Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Grado

La Teoría de Juegos en la toma de decisiones militares.

Autor

Andrés Zamora Beamud

Directores

Profesor Jorge Martín Morales
Teniente Coronel Jose Antonio Fernández Alfaro

Centro Universitario de la Defensa - Academia General Militar

Año 2015

En este Trabajo de Fin de Grado se expone la rama de las matemáticas conocida como Teoría de Juegos para que pueda ser entendida por un lector sin ningún conocimiento previo de la materia y, una vez explicados los fundamentos, se presentan diversos ejemplos del mundo castrense analizados a través del prisma de dicha teoría.

En primer lugar se analizan tres hechos históricos: "La quema de las naves" por Hernán Cortés al desembarcar en México en 1519; "La crisis de los misiles de Cuba", que enfrentó a los Estados Unidos y a la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas en 1962; y el conflicto entre la coalición internacional y los talibanes en Afganistán, ya en el siglo XXI.

Posteriormente se estudian decisiones militares más habituales, como la organización de un ataque a una posición defensiva enemiga.

Por último se explican algunas decisiones militares de bajo nivel, como los duelos con pistola, y se enlaza con las posibles implementaciones de modelos matemáticos en máquinas que puedan sustituir a los soldados en un futuro.

"Lo más difícil de aprender en la vida es qué puente hay que cruzar y qué puente hay que quemar"

Bertrand Russell.

ÍNDICE

Contenido adicional

1. INTRODUCCIÓN

1.1. CONTEXTO.

La toma de decisiones es uno de los problemas más importantes del ser humano. Nuestro cerebro, basándose en experiencias pasadas y sin necesidad de ningún análisis consciente, es capaz de tomar decisiones óptimas en muchos ámbitos de nuestro día a día. No obstante, existen situaciones en las que elegir entre uno u otro camino puede ser más complicado, momentos en los que "nos paramos a pensar".

Como no podía ser de otra manera, el ser humano, en su búsqueda de patrones y reglas mediante los cuales poder describir lo que percibimos como realidad, ha intentado, mediante análisis matemáticos, estudiar por qué, ante determinados conflictos, se toman las decisiones que se toman, y cuáles podrían ser las estrategias óptimas para conseguir ciertos objetivos.

Ya en la Antigüedad se teorizaba acerca de la toma de decisiones, pero no fue hasta hace aproximadamente un siglo cuando se empezó a enfocar desde un punto de vista matemático.

A dicha ciencia se la ha llamado Teoría de Juegos y es la encargada de modelar situaciones en que dos o más contendientes deban elegir la estrategia a seguir para maximizar su beneficio en una determinada situación. A estas situaciones objeto de análisis se las llama "juegos".

Debemos señalar que, aunque a lo largo del trabajo la mayoría de ejemplos analizados están relacionados con los ejércitos, lo que se entiende por conflicto forma parte de nuestro día a día. En la actualidad su principal campo de actuación es la Economía.

1.2. PROBLEMA ABORDADO.

En el ámbito de la Defensa podemos encontrar procesos de toma de decisión a todos los niveles. Desde el soldado que debe decidir si contar la verdad y recibir un arresto, o callar y sufrir la presión del grupo y cierta pérdida de honor, hasta el Jefe de Estado Mayor de la Defensa que debe decidir qué unidad es la más adecuada para arriesgar sus vidas en una determinada misión.

La toma de cualquier decisión nunca es sencilla. O mejor dicho, nunca es sencillo encontrar la estrategia óptima frente a una situación en concreto. Nos encontraremos con que casi nunca tendremos la certeza de si la línea de acción seguida ha sido la mejor y en muchos momentos quedará para siempre el *"y si…",* y el *"qué hubiese pasado si…"*

La Teoría de Juegos es una herramienta más en manos de todo aquel que se enfrente a cualquier conflicto, dilema, planeamiento… En este trabajo se pretende encontrar en que situaciones del ámbito castrense podría ser empleada.

1.3. OBJETIVO Y ALCANCE DEL TRABAJO.

Teoría de Juegos. Se tratará, en la medida de lo posible, de dar el sustento matemático básico para la comprensión de las diversas decisiones relacionadas con la Defensa que vamos a exponer y de proponer la implementación de modelos matemáticos a situaciones militares actuales, o que presumiblemente puedan ocurrir en un futuro.

1.4. ESTRUCTURA DEL TRABAJO.

En el capítulo dos de este trabajo se darán las nociones básicas de Teoría de Juegos para entender los ejemplos posteriores, así como un poco de historia para introducir al lector en esta compleja e interesante rama de las matemáticas.

En el capítulo tres se expondrán y estudiarán decisiones de Alta Defensa. En concreto se analizarán tres hechos históricos:

1º) Hernán Cortés. Quema de las naves.
2º) Crisis de los misiles de Cuba. EEUU vs URSS.
3º) Conflicto talibán en Afganistán. Coalición vs Talibanes.

En el capítulo cuatro se analiza la situación actual de los ejércitos con respecto a la toma de decisiones. Se presentan algunos ejemplos de empleo de la Teoría de Juegos para rangos intermedios, como el de planear un ataque u organizar una posición defensiva.

Posteriormente, en el capítulo cinco, se hace hincapié en las decisiones de bajo nivel y de cómo éstas podrían implementarse en un futuro próximo, basándose en las actuales líneas de investigación armamentística.

Por último, en el capítulo seis, se exponen las conclusiones extraídas de este trabajo.

Como contenido adicional se incluyen seis anexos en los que se exponen tres modelos típicos de la Teoría de Juegos, así como las biografías de célebres investigadores en este campo.

2. BASES DE LA TEORÍA DE JUEGOS

No cabe duda de que la Teoría de Juegos está presente en muchos aspectos de la vida y que resolvemos juegos continuamente en nuestro día a día sin darnos cuenta: cuando se decide si ir al bar con los amigos o quedarse estudiando, cuando se discute con la pareja si ir al cine o al futbol, etc.

Para ahondar en la materia sugiero al lector que acuda a **Anexo I, Anexo II** y **Anexo III** en los cuales se desarrollan tres de los modelos más famosos de la Teoría de Juegos, “El dilema del prisionero”, “La batalla de los sexos” y “El juego del gallina”.

2.1. ORÍGENES E HISTORIA.

La Teoría de Juegos tiene una génesis muy clara. En 1944 John von Neumann y Oscar Morgenstern publican el texto “Theory of Games and Economic Behavior” (**Anexo IV**). Podría haber quedado como un curioso artículo científico más pero, dada la fama que acompañaba a Neumann, sus análisis marcaron tendencia. El texto fue estudiado por numerosos académicos y durante las siguientes décadas no fueron pocos los matemáticos que centraron sus esfuerzos en estudiar la Teoría de Juegos. Tal fue el caso del celebré John Nash (**Anexo V**), personaje en el que se inspiró la película “Una mente maravillosa” [17].

Durante las décadas de los 80 y 90 la investigación en este campo quedó un poco estancada, la Guerra Fría arribaba a su fin y parecía que todo lo que se podía sacar de provecho en la investigación de la Teoría de Juegos ya se había extraído durante las décadas anteriores. Craso error.

El tiempo ha demostrado las importantes consecuencias de los análisis producidos durante el periodo de esplendor de la teoría y han sido entregados, tanto a finales del S.XX como en estos primeros años del S.XXI, numerosos premios Nobel de Economía y algunas medalla Fields, a matemáticos por sus investigaciones en el campo de la Teoría de Juegos, como es el caso de Nash.

Cabe señalar que en la actualidad el principal campo de actuación de la Teoría de Juegos es la economía. En 2005 recibieron el Nobel de Economía Thomas C. Scheliing y Robert J. Aumann (**Anexo VI**) por “haber ampliado nuestra comprensión del conflicto y la cooperación mediante el análisis de la Teoría de Juegos”

2.2. REPRESENTACIÓN DE LOS JUEGOS.

Forma normal:

Se usa preferentemente en las situaciones en las que los jugadores toman sus decisiones simultáneamente o, al menos, sin saber lo que ha decidido el otro.

Consta de una matriz que indica las diferentes estrategias que puede elegir cada jugador (un jugador las filas, otro las columnas). Y el cuadro que resulte de dicha intersección de estrategias muestra el pago recibido por cada uno de los jugadores para dicho resultado.

Los juegos están caracterizados por una serie de resultados en función de qué estrategias hayan elegido cada uno de los participantes. Un juego de dos participantes A y B con estrategias A1, A2, A3 para A y B1, B2, B3 para B con salidas S1,….,S9 podría representarse mediante la siguiente matriz:

		B elige estrategia		
		B1	**B2**	**B3**
A elige estrategia	**A1**	S1	S2	S3
	A2	S4	S5	S6
	A3	S7	S8	S9

Figura 2 - 1 "Representación forma normal"

Donde S1…S9 son vectores de la forma (a | b) siendo "a" y "b" las ganancias obtenidas por el jugador A y el B respectivamente, en dicha situación. A esta matriz se la conoce como "matriz de pagos".

Forma extensiva:

Se utiliza normalmente para representar juegos en los que los jugadores toman sus decisiones por turnos. Se suele emplear un esquema de árbol, y cada nodo o vértice implica que uno de los jugadores debe tomar una decisión. A partir de ese nodo partirán tantas ramas como decisiones posibles tuviese el contendiente.

Un ejemplo podría ser el siguiente:

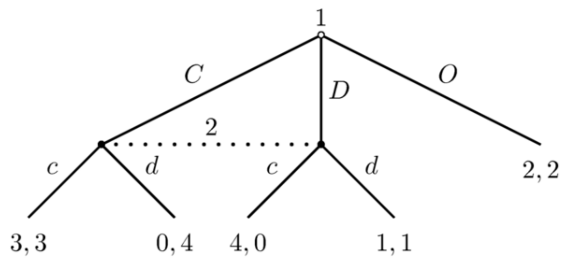

Figura 2 - 2 "Representación forma extensiva" [3]

2.3. TIPOS DE JUEGOS.

Los juegos se pueden clasificar [10] en:

"Cooperativos" y "no cooperativos":

Decimos que un juego es cooperativo cuando los jugadores pueden negociar entre ellos. En el caso típico del dilema del prisionero, donde cada preso se encuentra aislado del otro y deben tomar su decisión sin comunicarse con su compañero, estaríamos hablando de un juego no cooperativo.

"Simétricos" y "asimétricos":

Decimos que un juego es simétrico si los participantes pueden elegir entre las mismas estrategias y recibir los mismos pagos. Es decir, dada cierta estrategia para cada uno de los jugadores y su pago correspondiente, si se pueden intercambiar las estrategias de uno por otro y esto hace invertir el vector de pago, es decir, lo que ganaba uno ahora lo gana el otro, estamos hablando de un juego simétrico. Por ejemplo "Piedra, papel, tijera" es un juego simétrico.

De "suma cero" y "no suma cero":

En los juegos de suma cero el pago de los jugadores sean cuales sean sus estrategias siempre suma cero, es decir, todo lo que beneficia a uno repercute negativamente al otro en exactamente el mismo valor. El póquer y el ajedrez son ejemplos de suma cero.

El dilema del prisionero seria un ejemplo de juegos de no suma cero, en los cuales el beneficio de uno no tiene por qué repercutir negativamente en el otro jugador.

"Simultaneo" o "secuencial":

Si los jugadores eligen sus estrategias a la vez, hablamos de un juego simultaneo, si no, secuencial. La simultaneidad se puede conseguir haciendo que el último jugador en decidir no sepa que ha decidido el primero hasta que haya realizado su jugada.

"Información perfecta" o "información imperfecta":

En los juegos de información perfecta "todo lo que ves es todo lo que hay". El ajedrez es el juego de información perfecta por excelencia, los jugadores disponen de la misma información y además ésta es la máxima que pueden tener. Sin embargo, en los juegos de información imperfecta los jugadores no disponen de todos los datos, cada uno suele tener su propia información. Por ejemplo en una partida de póquer cada jugador sabe sus cartas pero no las de los rivales (le falta información).

"De repetición":

Se dice que un juego es de repetición si los contendientes van a volver a enfrentarse a la misma situación en el futuro.

Juegos de un solo jugador:

Algunos autores no consideran a estos incluidos en la Teoría de Juegos si no en la investigación operática y otros campos. Sin embargo, pueden considerarse juegos de dos jugadores si consideramos a uno de ellos "la naturaleza" contra la que se enfrenta el jugador que nos atañe.

2.4. ESTRATÉGIA MAXIMÍN.

Aunque se la conozca como "estrategia", no es una estrategia en sí misma, sino un método para decidir qué estrategia de las posibles elegir. Para mostrar cómo se desarrolla vamos a considerar un juego de suma cero en el que lo que un jugador gana lo que pierde el otro.

Cada contendiente dispone de tres estrategias posibles a las que designaremos como A, B, y C [9]. Los pagos consisten en la distribución de diez monedas que se repartirán según las estrategias elegidas por ambos jugadores y se muestran en la siguiente matriz de pagos. Las ganancias del jugador Alfa se muestran a la izquierda de cada casilla. Los pagos al jugador Beta se muestran a la derecha de cada casilla. Para cualquier combinación de estrategias, los pagos de ambos jugadores suman diez.

		Estrategia de Beta		
		A	B	C
Estrategia de Alfa	A	9 I 1	1 I 9	2 I 8
	B	6 I 4	5 I 5	4 I 6
	C	7 I 3	8 I 2	3 I 7

Figura 2 - 3 "Estrategia Maximín"

Por ejemplo, si Alfa juega la estrategia C y Beta elige su estrategia B entonces Alfa recibirá ocho monedas y Beta recibirá dos. Éste es, por tanto, un juego de suma cero, como ya hemos explicado en la sección anterior.

Para descubrir qué estrategia le conviene más a cada jugador, vamos a analizar la matriz que indica los pagos de Alfa, la de color verde, y posteriormente procederemos de forma análoga con la matriz de pagos de Beta, color rosa.

Una forma de analizar el juego para tomar la decisión consiste en mirar cuál es el mínimo resultado que se puede obtener con cada una de las estrategias. En la siguiente se marcan en rojo los resultados mínimos de cada estrategia.

<u>Matriz de pagos de Alfa</u>

		Estrategia de Beta		
		A	B	C
Estrategia de Alfa	A	9	1	2
	B	6	5	4
	C	7	8	3

Figura 2 – 4 "Estrategia Maximín. Pagos de Alfa"

Vemos que:
1) Si yo elijo la estrategia A, puedo obtener 9, 1 o 2, luego como mínimo obtendré un resultado de 1.
2) Si elijo la estrategia B, puedo obtener 6, 5 o 4, luego como mínimo obtendré 4.
3) Si elijo la estrategia C, puedo obtener 7, 8 o 3, luego como mínimo obtendré 3.

De todos esos posibles resultados mínimos, el que prefiero es el 4 ya que es el máximo de los mínimos. Siguiendo la estrategia Maximín el jugador Alfa elegiría la estrategia B ya que le garantiza que, como mínimo, obtendrá 4.

¿Se puede prever la estrategia del otro jugador? Supongamos que Beta quiere elegir también su estrategia Maximín. Mostramos ahora sólo los pagos asignados al otro jugador en los que destacamos en azul el pago mínimo que puede obtener para cada una de sus estrategias.

Matriz de pagos de Beta

		Estrategia de Beta		
		A	B	C
Estrategia de Alfa	A	1	9	8
	B	4	5	6
	C	3	2	7

Figura 2 – 5 "Estrategia Maximín. Pagos de Beta"

Se observa que:
1) Si él elige A, su peor resultado sería si Alfa elije A con lo que obtendría 1.
2) Si él elige B, su peor resultado sería si Alfa elije C con lo que obtendría 2.
3) Si él elige C, su peor resultado sería si Alfa elije B con lo que obtendría 6.

Su estrategia Maximín le insta por tanto a jugar la estrategia C con lo que se garantiza que, al menos, obtendrá 6.

Éste es un juego con solución estable. Ninguno de los jugadores siente la tentación de cambiar de estrategia. Supongamos que se empieza a repetir el juego una y otra vez. Alfa jugará siempre su estrategia Maximín (B) y Beta jugará siempre su estrategia Maximín (C). Cada uno sabe lo que jugará el otro la siguiente vez. Ninguno estará tentado de cambiar su estrategia ya que el que decida cambiar su estrategia perderá.

A dicho resultado en el que coinciden las estrategias Maximín de ambos jugadores se le llama punto de silla.

Sin embargo, no todos los juegos tienen un punto de silla, una solución estable. La estabilidad del juego anterior desaparece simplemente cambiando la casilla BB por la BC y viceversa:

		Estrategia de Beta		
		A	B	C
Estrategia de Alfa	A	9 I 1	1 I 9	2 I 8
	B	6 I 4	4 I 6	5 I 5
	C	7 I 3	8 I 2	3 I 7

Figura 2 – 6 "Ejemplo sin estabilidad"

En esta nueva tabla la estrategia Maximín de Alfa sigue siendo B y la estrategia Maximín de Beta sigue siendo la C. Pero la solución ahora ya no es estable. Si jugamos repetidas veces y Alfa repite su estrategia Maximín, B, el otro estará tentado a cambiar su estrategia, pasando de la C a la B con lo que obtendrá un pago mayor, 6 en vez de 5.

Claro que si Beta empieza a elegir sistemáticamente la estrategia B, Alfa preferirá cambiar su estrategia a la C para así obtener 8. Y entonces Beta querrá volver a su estrategia C y así sucesivamente. El juego se desarrollará por las cuatro casillas sombreadas.

Cuando se repiten juegos que no tienen solución estable interesa utilizar estrategias mixtas. Las estrategias mixtas consisten en asignar a cada una de las estrategias una probabilidad. En el juego que estamos analizando una estrategia mixta podría describirse de la forma siguiente: "Para elegir la estrategia a emplear se lanza un dado. Si el dado muestra un 1, se elegirá la estrategia A; si el dado muestra un 2 o un 3, se elegirá la estrategia B; si el dado muestra un 4, un 5 o un 6, se elegirá la estrategia C". En otras palabras, se elegirá A con una probabilidad de 1/6, B con una probabilidad de 1/3 y C con una probabilidad de 1/2. No vamos a entrar a analizar en profundidad las estrategias mixtas.

"***Teorema del Maximín*** *[7][3] afirma que en todo juego de dos participantes, de suma cero y en el que sea posible jugar estrategias mixtas además de las puras, las estrategias Maximín de cada jugador coincidirán siempre en una solución estable, un punto de silla*." Este teorema fue demostrado matemáticamente por John von Neumann en un artículo publicado en 1928, marcando las bases para sus futuros estudios junto a Morgenstern.

2.5. PUNTOS DE EQUILIBRIO. EQUILIBRIO DE NASH.

El joven John Nash era un matemático brillante que se dedicó a estudiar la Teoría de Juegos, siguiendo la estela de su admirado John von Neumann. Tuvo la idea de que todos los juegos podrían analizarse basándose en un sencillo concepto: el punto de equilibrio. Ocurre que los juegos de suma cero se pueden resolver de una manera relativamente simple. Basta con seguir una estrategia Maximín que, como hemos visto en el apartado anterior, consiste en comparar los peores resultados que podemos obtener con cada estrategia y elegir aquella en la que dicho resultado sea mejor que los demás. Esto se puede interpretar como una estrategia prudente o, incluso, paranoica. Como el juego es de suma cero, tiene sentido suponer que el contrincante intentará buscar nuestro mayor perjuicio. En otros juegos la paranoia no es de rigor.

Como ya hemos visto, jugando razonablemente se puede llegar a un punto en el que nadie quiere hacer otra cosa. Esto hace de la Teoría de los Juegos de suma cero una teoría bastante completa. Tenemos una historia de cómo llegar al equilibrio (jugando la estrategia prudente) y una historia de por qué no se sale de él (el que se desvía, pierde).

Para definir su punto de equilibrio, Nash extendió esta idea del equilibrio como agujero negro (aquel punto del que, una vez en él, no se sale) a todos los juegos [8]. El problema es que falta la historia de cómo se llega a él. Si sólo hay un equilibrio en el juego, los jugadores racionales podrán anticipar lo que harán los demás y el resultado solo podrá ser el equilibrio de Nash. Pero para juegos con múltiples equilibrios el problema de selección ha abierto multitud de estudios que todavía no han dado una solución última (ni se espera que la den).

Nash recibió el premio Nobel, no solo por su definición de equilibrio, sino por su teorema de existencia, por su propuesta de solución del juego cooperativo de negociación, y por abrir y avanzar en una línea de investigación consistente en encontrar el juego no cooperativo que pueda estar detrás de una propuesta de solución para un juego cooperativo. Cada uno de los pocos artículos publicados en estos tres temas es un ejemplo de genialidad y elegancia. Por desgracia, poco después la esquizofrenia pudo con él. Afortunadamente, es uno de los pocos casos en los que, después de muchos años de sufrimiento de la enfermedad, se produce una recuperación.

El Nobel no se le otorgó hasta que el comité estuvo seguro de que podría ir a recogerlo en buenas condiciones de salud.

Veamos un ejemplo sencillo de un juego y de sus equilibrios de Nash [11], [15]: Se cruzan dos coches en una carretera. ¿Hacia qué lado se apartarán para no chocarse? Si cada uno va por su derecha, problema resuelto. También si cada uno va por su izquierda. Ambas situaciones son equilibrios. Lo que no es un equilibrio es que cada uno vaya por un lado. Alguno de los dos se arrepentirá y querrá hacer otra cosa.

Podemos representar el juego con la siguiente matriz:

		Conductor 2	
		Izquierda	**Derecha**
Conductor 1	**Izquierda**	1 | 1	0 | 0
	Derecha	0 | 0	1 | 1

Figura 2 – 7 "Equilibrio de Nash. Conductores"

Los números pueden ser entendidos como las ganancias de los conductores: Cero, si van por lados distintos, con el riesgo de accidente; uno, si van por el mismo lado, evitando un susto.

Si los conductores tuvieran más simpatías por un lado de la calzada que por el otro, por ejemplo, porque fuera más fácil conducir por el lado derecho que por el izquierdo podríamos sustituir el juego anterior por este otro:

		Conductor 2	
		Izquierda	**Derecha**
Conductor 1	**Izquierda**	1 | 1	0 | 0
	Derecha	0 | 0	2 | 2

Figura 2 – 8 "Equilibrio de Nash. Conductores con preferencia"

Sin embargo, en este nuevo juego, conducir ambos conductores por la izquierda sigue siendo un equilibrio. Si uno va por la izquierda, el otro no gana nada, pierde mucho, si se empeña en ir él solo por la derecha.

3. EJEMPLOS HISTÓRICOS. DECISIONES DE ALTA DEFENSA.

Ya se ha visto la utilidad que puede tener un análisis matemático a la hora de enfrentarse a ciertas decisiones. Así pues, parece lógico que los ejércitos y los servicios de inteligencia dediquen una parte de su tiempo de planeamiento a modelar los distintos juegos a los que se enfrentan.

Ahora que conocemos las bases teóricas vamos a exponer algunos ejemplos del ámbito de la Defensa.

3.1. QUEMA DE LAS NAVES POR HERNÁN CORTÉS.

Uno de los ejemplos históricos relacionados con la teoría de juegos y los ejércitos que más llama la atención es el caso de la quema de los barcos del ejército de Hernán Cortés, antes de lanzarse al ataque de los aztecas liderados por Moctezuma. Cortés intuía que si sus soldados tenían la certeza de que los barcos les esperaban para huir si la batalla no iba adecuadamente, lucharían con menos ahínco. Por el contrario, si sabían que no había vía de retirada posible, lucharían encarnizadamente sabiendo que si no vencían, morirían.

Por supuesto Cortés no tomó la decisión de quemar sus navíos basándose en arduos análisis matemáticos. Simplemente guiándose por su intuición y experiencia tomo una decisión que incrementaba sus posibilidades de victoria. Podemos decir que eligió una estrategia que le permitió afrontar el juego contra los aztecas con una matriz de pagos más favorable.

Pongamos en contexto el juego:

En 1519 Hernán Cortés parte de Cuba con 11 naves, 518 infantes, 16 jinetes, 13 arcabuceros, 32 ballesteros, 110 marineros y unos 200 auxiliares de tropa, 32 caballos, 10 cañones de bronce y 4 falconetes [15]. Desembarca en la costa mexicana y funda Veracruz. Allí sabe de la existencia de un imperio en el interior con capital en Tenochtitlán y se lanza a su conquista. El resultado de la empresa es incierto. La viruela, las armas de fuego y las espadas de acero, junto con la complicidad de algunos pueblos indígenas, ayudan, pero nadie sabe qué pasará cuando se llegue ante el ejército de Moctezuma.

Si las cosas se presentan duras, siempre es posible una retirada. Pero Cortés se dio cuenta de algo muy simple, si la retirada es una opción agradable para la tropa, tal vez no peleen con todas su fuerzas. Por tanto, la estrategia de Hernán Cortés para aumentar sus posibilidades de victoria fue quemar las naves para forzar a sus hombres a combatir. Ahora todo el ejército sabe que, o ganan la batalla, o morirán.

A continuación se expone un posible análisis matemático de la situación:

Estimemos que la victoria supone beneficios por valor de 10 a la tropa si se consigue sin esfuerzo y de 7 si se consigue con esfuerzo. La retirada produce un beneficio de 4. Por otro lado, la derrota se produce con probabilidad 1/2 si el esfuerzo es poco y con probabilidad 1/5 si el esfuerzo es alto. La derrota significa la muerte (beneficio 0) si no hay huida posible. Estudiemos las distintas posibilidades.

Con las naves listas para la retirada en caso de necesidad, y si la tropa hace esfuerzo bajo, tendrá una recompensa de:

$$\frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{2} \times 4 = 7$$

Si, en cambio, se esfuerza, obtendrá:

$$\frac{4}{5} \times 7 + \frac{1}{5} \times 4 = 6{,}4$$

Bajo estas circunstancias la decisión para la tropa es clara: mejor no esforzarse.

Pero, sin las naves, las consecuencias varían sustancialmente. Con esfuerzo se obtiene:

$$\frac{4}{5} \times 7 + \frac{1}{5} \times 0 = 5{,}6$$

Mientras que sin esfuerzo el resultado es:

$$\frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{2} \times 0 = 5$$

Mostremos como podría ser una representación del juego en forma extensiva:

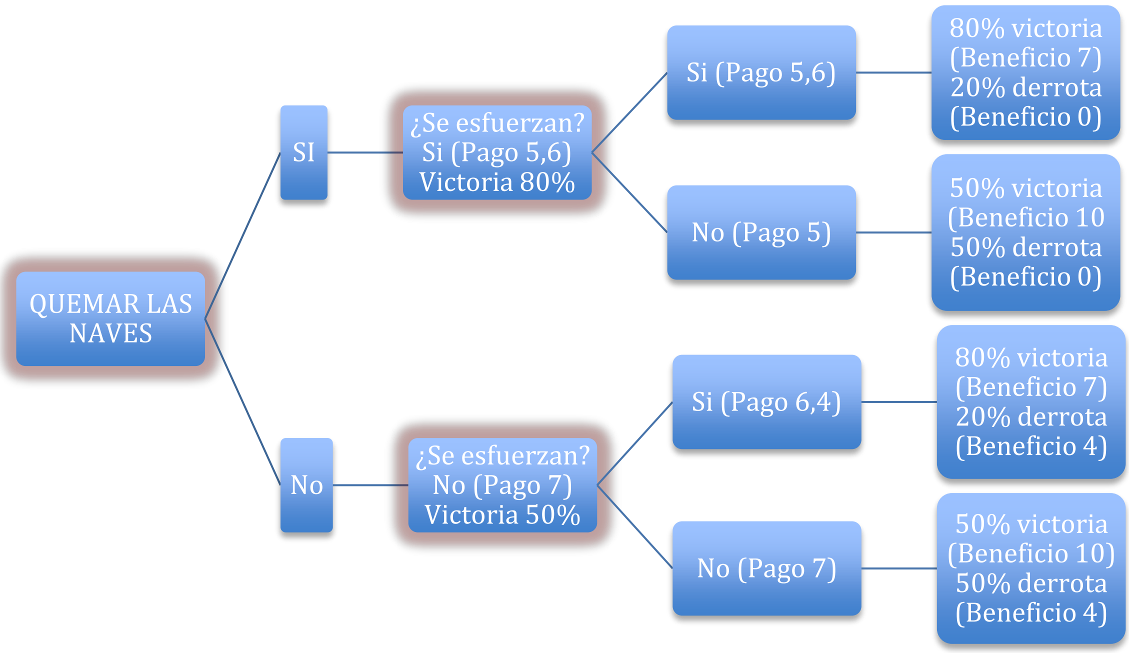

Figura 3 – 1 "Árbol de decisión. Quema de las naves"

Se observa que la tropa disminuye su pago máximo cuando se queman los navíos, pero también cambia su estrategia óptima de "No esfuerzo" por la de "Esfuerzo" y, por tanto, se pasa de una probabilidad de victoria del 50% a una del 80%.

Analizando la situación de forma parecida a como se ha hecho aquí, Hernán Cortés decidió quemar sus barcos. No le importaba perder unos cuantos de sus soldados en su empeño de conquistar a los aztecas. Consideró que el mejor plan para el conjunto del ejército era maximizar las probabilidades de victoria. Cosa que en primera instancia repercute negativamente en el beneficio individual de la tropa, pero, una vez quemados los barcos, a ésta no le quedaba más que esforzarse.

Parece que en ocasiones la disciplina y la lealtad no son suficientes para que los militares se esfuercen y se necesita acudir a las matemáticas.

3.2. CRISIS DE LOS MISILIS DE CUBA.

En plena Guerra Fría, año 1962, la URSS, en contestación a los euromisiles desplegados al este de Europa por EEUU para disuadir a los rusos de realizar operaciones militares, empezaron a desplegar misiles de largo alcance en Cuba, los cuales tenían la capacidad de llegar hasta Washington. Recordemos que Cuba era afín al régimen soviético. Los EEUU no podían permitir aquella amenaza a escasos cientos de kilómetros de su costa [16].

No sabían si los misiles desplegados en Cuba se encontraban ya en disposición de iniciar un ataque a territorio americano, pero cargueros rusos seguían llegando a la isla con más armamento. Kennedy se encontraba en la tesitura de si ordenar un bloqueo naval a dichos barcos rusos o no.

Si se efectuaba el bloqueo podría darse el caso de que la URSS no lo respetase. En esa situación, los americanos, si querían conservar la credibilidad de sus amenazas, hubiesen tenido que atacar a los navíos soviéticos. Esto podría haber desencadenado una represalia soviética que, dada la potencia de las armas nuclearas, podría haber tenido consecuencias catastróficas.

Sería plausible pensar, ¿por qué no atacaron y destruyeron directamente a la URSS con sus armas nucleares? La respuesta es simple. No se hizo porque se pensaba que los soviéticos podrían sobrevivir a ese ataque el suficiente tiempo como para iniciar una réplica nuclear sobre los Estados Unidos.

Cuando se emplearon las primeras armas nucleares en 1945, sobre territorio nipón, no existía la posibilidad por parte del ejército japonés de iniciar un contraataque contra los Estados Unidos. Pero ahora la situación había cambiado. Ambos contendientes le guardaban el debido respeto a estas armas de destrucción masiva.

Este es el escenario con el que tuvieron que lidiar tanto la administración Kennedy desde Washington como la de Kruschev desde Moscú. Una situación crítica que podría haber desencadenado lo que se conocía como la "Destrucción Mutua Garantizada".

Analicemos primero las preferencias de los EEUU:

1º) La resolución más beneficiosa para los americanos sería el no iniciar acciones hostiles. Permitir, en una primera instancia, que los soviéticos sigan desplegando sus cohetes, pero que estos decidan replegarlos siendo conscientes de la escalada de tensión que están propagando y temiendo un ataque nuclear.

En esta situación los EEUU quedarían como los pacifistas, los "buenos" de cara a la opinión pública, y la URSS como la potencia hostil y además débil, ya que en el momento decisivo cambiaron su estrategia y se replegaron.

2º) El segundo mejor resultado sería el de iniciar un bloqueo naval y que los soviéticos lo respetasen y retirasen sus barcos y sus misiles. Reforzarían su poderío. La URSS no se atreve a plantar cara y parece que el conflicto se resuelve con una victoria americana.

3º) Los EEUU inician un bloqueo naval y la URSS no lo respeta. Es una situación crítica pero al menos ya están preparados para las acciones bélicas al tener sus navíos desplegados y listos para hacer fuego a los barcos soviéticos y las posiciones de los misiles en Cuba.

4º) Permiten que la URSS siga con sus planes y la URSS se reafirma en su estrategia y persiste en el despliegue de misiles. Los EEUU parecerían temer a la URSS, al no plantarle cara y, además, si los soviéticos deciden iniciar un ataque, los americanos van a tener que afrontar el inicio del conflicto a la defensiva.

Veamos ahora las preferencias de la URSS:

1º) Seguir desplegando cohetes y que los americanos lo permitan. Mostrarían su poderío. No temen a los EEUU y parece que los EEUU sí que les temen a ellos.

2º) Replegar los misiles por iniciativa propia, es decir, sin que los americanos se pronunciasen en contra e iniciasen un bloqueo naval. Seguramente en esta situación conseguirían un trato diplomático en secreto. Como podría ser que EEUU hiciera lo propio con los Euromisiles. Repliegan los misiles sin que EEUU se lo pida oficialmente, pueden justificar su cambio de estrategia en el bien común. No quieren ser ellos los que provoquen una guerra que sería catastrófica para ambos bandos.

3º) Replegar misiles y barcos tras un bloqueo naval estadounidense. Parecería que quien lleva la batuta en el conflicto son los EEUU y los soviéticos les temen. Aun así, es preferible esto a iniciar un conflicto con armas nucleares.

4º) Seguir posicionando misiles en Cuba a pesar del bloqueo naval estadounidense. Aunque demostrarían que no temen a los EEUU esto desencadenaría muy probablemente un conflicto armado. Al haber iniciado los americanos el bloqueo, ya están preparados para el combate. La URSS también podrá causar daño a los EEUU, y tiene los cohetes apuntando a territorio americano, pero sabe que las consecuencias de iniciar ese ataque son imprevisibles.

Nos encontramos ante un juego de dos jugadores, con dos estrategias cada uno, cooperativo, de no suma cero, asimétrico y de información imperfecta.
Realizado el anterior análisis tendríamos una matriz de pagos como la siguiente:

Crisis de los misiles.
(Orden de preferencia)

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Estrategias URSS</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Seguir posicionando cohetes en Cuba</td><td>Replegar misiles y barcos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Estrategias EEUU</td><td>Permitir que desplieguen los cohetes</td><td>4 | 1</td><td>1 | 2</td></tr>
<tr><td>Iniciar un bloqueo naval</td><td>3 | 4</td><td>2 | 3</td></tr>
</table>

Figura 3 – 2 “Crisis de los misiles. Orden de preferencia”

A la vista de estos análisis, el lector, docto ya en estrategia Maximín, podrá imaginar cual es el resultado más probable. Pero estudiémoslo desde un punto de vista más coloquial, como si fuésemos Kennedy y un hipotético asesor:

“Mientras permita que sigan desplegando misiles, estos malditos soviéticos van a seguir haciéndolo. No han movilizado toda esto para replegarse por las buenas….No podemos permitirlo pero, ¡maldita sea! Si iniciamos un bloqueo naval, ¡estaremos dándoles motivos para iniciar un conflicto que podría acabar con todo lo que conocemos!”

“Señor presidente, si me permite…”.

“¿Eh? ¿Quién eres? Ah, sí. El matemático. Dime Neumann, qué pasa”.

“Mire, tras años estudiando modelos típicos de decisión, creo que nos encontramos ante una situación Halcón-Paloma, o del gallina, si lo prefiere”.

“Qué está diciendo Neumann, explíquese”.

“Tenemos que hacer creer a nuestro adversario que no vamos a cambiar de rumbo, en este caso, que no tememos un conflicto, que si se empeñan iniciaremos una guerra y la ganaremos”

“¿Está usted loco? ¿Cómo que la ganaremos? ¡Sufriríamos incalculables pérdidas!”

“Señor, no hace falta que la vayamos a ganar, basta con que piensen que nosotros lo creemos así”

“Mmmm… ¿Entonces qué propone? ¿Qué iniciemos un bloqueo naval?”

“Sí señor, y que desde ahora en adelante todas nuestras comunicaciones muestren que no nos da miedo atacar a los soviéticos e iniciar un conflicto, somos los Estados Unidos de América, y si la URSS se empeña en poner sus misiles en Cuba no dudaremos de emplear la fuerza contra ellos, ¡que se extienda esa idea y los rusos la creerán! Y, razonablemente, ¡replegaran sus barcos!”.

Ésta es una conversación inventada pero la que se debió vivir en la Casa Blanca no creo que difiriese mucho de lo aquí narrado. Teniendo en cuenta que fue exactamente eso lo que ocurrió, el análisis de la situación aquí expuesto debe ser parecido a lo que pensaron los contendientes en aquel momento. Se inició un bloqueo naval y los soviéticos dieron media vuelta con sus barcos y desmantelaron sus misiles.

Una vez más vemos la utilidad de un análisis matemático para tomar decisiones. Es cierto que no es imprescindible, pero no cabe duda de que el conocimiento de modelos de decisión típicos puede facilitar la elección de estrategia y las medidas a tomar para que la situación se resuelva a nuestro favor.

" *La esencia de la decisión final permanece oculta para el observador y, a menudo, incluso para el propio decisor”*

John F. Kennedy.

3.3. CONFLICTO TALIBÁN EN AFGANISTÁN.

Lo que sigue es otra simple muestra de cómo puede ayudar el conocimiento de la Teoría de Juegos, incluso a nivel rudimentario, en las guerras actuales [5].

Consideremos una situación en la que:
1º) Los poblados Afganos deben elegir entre apoyar a la coalición o apoyar a los talibanes.
2º) Los poblados están aislados. No se comunican entre ellos antes de tomar su decisión.
3º) A pesar de no poder comunicarse, las decisiones de un poblado repercuten en el pago de los poblados vecinos.

Así pues, cuando un poblado decide apoyar a la coalición, esto repercute en el juego con un beneficio público (para todos los poblados) de "B". No obstante, incurre en un coste privado (se convierte en objetivo primordial de los talibanes) de "c".

Por otro lado, si un poblado decide apoyar a los talibanes, se genera un coste público de "C". Y obtienen un beneficio privado de "b" (los talibanes no les atacarán).

Dadas estas condiciones, considerando dos poblados cercanos, nos encontramos una matriz de pagos como la siguiente:

		Pueblo Norte	
		Apoyar a la coalición	**Apoyar a los Talibanes**
Pueblo Sur	**Apoyar a la coalición**	2B-c | 2B-c	B-c-C | B+b-C
	Apoyar a los Talibanes	B+b-C | B-c-C	b-2C | b-2C

Figura 3 - 3 "Conflicto en Afganistán. Modelo"

Variables y valores supuestos para explicar la situación:

	Variables	**Valores**
Beneficio público	B	6
Coste privado	c	8
Coste público	C	6
Beneficio privado	b	8

Figura 3 - 4 "Asignación de valores al Conflicto de Afganistán"

Con los valores asignados tendríamos la siguiente matriz de pagos:

		Pueblo Norte	
		Apoyar a la coalición	Apoyar a los Talibanes
Pueblo Sur	Apoyar a la coalición	4 | 4	-8 | 8
	Apoyar a los Talibanes	8 | -8	-4 | -4

Figura 3 - 5 "Conflicto en Afganistán con valores numéricos"

Aplicando el equilibrio de Nash se observa como el juego tiende a la casilla inferior derecha, es decir, ambos pueblos apoyarán a los Talibanes.

¿Son todos estos poblados Afganos tan "malos"? ¿Debemos tratarles como terroristas y destrozar el pueblo al completo? Podría ser una estrategia pero, si analizamos bien la situación basándonos en la Teoría de Juegos, nos puede resultar más fácil focalizar y resolver el problema.

La Teoría de Juegos nos dice que en las condiciones actuales los poblados tenderán a apoyar a los talibanes simplemente porque dadas las condiciones actuales es "lo más racional". Los talibanes están jugando este juego con ventaja.

¿Significa esto que está todo perdido? Las matemáticas han hablado, ¿no se puede hacer nada al respecto? Por supuesto que sí.

La situación modelada nos ha servido para darnos cuenta de cuál es el problema real y en qué aspectos debemos empeñar nuestros esfuerzos para conseguir nuestros objetivos.

A la vista del análisis surgen dos líneas principales de acción:

1º) Conseguir que el beneficio público de apoyar a la coalición sea más grande y el coste privado más pequeño. Esto podría conseguirse estableciendo puestos militares que proporcionen seguridad contra las posibles represalias de los talibanes, crear infraestructuras para mejorar la vida del poblado, carreteras que conecten los diversos poblados que facilite el comercio…

2º) Que la situación "Apoyar talibanes, Apoyar talibanes" no sea un punto de equilibrio o, al menos, no el único. Esto se consigue haciendo que el juego pase a ser cooperativo, es decir, que los poblados hablen entre ellos y confíen unos en otros. Hacerles entender la situación ya que si se dejan llevar por la desconfianza y no cooperan, terminarán en una situación "Apoyar talibanes y Apoyar talibanes" que es peor para ambos que "Apoyar coalición y Apoyar coalición".

Cabe señalar que se podrían plantear otras estrategias a seguir, como "la del escarmiento" que podría basarse en aniquilar completamente a todo poblado que apoye a los talibanes, ya que en ese caso el beneficio particular de apoyar a los talibanes sería nulo o negativo.

Esta estrategia tiene la componente negativa de que sería ampliamente cuestionada por la opinión pública. Conseguirían que los poblados apoyasen a la coalición simplemente por el miedo a la represalia, más o menos lo mismo que en la situación inicial hacía que los poblados apoyasen a los talibanes. Esta situación repercutiría negativamente en su imagen lo que podría tener consecuencias perniciosas en el futuro. Por eso esta estrategia no suele emplearse en la actualidad.

4. LA TEORÍA DE JUEGOS EN LOS EJÉRCITOS ACTUALES.

4.1 APLICACIONES EN LAS UNIDADES DEL EJÉRCITO.

Como era de esperar, y como se ha podido comprobar tras investigar el día a día en unidades del ejército, la Teoría de Juegos no suele ser muy usada. Los soldados no suelen encontrarse en situaciones de proponer juegos, sin embargo sí que pueden ser "peones" de decisiones tomadas por sus mandos.

No obstante, cualquier militar se puede encontrar, como cualquier otra persona en otra profesión, con típicos juegos del estilo:

-Dilema del prisionero: Dos tenientes son sospechosos de perder unas gafas de visión nocturna. Si uno de los dos aporta pruebas de la culpabilidad del otro quedará exento de castigo, si no, ambos serán castigados.

-Dilema del Gallina: tras una riña causada por un partido de fútbol en la hora de formación física, dos militares se citan para pelearse en la parte trasera y poco visible del edificio de la cantina. Ambos saben que se pueden meter en un buen lio pero ya se ha creado expectación y si alguno no acude a la cita quedará como un "gallina".

Estos son unos simples ejemplos hipotéticos. No se va a entrar en más detalle pues ya se ha explicado la lógica de dichos modelos.

Al subir en el escalafón militar nos encontramos con que, aparte de los juegos de escalones inferiores, se empiezan a presentar otros de carácter más estratégico. Esto es debido a que, normalmente, un mayor rango conlleva una toma de decisiones más importante a nivel militar.

Es observable como en los niveles bajos predomina la técnica sobre la estrategia. En estos casos se trata de mejorar los resultados mediante la investigación operativa, la cual tiene su propio organismo en las Fuerzas Armadas. Recordemos que algunos autores incluían a la investigación operativa como un tipo de juegos de un solo jugador (contra la naturaleza). Sin embargo, la Teoría de Juegos no cuenta con su propia institución investigadora ya que se relaciona demasiado con decisiones trascendentales para la estrategia global del ejército. Esas decisiones son tomadas por altos mandos, no pueden ser relegadas a un hipotético "Instituto militar de Teoría de Juegos".

De cualquier manera, dichos altos mandos toman sus decisiones basándose en multitud de informes realizados por sus analistas, los cuales, en muchos casos, son matemáticos versados en la resolución de conflictos.

Ejemplos expuestos en apartados previos del trabajo ya muestran decisiones de alto nivel, en el siguiente punto trataremos un juego típico de mandos intermedios, organizar un ataque contra una posición defensiva enemiga.

4.2 PLANEAMIENTO DE UN ATAQUE.

Se está planeando un ataque aereo [1], [4], [12] . El objetivo es destruir dos bases enemigas. Una contiene 2/3 de los recursos enemigos y la llamaremos A, la otra 1/3 y la llamaremos B.

Se dispone de dos aviones de combate. Se sabe que si uno de los aviones alcanza una de las bases, ésta será totalmente destruida.

Según los informes de inteligencia, el defensor cuenta con dos misiles antiaéreos que le aseguran un 100% de precisión contra nuestros aviones. El defensor debe decidir que base defenderá cada uno de sus misiles, pero el atacante no dispone de esa información.

Se debe tener en cuenta que:

1) Si una base no esta defendida o si se envian dos aviones a una base que cuenta con un solo misil, el ataque tendrá éxito y la base será destruida.

2) Si una base cuenta con un número de misiles igual o superior al numero de aviones enviados a dicha base, la defensa tiene éxito y todos los recursos son salvados.

3) El objetivo es destruir el mayor número de recursos enemigos.

Ataque aéreo
(pagos del atacante)

		DEFENSOR		
		Misiles en A	**Uno en cada**	**Misiles en B**
ATACANTE	**Dos aviones A**	0	2/3	2/3
	Uno a cada	1/3	0	2/3
	Dos aviones B	1/3	1/3	0

Figura 4 - 1 "Ataque aéreo"

Se trata de un juego de suma cero, no cooperativo, con dos jugadores, simultáneo y de información imperfecta. Al ser de suma cero basta con analizarlo desde el punto de vista de las ganancias de uno de los jugadores, en nuestro caso el atacante.

No existen equilibrios, ni posibilidad de uso de la estrategia Maximín. En un principio puede parecer que la mejor opción sería enviar dos aviones contra la base A, el objetivo de mayor valor, pero el defensor puede tener emplazados sus dos misiles en A y no se ganaría nada.

Las soluciones óptimas a este tipo de juegos, en los que no existen puntos de equilibrio suelen ser estrategias mixtas. En las siguientes líneas cuando se habla de estrategias se consideran tanto las puras como las mixtas. Aunque es relativamente sencillo resolver estos juegos a mano, existen recursos en línea que pueden facilitarnos la obtención de las soluciones para juegos de suma cero simplemente introduciendo los datos de la matriz de pagos. En este caso se ha usado el recurso alojado en http://www.zweigmedia.com/RealWorld/gametheory/games.html y se han obtenido las siguientes conclusiones:

1º) La estrategia óptima para el atacante consiste en dirigir sus dos aviones contra el objetivo de menor valor con una probabilidad de 4/7, un avión contra cada base con una probabilidad de 2/7 y atacar el objetivo de mayor valor con una probabilidad de 1/7.

2º) El defensor colocará los dos misiles en la base de mayor valor con una probabilidad de 4/7, los repartirá con una probabilidad de 2/7 y los emplazará a ambos en la base de menor valor con una probabilidad de 1/7.

El resultado de este juego si ambos siguen sus dos estrategias óptimas es:

$$\left(\frac{4}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{42}{147} = \mathbf{\frac{2}{7}}$$

Se ha multiplicado la probabilidad de los sucesos que hacen que se consiga destruir un objetivo por el valor del objetivo en cuestión. Por ejemplo el primer término se refiere a la probabilidad de que el atacante lance sus dos aviones contra la base de menor valor (4 / 7), unido a la probabilidad de que haya menos de dos misiles protegiéndola y, por tanto, pueda ser destruida, (6 / 7) y al valor que supondría destruir esa base en cuestión (1 / 3).

Suponiendo que este juego es de repetición, si el defensor se sale de su estrategia óptima, el atacante siempre podrá encontrar una estrategia que le permita obtener más de 2/7 de ganancia.

Desde el punto de vista opuesto, si el atacante se desvía de su estrategia óptima, el defensor podrá encontrar una estrategia que le permita reducir el pago del atacante a menos de 2/7.

El fallo en este tipo de situaciones es el pensar que se trata de una situación aislada. Durante un conflicto armado cualquier bando se enfrenta a situaciones de este tipo en numerosas ocasiones, haciendo de este juego uno de repetición. Los estadistas y analistas de cualquier bando pueden estudiar con cuanta frecuencia emplea el rival cada estrategia y extraer inteligencia de esos datos.

En la situación del ejemplo anterior, los oficiales de un determinado ejército pueden tener demasiada predisposición a "repartir esfuerzos" porque se les ha inculcado durante su formación militar que "divide y vencerás" y, en ese caso, usarían la estrategia de dirigir un avión contra cada objetivo con mayor probabilidad que 2/7 (lo cual es lo óptimo).

Sabiendo eso, para el defensor sería fácil ajustar su estrategia y conseguir que el beneficio del atacante sea menor que 2/7, el pago que se obtiene cuando ambos usan sus estrategias óptimas.

5. APLICACIONES DE BAJO RANGO E IMPLEMENTACIONES FUTURAS.

5.1 APLICACIÓN A DECISIONES DE BAJO NIVEL.

En el ambiente actual de las unidades militares, donde solo se presentan conflictos de bajo nivel, no es de demasiada importancia la Teoría de Juegos.

A este nivel la valoración de los factores es muy subjetiva y por tanto el resultado del análisis también. En estos casos el instinto humano y la experiencia adquirida son mucho mejores métodos para tomar decisiones. Sin necesidad de cálculos matemáticos y en cuestión de segundos.

Sin embargo, el análisis de Juegos podría llegar a ser muy útil en un futuro en el que las máquinas cobren más relevancia en los ejércitos y deban empezar a tomar decisiones militares simples, tales como: cuando disparar, a quien disparar, que posición adoptar, etc.

En la actualidad, al soldado no le sirven de mucho estas ayudas matemáticas pero, en un futuro no muy lejano, en el que cada vez más miembros del ejército sean sustituidos por robots (principalmente aquellos puestos más mecánicos que no impliquen tomar decisiones de mando), los modelos matemáticos de la teoría de juegos sí que podrían resultar muy útiles. En el apartado siguiente daremos un ejemplo.

5.2 DUELOS CONSIDERANDO LA DISTANCIA Y LA PUNTERÍA.

La Teoría de Juegos también puede ser utilizada para analizar situaciones en las que alguno de los parámetros de la situación varíe durante el desarrollo del juego. Por ejemplo duelos con armas de alcance en las que los contendientes se acercan uno al otro, incrementándose su probabilidad de acierto al disparar su arma [4], [12].

Si se dispara pronto la probabilidad de acierto no es muy alta pero si se acierta ya se habrá ganado el juego, el contrincante muere. Sin embargo, si se falla, y solo se contaba con un cartucho, el contrincante esperará hasta que esté a una distancia en la que su probabilidad de acierto sea 1, y ganará el juego. El juego se complica al tener en cuenta el número de cartuchos que tenga cada jugador y sus respectivas punterías.

A continuación se va a analizar el caso más básico, en el que cada jugador dispone de una sola bala.

Consideremos que el combatiente A y el combatiente B se encuentran a una distancia $d=1$ al iniciarse el duelo. Llamemos $a(d)$ y $b(d)$ a las funciones que describen la precisión de A y B en función de la distancia al objetivo, así pues, $a(0.5) = 0.8$ significaría que la probabilidad que tiene A de impactar a B si dispara a la mitad de la distancia inicial es del 80%. Ambos jugadores saben que el rival solo tiene un cartucho, por tanto, si el que dispara primero falla, el otro combatiente ganará el juego, ya que se seguirá acercando hasta que su probabilidad de impacto sea de 1.

Sabiendo todo esto, ¿cuándo es el mejor momento para disparar? Si se hace demasiado pronto es más probable que se falle y, al fallar, el rival solo tiene que esperar y disparar cuando su precisión sea máxima. Si uno espera mucho, el rival puede disparar y batirle.

Estudiemos la situación del jugador A para una distancia cualquiera:

1) Si dispara primero ganara con una probabilidad de $a(d)$ y perderá con $1 - a(d)$.

2) Si espera a que dispare el rival, su probabilidad de sobrevivir, ganar, es de 1-b(d) y de morir b(d).
El jugador A no debe disparar si su probabilidad de fallo es mayor que la de acierto de su rival:

$$1 - a(d) \geq b(d)$$

Pero por otro lado sólo debe disparar si su probabilidad de acierto es mayor a la probabilidad de fallo del rival, si no, esperaría a estar más cerca:

$$a(d) \geq 1 - b(d)$$

Si combinamos ambas ecuaciones concluimos que debemos buscar una distancia d' en la que:

$$a(d') = 1 - b(d')$$

Y a esa distancia será la óptima a la que disparar, pues se cumplirán nuestras dos condiciones.

El razonamiento se puede realizar de forma análoga para B obteniendo exactamente el mismo resultado, que debe disparar cuando:

$b(d') = 1 - a(d')$ O lo que es lo mismo: $a(d') = 1 - b(d')$

Esto quiere decir que, para ambos, la mejor estrategia es disparar justo cuando la probabilidad de acierto sea igual a la probabilidad de fallo del otro jugador.

Veamos un ejemplo numérico:

Si en la situación inicial d=0 tenemos que la probabilidad de acierto de B es 0, la de A es 0,4 y además consideramos a las funciones de precisión lineales y de pendiente 1 y -1, podríamos interpretar el juego con el siguiente gráfico:

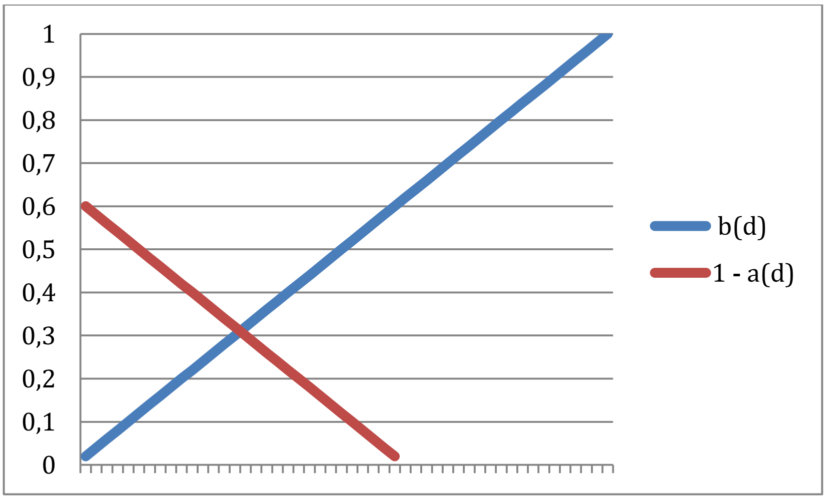

Figura 5 - 1 "Funciones de precisión"

Vemos que se cruzan, esto es, se cumple la ecuación anterior, cuando b (d) y 1 – a (d) son aproximadamente 0,3.

Eso significa que, en este caso, la estrategia óptima para ambos sería disparar cuando b (d) = 0,3 y a (d) = 0,7. Suponiendo que los cartuchos se cruzan en el aire pero no impactan uno con otro tenemos que:

El 70% x 70% = 49% de las veces moriría B y A sobreviviría.
El 70% x 30% = 21% de las veces ambos morirían.
El 30% x 30% = 9% de las veces moriría A y B sobreviviría.
El 30% x 70% = 21% de las veces ninguno moriría.

Podríamos pensar que el jugador que sabe que tiene peor puntería debería usar la estrategia de esperar al disparo rival y comprobar si el cartucho de éste le alcanza y, si no, acercarse para disparar con precisión del 100%. En este caso el resultado sería que A ganaría el 70% de las veces y B el 30% de veces, las que A no le matase con su disparo.

Sin embargo, si B usa esa estrategia, A no dispararía cuando a (d) = 0,7 si no que esperaría a estar más cerca. En ese caso B querría disparar lo antes posible ya que la probabilidad de que A le mate con su disparo está creciendo. Pero pasada la barrera donde $\mathrm{b(d)} = 1 - \mathrm{a(d)}$ A no puede consentir que B dispare primero. Razonando así vemos que todo se reduce a un simple instante, y la estrategia óptima de ambos es disparar justo en el momento en que $\mathrm{b(d)} = 1 - \mathrm{a(d)}$

Cabe señalar que, si el proyectil estuviese en el aire el suficiente tiempo como para que el adversario detectase que se ha disparado (de alguna forma que, presumiblemente, no podría ser a través del oído, ya que los proyectiles suelen ser más rápidos que el sonido de su disparo) y, además, le diese tiempo a disparar antes de que la bala enemiga llegue hasta él, la mejor estrategia para el tirador menos preciso consistiría en esperar a detectar el disparo adversario para apretar su gatillo.

El juego se podría generalizar para un mayor número de cartuchos e, incluso, para más de dos tiradores. La resolución sería considerablemente más compleja si aumentamos el número de participantes, ya que la opción de elegir objetivo complica el juego de forma exponencial. Esto podría tener especial relevancia a la hora de programar un ejército de robots que se tuviese que enfrentar a cierto número de enemigos. Si queremos que se comporten de forma óptima deberán resolver el juego y encontrar su mejor estrategia.

Como apunte final se puede indicar que, aunque en la actualidad parezca muy difícil aplicar estos análisis a situaciones concretas, si un ejército recopilase datos de los enfrentamientos que se producen con cada uno de sus enemigos, tales como la distancia entre frentes, las características del armamento, las bajas de cada bando, etc.; se podrían desarrollar estrategias específicas para cada rival, ya que podríamos estimar la función de precisión de cada enemigo.

6. CONCLUSIÓN.

La Teoría de Juegos es una potente herramienta a la hora de tomar decisiones. Se ha visto como, con un poco de ingenio, es sencillo convertir una situación real en un juego matemático y extraer información de él para elegir una mejor estrategia. También se ha explicado que en las decisiones cotidianas no suele tener mucho sentido el análisis matemático, puesto que nuestro instinto y experiencia ya nos han hecho interiorizar a un nivel casi inconsciente los fundamentos de dichas decisiones habituales.

Es en circunstancias especiales cuando la Teoría de Juegos puede resultar de mayor utilidad. Cuando nos encontramos ante decisiones nuevas, cuando podemos optar por múltiples vías de acción, cuando nos enfrentamos a consecuencias trascendentales, cuando parece que no hay decisión mejor que otra… Es entonces cuando el análisis matemático nos brinda todas sus cualidades.

Se han expuesto ejemplos históricos en los cuales nuestros protagonistas tomaban las decisiones óptimas a pesar de no tener conocimiento de la Teoría de Juegos, es decir, no es estrictamente necesaria, pero, cuántas malas decisiones se habrán tomado por un mal análisis de los factores de la situación. ¿Cuántas de estas mediocres decisiones podrían haberse evitado si el decisor hubiese podido apoyarse en las matemáticas? Seguramente bastantes.

Mucha gente cree que sus decisiones son siempre las mejores, pero, enfrentados a las mismas situaciones, cada uno elige una estrategia distinta. No todos pueden tener razón. Es cierto que cada persona tiene sus propias motivaciones, y lo óptimo para una puede que no sea lo óptimo para otra. Pero también es cierto que hay quien toma malas decisiones y no lo sabe. Todo parece indicar que hay gente capaz de determinar los factores relevantes de una situación, visualizar el escenario en el que se encuentra y a qué escenario quiere llegar, y otra gente que no lo es.

La Teoría de Juegos facilita ese proceso de análisis, tanto si se es un buen decisor como si no, después de un estudio matemático parecerá que todo encaja mejor y, quizás, se descubran nuevas líneas de acción no consideradas.

A través de los ejemplos expuestos a lo largo del trabajo se ha aprendido que:

- Ante decisiones no cooperativas la imagen que tenga nuestro adversario de nosotros es sumamente importante.
- A través de modelizaciones matemáticas de una situación podemos determinar qué factores debemos variar para mejorar nuestros resultados.
- En un ambiente bélico no suele ser buena idea analizar cada conflicto como una decisión aislada. No nos debemos dejar llevar por las tendencias, ya que nos pueden alejar de la estrategia óptima, y el adversario podría incrementar su beneficio.
- El ejército podría encontrar estrategias deficitarias del rival, sus puntos débiles, a través del análisis de situaciones pasadas.

Por otro lado, considerando el futuro, hemos visto la gran relevancia que puede llegar a tener, sobretodo en el campo de la Inteligencia Artificial. ¿Cómo se podrá decir de una máquina que posee inteligencia si no es capaz de tomar decisiones? Y, ¿cómo se va a conseguir que tomen decisiones correctas si no es a través de la modelización de la realidad? Su lenguaje es el de la lógica y las matemáticas. Si podemos explicar por qué tomamos una decisión y no otra haciendo uso de la Teoría de Juegos podremos implementar ese razonamiento en una máquina. En la actualidad, que no seamos capaces de modelar fielmente nuestro sistema neuronal es lo que hace que el campo de la Inteligencia Artificial no avance con mayor rapidez.

Habida cuenta de la utilidad de la Teoría de Juegos, y en relación al contexto de las Fuerzas Armadas, considero que podría ser de interés el impartir nociones básicas a todos los militares o, al menos, a aquellos que deben hacer frente a una mayor cantidad de decisiones. Este trabajo podría servir para introducir en la materia a cualquier persona, ya que se ha tratado de no emplear matemáticas sofisticadas y de explicar la teoría partiendo de un desconocimiento previo absoluto. Los curiosos ejemplos históricos relacionados con la Defensa podrían despertar interés en el ámbito castrense y conseguir que se destine más personal para investigar el proceso de la toma de decisiones.

"Que te crean fuerte cuando eres débil, que te crean débil cuando eres fuerte; el engaño es la clave para una victoria fácil".

Sun-Tzu en *El arte de la guerra*.

BIBLIOGRAFÍA

Textos consultados:

[1] **BERKOVITZ, L.D., and DRESHER, M.** (1959) *A game-theory analysis of tacticar air war*. Operations Res., Vol. 7 , pp. 599-620.

[2] **BINMORE, K**. (1994). *Teoría de Juegos*. McGraw-Hill, Madrid.

[3] **DAVIS, M. D.** (1986) *Introducción a la Teoría de Juegos*. Alianza Editorial,Madrid.

[4] **DRESHER, Melvin**. (1961) *Games of strategy*. *Theory and applications*. Prentice-Hall.

[5] **J.H. GASH, Richard**. (2008) *Can a Round of Poker Solve Afghanistan's Problems?* Small Wars Journal.

[6] **MCDONALD, John**. (1963) *Strategy in Poker, Business, and War*. New York.

[7] **MORGENSTERN, Oskar y VON NEUMANN, John**. (1947). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.

[8] **NASH, John**. (1950) *Equilibrium points in n-person games*.

Recursos en línea:

[9] http://www.eumed.net/cursecon/juegos/ *Introducción a la Teoría de Juegos*.

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Game_theory wikipedia versión en inglés.

[11] http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_juegos wikipedia versión español.

[12] http://mindyourdecisions.com/blog *Planificación de un ataque*.

[13] http://www.rand.org/about/history/a-brief-history-of-rand.html RAND Corporation.

[14] http://www.zonaeconomica.com/teoriadejuegos *Teoría de Juegos* por Juan Bravo Raspeño.

[15] http://todoloqueseaverdad.blogspot.com.es *Quema de las naves* por José Luis Ferreira.

Videos:

[16] http://www.filmaffinity.com/es/film490007.html Película *"Thirteen Days"* de Roger Donaldson. (Tema: Crisis de los Misiles de Cuba)

[17] http://www.filmaffinity.com/es/film326587.html Película "*A Beautiful Mind*" de Ron Howard. (Tema: Vida de John Nash).

LISTADO DE FIGURAS

Anexo I

El Dilema del Prisionero.

El Dilema del Prisionero es el más famoso de los modelos aportados por la Teoría de Juegos. Formalizado y analizado por primera vez por A. W. Tucker en 1950.

Hay muchas formas de presentarlo [3], [9], [15], pero no se diferencian en nada importante. El siguiente podría ser un método de exponerlo:

Dos supuestos ladrones son detenidos y encerrados en celdas de aislamiento de forma que no pueden comunicarse entre ellos. La policía sospecha que han participado en el robo de un banco, delito cuya pena es de diez años de cárcel, pero no tienen pruebas de ello. Sólo pueden demostrar y declararles culpables de un delito menor, tenencia ilícita de armas, cuyo castigo es de dos años de cárcel. Por separado se les promete que si proporciona pruebas de la culpabilidad del otro en relación con el robo del banco, la pena de dos años quedará reducida a un año.

Las alternativas para cada prisionero pueden representarse en forma normal con una matriz de pagos. La estrategia "lealtad" consiste en permanecer en silencio y no proporcionar pruebas que incriminen al compañero. Llamaremos "traición" a la estrategia alternativa, esto es, aportar evidencias de la culpabilidad del jugador.

Dilema del prisionero
(Años de cárcel)

		Preso B	
		Lealtad	**Traición**
Preso A	**Lealtad**	2 | 2	10 | 1
	Traición	1 | 10	5 | 5

Los pagos (a | b) indican los años de cárcel a los que es condenado el preso A o el preso B respectivamente según las estrategias que hayan elegido cada uno de ellos.

Si no queremos poner cantidades exactas a los pagos podemos simplemente pensar en un determinado orden de preferencia (la mejor situación, la siguiente, la tercera…) para cada jugador. Así el modelo pasaría a tener un cariz más general.

Dilema del prisionero
(Orden de preferencia)

		Preso B	
		Lealtad	**Traición**
Preso A	**Lealtad**	2 | 2	4 | 1
	Traición	1 | 4	3 | 3

Donde para cada jugador su resultado preferido sería el 1, después el 2, el 3 y el peor el 4.

La aplicación de la estrategia Maximín, explicada en el apartado 2.4, conduce en este juego a un resultado que no es el óptimo. Al no conocer la decisión del otro preso, la estrategia más segura es traicionar. Si ambos traicionan, el resultado para ambos es peor que si ambos hubieran elegido la lealtad. Este resultado, Traición-Traición, es un punto de equilibrio de Nash.

El dilema del prisionero, tal como lo hemos descrito, es un juego de suma no cero, de dos jugadores, con dos estrategias cada uno, no cooperativo y simétrico.
Es posiblemente el juego más conocido y estudiado en la teoría de juegos. En base a él se han elaborado multitud de variaciones, muchas de ellas basadas en la repetición del juego y en el diseño de estrategias reactivas.

Anexo II

La Guerra de los Sexos.

El modelo de "La guerra de los sexos" es un ejemplo muy sencillo de utilización de la teoría de juegos para analizar un problema frecuente en la vida cotidiana [6], [9], [15]. Hay dos jugadores, que para el caso llamaremos "Rafael" y "Alicia". Cada uno de ellos puede elegir entre dos posibles estrategias a las que llamaremos, en este ejemplo, "Tenis" y "Discoteca".

Vamos a estudiarlo desde el punto de vista de las preferencias, como ya se ha hecho en el Anexo I con “El dilema del prisionero”.

Supongamos que el orden de preferencias de Rafael es el siguiente:
1º) (Lo más preferido) Tanto él como Alicia eligen Tenis.
2º) Tanto él como Alicia eligen Discoteca.
3º) Él elige Tenis y Alicia elige Discoteca.
4º) (Lo menos preferido) Él elige Discoteca y Alicia elige Tenis.

Supongamos que el orden de preferencias de Alicia es el siguiente:
1º) Tanto ella como Rafael eligen Discoteca.
2º) Ambos eligen Tenis.
3º) Ella elige Discoteca y Rafael elige Tenis.
4º) Ella elige Tenis y Rafael elige Discoteca.

La matriz de pagos es la siguiente, donde los pagos representan el orden de preferencias:

Guerra de los Sexos
(Simétrico)

		Alicia	
		Tenis	**Discoteca**
Rafael	**Tenis**	1 | 2	3 | 3
	Discoteca	4 | 4	2 | 1

Este juego, tal como lo hemos descrito, es un juego sin repetición y no cooperativo. Sin repetición significa que sólo se juega una vez por lo que no es posible tomar decisiones en función de la elección que haya hecho el otro jugador en juegos anteriores. No cooperativo o, lo que es lo mismo, sin transferencia de utilidad, significa que no hay comunicación previa por lo que no es posible ponerse de acuerdo, negociar ni acordar pagos secundarios ("Si vienes al tenis te pago la entrada").

El problema que se plantea es simplemente un problema de coordinación. Se trata de coincidir en la elección. Al no haber comunicación previa, es posible que el resultado no sea óptimo. Si cada uno de los jugadores elige su estrategia Maximín el pago que recibirán (3 | 3) no es el óptimo. Esa solución no es un punto de equilibrio de Nash ya que los jugadores están tentados de cambiar su elección: cuando Alicia llegue a la discoteca y observe que Rafael se ha ido al tenis, sentirá el deseo de cambiar de estrategia para obtener un pago mayor.

El modelo que hemos visto es un juego simétrico ya que jugadores o estrategias son intercambiables sin que los resultados varíen. Podemos introducir una interesante modificación en el juego convirtiéndolo en asimétrico a la vez que nos aproximamos más al mundo real. Supongamos que las posiciones 2ª y 3ª en el orden de preferencias de Rafael se invierte. Él prefiere ir solo al tenis más que ir con Alicia a la Discoteca. La matriz de pagos queda como sigue:

Guerra de los Sexos
(Asimétrico)

		Alicia	
		Tenis	**Discoteca**
Rafael	**Tenis**	1 | 2 *	2 | 3
	Discoteca	4 | 4	3 | 1

Si Alicia conoce la matriz de pagos, es decir, las preferencias de Rafael, el problema de coordinación desaparece. Está muy claro que Rafael elegirá siembre la estrategia Tenis, sea cual sea la elección de Alicia. Sabiendo esto, ella elegirá siempre la estrategia Tenis también, ya que prefiere estar con él aunque sea en el Tenis que estar sola aunque sea en la Discoteca. La estrategia Maximín de ambos jugadores coincide. El resultado, marcado con un asterisco, es un óptimo, un punto de silla, una solución estable, un punto de equilibrio de Nash. Obsérvese que esta solución conduce a una situación estable de dominación social del jugador que podríamos calificar como el más egoísta.

Anexo III

Modelo Halcón-Paloma.

El modelo Halcón-Paloma sirve para analizar situaciones de conflicto entre estrategias agresivas y conciliadoras. Este modelo es conocido en la literatura anglosajona como el "*Hawk-dove*" o el "*Chicken*" y en español es conocido como "*El juego del gallina*" [3], [9].

Veamos el ejemplo que ilustra mejor este modelo:

Dos vehículos se dirigen uno contra otro en la misma línea recta y a gran velocidad. El que frene o se desvíe habrá perdido, quedará como un cobarde. Pero si ninguno de los dos frena o se desvía, chocarán y morirán. Esto sería un típico "juego del gallina".

Este modelo se usó con asiduidad para representar situaciones de la Guerra Fría. La estrategia Halcón consistía en continuar con la escalada armamentística y bélica. Si un jugador mantiene la estrategia Halcón y el otro elige la estrategia Paloma, el Halcón gana y la Paloma pierde. Pero la peor situación para ambos es cuando los dos jugadores se aferran a la estrategia Halcón. Los posibles resultados pueden observarse en la siguiente matriz de pagos.

Matriz Halcón vs Paloma
(Orden de preferencia)

		Jugador B	
		Halcón	**Paloma**
Jugador A	**Halcón**	4 | 4	1 | 3
	Paloma	3 | 1	2 | 2

Podemos observar las sutiles pero importantes diferencias entre este modelo y el del Dilema del Prisionero. En este caso hay dos resultados que son equilibrios de Nash: cuando las estrategias elegidas por cada jugador son diferentes; es decir, cuando uno elige Halcón y el otro Paloma. Por el contrario, en el Dilema del Prisionero el equilibrio de Nash está en el punto en que ambos jugadores traicionan.

Otra notable diferencia de este juego con otros es la importancia que aquí adquiere el orden en que los jugadores eligen sus estrategias. Como tantas veces en la vida real, el primero que juega, gana. El primero elegirá y manifestará la estrategia Halcón con lo que el segundo en elegir se verá obligado a elegir la estrategia Paloma, la menos mala.

Anexo IV

John von Neumann, 1903-1957. Su nombre en húngaro es Margittai Neumann János Lajos. Matemático, considerado por muchos como la mente más genial del siglo XX comparable solo a la de Albert Einstein.

Nació en Budapest, hijo de un rico banquero judío. Tuvo una educación esmerada. Se doctoró en matemáticas por la Universidad de Budapest y en químicas por la Universidad de Zúrich. En 1927 empezó a trabajar en la Universidad de Berlín. En 1932 se traslada a los Estados Unidos donde trabajará en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton.

A pesar de ser completamente desconocido para "el hombre de la calle", la transcendencia práctica de su actividad científica puede vislumbrarse al considerar que participó activamente en el Proyecto Manhattan, el plan secreto estadounidense que reunió a un prestigioso elenco de científicos para desarrollar la primera bomba atómica. Como científico asesor del Consejo de Seguridad de los Estados Unidos en los años cincuenta, tuvo un papel destacado (aunque secreto y no muy bien conocido) en el diseño de la estrategia de la guerra fría.

Participó y dirigió la producción y puesta a punto de los primeros ordenadores. A él se debe la llamada estructura von Neumann, todavía usada en las computadoras actuales, y que consiste en integrar dentro de la unidad central de procesos (CPU) la unidad aritmético-lógica (ALU), una unidad de control y un contador de programas, y, de forma externa a la CPU, una memoria externa y los sistemas de entrada/salida.

Se le considera el creador de la Teoría de Juegos. En 1928 publica el primer artículo sobre el tema. En 1944, en colaboración con Oskar Morgenstern, publica *"Theory of Games and Economic Behavior"*.

"Si la gente no piensa que las matemáticas son simples, es solo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida."

John von Neumann.

Anexo V

John F. Nash, 1928- . Premio Nobel de Economía en 1994. La vida de John Forbes Nash ha inspirado una biografía y película de extraordinario éxito: "Una mente maravillosa".

Matemático y economista estadounidense. Profesor en la prestigiosa universidad de Princeton, en New Jersey. Obtiene el premio Nobel de Economía en 1994, compartido con John C. Harsanyi y Reinhart Selten por sus pioneros análisis del equilibrio en la teoría de los juegos no cooperativos.

Cuando a los veinte años, solicitó ser admitido como alumno en Princeton, la carta de recomendación escrita por su profesor R.J.Duffin tenía solo una línea. *"Este hombre es un genio"*.

A los 21 años escribió una tesina de menos de treinta páginas en la que expuso por primera vez su solución para juegos estratégicos no cooperativos, lo que desde entonces se llamó "el equilibrio de Nash", que tuvo un inmediato reconocimiento entre todos los especialistas.

El punto de equilibrio de Nash es una situación en la que ninguno de los jugadores siente la tentación de cambiar de estrategia ya que cualquier cambio implicaría una disminución en sus pagos. Von Neumann y Morgenstern habían ya ofrecido una solución similar pero únicamente para los juegos de suma cero. Para la descripción formal del problema y su solución, Nash utilizó funciones de mejor respuesta y el teorema del punto fijo de los matemáticos Brouwer y Kakutani.

En los años siguientes publicó nuevos escritos con originales soluciones para algunos problemas matemáticos y de la Teoría de Juegos, destacando la "solución de regateo de Nash" para juegos cooperativos de dos jugadores. Propuso también lo que se ha dado en llamar "el programa de Nash" para la reducción de todos los juegos cooperativos a un marco no cooperativo.

A los veintinueve años se le diagnosticó una esquizofrenia paranoica que lo dejó prácticamente marginado de la sociedad e inútil para el trabajo científico durante dos décadas. Pasado ese lapsus, en los años setenta, recuperó su salud mental y pudo volver a la docencia y la investigación con nuevas y geniales aportaciones.

"Adam Smith dice que el mejor resultado es producto de que cada uno en el grupo haga lo mejor para sí mismo ¿no? Eso está incompleto. Porque el mejor resultado es producto de que todos en el grupo hagan lo mejor para sí mismos y para el grupo"

Russell Crowe interpretando a John Nash en "Una mente maravillosa"

Anexo VI

Thomas C. Scheliing (1921-) y Robert J. Aumann (1930-). Compartieron el Premio Nobel de Economía en 2005 "por haber ampliado nuestra comprensión del conflicto y la cooperación mediante el análisis de la Teoría de Juegos".

Schelling nació en Oakland, California, es profesor de Economía en la Universidad de Maryland. Ha publicado libros sobre temas diversos tales como la estrategia militar y el control de armas, política energética y ambiental, cambio climático, terrorismo, teoría del conflicto y del regateo, segregación e integración racial y política de salud. Su libro *"La Estrategia del Conflicto"*, traducido a numerosos idiomas, ha sido considerado uno de los cien libros más influyentes desde 1945.

Aumann, judío, nacido en Frankfurt, Alemania, emigró a los Estados Unidos donde se doctoró en matemáticas en 1955, en el Massachusetts Institute of Technology (MIT). Actualmente trabaja en la Universidad Hebrea de Jerusalén.

En 1959 realiza sus primeras aportaciones a la Teoría de Juegos al analizar las diferencias entre los juegos con repetición finita e infinita. En 1960, junto con su colega Bezalel Peleg, formalizó la noción de juego de coaliciones sin transferencia de utilidad.

Para Aumann, la Teoría de Juegos es "la teoría más general" de la ciencia económica.