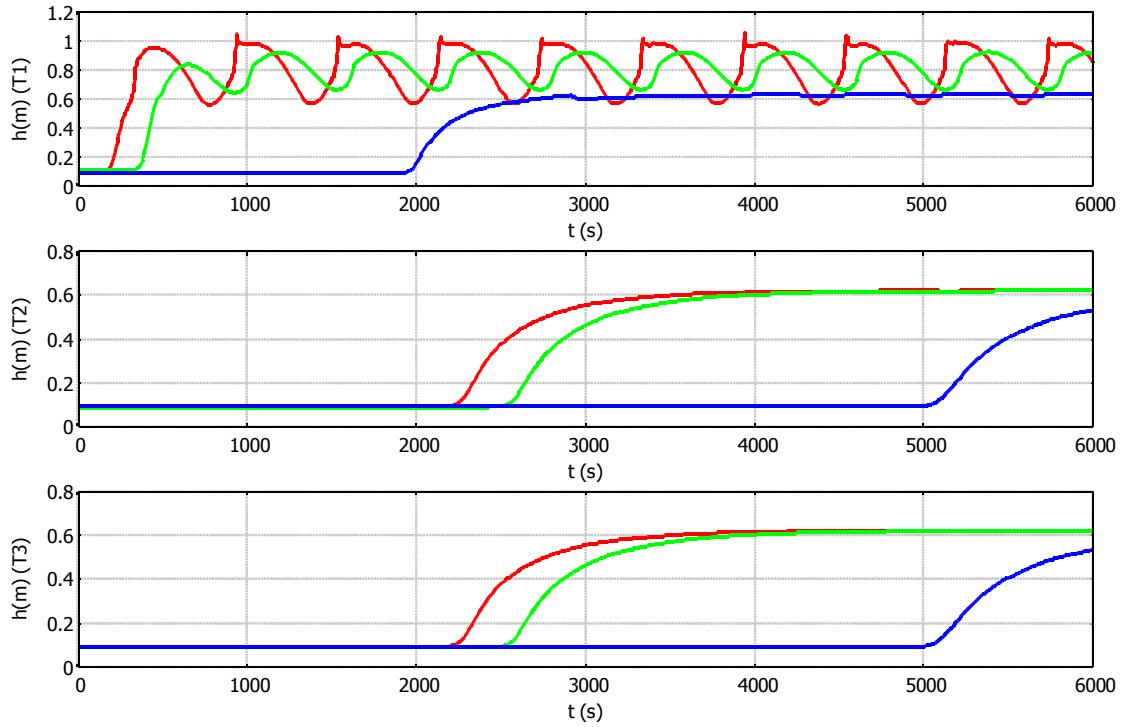


Figura 36. Caso transitorio con presurización ( $Q_{\text{MÁX}}=3.2 \text{ m}^3/\text{s}$ ). Calado en función del tiempo para los puntos  $x=500 \text{ m}$  (rojo),  $x=1000 \text{ m}$  (verde) y  $x=5000 \text{ m}$  (azul).  $CFL=0.9$ .  $N=100$  celdas.

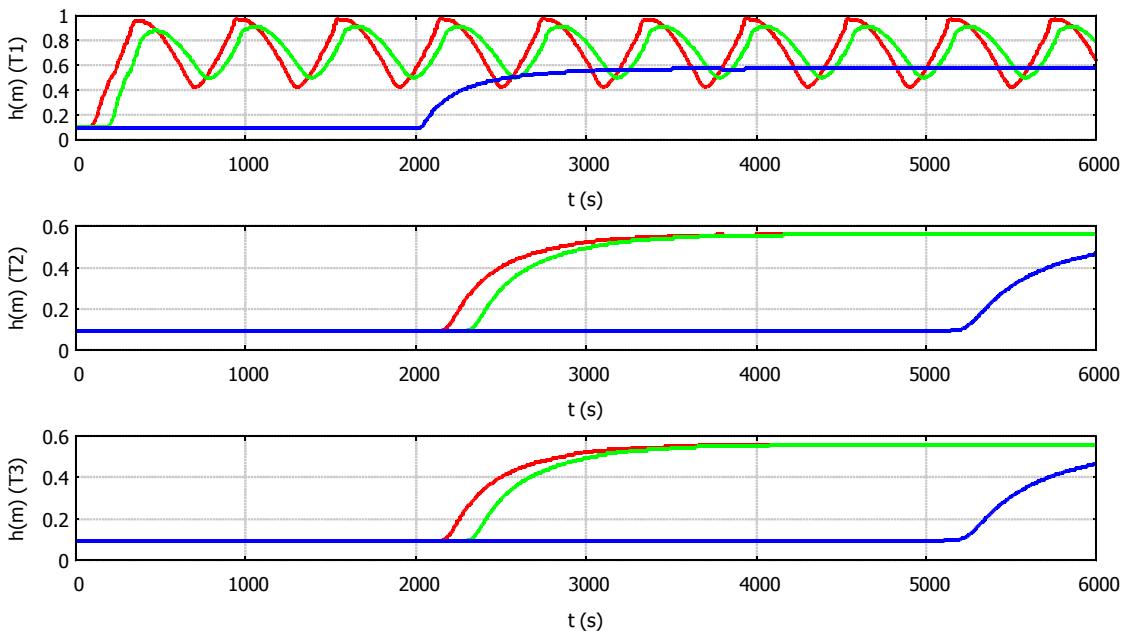


Figura 37. Caso transitorio sin presurización ( $Q_{\text{MÁX}}=2.8 \text{ m}^3/\text{s}$ ). Calado en función del tiempo para los puntos  $x=500 \text{ m}$  (rojo),  $x=1000 \text{ m}$  (verde) y  $x=5000 \text{ m}$  (azul).  $CFL=0.9$ .  $N=200$  celdas.

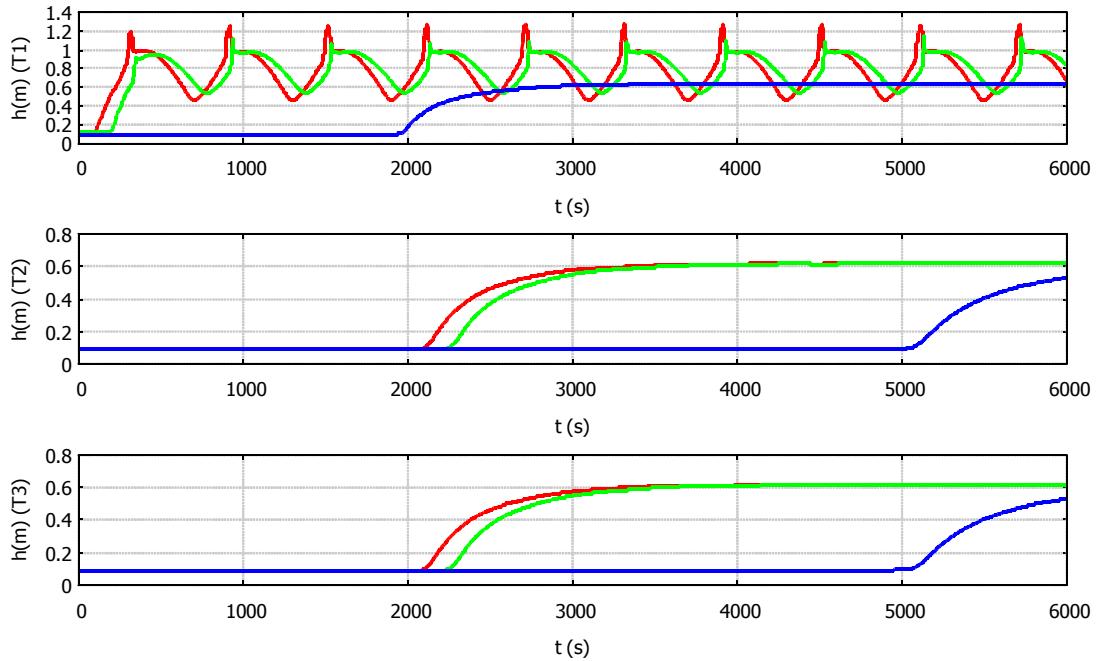


Figura 38. Caso transitorio con presurización ( $Q_{\text{MÁX}}=3.2 \text{ m}^3/\text{s}$ ). Calado en función del tiempo para los puntos  $x=500 \text{ m}$  (rojo),  $x=1000 \text{ m}$  (verde) y  $x=5000 \text{ m}$  (azul).  $CFL=0,9$ .  $N=200$  celdas.

### 6.3. Flujo transitorio en una red de tuberías

En este apartado se repetirá el experimento anterior en una red de siete tuberías, dispuestas como se indica en la figura 39. Todos los tramos tienen una longitud de  $100 \text{ m}$  y un coeficiente de Manning igual a  $0,01$ . Las pendientes son uniformes para cada tramo y sus valores son los siguientes:

$$S_{01}=S_{07}=0.002, \quad S_{02}=S_{03}=S_{05}=S_{06}=0.001, \quad S_{04}=0$$

Al igual que en el caso anterior, se realizará un primer cálculo hasta conseguir un estado estacionario, partiendo de las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$Q_1(i)=Q_7(i)=0.1 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_2(i)=Q_3(i)=Q_5(i)=Q_6(i)=0.05 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_4(i)=0 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_1(i)=h_2(i)=h_3(i)=h_4(i)=h_5(i)=h_6(i)=h_7(i)=0.2 \text{ m}, \quad Q_1(1)=0.1 \text{ m}^3/\text{s}$$

Las condiciones para las confluencias  $J_1$  y  $J_2$  son las mismas que las empleadas en el apartado 6.1, mientras que en las uniones  $W_1$  y  $W_2$  se ha supuesto la existencia de un pozo con una sección en planta  $A_w=5 \text{ m}^2$  por lo que la condición de contorno para el caudal se ve modificada como se especificó en la sección 4.3.3.

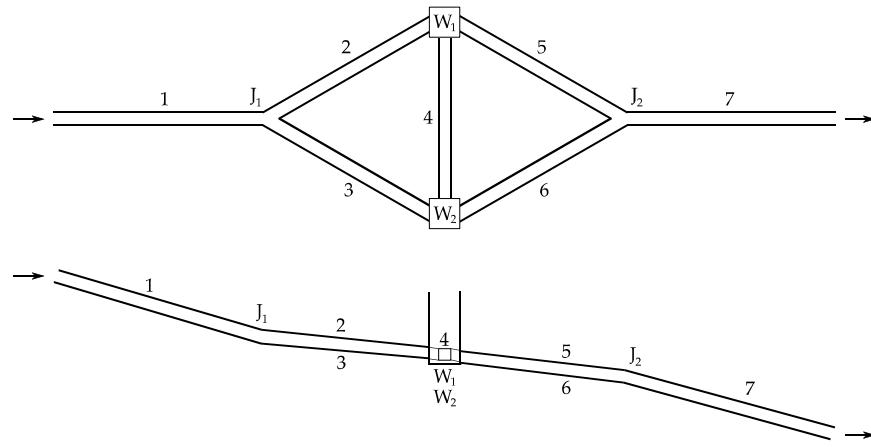


Figura 39. Vista en planta y en perfil de la red de siete tuberías.

Partiendo del estado estacionario obtenido, se ha modificado la condición de contorno aguas arriba, imponiendo la función triangular descrita en la figura 34. El caudal máximo se ha establecido en  $2.0 \text{ m}^3/\text{s}$  para una primera simulación en la que no se llega a presurizar la red en ningún punto. Si se aumenta el caudal de pico hasta  $3.0 \text{ m}^3/\text{s}$  se conseguirá una presurización parcial en algunos puntos del sistema.

En las figuras 40, 41, 42, 43 y 44 se presentan los resultados obtenidos para el calado y el caudal de agua para los estados estacionario, transitorio sin presurizar y transitorio presurizado, con  $CFL=0.9$ . En las figuras correspondientes al caudal de agua en la red, se puede ver que el caudal en el centro de la tubería es idénticamente cero, mientras que en los extremos opuestos es igual y de signo contrario, por lo que se pone de manifiesto la simetría del problema. Debido a dicha simetría, las tuberías 3 y 6 no son representadas, ya que los resultados son idénticos a los de los conductos 2 y 5.

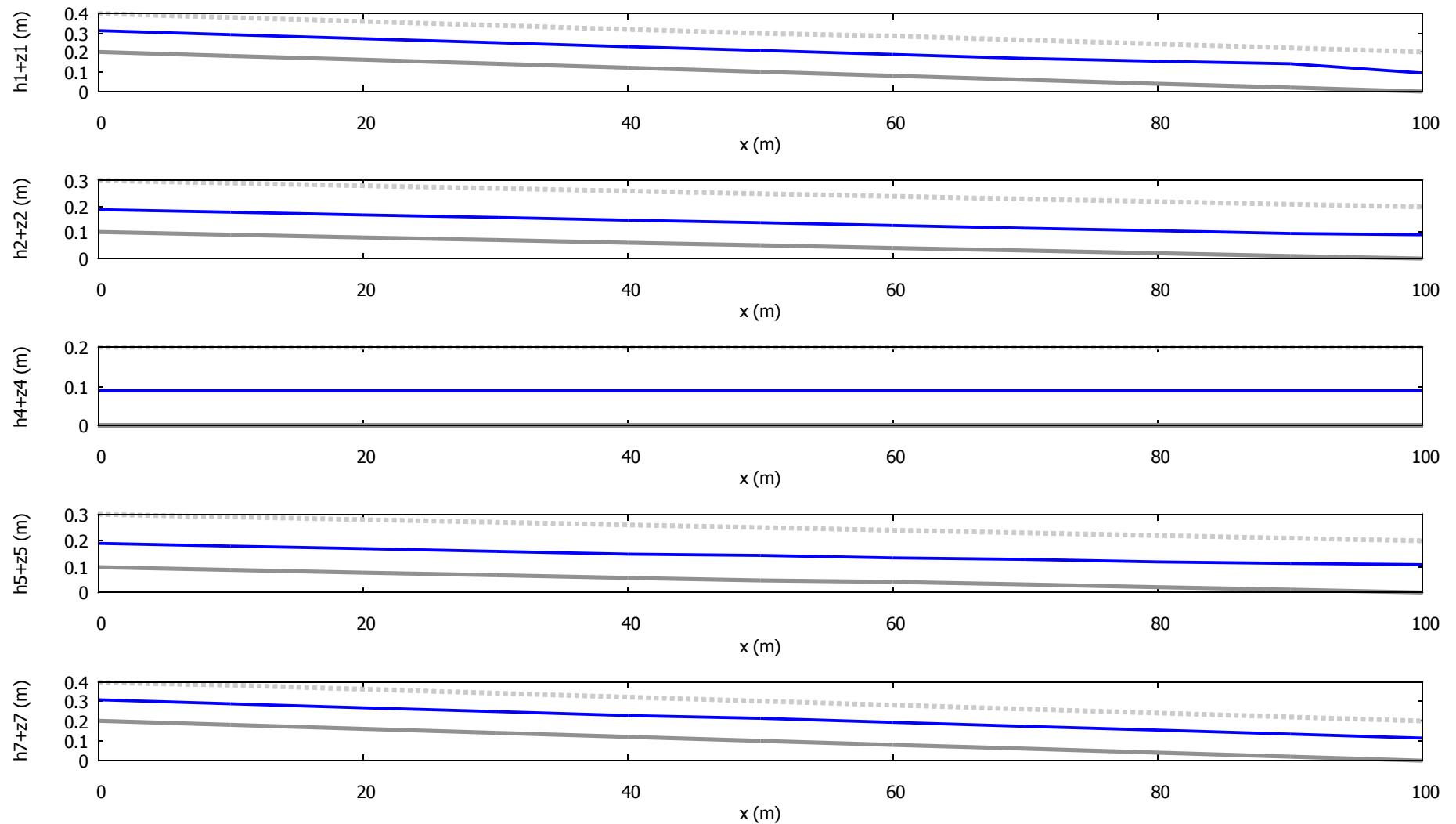


Figura 40. Estado estacionario para la red de siete tuberías. Estado inicial (línea discontinua). Fondo de los conductos (gris).

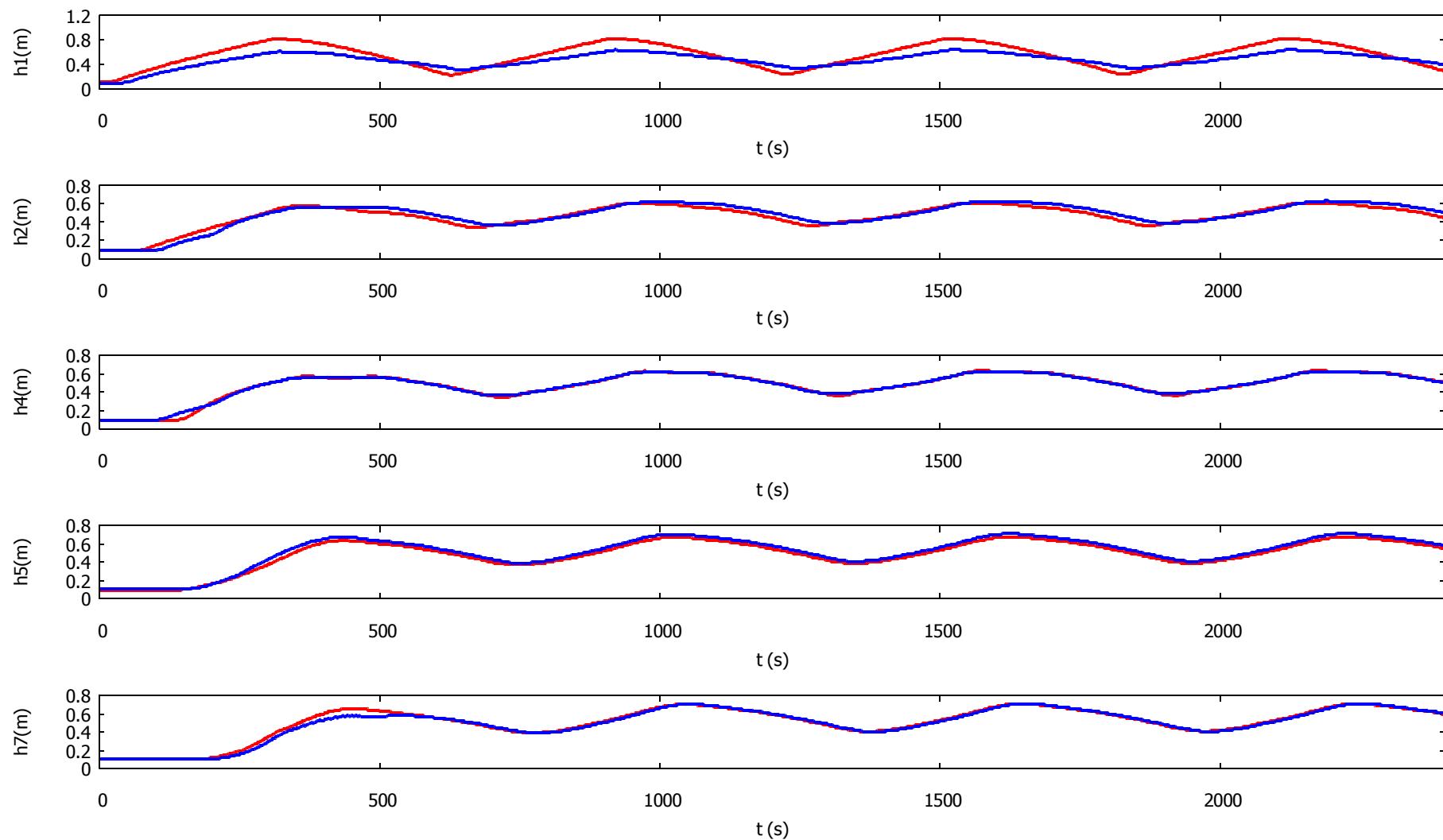


Figura 41. Calado en función del tiempo en el centro (rojo) y al final (azul) de cada tramo. Caudal máximo =  $2.0 \text{ m}^3/\text{s}$ .  $\Delta x=10 \text{ m}$ .  $N=10$  celdas.

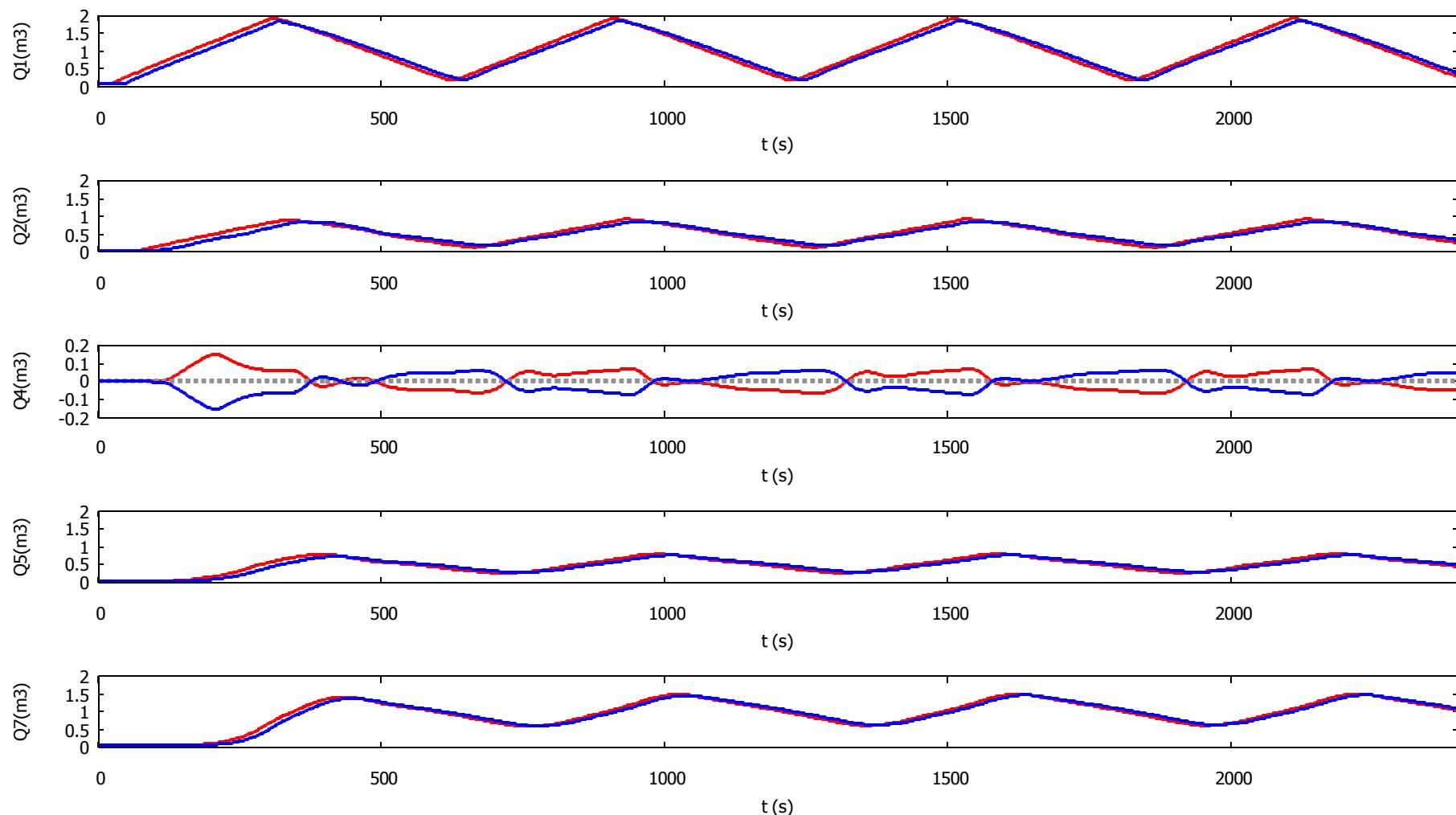


Figura 42. Caudal en función del tiempo en el centro (rojo) y al final (azul) de cada tramo. Caudal máximo =  $2.0 \text{ m}^3/\text{s}$ .  $\Delta x=10 \text{ m}$ .  $N=10$  celdas.

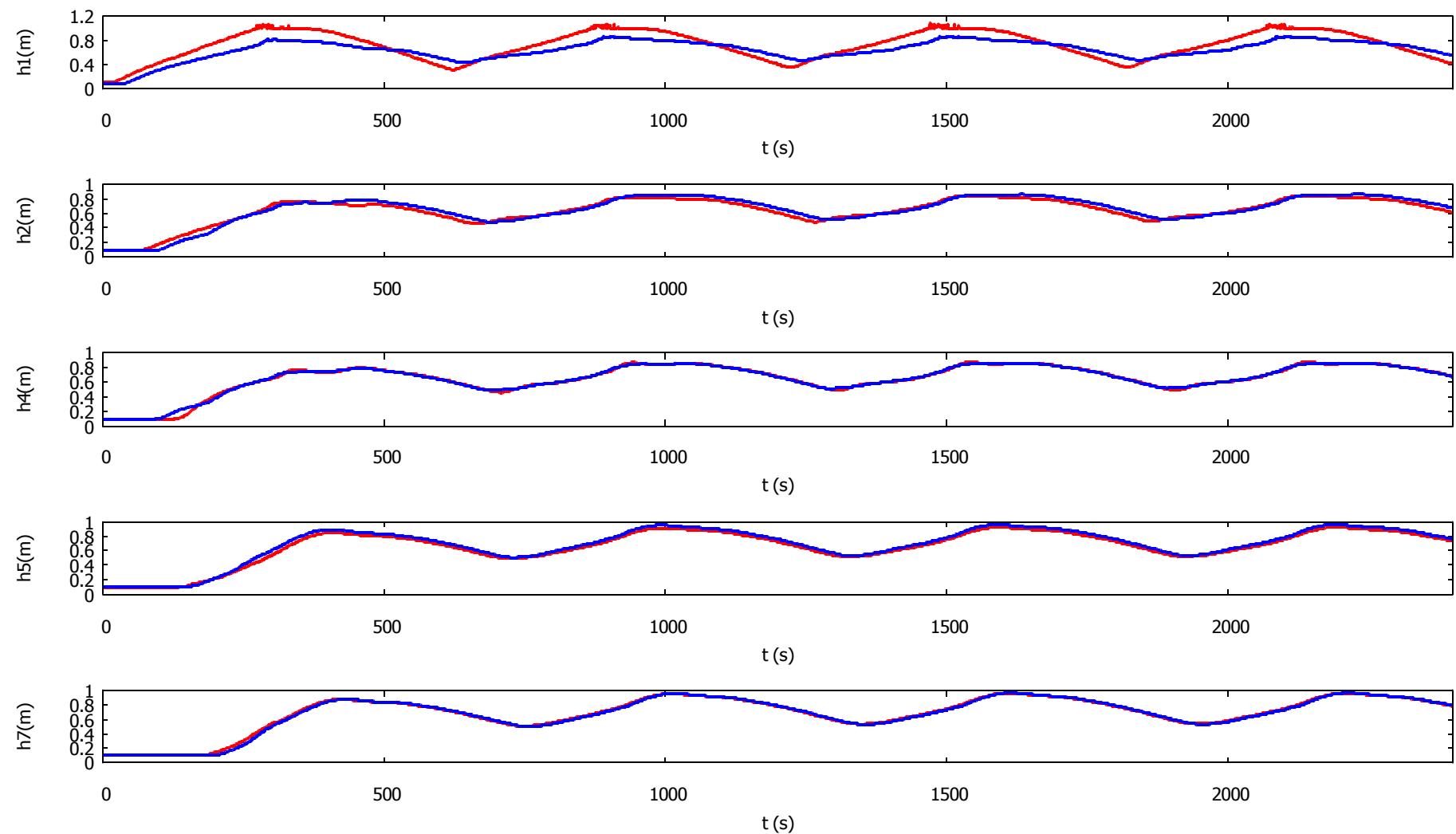


Figura 43. Calado en función del tiempo en el centro (rojo) y al final (azul) de cada tramo. Caudal máximo =  $3.0 \text{ m}^3/\text{s}$ .  $\Delta x=10 \text{ m}$ .  $N=10$  celdas.

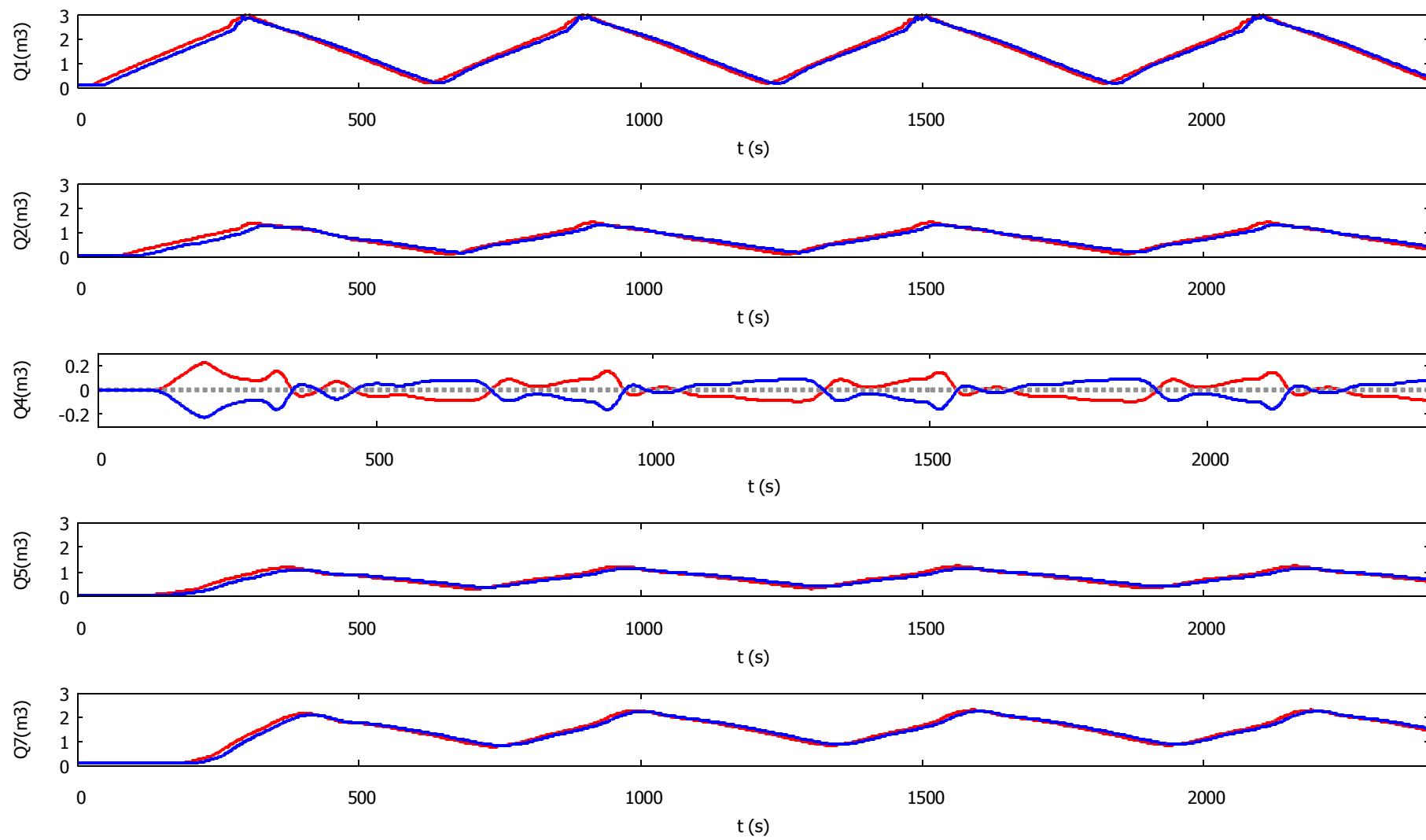


Figura 44. Caudal en función del tiempo en el centro (rojo) y al final (azul) de cada tramo. Caudal máximo =  $3.0 \text{ m}^3/\text{s}$ .  $\Delta x=10 \text{ m}$ .  $N=10$  celdas.

## 7. Conclusiones y trabajo futuro

El principal objetivo del trabajo era comprobar la validez de un modelo numérico basado en un método de volúmenes finitos upwind y diseñado para trabajar en régimen de lámina libre con presurizaciones puntuales. A través de los casos simulados se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- El modelo de la rendija de Preissmann proporciona estimaciones razonables de los valores de presión en las situaciones transitorias entre los dos tipos de régimen. En este caso, una desviación pequeña del valor teórico ideal a la hora de elegir la anchura de la rendija introduce un pequeño error en el balance de masa y momento lineal, pero este hecho es contrarrestado por una ganancia notable en la estabilidad del esquema numérico.
- En sistemas completamente presurizados, es imprescindible limitar la elección de la anchura de la rendija al valor teórico que iguala la velocidad de las ondas de gravedad a las ondas de presión en la tubería, ya que los resultados se ven significativamente afectados por este parámetro.
- Es posible adaptar el método a sistemas realistas, como redes de tuberías, añadiendo las condiciones de contorno internas necesarias tales como pozos o confluencias.

El trabajo futuro se centrará en conseguir una disminución de las oscilaciones debidas al cambio brusco en la anchura del conducto cuando el sistema se presuriza. Para ello se pretende diseñar una rendija con anchura variable, de forma que la transición se produzca de forma más gradual. Esto ha de hacerse de forma que el error introducido en la conservación de la masa y el momento lineal sea lo suficientemente pequeño como para que los resultados numéricos de la presión sean válidos. Por otro lado, queda pendiente la adaptación del modelo a otro tipo de geometrías más complejas, siendo de especial interés el caso de una tubería circular, por su amplia utilización en los sistemas de drenaje. Esto requiere una reformulación de parte del modelo matemático empleado.



## Bibliografía

- [1] Anderson, J.D., *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*, McGraw-Hill, 1995
- [2] Bourdarias, C., Gerbi, S., *A finite volume scheme for a model coupling free surface and pressurised flows in pipes*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006
- [3] Chaudhry, M. H., Mays, L.W. (eds.), *Computer modeling of free-surfaces and pressurized flows*, Kluwer Academic Publishers, 1994
- [4] García-Navarro, P., Brufau, P., *Mecánica de Fluidos Avanzada*, Universidad de Zaragoza, 2009
- [5] García-Navarro, P., Brufau, P., Burguete, J., Murillo, J., *The shallow water equations: an example of hyperbolic system*, Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza 31, 89-119, 2008
- [6] García-Navarro, P., Brufau, P., Murillo, J., Burguete, J., *Volúmenes finitos para ecuaciones hiperbólicas*, Universidad de Zaragoza, 2012
- [7] García-Navarro, P., Priestley, A., *The application of an implicit TVD method for water flow modelling in channels and pipes*, Num. Anal. Rep. Univ. of Reading, 1993
- [8] García-Navarro, P., Vazquez-Cendon, M.E., *On numerical treatment of the source terms in the shallow water equations*, Computers & Fluids 29 (2000) 951-979, 2000
- [9] Ghidaoui, M.S., Zhao M., McInnis, D.A., Axworthy, D.H., *A Review of Water Hammer Theory and Practice*, Applied Mechanics Review, 2005
- [10] Hudson, J., *Numerical techniques for morphodynamic modelling*, 2001
- [11] Kerger, F., Archambeau, P., Erpicum, S., Dewals, B.J., Pirotton, M., *An exact Riemann solver and a Godunov scheme for simulating highly transient mixed flows*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010
- [12] León, A.S., *Improved Modeling of Unsteady Free Surface, Pressurized and Mixed Flows in Storm-sewer Systems (Dissertation)*, 2007
- [13] León, A.S., Ghidaoui, M.S., Schmidt, A.R., García, M.H., *Application of Godunov-type schemes to transient mixed flows*, Journal of Hydraulic Research, 2009
- [14] Murillo, J., García-Navarro, P., *Weak solutions for partial differential equations with source terms: Application to the shallow water equations*, Journal of Computational Physics 229, 4327–

*Bibliografía*

4368, 2010

- [15] Murillo, J., García-Navarro, P., *Augmented versions of the HLL and HLLC Riemann Solvers including source terms in one and two dimensions for shallow flow applications*, Journal of Computational Physics, 2012
- [16] Rocha Felices, Arturo, *Hidráulica de tuberías y canales*, Universidad Nacional de Ingeniería, 2007
- [17] Stoker, J.J., *Water waves*, Wiley Interscience, 1957
- [18] Toro, E.F., *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999
- [19] Trajkovic, B., Ivetic, M., Calomino, F., D'Ippolito, A., *Investigation of transition from free surface to pressurized flow in a circular pipe*, Water Science and Technology, 39(9), 105-112, 1999
- [20] Villanueva Lacabrera, Ignacio, *Simulación numérica de flujos estacionarios y transitorios en ríos y canales*, 1999
- [21] Wiggert, D., *Transient flow in free-surface, pressurized systems*, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers 98 (1)(1972) 11-26, 1972
- [22] Wixsey, J.R., *An investigation of algorithms for open channel flow calculations*, Numerical Analysis Internal Report, 21, Departament of Mathematics, University of Reading, 1990