Conocimiento informal de simetrías en niños de 3 a 5 años

Almudena Agudo
Trabajo fin de Máster en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: José Ignacio Cogolludo
y Elena Gil Clemente
11 de septiembre 2020

Prólogo

Este Trabajo Fin de Máster forma parte de los créditos de formación necesarios para acceder al programa de doctorado en Matemáticas y Estadística al que he llegado bajo la dirección del profesor José Ignacio Cogolludo, uno de sus directores, con la intención de empezar una investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas.

Tras graduarme en el Grado de Matemáticas en el año 2017 decidí dedicar mis esfuerzos a formarme en la línea de investigación específica sobre enseñanza de las matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales. Mi trabajo previo en asociaciones que fomentan la integración de las personas con discapacidad y mi deseo de acercar las matemáticas como forma de desarrollo personal a estos niños fueron el origen de esta vocación. Obtuve el Máster de Profesorado de Secundaria con un Trabajo Fin de Máster en el que abordaba el tema de la iniciación al álgebra en un aula inclusiva de primer ciclo de la ESO, dirigido por la Profesora Elena Gil Clemente, especialista en la materia y codirectora del presente trabajo.

El trabajo se inserta por tanto en la mencionada línea de investigación. En recientes investigaciones [Gil and Cogolludo, 2019], se está poniendo a prueba un nuevo enfoque que facilite que alumnos con una cierta discapacidad intelectual puedan beneficiarse de los efectos positivos del trabajo con las matemáticas en su desarrollo intelectual y personal. Potenciar los aspectos formativos de la disciplina y no los meramente utilitarios, incluir contenidos geométricos y no centrarse exclusivamente en la aritmética y el uso de una adecuada metodología de enseñanza, que favorezca la intuición infantil son tres de las claves de este enfoque. La potencia de la geometría para desarrollar en los niños ideas de tipo matemático viene avalada por la historia y por la epistemología y ha sido estudiada en profundidad por la historiadora de la ciencia de la Universitá Roma Tre, Ana Millán Gasca.

Pretendo seguir el camino abierto por estas investigaciones, aportando mi formación matemática y la experiencia que he tenido ocasión de adquirir por una parte, participando desde hace tres años en el proyecto de enseñanza de las matemáticas a niños con Trisomía 21 que desarrolla la Sociedad de Estudios sobre el síndrome de Down de Zaragoza y por otra trabajando puntualmente con niños de Educación Infantil de un colegio de la misma ciudad. Dada la edad de los niños con los que he tenido ocasión de trabajar, he optado por abordar el tema del conocimiento informal sobre matemáticas (lo que [Tolchinsky, 2003] llama *lo que el niño sabe antes de ser enseñado* y [Millán, 2016] concreta en *concepciones ingenuas de número y forma*). Animada por mi gusto personal por la geometría, por la potencia formativa que esta tiene y a la que hemos aludido y por la posibilidad de contar con la dirección del profesor Cogolludo, elegí finalmente centrar el trabajo en explorar las concepciones sobre simetrías que tienen los niños de entre 3 y 5 años y proponer algunos materiales y actividades para el trabajo con este concepto.

La investigación descrita en este TFM no es más que el inicio de un proyecto que está comenzando a gestarse. Por ello, los resultados que presentamos no pretenden ser concluyentes, sino mostrar la dirección en la que hemos de seguir trabajando.

Creemos conveniente resaltar que el trabajo utiliza dos lenguajes diferentes que pueden sorprender al lector. Por su contenido enmarcaremos este trabajo en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas y por tanto, utilizaremos un método de investigación, una forma de establecer conclusiones e incluso unas normas bibliográficas (APA) propias del macroárea de Ciencias Sociales. Con el fin de exponer los objetos matemáticos de estudio de manera precisa, hemos dedicado el Capítulo 2 al concepto de simetría en matemáticas cuyo lenguaje y notación son matemáticos. Este estudio aporta a la investigación subsiguiente un rigor y precisión que nos ha ayudado a discernir, a elaborar actividades y a aportar un punto de vista diferente y sólidamente fundamentado en conceptos matemáticos.

Comenzamos el trabajo, con un capítulo fruto de las lecturas previas que necesité realizar para realizar para ampliar mi formación. En ellas profundizamos en el concepto de conocimiento matemático informal, en el papel que la experiencia tiene en la emergencia de estas ideas informales y en las similitudes que se pueden percibir con el nacimiento histórico de las matemáticas. A partir de ellas elaboramos unas implicaciones didácticas que han guiado el trabajo posterior.

En el Capítulo 2 se aborda el estudio formal sobre la simetría al que hemos aludido, que nos ha ayudado en nuestra exploración de las concepciones ingenuas dotándonos de los conceptos y las definiciones precisas que ayudan a clarificar lo observado en el trabajo con los niños.

En el Capítulo 3, siguiendo la línea de trabajo de la historiadora de la ciencia [Millán, 2016] realizamos una propuesta de ampliación a su *guía de exploración en la acción de las concepciones ingenuas* de los niños, abordando las concepciones sobre simetrías. Con el propósito de hacer emerger dichas *concepciones ingenuas* en los niños diseñamos y pusimos en práctica unas actividades de exploración con dos grupos diferentes: un grupo de Educación Infantil y otro grupo de niños con Trisomía 21. Nuestra intención no fue comparar los resultados obtenidos con ambos grupos sino tener una base experiencial más amplia que pudiera enriquecer dicha guía. Estas actividades nos ayudaron a descubrir también qué tipo de simetrías no surgieron de manera intuitiva en las producciones de los niños.

Concluiremos el trabajo presentando en el Capítulo 4, gracias a lo descubierto en la exploración sobre los conocimientos informales de simetría, algunos materiales de diseño propio que servirán como refuerzo y ampliación al trabajo con dicho concepto en edades tempranas.

Summary

This Master's Thesis is part of the complementary credit hours necessary to access the Ph.D program in Mathematics and Statistics, wich I am enrolled in under the supervision of Professor José Ignacio Cogolludo, one of my tutors in this work, with the purpose of starting a research direction in Area of Didactics of Mathematics.

After graduating from the Degree in Mathematics in 2017, I have decided to focus my efforts into the specific line of research on teaching mathematics to students with special educational needs. My previous work in associations that promote the integration of people with disabilities and my desire to bring mathematics as a form of personal development to these children were the origin of this call. I sought a Master's Degree in High School Teaching with a Master's Thesis in which I addressed the subject of introducing algebra in an inclusive classroom of the first cycle of ESO, directed by Professor Elena Gil Clemente, specialist in the field and co-advisor of the present work.

This work is therefore inserted in the aforementioned line of research. In recent research [Gil and Cogolludo, 2019], a new approach is being tested to enable students with a certain intellectual disability to benefit from the positive effects of working with mathematics on their intellectual and personal development. Strengthening the formative aspects of the discipline and not the merely utilitarian ones, including geometric content and not focusing exclusively on arithmetics and the use of an adequate teaching methodology that favors children's intuition are three of the keys to this approach. The power of geometry to develop mathematical ideas in children is supported by history and epistemology and has been studied in depth by the historian of science from the Universitá Roma Tre, Ana Millán Gasca.

I intend to follow the path opened by these investigations, contributing my mathematical training and the experience that I have had the opportunity to acquire, on the one hand, participating for three years in the project of teaching mathematics to children with Trisomy 21 developed by the Sociedad de Estudios on Down syndrome in Zaragoza and, on the other hand, working occasionally with children in Early Childhood Education from a school in the same city. Given the age of the children with whom I have had the opportunity to work, I have chosen to address the topic of informal knowledge about mathematics (what [Tolchinsky, 2003] calls *what the child knows before being taught* and [Millán, 2016] summarizes as *naive conceptions of number and shape*). Encouraged by my personal attraction for geometry, by the formative potential that has already been mentioned and by the possibility of having the supervision of Professor Cogolludo, I finally chose to focus my work on exploring the conceptions about symmetries that children of between ages 3 and 5 have and propose some materials and activities to work with this concept.

The research described in this TFM is only the beginning of a project that is starting to crystalize. Therefore, the results that we present do not pretend to be conclusive, but rather to show the direction in which we must continue our work.

We believe it is convenient to highlight that the work uses two different languages that may surprise the reader. Due to its content, we will frame this work in the field of Mathematics

Didactics and therefore, we will use a research method, a wary of eestablishing conclusions and even bibliographic standars (APA), typical of the macro-area of Social Sciences.s In order to present the mathematical objects of study in a precise way, we have devoted Chapter 2 to the concept of symmetry in mathematics whose language and notation are obviously mathematical. This study contributes to the subsequent research with the necessary rigor and precision that has helped us to discern, to elaborate activities and to present a different and well-founded approach based on mathematical concepts.

We begin the work, with a background Chapter 1 which results from the previous readings that I needed to carry out in order to expand my training. In them we delve into the concept of informal mathematical knowledge, the role that experience has in the emergence of these informal ideas and the similarities that can be perceived with the historical birth of mathematics. From them we elaborate some didactic implications that have guided the subsequent work.

Chapter 2 deals with the formal study on symmetry to which we have alluded, which has helped us in our exploration of naive conceptions, providing us with the concepts and precise definitions that help to clarify what was observed in the work with children.

In Chapter 3, following the line of work of the historian of science [Millán, 2016] we made a proposal to expand her *exploration guide on the action of naive conceptions* of children, addressing the conceptions about symmetries. In order to bring out these *naive conceptions* in children, we designed and put into practice some tentative activities with two different groups: a group from Early Childhood Education and another group of children with Trisomy 21. Our intention is not to compare the results obtained with both groups but to have a broader experiential base that could enrich said guide. These activities also helped us to discover what kinds of symmetries did not emerge intuitively in the children's productions.

We will conclude the work presenting in Chapter 4, thanks to what was discovered in the exploration of informal knowledge of symmetry, some materials of our own design that will serve as reinforcement and extension to work with this concept at an early age.

Índice general

Capítulo 1

Primeros pasos en el aprendizaje de las matemáticas

El ser humano, desde los orígenes, se ha preocupado por conocer el mundo que le rodea, de comprenderlo para poder sobrevivir y de dominarlo para poder progresar. Puesto delante de la Naturaleza con su cuerpo y con su mente ha tratado de aprehender la realidad y de hacerla más comprensible. Las matemáticas pueden considerarse como una de las herramientas culturales que el hombre ha utilizado en este proceso de comprensión. Todo lo que puede ser conocido puede ser contado o puede ser medido [Lafforgue, 2010]. Además, todo puede ser susceptible de adoptar una forma abstracta en nuestra mente, "sin sólidos no hay geometría" [Poincaré, 1905, p.44].

Desde la Prehistoria, más concretamente desde el Paleolítico, los hombres comenzaron a realizar herramientas talladas a mano y dibujos rupestres. En esas primeras producciones podemos atisbar dos de las preocupaciones básicas del ser humano: la búsqueda de utilidad en la precisión y la efectividad de dichas herramientas y la búsqueda de la belleza en el diseño. En estas herramientas y en otras manifestaciones del hombre prehistórico podemos encontrar lo que [Keller, 2004] llama actos embrionarios geométricos del ser humano. Sin embargo, no fue hasta milenios después que el ser humano vio la necesidad de formalizar todo este conocimiento nacido de la experiencia en una de las obras cumbres del pensamiento matemático: *Los Elementos de Euclides*. Este tránsito de la experiencia a la necesidad de formalismo, producido a grandes rasgos en el comienzo de la historia de las matemáticas, puede servirnos como una metáfora sugerente para aproximarnos a los primeros pasos de los niños en el aprendizaje de las matemáticas y es lo que vamos a tratar de desmenuzar en este primer capítulo. Hicieron falta miles de años de conocimiento de la realidad, de la experiencia y de intuiciones construidas sobre ella hasta que el ser humano fue capaz de asentar las bases de una ciencia formal. De la misma manera, es necesario que el niño comience su contacto con las matemáticas proporcionándole ricas experiencias sobre las que pueda desarrollar su intuición y fijar las bases para un aprendizaje confiado.

Utilizando las palabras de [Giorgio and Millán, 2012] las matemáticas pueden considerarse como una ciencia omnipresente y temida. Su omnipresencia hace que sea indudable la necesidad de su presencia en el sistema educativo actual. ¿Cómo se va a impedir que los niños aprendan matemáticas desde su infancia si estas están presentes en todos los ámbitos de la vida cotidiana, si son el alma de la tecnología, si son un lenguaje para comprender el mundo? El propio niño entra en contacto con ellas desde muy pequeño. Basta pensar en simples acciones cotidianas como son contar, organizar sus juguetes, separar a sus amigos en equipos para jugar, observar la trayectoria de su pelota, reconocer que su gorro de cumpleaños y el cono del helado tienen una forma similar.

En el conocido e influyente informe [Cockcroft, 1985] se afirma que en el siglo XX es imposible vivir en la mayor parte del mundo desarrollado sin hacer uso de las matemáticas. Resaltan su carácter de medio de comunicación: poderoso, conciso y sin ambigüedades [Cockcroft, 1985, p.1] Sin embargo, en dicho informe se enfatiza la dificultad que supone el aprendizaje de esta disciplina para muchas personas, dificultad que se atribuye a la abstracción del lenguaje matemático. Y es esta limitación la que nos introduce en el segundo de los adjetivos que [Giorgio and Millán, 2012] atribuyen a las matemáticas: temidas. El hecho de que sean temidas, incluso por muchos adultos, va ligado a las malas experiencias de aprendizaje en la infancia, pero también a una de las características intrínsecas de esta disciplina que la diferencian de otras. Como explica [Hughes, 1986], las matemáticas requieren una abstracción que otros estudios no demandan. Dicha abstracción es ineludible, porque es consustancial en matemáticas. La potencia de esta disciplina radica en que hace poner en juego al ser humano su capacidad de generalizar, de extraer ideas comunes, de aplicarlas a contextos diferentes al de partida. Prescindir de esta abstracción a las matemáticas para hacerlas más sencillas es un error pedagógico que desnaturaliza a la disciplina [Giorgio and Millán, 2012]. En el proceso de aproximar a los niños a esta disciplina es importante, por el contrario, buscar maneras progresivas de hacer que construyan las ideas abstractas propias de las matemáticas a través de sus propias experiencias vitales y cotidianas. Será la forma de evitar el temor que muchas personas sienten ante la incomprensión que les suponen las matemáticas.

Es precisamente de este proceso del que nos vamos a ocupar en este trabajo. ¿Cómo podemos iniciar a los niños en el aprendizaje de las matemáticas, una disciplina imprescindible por su omnipresencia, sin que sea temida por ellos? [Tolchinsky, 2003] afirma: “toda la información recogida del exterior y producida por el niño es un ingrediente permanente en el proceso del desarrollo” (p.98). Asegura que existe una necesidad de integrar el aprendizaje por descubrimiento en la comprensión del niño de forma que se facilite el tránsito entre una matemática más intuitiva y una matemática formal favoreciendo siempre la comprensión. [Baroody, 1991] sugiere buscar formas de conectar las matemáticas que los niños aprenden en el colegio con la matemática inventada por ellos mismos. Profundizaremos en el siguiente epígrafe en la comprensión de estos conocimientos informales de las matemáticas a los que hemos aludido: ¿cómo surgen? y ¿cómo debemos tenerlos en cuenta a la hora de iniciar a los niños en el aprendizaje de las matemáticas?

1.1. Conocimiento matemático informal

El niño nace en un mundo rodeado de matemáticas. Su innegable omnipresencia la convierte en una asignatura básica del sistema educativo actual, presente al menos en España, en todos los niveles educativos desde las etapas infantiles. En etapas preescolares, los maestros fomentan un aprendizaje de esta ciencia. Los números, las figuras geométricas, la lógica... serán piezas clave de la formación matemática que se debe aprender en el primer curso. Sin embargo, ¿serán todos estos conceptos nuevos para el niño? “Los niños no llegan a la escuela como pizarras en blanco” [Baroody, 1991, p.34], antes de comenzar la escolarización formal, la mayoría ya han adquirido unos conocimientos considerables. Estas competencias, a las que llamaremos conocimiento matemático informal o conocimiento matemático temprano, son previas a la educación formal e impulsan en gran medida el aprendizaje del niño. Por ello, es ineludible tratar de conocerlas y comprender de dónde provienen.

La vida diaria del niño, desde su nacimiento, está plagada de multitud de situaciones que le proporcionan oportunidades sobre las que construir las primeras ideas “matemáticas”. La observación de números en los precios de la compra, la elección entre dos tamaños de helados, la enumeración de diferentes objetos, la partición por la mitad de una chocolatina... son escenarios habituales que favorecen el aprendizaje de las matemáticas de una manera inconsciente. En estos contextos la intuición, la observación y la manipulación son la base que potencia un aprendizaje fructífero. Tengamos en cuenta que estas acciones, que están en la base del aprendizaje, son situaciones que nos permiten explorar, analizar y profundizar en nuestro propio conocimiento. Por el simple hecho de vivir el niño experimenta y nuestra característica intrínseca de seres sociales nos permite vivir esta experimentación tanto en grupo como a nivel individual. Como sostiene [Millán, 2016] mucho antes de llegar a la escuela comenzamos nuestro proceso de aprendizaje de las matemáticas. Adquirimos competencias ocasionalmente de nuestros padres, abuelos, hermanos y compañeros de juego, gracias al resultado de observar, realizar actividades motoras, deportes y conversaciones en la vida diaria. Ocupémonos ahora de ver qué tipos de experiencias previas a la escolarización ayudan al niño a adquirir este conocimiento matemático intuitivo, razonado y que nos muestra que ellos mismos son capaces de una forma de razonamiento.

La observación es uno de los elementos imprescindibles en este proceso de aprendizaje. Nuestra inquietud, curiosidad e intriga desde pequeños por el mundo que nos rodea, hace que desde las primeras edades empecemos a comprender el mundo, a acercarnos a él y a imaginárnoslo. Observar es una característica inherente del ser humano que se potencia desde el primer hálito de vida. Cuando un niño ordena sus juguetes puede fijarse en multitud de aspectos: su tamaño, su color o su forma. Todos ellos pueden llevarle a intuir la posibilidad de diferentes clasificaciones. Al mismo tiempo, las diferentes distribuciones pueden hacer caer al niño en la cuenta de otras características que puede observar. "Los objetos que cualquier niño tiene, poseen variedad de propiedades, pero las similitudes y las diferencias aparecen en su mente cuando observa" [Tolchinsky, 2003, p.99]. Esta acción de observar es realizada, normalmente, de manera individual y pone de manifiesto el enriquecimiento que supone la reflexión propia.

La convivencia con el mundo adulto y la socialización con miembros de la familia o con amigos nos expone a multitud de ocasiones matemáticas desde que nacemos. Acciones concretas que involucran ideas matemáticas o conversaciones que usan un lenguaje preciso y que nos pueden ayudar a ir forjando ideas en nuestra mente. Ejemplifiquemos esto comenzando por la utilización de la secuencia numérica. Los números surgen espontáneamente en situaciones cotidianas tanto de manera ordinal; número de nuestro portal, la clasificación de los primeros puestos de una carrera, cuando decimos la posición en la que se encuentra un objeto... como de manera cardinal; cuando decidimos realizar algo a la cuenta de tres, cuando contamos el número de objetos que se encuentran encima de la mesa, cuando decimos el número del autobús que vamos a coger... La secuencia se encuentra tan integrada en nuestro día a día que incluso, como [Fuson, 1987] afirma, las madres ya tienen cierta conciencia de este aprendizaje temprano de la idea de número. Esto se observa cuando, para facilitar el conteo infantil, comienzan la secuencia numérica diciendo varios números seguidos con el fin de ayudar a obtener los siguientes. Otro ejemplo basado en la socialización con miembros de la familia puede darse al contarse un cuento. Imaginemos que un padre relata a su hijo el cuento *"Por cuatro esquinitas de nada"* [Ruiller, 2012]. En este momento lo está introduciendo sin querer al mundo de la geometría. Es precisamente en este proceso de experimentación no formal donde el niño va adquiriendo ciertos conceptos matemáticos de manera espontánea. Son espontáneos porque no se ha necesitado una explicación precisa de ellos para hacerse una idea intuitiva. El niño, antes de llegar a la escuela, no aprende un concepto intencionadamente, sino que vive situaciones donde la matemática se contextualiza facilitándole su asimilación.

Los momentos de juego con sus iguales son otra fuente privilegiada de experiencias previas a la escolarización. La infancia del niño está plagada de estos momentos de recreo donde el niño hace uso placentero de su realidad, aprendizaje surge inevitablemente y su pensamiento se desarrolla. Cuando un niño juega comienza a desarrollar su pensamiento, poco a poco va realizando nuevos descubrimientos que le llevarán a plantearse nuevos retos o nuevos caminos dentro del mismo juego. Estos nuevos descubrimientos propios de la experimentación pueden ser un germen de ideas matemáticas. Dejar una pelota de fútbol quieta en un lugar suele ser una tarea ardua. Sin embargo, jugar con los bloques de construcciones y poder apoyarlos en el suelo no es complicado. Esta comparación entre dos juegos típicos infantiles como son la pelota; una esfera y el bloque de construcción; el ortoedro, puede hacer surgir nuevas concepciones al niño entre las pueden encontrarse: la idea de vértices, de caras, de círculo, de superficie plana... Ideas que nunca antes había pensado. Estas ponen en manifiesto un saber intuitivo y poderoso que posteriormente debemos potenciar.

El niño también adquiere un conocimiento matemático informal en el momento en el que *da respuesta a situaciones que surgen en la vida cotidiana*. Utilizando las palabras de [Carpenter, 1999] el conocimiento matemático en edades tempranas, es decir, las competencias que el niño adquiere antes de ser escolarizado, también son fruto del intento reiterado de buscar solución a los problemas de la vida diaria. Esta búsqueda de solución es un esfuerzo constante y ocasionalmente individualizado de hallar respuestas a preguntas que surgen en el día a día. Por ejemplo, cuando a un niño se le pide que comparta un folio con su hermano, se le está planteando un problema al que debe dar solución. Parece sencillo, pero encontrar respuesta sin demasiada experiencia, puede ser una tarea complicada. Partir el folio, hacer una línea que divisoria sobre la superficie, pintar por una cara él y por la otra su hermano... son respuestas que el niño alcanzará poniendo en juego su intuición y su razón. Estas soluciones planteadas tienen un alto potencial en cuanto a germen de ideas matemáticas en etapas infantiles. El partir un folio conlleva la intencionalidad de dividir la superficie en dos partes iguales y, si no se consigue una división exacta, conlleva la comparación de dos superficies para, generalmente, quedarse con la más grande. El realizar un línea divisoria vuelve a mostrarnos el concepto de la división, pero también la intencionalidad de producir una línea recta, aunque no se consiga. Y por último, el hecho de decidir pintar cada uno por una cara fomenta la idea de posición en el espacio. Reflexionar, ahondar y solucionar tareas que a simple vista parecen triviales comporta generar ideas sobre conceptos matemáticos todavía no explicados formalmente.

Podemos afirmar por tanto que “la matemática informal de los niños se desarrolla a partir de necesidades prácticas y experiencias concretas” [Baroody, 1991, p.44]. La adquisición de un conocimiento matemático intuitivo, razonado o al menos meditado y supeditado a nuestras acciones cotidianas es clave antes de la escolarización y fundamental en la llegada de los niños al colegio. Es primordial puesto que cualquier noción que el niño posea acerca de las matemáticas, será tomada como conocimiento sobre el que trabajar.

Habiendo explorado cómo adquieren los niños este conocimiento matemático informal, pasaremos ahora a profundizar en las características de este tipo de saber.

Intuitiva e inconsciente son dos de los adjetivos que representan ese a saber matemática informal. Gracias a la experiencia se produce un aprendizaje involuntario. El conocimiento que se adquiere no se aprende de manera consciente. Los conceptos surgen gracias a las situaciones vividas y son estas situaciones, las que le dan al niño la oportunidad de comprender los conceptos. Muchas veces este aprendizaje no es una asimilación de manera clara de una idea, sino que son unas nociones intuitivas que permiten forjarse una representación propia sobre el tema a tratar. Sin embargo, que pese a generar una idea superficial, poco formal o meramente instintiva, esta es extremadamente valiosa puesto que fija las bases para un aprendizaje confiado de las matemáticas. Como afirma [Tolchinsky, 2003], los niños, utilizan su conocimiento previo para desarrollar nuevas ideas matemáticas que surgen de situaciones cotidianas. Por ello, es plausible afirmar que este conocimiento adquirido de la experiencia es enormemente beneficioso para el niño ya que será una base a partir de la cual generar nuevas ideas.

Los niños son aprendices constructivos que no se limitan a absorber lo que otros les enseñan. Por el contrario, están personalmente involucrados en el uso de su propio conocimiento previamente adquirido en constante interacción con la información proporcionada por el entorno. Esta información se transforma a través de este conocimiento previo. [Tolchinsky, 2003, p. XXIV]

Podemos observar que estas ideas son propias del niño y que no se limitan a imitar a los adultos, sino que buscan ir más allá, anhelan la comprensión. Asignarle el nombre de cuadrado a un cubo, de triángulo a una pirámide o de círculo a una esfera, significa que el niño ha elaborado su propia regla que designa a las figuras geométricas con volumen con el nombre de su figura geométrica plana más semejante. Esta regla implica un conocimiento de dichas formas planas. El niño no ha realizado un aprendizaje memorístico de los nombres propios de cada figura, sino que ha dado un paso más. Primero ha abstraído una idea general de la figura geométrica con volumen. Posteriormente la ha contrastado con las figuras geométricas planas que conoce. Y finalmente logrando ver sus semejanzas mediante un proceso de comparación, les otorga ese nombre. “Los errores indican claramente que los niños no se limitan a imitar a los adultos, sino que tratan de construir sus propios sistemas de reglas fruto de un aprendizaje personal e individualizado” [Baroody, 1991, p.90]

La construcción de este sistema de reglas es un proceso lento, conectado y gradual. Lento porque el aprendizaje es fruto de la experimentación. Como cualquier aprendizaje, para que sea significativo, debe ser procesado. Precisa de un tiempo de comprensión y de la necesidad de toparse varias veces con un mismo conocimiento para poder adquirirlo. Las ideas alcanzadas se irán reformulando y conectando con otras ya existentes. El conocimiento propio brinda la oportunidad personal de ampliar nuestro saber en el momento en el que somos capaces de vincularlo con conceptos ya existentes y reformularlo. Al irlo logrando, observamos que nuestra comprensión crece de manera gradual. Es gracias a la ordenación y la concatenación de ideas cuando el niño va transformando unos conocimientos con un cariz intuitivo a unos conceptos más elaborados.

La transformación de conocimientos nos conduce hacia un saber reflexivo, sin olvidar que procede de la experiencia. Este saber es un conocimiento primario, intuitivo, poco formal, con errores y generado por medio de la conexión de ideas. De la misma forma, las primeras matemáticas existentes fueron actos embrionarios basados en la experiencia y la intuición humana. Pasaremos ahora a buscar, en este origen histórico de las matemáticas, algunas claves para la iniciación matemática infantil.

1.2. El origen histórico de las ideas de número y forma

Es conveniente situar el nacimiento de las matemáticas hacia el año 300 a.C. en la antigua Grecia, época en la que se publicaron *Los Elementos* de Euclides. La hipótesis es buena, con la condición de precisar que el nacimiento de la matemática fue precedido de una larga gestación. [Keller, 2001, p.327] Centraremos nuestra atención en este periodo de gestación que puede sugerirnos algunas ideas acerca de cómo las nociones de número y forma comenzaron a aparecer en la mente del ser humano. [Keller, 2001] afirma en su obra, que durante la Prehistoria, existen indicios de una matemática mucho más intuitiva que la que se toma como el verdadero nacimiento de esta ciencia. En este periodo de gestación se producen actos embrionarios que iniciarán un saber matemático geométrico con unas características muy similares a las que se dan en el conocimiento infantil. Por otro lado, [Schmandt-Besserat, 2017] testifica la existencia de un sistema de numeración primario, utilizado también durante la Prehistoria, que podría tomarse como el inicio de la aritmética.

Los primeros indicios de matemática en la Prehistoria se dan en pinturas rupestres y herramientas talladas a mano. El germen de la geometría se intuye en unas representaciones indudablemente rudimentarias utilizadas durante el Paleolítico. Sin embargo, la necesidad de obtener alimentos fue agudizando el ingenio de los hombres prehistóricos. Poco a poco se buscaba una mayor precisión y efectividad en la caza, así como un diseño más bello. Esta necesidad de mejora les llevó a discurrir nuevas formas de herramientas o representaciones. Introducir nuevas técnicas era un proceso complicado fundamentado en el perfeccionamiento de lo ya obtenido de manera casual y en el desarrollo de lo conocido, es decir, partía de la experiencia. Las ventajas o desventajas que descubrían al llevar una herramienta a la práctica hacía que cambiaran su manera de hacer. Poco a poco, sus piedras talladas poseían ciertas mejoras en las que vemos el germen de algunos conceptos geométricos: la intersección de superficies para generar líneas cortantes, la idea de punto para que existiera un elemento punzante, la idea de simetría para que sus herramientas fueran más bellas... Observemos en la Figura 1.1 cómo los hombres prehistóricos del Paleolítico fueron perfeccionando sus herramientas otorgándoles las características mencionadas anteriormente.

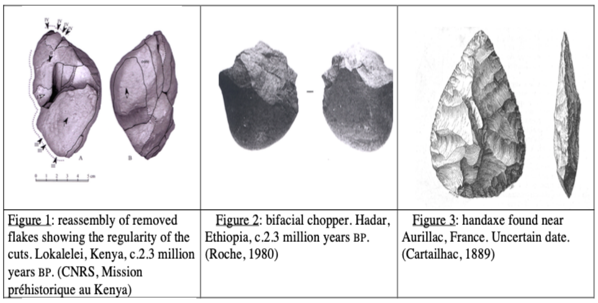


Figura 1.1: Piedras talladas durante el Paleolítico. Tomado de [Keller, 2004]

"La evidencia geométrica donde la reflexión mental se impone, es donde se observa el segmento de la línea como intersección de dos superficies" [Keller, 2001, p.330]. Este hecho podemos percibirlo en la tercera piedra tallada a mano donde dicha idea de línea delimita el borde de una herramienta cortante. En estos pequeños actos embrionarios, tal y como los llama Keller, las ideas matemáticas comienzan a surgir con el deseo de conocer y controlar el entorno. Profundizando en su carácter podemos decir que estas ideas son primarias, intuitivas, poco formales y generadas por medio de la conexión de otras ideas. ¿No son estas las características con las que hemos definido el conocimiento matemático informal?

Si avanzamos en el tiempo situándonos entre el final de la Edad de Piedra; en el Neolítico, y el comienzo de la Edad de los Metales; en la Edad de Cobre, atisbamos una representación que puede ser considerada el germen de la aritmética: los tokens; piedras con diferente forma que servían como moneda de cambio. Los tokens se podría decir que son una primera aproximación a lo que actualmente conocemos como el dinero físico. En épocas anteriores, cuando un hombre prehistórico buscaba hacerse con el control del alimento, utilizaba su fuerza. A partir del Neolítico, la gestión de víveres fue liderada por aquellos hombres que utilizaban su cerebro con el fin de realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones [Schmandt-Besserat, 2017]. Es decir, los tokens fueron una moneda de cambio basada en una correspondencia uno a uno con los alimentos a adquirir. Sus formas eran variadas, como podemos observar en la Figura 1.2, señalando la existencia de un sistema metrológico que cubre una amplia gama de unidades.

Figura 1.2: Tomado de [Schmandt-Besserat, 2017]

Este hecho fue un paso cognitivo extraordinario ya que dio lugar a una primera idea de cardinalidad. Si bien es cierto, los hombres prehistóricos no utilizaban las representaciones abstractas de los números tal y como las conocemos actualmente. Sin embargo, el asociar a cada forma de los tokens un valor concreto según el tipo de producto alimentario, por ejemplo: las ovejas se contabilizaban con discos, los frascos de aceite con ovoides y las pequeñas medidas de grano con conos, establece un sistema de cardinalidad basado en símbolos numéricos especiales [Schmandt-Besserat, 2017].

Así pues, durante la Prehistoria se empezó a atisbar como la acción y el pensamiento estaban fuertemente ligados. Cuando comprendían, gracias a sus acciones, la necesidad de perfeccionar una herramienta comenzaban a reflexionar sobre cómo poder realizarlo. Cuando observaron que la fuerza no era la mejor arma para conseguir el alimento, reflexionaron sobre el establecimiento de un sistema de pago. Esto puede recordarnos a lo que ocurre en la vida del niño durante su educación no formal. El pequeño, adquiere un conocimiento matemático temprano basado en la experiencia que va perfeccionándose gracias al razonamiento sobre las acciones diarias. No es disparatado tomar lo sucedido en la Prehistoria como una metáfora sobre la forma de adquisición del niño sus primeros conocimientos matemáticos. De hecho, si desarrollásemos la metáfora, podríamos colegir que el comienzo de la educación matemática formal es semejante a lo que supuso la aparición del libro *Los Elementos,* de Euclides. Este libro supone el comienzo de una matemática más rigurosa que aparta la experiencia para centrarse en producir conocimientos razonados y elaborados.

...Los corpus pre-euclidianos tienen el fundamento de lo que llamaremos evidencias; es decir, nociones y prácticas no introducidas y no justificadas. Con Euclides eso no ocurre, nada es evidente, todo ha sido pensado. Las matemáticas ya no se contentan con manipular números y figuras sino que buscan justificar su existencia por medio de elementos y de la evidencia solo si uno se ve obligado a recurrir a eso. Se postula, no se supone. [Keller, 2001, p.327]

La divulgación del libro de *Los Elementos* es un hito importante en la historia de la matemática. Su difusión supone un cambio en la manera de pensar de esta ciencia. Hasta ahora, como hemos analizado, primaba la experiencia y la necesidad de dar respuesta al entorno. Sin embargo, “los griegos comienzan a identificar la demostración como un método que se realiza de manera perfecta gracias a la expresión escrita” [Millán, 2004, p.23]. Por ello, la justificación de los hechos a partir de este momento, se vuelve clave y la experiencia pasa a ser prescindible. Comienza una época donde necesidad de definir y argumentar los conceptos tratados es primordial.

Indudablemente, la forma de razonar de la matemática griega supuso el impulso que esta ciencia necesitaba para poder nacer y despegar. Pero esto trasladado a la forma de aprender infantil, no significa que un excesivo formalismo ayude a los niños a mejorar su manera de razonar. Lo que sí es rescatable de la historia de las matemáticas para la pedagogía es la necesidad de reforzar los vínculos entre las acciones humanas sobre el mundo y la generación de ideas. La experiencia demuestra que esto no siempre se hace así en las escuelas y por ello, la aparición de dificultades en relación con las matemáticas es un hecho [Hughes, 1986].

Pasaremos por último a analizar las implicaciones didácticas de lo expuesto en los dos epígrafes anteriores.

1.3. Implicaciones didácticas

Comparemos el conocimiento matemático infantil con otro saber adquirido antes de ser escolarizado, por ejemplo con el lenguaje hablado. Cuando un niño llega a la escuela tiene un cierto dominio del lenguaje. Si bien es cierto, que es posible que su habla sea precaria, que confunda términos o que su lenguaje no se caracterice por su soltura magistral. Sin embargo, en ningún momento le hacemos olvidar lo que ya sabe, ni tampoco le decimos que este saber es inservible o que debe volver a aprenderlo. Al contrario, potenciamos y fomentamos que lo trabaje, motivándole a esforzarse cada día un poco más. Todos aplaudimos cuando un niño dice sus primeras palabras. ¿Por qué no ocurre esto mismo con las ideas que tienen que ver con las matemáticas? Las ideas matemáticas intuitivas son como las primeras palabras del niño en esta ciencia. Como primeras palabras son importantes, debemos alegrarnos de que las posea y motivarle a que las trabaje en su inicio de la educación formal. Recoger todas las nociones que el niño posee y tratar de ampliarlas debe ser, en gran medida, el trabajo esencial del maestro.

La llegada a la educación formal está plagada de pensamientos propios adquiridos por el niño que debemos potenciar. “Los niños entran a la escuela con gran cantidad de conocimientos informales o intuitivos sobre las matemáticas que pueden servir como base para desarrollar la comprensión en esta ciencia” [Carpenter, 1999, p.5] . Beneficiarse de sus conocimientos usándolos como cimiento sobre el que construir es fundamental por dos motivos: la similitud con la metodología utilizada por los niños al ampliar su conocimiento matemático informal basada en la concatenación de ideas y la necesidad de hacer ver que las matemáticas no son un saber nuevo. Sin embargo, obviar conocimientos infantiles menospreciando competencias que el niño ya conoce o convertir dichos conocimientos en una amenaza para la adquisición del “verdadero saber” es una praxis poco adecuada. Si olvidamos el conocimiento alcanzado por el pequeño antes de llegar a la escuela buscando trabajar las matemáticas “desde el principio”, estas se convierten en un mundo desconocido para el niño sin ninguna ligazón lógica con lo que ya sabe. Generamos así, un abismo entre sus competencias básicas y la matemática más formal.

Ocasionar un distanciamiento entre el pensamiento matemático infantil y la instrucción formal puede originar temor por las matemáticas. Los niños desde pequeños aprenden conceptos por sí mismos de manera intuitiva. No necesitan una explicación lógica de por qué su conocimiento es correcto o no lo es. Por medio de la experiencia llegan a conclusiones que para ellos son válidas. Pero de repente, con su llegada a una educación formal, un conocimiento que parecía tan ingenuo, tan fácil de adquirir, se convierte en un saber abstracto y complicado. Al tratar de situar a todos los niños en un mismo nivel matemático educativo, obviamos los conocimientos previos, quizás porque nos parecen demasiado simples o porque suponemos, con un gran margen de error, que todo el mundo tiene las mismas nociones. Es necesario hacer un esfuerzo para buscar dichos conocimientos primarios y para elaborar propuestas didácticas a partir de ellos. “Los niños no aceptan y aprenden de inmediato la matemática formal que se imparte en la escuela, porque choca con sus pautas actuales de pensamiento”. [Baroody, 1991, p.40]

Si no enlazamos la educación matemática con lo que aprenden día a día y si no aprovechamos la fuerza educativa de los sentidos, las matemáticas pueden pasar a ser para ellos, no solo aburridas, sino temidas como decían [Giorgio and Millán, 2012]. Cuando la educación formal no corresponde al nivel en el que el niño se encuentra, estos tienden a percibir las matemáticas como algo difícil, misterioso y hasta amenazante [Baroody, 1991, p.40]. Así pues, toda esta frustración puede llevar al niño a intentar procesos mecánicos que, en periodos cortos, le serán de ayuda pero, que a la larga, no le serán beneficiosos. La mecánica y la memorización no ayudan al aprendizaje ya que no implica comprensión.

Las actividades de memorización llevan a los niños a adquirir rituales memorísticos que pueden dificultar el crecimiento de la comprensión. La diferencia principal del aprendizaje radica en si se les pide a los niños que acepten desde fuera una disciplina ya organizada, que puede que comprendan o no, o si se les invita a descubrir las ideas de dicha disciplina por sí mismos. [Tolchinsky, 2003, p.102]

He ahí nuestro objetivo a la par que nuestra necesidad. Buscamos que los niños comprendan. La comprensión se logra gracias a la adquisición de un conocimiento por medio de la conexión de ideas ya existentes. Ser capaz de relacionar unas nociones básicas, logradas a través de la experiencia, con unas ideas más elaboradas, fruto de la escolarización formal, hace que su aprendizaje se torne mucho más interesante. Mostrar a los niños la necesidad de un estudio comprensivo basado en todos sus conocimientos anteriores, ayuda a que la matemática deje de ser temida. Guiarnos por la comprensión y por la necesidad de dar respuesta al entorno es clave para que el niño entienda que por medio de cualquier deducción lógica podrá alcanzar el conocimiento. Esta es la lección que hemos aprendido de la Historia.

Como hemos dicho anteriormente los niños comienzan su escolarización formal con ciertos conocimientos matemáticos adquiridos a través de la experiencia. Dichos conocimientos están basados en la intuición, la observación y la manipulación. El día a día está plagado de situaciones que promueven el aprendizaje de las matemáticas. Es cierto que estos conocimientos carecen de rigor, son intuitivos, primarios, poco formales y generados por medio de la conexión de ideas. Sin embargo, la matemática también tuvo un periodo de gestación durante la Prehistoria antes de desarrollarse formalmente. Es fundamental situar estas competencias como los cimientos sólidos que darán lugar a un saber mucho más meditado y profundo. Los niños necesitan creer en sus primeras ideas, conocer su valor y fijar en ellas las bases para un aprendizaje confiado de las matemáticas. Necesitamos trabajar por y para los niños, demostrarles que todo conocimiento es importante y las matemáticas son un saber omnipresente.

Este trabajo Fin de Máster va a hacer una propuesta de materiales y actividades para la observación de concepciones ingenuas de simetría en Educación Infantil siguiendo las claves que hemos propuesto en este epígrafe: proporcionar experiencias que permitan la emergencia de este concepto en su mente. Comenzaremos dedicando un capítulo a la descripción del concepto de simetría desde un punto de vista formal con el objeto de que nos sirva de guía para el diseño de estas experiencias.

Capítulo 2

Concepto de simetría en matemáticas

El concepto de simetría se presenta en la literatura desde puntos de vista muy diversos. En nuestro caso adoptaremos una perspectiva dinámica clásica según la cual las simetrías son un caso particular de los movimientos euclídeos, es decir, transformaciones que preservan las distancias y los ángulos. En este capítulo daremos las bases matemáticas sobre la simetría y veremos algunos ejemplos de esta.

2.1. Preliminares

El objetivo de este capítulo es definir, clasificar e interpretar los movimientos Euclídeos reales. Por este motivo y mientras no se indique lo contrario trabajaremos en $\mathbb{R}$. Con el objetivo de definirlos necesitamos comenzar abordando conceptos como espacio afín, transformación afín y distancia.

Definición 2.1. *(**Espacio afín**) Un espacio afín sobre $\mathbb{R}$ es una terna, $(\mathbb{A}, V, \varphi)$, donde $\mathbb{A}$ es un conjunto no vacío, V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y φ es un aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{A}\times\mathbb{A} & \to & V \\ & (a,b) & \mapsto & \varphi(a,b) \end{array}$$

que cumple las dos siguientes propiedades:

- *Para cada $a \in \mathbb{A}$, la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a: & \mathbb{A} & \to & V \\ & b & \mapsto & \varphi(a,b) \end{array}$$

  es biyectiva.

- *Identidad de Chasles: $\varphi(a,b) + \varphi(b,c) = \varphi(a,c)\ \forall\ a,\ b,\ c \in \mathbb{A}$.*

Observación 2.1. *Dados dos puntos cualquiera a, b de $\mathbb{A}$ podemos interpretar el vector correspondiente $\varphi(a,b) \in V$ como el vector "con origen en a y final en b" que denotaremos como $\vec{ab}$. La primera propiedad de esta aplicación nos viene a decir que cualquier punto puede jugar el papel de "origen" del espacio $\mathbb{A}$ y que, fijado un a cualquiera, podemos "llevar" todo el espacio vectorial V biyectivamente sobre el conjunto $\mathbb{A}$ "situando el vector nulo sobre el punto a". De esta forma se consigue que no haya ningún punto especial, es decir, que todos los puntos puedan jugar el papel de "origen", conservando al mismo tiempo las ventajas del espacio vectorial.*

Definición 2.2. *(**Variedad lineal**) Sea $(\mathbb{A},V,\varphi)$ un espacio afín. Dados $a\in\mathbb{A}$ un punto y $W\subset V$ un subespacio vectorial, consideramos el conjunto $a+W$ dado por*

$$a+W=\{b\in\mathbb{A}\mid \overrightarrow{ab}\in W\},$$

donde $\overrightarrow{ab}$ está definido como el único vector $\vec{v}$ tal que $\varphi(a,b)=\vec{v}$.

Llamamos variedad lineal *que pasa por a con dirección W a este conjunto.*

Observación 2.2. *De la definición es claro que*

$$a+W=\{b\in\mathbb{A}\mid b=a+\vec{v},\vec{v}\in W\},$$

donde $a+\vec{v}$ es el único punto $b\in\mathbb{A}$ tal que $\varphi(a,b)=\vec{v}$.

Definición 2.3. *(**Aplicación afín**) Una aplicación afín entre dos espacios afines; $(\mathbb{A},V_1,\varphi_1)$ y $(\mathbb{B},V_2,\varphi_2)$ es una aplicación $f:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ tal que existe una aplicación lineal $\tilde{f}:V_1\to V_2$ cumpliendo*

$$\overrightarrow{f(a)f(b)}=\tilde{f}(\overrightarrow{ab}).$$

para todo $a,b\in\mathbb{A}$. La aplicación $\tilde{f}$ se llama aplicación lineal asociada a f.

Veamos algunos ejemplos de aplicaciones afines y sus características.

- **Traslación.** Sea $(\mathbb{A},V,\varphi)$ un espacio afín y $\vec{v}\in V$. La traslación es una aplicación afín $T_{\vec{v}}:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ dada por $T_{\vec{v}}(a)=a+\vec{v}$, es decir, existe un único punto b tal que $\varphi(a,b)=\vec{v}$. A $\vec{v}$ se le conoce como el vector traslación y es el único punto. Por la ley del paralelogramo, que afirma que $\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{cd}$ si y solo si $\overrightarrow{ac}=\overrightarrow{bd}$, se sigue que para todo $a,b\in\mathbb{A}$

  $$\overrightarrow{T_{\vec{v}}(a)T_{\vec{v}}(b)}=\overrightarrow{ab},$$

  lo que implica que $T_{\vec{v}}$ es afín y su aplicación lineal asociada es la identidad, es decir, $\tilde{T}_{\vec{v}}=id_V$.

  El recíproco también es cierto. Supongamos que $f:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ es una aplicación afín tal que $\tilde{f}=id_V$, es decir, $\overrightarrow{f(a)f(b)}=\tilde{f}(\overrightarrow{ab})=\overrightarrow{ab}$ para todo $a,b\in\mathbb{A}$. Por la ley del paralelogramo se sigue que $\overrightarrow{af(a)}=\overrightarrow{bf(b)}$. Llamaremos $\overrightarrow{v}$ a ese vector. Entonces, $f(p)=p+\overrightarrow{pf(p)}=p+\overrightarrow{v}=T_{\vec{v}}(p)$ para todo punto p, es decir, $f=T_{\vec{v}}$ es la traslación de vector $\vec{v}$.

  Como conclusión tenemos que una aplicación afín es una traslación si y solo si su aplicación lineal asociada es la identidad.

Definición 2.4. *(**Subespacio invariante**) Si poseemos $(\mathbb{A},V,\varphi)$ un espacio afín, $f:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ una aplicación afín y S un subespacio afín de $\mathbb{A}$. Llamaremos a S subespacio invariante de f si $f(S)\subset S$.*

Observación 2.3. *Tengamos en cuenta que cuando nuestra subvariedad lineal invariante tiene dimensión 0, $T_{\vec{v}}$ esta tendrá un punto fijo si y solo si $\vec{v}=0$, siendo la aplicación la identidad de $\mathbb{A}$. Y por otro lado, su dimensión será 1, es decir la subvariedad invariante posee una recta invariante $r\equiv P+\langle u\rangle$ por f, si y solo si se cumplen estas condiciones:*

- *$\langle\tilde{f}(\vec{u})\rangle\subset\langle u\rangle\Leftrightarrow\tilde{f}(\vec{u})=\lambda\vec{u}$; es decir, $\vec{u}$ es un vector propio de $\tilde{f}$.*

- $\overrightarrow{Pf(P)} \subset \langle \vec{u} \rangle$.

- **Homotecia.** Una aplicación afín $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ se llama homotecia si $\tilde{f} = rid_V$ para algún escalar $r \neq 0, 1$. Al escalar r se le conoce como la razón de la homotecia.

  Observar que si $\tilde{f}$ es la aplicación nula, es decir $r = 0$, entonces $\overrightarrow{f(a)f(b)} = 0$. Esto significa que $f(a) = f(b)$ para todo $a, b \in \mathbb{A}$ y por tanto f es la aplicación constante.

  En el caso en el que $r = 1$, $\tilde{f} = id_V$, es decir la homotecia f es la identidad.

- **Reflexión afín** Una aplicación afín $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ se llama reflexión afín si $f \circ f = Id_{\mathbb{A}}$.

  Como sabemos que la aplicación lineal $\tilde{f}$ cumple que $\tilde{f} \circ \tilde{f} = \widetilde{f \circ f} = \widetilde{Id_{\mathbb{A}}} = Id_V$. Esto implica que el polinomio mínimo $m_{\tilde{f}}(x)$ de $\tilde{f}$ divide al polinomio

  $$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

  ya que el polinomio característico es múltiplo del polinomio mínimo. Por lo tanto, tenemos como posibles valores propios de $\tilde{f}$ el 1 el -1 o ambos. Dependiendo de si $m_{\tilde{f}}(x) = x-1, x+1$ o x^2-1. Veamos con detalle cada uno de los tres casos posibles.

  - **Caso** $m_{\tilde{f}}(x) = x-1$. En este caso $\tilde{f} = Id_V$ y por lo tanto f es una traslación. Pero como f tiene algún punto fijo, necesariamente f es la identidad.
  - **Caso** $m_{\tilde{f}}(x) = x+1$**.** En este caso $\tilde{f} = -Id_V$, es decir, es f una homotecia de razón -1 y sabemos que existe un único punto fijo p que es el centro de la homotecia. Esta aplicación también se llama simetría central de centro p.
  - **Caso** $m_{\tilde{f}}(x) = x^2 - 1$**.** En este caso los valores propios son -1 y 1, luego el espacio vectorial V se descompone en $V = V_1 \oplus V_{-1}$, donde V_λ es el subespacio fundamental asociado al valor propio λ.

Definición 2.5. *(**Base y dirección de la reflexión**) El conjunto de puntos fijos de una reflexión afín f se denomina base de la reflexión. El espacio invariante V_{-1} se denomina dirección de la reflexión.*

Ejemplo 2.1. *Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión $n = 2$. Podemos considerar que la base puede ser un punto definiendo una reflexión central o una recta definiendo una reflexión axial.*

Ejemplo 2.2. *En el caso en el que $\mathbb{A}$ sea un espacio afín de dimensión $n = 3$ tenemos una situación más. La base puede volver a ser un punto o una recta, pero también un plano definiendo así la simetría especular*

Definición 2.6. *(**Baricentro**) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre $\mathbb{K}$. Dados r puntos $p_1, ..., p_r$ de $\mathbb{A}$, el baricentro de $p_1, ..., p_r$ es el punto b dado por*

$$b = p_1 + \frac{1}{r}(\overrightarrow{p_1p_2} + ... + \overrightarrow{p_1p_r})$$

Observación 2.4. *Observar que para poder hablar del baricentro de r puntos es necesario que exista $\frac{1}{r}$ en el cuerpo $\mathbb{K}$. El baricentro puede interpretarse como el centro de gravedad de los r puntos.*

A lo largo de este epígrafe hemos observado diferentes tipos de aplicaciones afines que nos ayudarán a explicar los movimientos euclídeos, pero antes de llegar a este punto necesitaremos definir qué es un espacio afín euclídeo.

Un espacio afín euclídeo es un espacio afín, ($\mathbb{A}$, V, φ), tal que V es un espacio vectorial euclídeo. Recordemos que un espacio vectorial euclídeo es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de un producto escalar, es decir, de una aplicación bilineal, simétrica y definida positiva

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R},$$

tal que dados dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$, denotaremos su producto escalar por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Definición 2.7. *(**Distancia**) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo. Dados dos puntos cualesquiera $a, b \in \mathbb{A}$, definimos la* distancia *entre a y b por $d(a,b) = \sqrt{\langle ab, ab \rangle} = |\overrightarrow{ab}|$.*

Denominamos a d distancia ya que es fácil comprobar que verifica las propiedades de distancia:

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{A} \times \mathbb{A} & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \mapsto & d(a,b) \end{array}$$

que verifica las siguientes propiedades

- $d(a,b) \geq 0$
- $d(a,b) = 0$ si y solo si $a = b$
- $d(a,b) = d(b,a)$
- Desigualdad triangular $d(a,b) \geq d(a,c) + d(c,b)\ \forall a,b,c \in \mathbb{A}$.

2.2. Definición movimientos euclídeos

Definición 2.8. *(**Movimiento euclídeo**) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo. Una aplicación*

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$$

se llama movimiento euclídeo *si $d(f(a), f(b)) = d(a,b)\ \forall a, b \in \mathbb{A}$.*

Por lo tanto gracias a la propia definición podemos concluir que los movimientos euclídeos serán aquellas aplicaciones que preserven las distancias. Una característica propia de dichos movimientos es que se encuentran muy relacionados con las isometrías.

Definición 2.9. *(**Isometría**) Una isometría es una aplicación biyectiva tal que F: $V \to V$ cumple que:*

$$\langle F(\vec{u}), F(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$, es decir, F preserva el producto escalar.

Recordemos que dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$ se dicen ortogonales *si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ y dado un subespacio $U \subset V$ definimos su ortogonal $U^\perp$ como*

$$U^\perp = \{\vec{v} \in V \mid \vec{u} \perp \vec{v}, \forall\, \vec{u} \in U\}.$$

Por lo definido anteriormente las isometrías preservan el producto escalar. Sin embargo, también preservan otras características y poseen otras propiedades de gran utilidad a la hora de describir los movimientos euclídeos. Veámoslas.

Propiedades 2.1.

1. *Una isometría F cumple las siguientes propiedades:*
   - *F preserva módulos, es decir,* $|F(u)| = |u|$
   - *F preserva el producto escalar, es decir,* $\langle u, v\rangle = \langle F(u), F(v)\rangle$
   - $F(u)$ *preserva la ortogonalidad, es decir, si* $u \perp v \Rightarrow F(u) \perp F(v)$
   - $F(u)$ *preserva los subespacios, es decir, si* $U \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow F(U)^{\perp} = F(U^{\perp})$
   - $F(u)$ *preserva las bases ortogonales, es decir, si B es base ortogonal de* $\mathbb{R}^n$, $F(B)$ *también lo es.*
   - $F(u)$ *preserva las bases ortonormales, es decir, si B es base ortonormal de* $\mathbb{R}^n$, $F(B)$ *también lo es.*
2. *Una isometría, F, tiene como únicos valores propios reales* $\lambda = \pm 1$.

   Demostración. Demostremos la propiedad 2. Supongamos que $\vec{u}, \vec{v}$ son dos vectores propios asociados al valor propio λ. Por definición de valor propio sabemos que $F(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$. Entonces,

   $$\langle F(\vec{u}), F(\vec{v})\rangle = \langle \lambda\vec{u}, \lambda\vec{v}\rangle = \lambda^2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle.$$

   Además, también sabemos que por ser F una isometría preserva el producto escalar. Por lo tanto,

   $$\langle F(\vec{u}), F(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle.$$

   Así pues, sabemos que

   $$\lambda^2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle.$$

   Por lo que, $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$. □

Proposición 2.1. *Sea* $\mathbb{A}$ *un espacio afín euclídeo. Una aplicación* $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *es un* movimiento euclídeo *si y solo si* f *es afín y su aplicación lineal asociada* $\tilde{f}$ *es una isometría.*

Demostración. Supongamos primero que f es afín y su aplicación lineal asociada $\tilde{f}$ es una isometría; entonces

$$d(f(a), f(b)) = |\overrightarrow{f(a)f(b)}| = |\tilde{f}(\overrightarrow{ab})| = |\overrightarrow{ab}| = d(a,b).$$

Recíprocamente, supongamos que f preserva la distancia. Fijado un punto cualquiera p de $\mathbb{A}$, todo vector $\vec{u} \in V$ se expresa de única forma como $\vec{u} = \overrightarrow{pa}$ siendo $a \in \mathbb{A}$. Definimos la aplicación $F : V \to V$ por

$$F(\vec{u}) = \overrightarrow{f(p)f(a)}$$

para todo $\vec{u} \in V$. Si vemos que F preserva el producto escalar entonces tendremos que F es lineal, y por tanto f será afín con aplicación lineal asociada $\tilde{f} = F$.

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in V$ dos vectores cuales quiera, y sean $a, b \in \mathbb{A}$ puntos tales que $\vec{u} = \overrightarrow{pa}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{pb}$. Entonces,

$$d(a,b)^2 = |\overrightarrow{ab}|^2 = |\overrightarrow{ap}| + |\overrightarrow{pb}|^2 =$$

$$|\overrightarrow{ap}|^2+|\overrightarrow{pb}|^2+2\langle\overrightarrow{ap},\overrightarrow{pb}\rangle =$$
$$d(a,p)^2+d(b,p)^2+2\langle\overrightarrow{ap},\overrightarrow{pb}\rangle,$$

y

$$d(f(a),f(b))^2 = |\overrightarrow{f(a)f(b)}|^2 = |\overrightarrow{f(a)f(p)}+\overrightarrow{f(p)f(b)}|^2 =$$
$$|\overrightarrow{f(a)f(p)}|^2+|\overrightarrow{f(p)f(b)}|^2+2\langle\overrightarrow{f(a)f(p)},\overrightarrow{f(p)f(b)}\rangle =$$
$$d(f(a),f(p))^2+d(f(b),f(p))^2+2\langle\overrightarrow{f(a)f(p)},\overrightarrow{f(p)f(b)}\rangle.$$

Ya que $d(a,p) = d(f(a),f(p))$ y $d(p,b) = d(f(p),f(b))$, podemos decir que:

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \langle\overrightarrow{ap},\overrightarrow{bp}\rangle = \langle\overrightarrow{f(a)f(p)},\overrightarrow{f(b)f(p)}\rangle = \langle F(\vec{u}),F(\vec{v})\rangle.$$

□

A continuación, veamos que las aplicaciones afines anteriormente nombradas son movimientos euclídeos.

- **Traslaciones.** Sea $f = T_{\vec{u}}$ una traslación de vector $\vec{u}$. Dado que $\tilde{T}_{\vec{u}} = id_V$, toda traslación es trivialmente un movimiento euclídeo.
- **Homotecias.** Si f es una homotecia entonces $\tilde{f} = \rho id_V$, luego f es movimiento euclídeo si y solo si $\rho = \pm 1$, es decir, si y solo si f es la identidad o una simetría central por lo descrito anteriormente.
- **Reflexión euclídea.** Sea f una reflexión afín, es decir, $f^2 = id_{\mathbb{A}}$. Entonces $\tilde{f}$ es diagonalizable y por lo tanto $V = E_{\tilde{f}}(-1)\oplus E_{\tilde{f}}(1)$, es decir, $E_{\tilde{f}}(-1) = E_{\tilde{f}}(1)^{\perp}$. Por lo tanto, para que una reflexión sea movimiento euclídeo la reflexión debe ser movimiento de una variedad lineal en la dirección de su variedad ortogonal.

2.2.1. Vector deslizante.

En esta parte de la sección vamos clasificar los movimientos euclídeos. Pero antes, veremos que los movimientos euclídeos que no tienen puntos fijos pueden descomponerse como una traslación seguida de un movimiento euclídeo con algún punto fijo. La dirección que define esta traslación viene dada por el **vector deslizante.**

Lema 2.1. *Sea $(V,\langle,\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y $\tilde{f} : V \to V$ una isometría. Entonces, $Im(\tilde{f}-id) = Ker(\tilde{f}-id)^{\perp}$*

Demostración. Ya que $\frac{V}{Ker(\tilde{f}-id)} \cong Im(\tilde{f}-id)$ y $V = Ker(\tilde{f}-id)\oplus Ker(\tilde{f}-id)^{\perp}$, los subespacios vectoriales $Im(\tilde{f}-id)$ y $Ker(\tilde{f}-id)^{\perp}$ tiene la misma dimensión, luego para ver que son iguales basta probar que uno está contenido en el otro.

Sea $\vec{u}\in Ker(\tilde{f}-id)$, es decir, $\tilde{f}(\vec{u})$. Entonces, para todo $\vec{v}\in V$ se cumple que

$$\langle(\tilde{f}-id)(\vec{v}),\vec{u}\rangle = \langle\tilde{f}(\vec{v}),\vec{u}\rangle - \langle\vec{v},\vec{u}\rangle = \langle\tilde{f}(\vec{v}),\tilde{f}(\vec{u})\rangle - \langle\vec{v},\vec{u}\rangle = 0,$$

Es decir, $Im(\tilde{f}-id) \subset Ker(\tilde{f}-id)^{\perp}$. □

Observemos que si $\tilde{f}$ no tiene vectores fijos entonces el lema anterior es trivial ya que $Ker(\tilde{f}-id)^{\perp} = \vec{0}^{\perp} = V$.

Proposición 2.2. *Sea $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un movimiento euclídeo con una aplicación lineal asociada $\tilde{f}$. Para cada punto $a \in \mathbb{A}$, descomponemos el vector $\overrightarrow{af(a)} = \vec{u} + \vec{w}$ con respecto a la descomposición $V = Ker(\tilde{f} - id) \oplus Ker(\tilde{f} - id)^{\perp}$. El vector $\vec{u}$ no depende del punto a.*

Demostración. Sea b otro punto de $\mathbb{A}$ y veamos que la componente del vector $\overrightarrow{bf(b)}$ en $Ker(\tilde{f} - id)$ es igual a $\vec{u}$. Para ello, observamos que

$$\overrightarrow{af(a)} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bf(b)} + \overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bf(b)} + \tilde{f}\overrightarrow{ab} = (\tilde{f} - id)(\overrightarrow{ba}) + \overrightarrow{bf(b)}.$$

Por el lema anterior tenemos que $(\tilde{f} - id)(\overrightarrow{ba}) \in Im(\tilde{f} - id) = Ker(\tilde{f} - id)^{\perp}$, lo que implica que la componente en el $Ker(\tilde{f} - id)$ obtenida al descomponer el vector $\overrightarrow{bf(b)}$ es la suma directa de $V = Ker(\tilde{f} - id) \oplus Ker(\tilde{f} - id)^{\perp}$ es igual a $\vec{u}$. Dicho de otra manera, que $\vec{u}$ no depende del punto a. □

Definición 2.10. ***(Vector deslizante)*** *Sea $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un movimiento euclídeo con aplicación lineal asociada $\tilde{f}$. Dado un punto $a \in \mathbb{A}$ cualquiera, denotamos por $\vec{u}_f$ la componente en el $Ker(\tilde{f} - id)$ obtenida al descomponer el vector $\overrightarrow{af(a)}$ en suma directa $V = Ker(\tilde{f} - id) \oplus Ker(\tilde{f} - id)^{\perp}$. Llamamos a $\vec{u}_f$ vector deslizante de f y diremos que $\tau_f = |\vec{u}_f|$ es el módulo del vector deslizante de f.*

La proposición 2.2 muestra que el vector deslizante $\vec{u}_f$ no depende del punto elegido para su definición, y por tanto, como su notación indica, $\vec{u}_f$ solo depende de f. Cabe destacar que si el vector deslizante $\vec{u}_f$ es no nulo, entonces es un vector propio asociado al valor propio 1.

Lema 2.2. *Todo movimiento euclídeo sin puntos fijos posee al menos una recta invariante. Además su dirección viene dada por el vector deslizante y todo punto sobre dicha recta se desplaza con la magnitud del módulo deslizante.*

Demostración. Denotemos por f un movimiento euclídeo cualquiera sin puntos fijos. Tomemos $P \in \mathbb{A}$ un punto cualquiera. Entonces podemos descomponer $\overrightarrow{Pf(P)} = \vec{u}_f + \vec{v}$ donde $\vec{u}_f \in Ker(\tilde{f} - id)$ y $\vec{v} \in Ker(\tilde{f} - id)^{\perp}$ como en la definición anterior. Dado que $Ker(\tilde{f} - id)^{\perp} = Im(\tilde{f} - id)$ entonces $\vec{v} = (\tilde{f} - id)(\vec{w}) = \tilde{f}(\vec{w}) - \vec{w}$ para cierto $\vec{w} \in V$, es decir,

$$\tilde{f}(\vec{w}) = \vec{v} + \vec{w}$$

Consideremos que el punto $Q := P - \vec{w}$. Por el lema 2.1 es claro que

$$f(Q) = f(P) - \tilde{f}(\vec{w}) = P + (\vec{u}_f + \vec{v}) - (\vec{v} + \vec{w} = (P - \vec{w}) + \vec{u}_f = Q + \vec{u}_f$$

Por lo tanto la recta $l := Q + \langle \vec{u}_f \rangle$ es invariante por f y su dirección es $\langle \vec{u}_f \rangle$ como queríamos demostrar. □

Utilizando el concepto de vector deslizante, reduciremos la clasificación de movimientos euclídeos a aquellos que tengan al menos un punto fijo. Esto que da reflejado en el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Supongamos que $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es un movimiento euclídeo sin puntos fijos, entonces $g = f \circ T_{-\vec{u}_f} = T_{-\vec{u}_f} \circ f$ donde g es un movimiento euclídeo con algún punto fijo.*

Demostración. Como observación general, si $P \in \mathbb{A}$ no es un punto fijo de f y tomamos $\vec{u} := \overrightarrow{Pf(P)} \neq \vec{0}$, entonces $T_{-\vec{u}} \circ f$ tiene a P como punto fijo ya que,

$$(T_{-\vec{u}} \circ f)(P) = T_{-\vec{u}}(f(P)) = f(P) - \vec{u} = f(P) + \overrightarrow{f(P)P} = P$$

Por el lema 2.2 sabemos que debe existir una recta l invariante de dirección $\vec{u}_f$. Tomemos $Q \in l$. Dado $\overrightarrow{Qf(Q)} = \vec{u}_f$, entonces por lo anterior $T_{-\vec{u}} \circ f$ tiene a Q como punto fijo. Además $\tilde{f}(\vec{u}_f) = \vec{u}_f$ y por tanto $f \circ T_{-\vec{u}_f} = T_{-\vec{u}_f} \circ f$. □

Para clasificar los movimientos euclídeos con al menos un punto fijo basta conocer la clasificación de las isometrías.

Teorema 2.2. *Toda isometría $F : V \to V$ admite una base ortonormal B respecto de la cual $M(F,B)$ es de la forma*

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & S_{\alpha_1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_{\alpha_r} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

donde I_n es la matriz identidad de rango n y $S_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

Definición. (**Referencia afín ortonormal**) Sea $(\mathbb{A}, V, \varphi)$ un espacio afín euclídeo de dimensión n. Una referencia afín ortonormal es un conjunto $R = \{P, B\}$, donde P es un punto de $\mathbb{A}$ y B es una base ortonormal de V. El punto P se llama origen de la referencia.

Teorema 2.3. *2.2 Todo movimiento euclídeo admite una referencia afín ortonormal respecto de la cual su matriz asociada es de la forma*

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} I_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \tau_f \\ 0 & -I_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{\alpha_1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_{\alpha_r} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{2.2}$$

Demostración. Tomemos una base ortonormal B como en el Teorema 2.2 de modo que la matriz es igual a

$$M = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & S_{\alpha_1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_{\alpha_r} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Si f tiene algún punto fijo $P \in \mathbb{A}$, entonces basta tomar $R = \{P, B\}$ para tener

$$M(f,R) = \left[\begin{smallmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right].$$

Por último, si f no posee puntos fijos, entonces tenemos que $P \in l$ en la recta invariante del lema 2.2 de modo que $f = g \circ T_{\vec{u}_f} = T_{\vec{u}_f} \circ g, \tilde{f} = \tilde{g}$ y g tiene a P como punto fijo. Ademas se observa que $\vec{u}_f \in E_{\tilde{f}}(1) \neq \{0\}$ y por tanto podemos completar $\vec{e}_1 := \dfrac{\vec{u}_f}{\tau_f}$ a una base ortonormal de $E_{\tilde{f}}(1)$. Completamos esta base a una base ortonormal de V de modo que

$$M(\tilde{f}, B) = M(\tilde{g}, B) = M.$$

Ahora tomando $R = \{P,B\}$ tenemos que $f(p) = P + \tau_f \vec{e}_1$ y por lo tanto

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} I_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \tau_f \\ 0 & -I_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{\alpha_1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_{\alpha_r} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{2.4}$$

□

2.2.2. Clasificación de los movimientos euclídeos en $\mathbb{R}^2$

Apliquemos la clasificación general vista anteriormente al caso de movimientos euclídeos en dimensión 2, es decir, en el plano.

Por el Teorema 2.2 sabemos que todo movimiento euclídeo de $\mathbb{R}^2$ debe admitir una de las siguientes matrices respecto de un sistema de referencia ortonormal adecuado:

1. $T_d = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

2. $S_d = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

3. $R(\alpha) = \left[\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

donde $d \geq 0$ y de hecho $d = 0$ si y solo si f tiene algún punto fijo. Los movimientos de tipo T_d son traslaciones donde d refleja la distancia entre un punto y su trasladado. Los movimientos de tipo S_d se denominan *reflexiones deslizantes* en la dirección del vector $\vec{e}_1$ y de módulo $d = |\vec{u}_f|$. Por último los movimientos de tipo $R(\alpha)$ son *rotaciones* de ángulo $\alpha \in (0, 2\pi)$. Estas últimas, al no tener el valor propio 1 siempre tiene un punto fijo, por eso $d = 0$.

2.3. El concepto de simetría de un objeto

A lo largo de este capítulo hemos definido las isometrías. Ahora nos centraremos en definir qué es la simetría de un objeto y en ver sus diferentes tipos. Este capítulo será fundamental para la posterior exploración realizada con los niños ya que nos dará un marco teórico sobre el que evidenciar nuestro análisis de las sesiones.

Definición 2.11. *Sea un subconjunto S de un espacio afín euclídeo $(\mathbb{A}, V, \varphi)$, definiremos su conjunto de simetrías como*

$$Sim_{\mathbb{A}}(S) = \{f : \mathbb{A} \to \mathbb{A} \text{ movimiento afín } \mid f(S) = S\}.$$

Observación 2.5. *Toda simetría de un conjunto compacto triangulable preserva su baricentro. En el caso de un triángulo es inmediato y en el caso general se usa una triangulación finita.*

Situándonos en $\mathbb{R}^2$ veamos los diferentes ejemplos de simetría.

Ejemplo 2.3. *Tomemos un polígono regular de n lados; P_n y veamos cuáles son sus simetrías en $\mathbb{R}^2$.*

- *Rotación. Es claro que P_n lados posee n rotaciones de ángulo $\frac{2\pi}{n}$. Por lo tanto, podemos definir este movimiento de rotación por $R_{2\pi/n} = \rho$. Tengamos en cuenta que al aplicar ρ n veces a P_n, es decir al componer la aplicación ρ n veces obtendremos la identidad, $\rho^n = 1$. Este movimiento mantiene únicamente un punto fijo; el baricentro del polígono.*

- *Reflexión axial. P_n también presenta siempre al menos una reflexión axial. Denotando a esta reflexión por σ podemos afirmar que al componer dos veces esta aplicación obtendremos de nuevo la identidad; $\sigma^2 = 1$. Este movimiento posee una recta invariante de puntos fijos.*

Ahora bien, el grupo de simetrías de un polígono regular de n lados no está formado únicamente por estas simetrías, sino también por la composición de cualquiera de ellas. Así generamos el grupo de simetrías de P_n

$$Sim_{\mathbb{R}^2}(P_n) = \{\rho^i \sigma^j \mid i = 0, ..., n-1, j = 0, 1\}$$

Es decir, el grupo de simetrías de P_n es el grupo diédrico $\mathbb{D}_{2n}$.

Ejemplo 2.4. *Supongamos ahora que estrellamos un polígono regular, P_n. Para visualizarlo de manera más sencilla, supondremos que trabajamos con un octógono regular. Mostramos en la Figura 2.1 dicho octógono estrellado.*

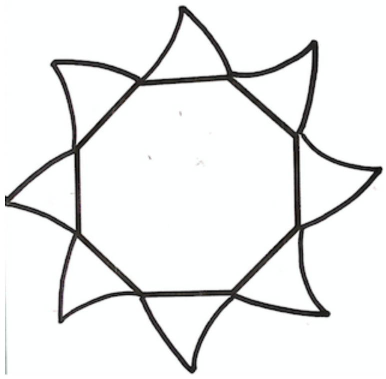


Figura 2.1: Polígono estrellado. Elaboración propia.

En este caso al no ser las puntas triángulos, esta figura no poseerá las mismas simetrías que la presentada anteriormente. Observemos que, aunque las rotaciones sigue preservándolas; 8 rotaciones de ángulo $\frac{\pi}{4}$ que nos devolverán la figura original, la reflexión horizontal ya no puede realizarse. La forma curva de las puntas impide la existencia de un eje horizontal de reflexión.

Por lo tanto, si generalizamos este caso hablando de un polígono de n lados estrellado, E_n, tal y como lo hemos realizado en la imagen anterior. Observemos que sus únicas simetrías son las rotaciones de ángulo$\frac{2\pi}{n}$ y por lo tanto $Sim_{\mathbb{R}^2}(E_n) = \mathbb{Z}_n$.

Ejemplo 2.5. *Pensemos ahora en las huellas que dejan nuestros pies al pisar la arena. Al contemplarlas podemos observar como, de una huella a la siguiente, observamos una marca* *que está desplazada y reflejada con respecto a línea de nuestro desplazamiento. Esta composición de traslación y reflexión axial se denomina* reflexión deslizante *(ver §2.2.2). Esta reflexión deslizante formaría un subgrupo cíclico infinito de simetrías de un* paseo infinito por la arena. *En general, las simetrías por reflexión deslizante, si existen, forman un subgrupo infinito del grupo de simetrías de un objeto en el plano.*

Ejemplo 2.6. *Observamos también que cada dos huellas se produce una traslación, es decir, la composición de estas dos reflexiones deslizantes es una traslación. Las simetrías por traslación, si existen, también forman un subgrupo infinito del grupo de simetrías de un objeto.*

Ejemplo 2.7. *Supongamos ahora que observamos una montaña a cuyo pie se encuentra un lago. Se trata de una reflexión con respecto a una línea imaginaria que se dibuja entre el pie de la montaña y el agua. Esta línea es la base de la reflexión. Gracias al reflejo en el agua podemos observar una reflexión axial de eje esta línea imaginaria.*

Como podemos observar existen muchos tipos de simetría de objetos planos: reflexión axial, rotación, traslación y cualquier composición que podamos realizar de ellas. A lo largo del Capítulo 3 intentaremos descubrir cuáles son los conocimientos informales que el niño posee de estos tipos de simetría, cuáles son las más recurrentes y sobre todo si los niños perciben de alguna forma dichas simetrías de nuestro entorno.

Capítulo 3

Exploración de las concepciones ingenuas sobre simetrías de los niños de Educación Infantil

Como hemos mencionado en el Capítulo 1 la inquietud del ser humano lo ha llevado, desde tiempos inmemoriales, a querer conocer y descubrir el mundo que le rodea. Su fuerte instinto de superación ha provocado que mire el entorno como un lugar en el que se ponen en juego sus capacidades físicas y mentales. Las piedras talladas a mano o los tokens son ejemplos que nos muestran cómo el hombre utiliza la reflexión para solucionar los problemas que se plantean. "Todo lo que es susceptible de ser visto por los ojos se cuenta, se mide y se describe geométricamente, siempre con los mismos números y a partir de las mismas formas geométricas elementales." [Lafforgue, 2010, p.4] Por lo tanto, podemos afirmar que el mundo que nos rodea está formado tanto por números como por formas y que aprender a comprenderlos y desarrollarlos nos ayudará a descubrir nuestro entorno.

La llegada del niño al colegio se toma como un punto de inflexión en su aprendizaje de las matemáticas comenzando la transición de sus conocimientos informales a otros más formales. Además, impera la necesidad de hacer ese tránsito de una forma sosegada sin renunciar a todo el conocimiento que el niño ha adquirido antes de ir a la escuela. En el sistema educativo español se centran casi todos los esfuerzos en iniciar el estudio de esta ciencia por el conocimiento del número. Sin embargo, si todo nuestro entorno puede ser contado y también medido, ¿por qué vamos a privar al niño de otra de las ramas de las matemáticas que nos ayudará a descubrir y comprender el mundo? La geometría se suele posponer a etapas superiores asumiendo una importancia mayor de la aritmética o una mayor facilidad para aprenderla. No obstante, la historia y la didáctica nos animan a no renunciar a este saber cuando el niño es pequeño.

En este capítulo, trataremos de explorar las concepciones ingenuas que el niño, de 3 a 5 años, adquiere intuitivamente de la geometría. Presentaremos en primer lugar una herramienta útil para dicha exploración diseñada por la historiadora de la ciencia Ana Millán Gasca.

3.1. Concepciones ingenuas de número y forma

Vivimos en un mundo en el que el aprendizaje de las matemáticas es el resultado de la inmersión cultural. Nuestra vida en esta sociedad contemporánea se encuentra plagada de multitud de situaciones en las que este conocimiento se abre paso: los números de los autobuses, las formas de las mesas, la simetría de las personas, el número de piezas de un juego, la forma de un cucurucho de helado... Las matemáticas están en nuestro mundo; en el mundo de los adultos y el simple hecho de interaccionar con los niños provoca que estas competencias les sean transmitidas de forma espontánea. Los niños a través de la socialización con familiares o amigos, la observación, los momentos de juego o el hecho de tratar de dar respuestas a situaciones de la vida cotidiana, producen unas ideas matemáticas que son el germen de un posterior conocimiento formal de esta ciencia.

Sin embargo, el conjunto de situaciones vividas por cada niño es diferente. Esto comporta unas experiencias diversas que conllevan unos conocimientos informales heterogéneos. La diferencia de juegos, el hecho de establecer o no relaciones con niños más mayores, pasar más tiempo con los abuelos o con los padres... puede implicar unas competencias completamente distintas en cada niño. [Millán, 2016] afirma que el encuentro con las matemáticas no solo se produce en guarderías, en jardines de infancia o en escuelas primarias, sino que a menudo se tienen experiencias matemáticas fuera de la escuela que además, varían de un niño a otro. No es lo mismo el conocimiento de las formas que tendrá un niño cuyo padre se esfuerza porque su hijo descubra los sólidos regulares, que el conocimiento que tendrá un niño que no ha tenido tanto contacto con estos cuerpos geométricos. Por ello, podemos afirmar que el aprendizaje matemático es el resultado del desarrollo de la inteligencia tanto abstracta como del pensamiento simbólico unido a un conjunto de situaciones concretas que se experimentan.

La existencia de este conocimiento previo conlleva que, en la llegada al colegio, cada niño tenga ciertas ideas matemáticas informales que seguramente serán diferentes. Por ello, cuando el profesor comienza su trabajo con esta disciplina, cada alumno se sitúa en un nivel distinto de comprensión de dicho conocimiento. Este hecho, puede producir en el niño un alejamiento de la matemática. La explicación formal puede distar enormemente de las competencias que el niño había adquirido informalmente, llevándole a experimentar cierta dificultad en el tema a tratar. “El desamor ocurre rápidamente al escolarizar al niño, debido al alejamiento de su pensamiento de lo que los adultos precisan y la incapacidad de los maestros para conectar conceptos matemáticos con la experiencia inmediata de las cosas del mundo.” [Millán, 2016, p.108]

A este conjunto de conocimientos informales adquiridos por el niño como resultado de la observación y experiencias ocasionales y extracurriculares [Millán, 2016] los llama *concepciones ingenuas*. La utilización del adjetivo ingenuo se debe a que dicho conocimiento se adquiere de manera informal. Esto quiere decir que es un saber que no se transmite intencionadamente como ocurrirá en la enseñanza formal. Naturalmente, estas concepciones ingenuas poseerán errores resultado de la propia experiencia del niño que nos muestran cómo construye su propio pensamiento. [Fuson, 1987] nos pide que imaginemos que un niño dice “diezydos” en lugar de doce o “diezycinco” en lugar de quince. Este hecho parece indicarnos que el niño ha establecido su propio sistema de reglas ya que para generar los números del 10 al 20, en primer lugar añade la palabra diez y posteriormente añade los números del 1 al 9. El niño genera su propio sistema de reglas que no es correcto, pero que nos hace ver que existe cierta comprensión de los números.

[Millán, 2016] propone una guía de exploración en la acción basada en competencias aritméticas y geométricas (*Anexo 1*). Se trata de una lista de concepciones ingenuas de número y forma y de las correspondientes acciones observables de cada concepción que surgen en un contexto informal y que se convierten en oportunidades para aprender. Esta guía está compuesta por los conceptos primordiales que se trabajan desde niños sobre la matemática. En aritmética se abordan las concepciones ingenuas de contar, la idea de número, la representación simbólica del número, la igualdad aritmética y la resolución de problemas aritméticos. En geometría se desarrollan las concepciones ingenuas de punto, línea, igualdad geométrica, figuras geométricas básicas, los sólidos y la resolución de problemas geométricos.

Esta propuesta de [Millán, 2016] permite a los maestros de Educación Infantil tener claro el nivel en el que se encuentran sus alumnos antes de la escolarización formal. Además, se ha demostrado su utilidad para sacar a la luz el conocimiento informal de número y forma de los niños de Educación Infantil y de Educación Especial y muestra la potencia de la geometría potencia para desarrollar el pensamiento abstracto en niños con Trisomía 21 [Gil and Colella, 2017]. Siguiendo las ideas subyacentes de este documento, en este trabajo trataremos de enriquecer esta guía de exploración en la acción añadiendo una forma de descubrir las concepciones ingenuas de simetría. Concepto que, de una manera inicial, no fue trabajado en esta guía.

3.2. La simetría en nuestro entorno

Utilizando las palabras de [Galilei, 1623] en su libro *Il Saggiatore* podemos afirmar que el grandísimo libro de la naturaleza está continuamente abierto a los ojos, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua y se conocen los caracteres en los que está escrito. Este libro está escrito en lengua matemática y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales "es imposible entender ni una palabra"; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto.

Hemos visto en el epígrafe 3.1 como el ser humano es un ser sociable y racional que comprende y descubre el mundo por medio de la observación y del pensamiento. Un ser que genera nuevas ideas a partir de la observación y que forja su propia concepción del mundo, un mundo que Galileo Galilei considera "plenamente geométrico". En este y en el siguiente epígrafe nos centraremos en descubrir cuáles son las ideas más primarias que el niño recibe sobre la simetría al contemplar e interaccionar con el entorno.

Muchas de nuestras formas de mirar el mundo albergan en sí cierta idea de simetría. Como nos muestra [Keller, 2001], ya en la Prehistoria, multitud de herramientas talladas a mano se construyeron con forma simétrica ya que la experiencia les demostró que así facilitaban acciones de su día a día. También objetos de uso cotidiano como cazuelas o los objetos de decoración se realizaban con una forma simétrica. "En el neolítico, además de estos círculos de piedras dispuestos en el paisaje y de las formas simétricas grabadas en los muros, los pueblos comenzaron a esculpir una serie de interesantes formas tridimensionales dotadas de simetría." [du Sautoy, 2009, p.25]. Véase la Figura 3.1. Por lo tanto, podemos intuir que el hombre prehistórico encontraba en los objetos con simetría, tanto una mayor utilidad como una estética más agradable.

Figura 3.1: Tomada de [du Sautoy, 2009]

La idea de que en la simetría reside cierta belleza se encuentra ya en el libro *De Architectura* de Vitruvio escrito en el año 15 a.C. En él, se representa al famoso *Hombre de Vitruvio* donde se juega con una perfecta concepción de simetría y proporción para crear una figura bella.

En la Naturaleza parece que hay una preferencia por construcciones simétricas que podemos asociar a lo que [du Sautoy, 2009] llama el “diálogo natural que se establece en nuestro entorno gracias a la simetría” (p.21). El hecho de que una abeja acuda a la simetría pentagonal de la madreselva, a la forma hexagonal de la clemátide o a la simetría radial de la margarita o el girasol nos indica la existencia de una relación establecida entre la abeja y la naturaleza. En este caso concreto, este diálogo se basa en la supervivencia. Conseguir una perfecta simetría atrae a más abejas lo que ayuda a la flor a sobrevivir más tiempo en la batalla evolutiva. [du Sautoy, 2009]

Desde el punto de vista del descubrimiento infantil, la simetría de los objetos es la expresión de tres características que el niño puede percibir en su entorno: estética, estabilidad y orden [Castro, 2012]. Todo el mundo tiene un punto de vista claro respecto a la idea de belleza de la simetría. En cuanto a la estabilidad, podemos asumir que una figura simétrica nos proporciona cierta idea de rigidez y firmeza. La disposición adecuada de todos los ladrillos de una obra simétrica nos otorga una seguridad que viene causada por la estabilidad. Respecto al orden, asociamos la simetría a una idea de equilibrio y armonía. Si encontramos los juegos apilados según una reflexión axial respecto a un eje vertical asumiremos cierto orden que no se dará si se encuentran esparcidos por el suelo.

Estas características de estética, estabilidad y orden van a guiar nuestra exploración para descubrir cuáles son las concepciones ingenuas que el niño va adquiriendo respecto a ellas. Consideramos relevante explorar cuáles son las ideas intuitivas que los niños poseen sobre este concepto geométrico con el fin de poder ampliar la guía propuesta por [Millán, 2016]

3.3. Exploración de las concepciones ingenuas sobre simetría de niños de 3 a 5 años

Objetivo

Nuestro objetivo es explorar las concepciones ingenuas de reflexión axial y especular, de simetría de rotación y de simetría de traslación en niños de 3 a 5 años. Queremos observar si hay una intencionalidad infantil de uso de la simetría de los objetos como forma de reconocer, descubrir y valorar el mundo. Además, queremos observar cuál es la intencionalidad del niño cuando utiliza dicha simetría: si busca una estética agradable, si quiere encontrar la estabilidad o si la asocia con la idea de orden. Es importante conocer las ideas intuitivas, es decir; las concepciones ingenuas, ya que debe ser sobre ellas sobre las que queremos construir la educación formal.

Metodología

Para ello, la metodología utilizada es la siguiente. Realizamos unas sesiones de investigación donde los niños trabajan libremente con materiales que puedan facilitar el hecho de que surjan ideas sobre esta parte de la geometría. Buscamos saber si el niño, de manera natural, reconoce y aprecia algunas nociones sobre este concepto. En estas sesiones realizo la labor de observadora, maestra y directora. Esto limita la recogida de información, pero también el hecho de ser la única persona que trabaja con los niños facilita, sobre todo con los que son pequeños, la espontaneidad y la libertad de acciones. Además, esta investigación no ha podido ser desarrollada en su plenitud a causa de la situación que hemos vivido por el COVID19.

Contamos para desarrollar esta experimentación con *dos grupos de investigación*. El primero es una clase de 20 alumnos de 4 años escolarizados en un colegio concertado de Zaragoza del barrio de las Delicias: Colegio Salesiano, Nuestra Señora del Pilar (*Epígrafe 3.3.1*). Estos niños no han recibido todavía una educación formal sobre el concepto de simetría. Por lo que, todas las ideas que surjan sobre este conocimiento se tomarán como concepciones ingenuas. El segundo grupo está formado por niños de 3 a 5 años con Trisomía 21 pertenecientes a la asociación Sesdown (*Epígrafe 3.3.2*). Esta asociación, fundada en 2016, apuesta por una visión integradora de la educación matemática. Su misión es tanto divulgar estudios y avances científicos sobre el aprendizaje de las matemáticas de niños con síndrome de Down como intentar mejorar la condición de vida de estas personas gracias a la ayuda de esta ciencia. La Trisomía 21 es un trastorno genético consecuencia de una anomalía cromosómica en el par 21. Este trastorno provoca cambios en el desarrollo y en las características físicas de estos niños. Su aprendizaje presenta un abanico temporal más amplio. Tienen ciertas dificultades a la hora de comunicarse oralmente, ya que el lenguaje puede ser más tardío y debido a sus características físicas, su psicomotricidad fina y gruesa se ven afectadas. Esto quiere decir que les cuesta más realizar acciones que necesiten una precisión mayor y tienen cierta dificultad de movilidad.

Materiales

Los materiales con los que trabajamos son los lápices de colores y folios y las construcciones. Esto se debe a que, aunque existen multitud de herramientas para descubrir la simetría como por ejemplo los espejos para trabajar la simetría especular, los dobleces de un papel para trabajar la reflexión axial o el giro de piezas de un juego para promover la rotación, son los dibujos los que nos muestran ideas que los niños no pueden expresar oralmente y nos reflejan cómo comprenden la realidad [Domingo, 2019] y son las construcciones las que fomentan el trabajo de lo que [Castro, 2012] define como *acción simétrica*. Esta acción consiste en añadir dos figuras simétricas, una con cada mano, a ambos extremos de un apilamiento. Este gesto muestra una intencionalidad de trabajar sobre un eje preestablecido visualmente por el niño. Lo que implica un conocimiento ingenuo de la idea de simetría. Así pues, realizaremos estas sesiones utilizando las actividades propuestas por [Domingo, 2019] de dibujo y por [Castro, 2012] de construcciones. Respecto a las actividades de las construcciones utilizaremos diferentes materiales: piezas de tipo tangram, regletas de Cuisinaire, bloques de construcción y policubos. Describamos a continuación estos materiales presentados.

- **Piezas tipo tangram**. El tangram que utilizamos en las sesiones presenta las piezas que podemos observar en el Cuadro 3.1.

- **Regletas de Cuisenaire**. Las regletas de Cuisenaire son barras de madera de diferentes colores y tamaños. Cada color tiene asociado siempre un mismo tamaño tal y como podemos ver en el Cuadro 3.2. La pieza blanca medirá 1cm y el resto irán aumentando su tamaño en 1cm progresivamente.

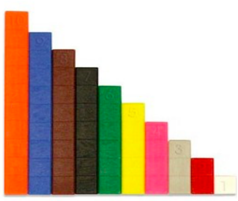
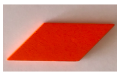
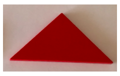
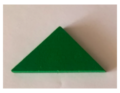
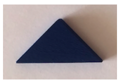


Figura 3.2: Material de las regletas de Cuisenaire. Recuperado de http://tienda.engorengo.com

Piezas de tangram		
Tipo de pieza	Descripción	Número de piezas
	Cuadrado. Lado: 3,4cm	5
	Romboide. Base 4,7cm. Altura: 2,5cm	5
	Triángulo isósceles grande. Base 9.7 cm. Altura 4.8cm	5
	Triángulo isósceles mediano. Base 4.7cm. Altura 3.3cm	15
	Triángulo isósceles pequeño. Base 3.4cm. Altura 2.3cm	10

Cuadro 3.1: Piezas planas tipo tangram. Elaboración propia.

- **Bloques de construcción** Los bloques de construcción están compuestos por las diferentes piezas ensamblables que aparecen en la Figura 3.3. Estas piezas pueden tener diferentes colores: blanco, amarillo, rojo o azul. Las dimensiones de las piezas más grandes son 28x14x7 cm y las de las más pequeñas 14x14x7 cm. Al ser piezas tan grandes los niños pueden construir figuras casi de su propio tamaño.

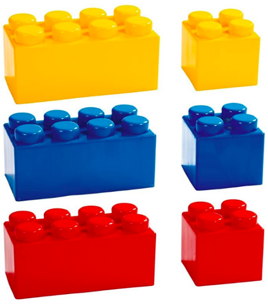


Figura 3.3: Bloques de construcción. Recuperado de https://www.amazon.es

- **Policubos**. Los policubos, como podemos apreciar en la Figura 3.4, son piezas ensamblables en forma de cubo de diferentes colores. Es un material muy similar al de los bloques de construcción solo que con un tamaño menor.

Veamos a continuación en el Cuadro 3.2 cuáles son los materiales utilizados por cada grupo.

Materiales utilizados	
Educación Infantil	Sesdown
Lápices de colores y folios	Bloques de construcción
Piezas de tipo tangram	Policubos
Regletas de Cuisenaire	Regletas de Cuisenaire

Cuadro 3.2: Materiales de cada grupo

Figura 3.4: Policubos. Recuperado de https://za.pinterest.com

Esta disparidad de materiales se debe a que debemos adaptarnos a las necesidades de cada grupo. Por ello, utilizamos los materiales que consideramos más apropiados. Los niños con síndrome de Down necesitan materiales con un tamaño mayor y que sean fáciles de utilizar. El manejo de elementos pequeños puede ser arduo para estos niños.

En el siguiente epígrafe veremos algunas *imágenes* tomadas a los niños durante las actividades. En algunas de estas imágenes, cuando lo consideremos necesario, marcamos los ejes de simetría de sus producciones.

3.3.1. Descripción y análisis de las sesiones realizadas con niños de Educación Infantil.

El colegio Nuestra Señora del Pilar, Salesianos nos permite realizar las sesiones con niños de 4 años en sus propias aulas de infantil. En estas sesiones, entro como observadora a la clase y trabajo en una mesa redonda situada al fondo. Los niños van pasando por esta mesa de 4 en 4 en periodos de 20 minutos para realizar todos ellos la misma actividad. Normalmente, pese a que son 20 niños en clase, siempre hay alguna ausencia. En ninguna sesión se encuentra la totalidad de los alumnos. Las exploraciones se desarrollan de forma general una vez a la semana siempre y cuando este grupo no posea ninguna actividad imprescindible a realizar. En el Cuadro 3.3 presentaremos el calendario de las sesiones:

Sesiones aula Educación Infantil		
Número de sesión	Día de realización	Material utilizado
Sesión 1	12 Noviembre 2019	Regletas de Cuisenaire
Sesión 2	19 Noviembre 2019	Piezas tipo tangram
Sesión 3	10 Diciembre 2019	Lápices de colores y folios

Cuadro 3.3: Sesiones aula Educación Infantil

En cada sesión, como podemos observar, los niños utilizan un material diferente para desarrollar juegos distintos. La variación de este material es debida a una intencionalidad de que las ideas surjan de manera natural. Queremos descubrir las concepciones ingenuas. Si mantuviéramos el mismo material a lo largo de varias sesiones es posible que los niños terminaran buscando patrones concretos o repitiendo lo realizado por sus compañeros dejando de mostrar sus propias ideas.

Analizaremos las sesiones de construcciones, es decir la 2 y la 3, de manera cualitativa. Recuperaremos las construcciones más impactantes o en las que el trabajo geométrico es mayor con el fin de facilitar al lector una idea de qué concepciones ingenuas de simetría surgen y de cómo surgen estas concepciones. En la sesión 1, al trabajar cada niño de manera individual y poder recuperar todas las producciones realizaremos un trabajo más exhaustivo. El análisis se hará de manera cuantitativa.

Dibujos con lápices de colores y folios

Para la realización de esta sesión, les pedimos a los niños que pinten libremente lo que ellos quieran sin darles ningún tipo de pautas. En ningún momento les impondremos que sus dibujos sean simétricos. Dejaremos que sean ellos los que tomen sus propias decisiones a la hora de realizar su dibujo.

Recibimos 19 producciones que llevan más de un elemento dibujado. Los niños realizan en el folio varios dibujos donde se intuyen figuras cotidianas. De manera general, podemos observar casas, personas, mariposas, soles y árboles. Representaciones que los niños contemplan a diario al salir a la calle y que presentan una simetría de reflexión.

Como las producciones presentan diferentes características, creemos que realizar una clasificación para poder analizarlas por separado puede ayudar a la recogida de datos. En el Cuadro 3.4 mostramos cuál es la clasificación realizada.

	Número de producciones	Imágenes
Todo los elementos del dibujo son simétricos	10	Figura 3.5
Algunos elementos del dibujo son simétricos	8	Figura 3.8
El dibujo no presenta ningún elemento simétrico	1	Figura 3.9

Cuadro 3.4: Sesiones aula Educación Infantil

Todos los elementos del dibujo son simétricos. En la Figura 3.5 podemos contemplar la única producción de los niños que posee una reflexión global. La niña realiza un dibujo con cierto equilibrio. En el medio de la mariposa se presenta un eje de reflexión axial que divide al dibujo en dos partes iguales. La mariposa se encuentra en el medio del folio y posee a cada uno de sus lados una flor con 7 pétalos. En dichas flores se distingue una simetría de rotación de ángulo $\frac{2\pi}{7}$. Además, el eje de reflexión de la producción no es completamente paralelo al eje del folio. Hecho que la niña nos muestra que lo observa al dibujar las flores a una altura diferente respecto al eje de reflexión.

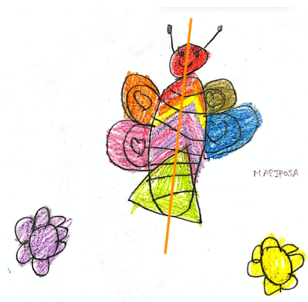


Figura 3.5: Dibujo simétrico. Reflexión central. Elaboración propia.

En la Figura 3.6 observamos la producción con más número de elementos simétricos. Con este hecho y por la forma en la que el niño distribuye el dibujo, podemos ver una clara intencionalidad de crear objetos simétricos y de que su producción tenga cierta estabilidad. Aunque no de manera exacta, se intuye cierto equilibrio en la producción ya que podríamos establecer un eje de reflexión que dividiese el dibujo en dos partes similares. En cada parte, los elementos dibujados poseerían la misma posición respecto al eje de la reflexión y habría un elemento oblicuo, en un caso *Spiderman* y en otro *un malo* y dos personas. En este dibujo, el niño ha adoptado una posición más dinámica, ya los ejes de reflexión de algunos de sus elementos no son paralelos a los ejes del folio. Si observamos el elemento al que él llama *Spiderman* podemos comprobar una intención por parte del alumno de mostrar el eje de reflexión de su figura, ya que pinta cada uno de los lados de este eje de un color desviándose de la realidad. En los *amigos de clase* podemos comprobar una intencionalidad de realizar objetos simétricos, aunque no resulten de manera perfecta como podemos comprobar en sus pies.

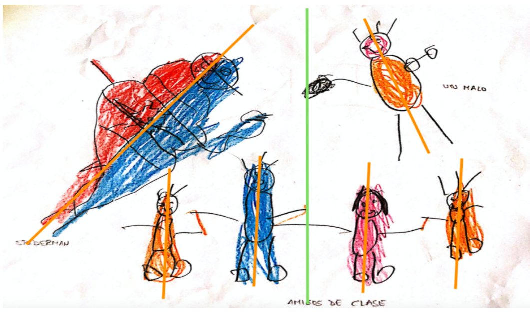


Figura 3.6: Dibujo simétrico. Eje de reflexión definido. Elaboración propia.

En la Figura 3.7 observamos dos dibujos en los que cada uno de los elementos representados son simétricos. Respecto al primer dibujo, nos centramos en *Olaf* y respecto al segundo en *Frozen,* ya que siguen un patrón similar. En ambos, podemos intuir la existencia de un eje de reflexión axial. En *Olaf*, dicho eje se podría discernir si uniésemos el segundo pelo de la cabeza y los botones ya que estos establecerían un eje de reflexión axial. En *Frozen* el niño nos muestra su intención de simetría cuando otorga la misma longitud a los dos brazos. Además, observamos en el medio del dibujo dos líneas que, pese a estar separadas, para el niño parece que representan por su disposición el eje de simetría.

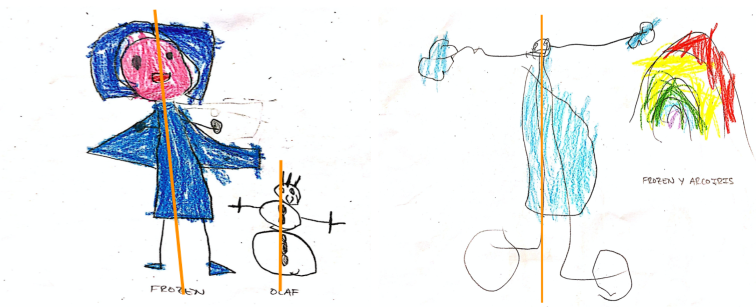


Figura 3.7: Dibujo simétrico. Eje de reflexión intuido. Elaboración propia.

Algunos elementos del dibujo son simétricos. En este caso, recibimos 8 producciones en las que solo un elemento del dibujo es simétrico. En ellas, los niños han dibujado un elemento con reflexión axial y a su vez han completado las producciones con una representación de la realidad asimétrica. Como podemos observar en los dibujos mostrados en la Figura 3.8 ambos niños siguen este patrón. El dibujo cuenta con una parte simétrica, o con intencionalidad de conseguirlo, *Batman* en el primer caso y *los amigos de clase* en el segundo y una parte no simétrica, en ambos casos *el coche*.

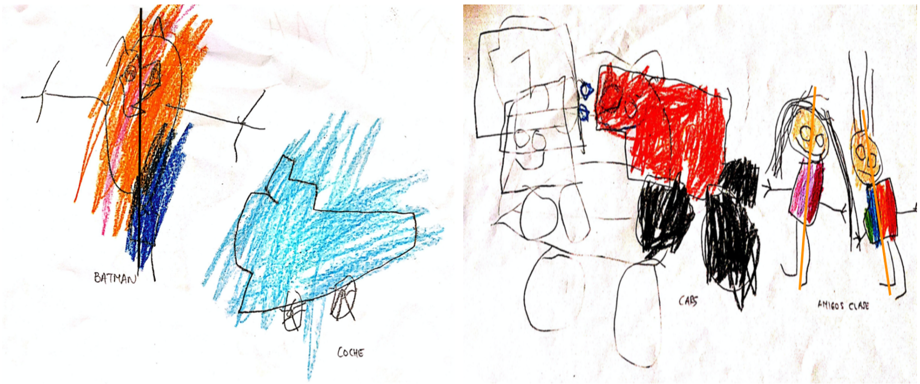


Figura 3.8: Parte del dibujo simétrica. Elaboración propia.

El dibujo no presenta ningún elemento simétrico. Por último y para terminar nuestra clasificación, recibimos un único dibujo que no presenta ningún tipo de simetría. Como observamos en la Figura 3.9 el niño quiere representar un coche. Además, en su figura aparecen elementos aritméticos que hasta ahora no habíamos tenido en ningún otro dibujo: el número 95.

Figura 3.9: Dibujo no simétrico. Elaboración propia.

En esta exploración podemos comprobar cómo los niños contemplan, valoran e intentan reproducir la simetría del entorno. Veamos ahora las conclusiones obtenidas del análisis de estas producciones:

- Los elementos simétricos dibujados son, en gran parte, objetos que podemos observar en la vida cotidiana.
- En algunas de estas producciones podemos observar como el niño tiene un objetivo claro de realizar dibujos simétricos con una estética agradable y con equilibrio. Para ello, trata de centrar su dibujo como ocurre en la Figura 3.5 o de compensar su producción como ocurre en 3.6 distribuyendo un elemento oblicuo a cada lado y cuatro elementos centrales de forma similar.
- Los niños en alguna ocasión se desvían de la realidad porque observan propiedades de simetría que les llaman la atención. Esto ocurre en la Figura 3.6, el niño pinta cada lado del eje de un color distinto para incidir en la idea de reflexión.

- El niño tiene mucho cuidado a la hora de realizar las figuras simétricas. Por ejemplo en la Figura 3.7 cuida las proporciones de los brazos y pies. Esto puede indicarnos que el niño posee una concepción ingenua de simetría de un objeto.

- El hecho de que los niños no utilicen ningún tipo de simetría muestra que no han sentido la necesidad de hacerlo en ese momento preciso. Esto no implica que no posean ninguna concepción ingenua sobre este concepto. Para poder descubrirlo necesitaríamos haberlo animado a que representara otro tipo de objetos o simplemente, dar unas instrucciones más precisas.

- En los dibujos hemos podido observar simetrías de los objetos de reflexión y de rotación. Si bien es cierto, solo una niña ha mostrado cierta idea de simetría de rotación.

Construcciones planas con piezas de tipo tangram

Para esta sesión dejamos a disposición de los niños las piezas que hemos mostrado en el Cuadro 3.1 con el objetivo de que las utilicen libremente. Veremos si sus construcciones son planas o en 3D y no solo nos fijaremos en los resultados, sino también en las acciones que realicen. Queremos ver si la simetría vuelve a surgir, ya sea en forma de reflexión axial, de rotación o de traslación. Estaremos atentos a la posición en la que colocan las piezas y a cómo las giran debido a que, atendiendo a sus movimientos, podemos intuir cierta simetría de rotación.

En este caso, igual que ocurría con los dibujos, volvemos a encontrar diferentes niveles de construcciones. No obstante, no vamos a centrarnos en realizar una clasificación de dichos niveles, ya que nos parece más interesante en esta ocasión analizar algunos casos singulares. Realizaremos un análisis cualitativo de las producciones obtenidas.

Las primeras figuras que analizaremos, tanto por su dificultad como por el número de piezas utilizadas, son las que aparecen en la Figura 3.10. En ellas podemos observar cómo, con formas similares y familiares: triángulos y cuadrados, los niños son capaces de desarrollar dos producciones distintas con una reflexión axial. En la primera figura, una vez que el niño comienza su construcción siempre trata de colocar los baricentros alineados a lo largo del eje de simetría. En la segunda construcción, el niño juega con la composición de figuras planas. En este caso, compone dos triángulos isósceles para realizar un cuadrado.

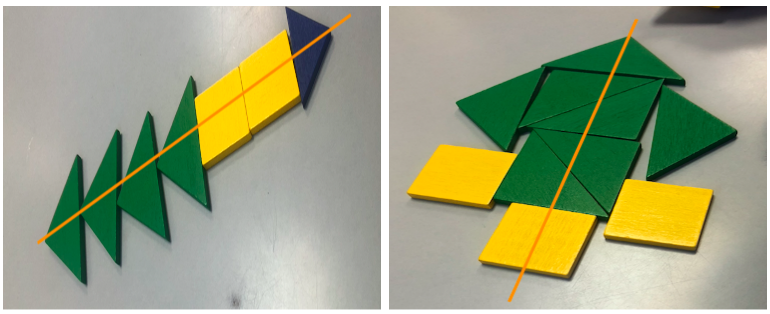


Figura 3.10: Figuras simétricas construidas con piezas de tangrams. Elaboración propia.

En la Figura 3.11 se repite este mismo hecho de composición de dos triángulos para formar un cuadrado que, posteriormente el niño completará añadiendo piezas únicamente triangulares azules. En esta figura, se puede observar una reflexión axial de ejes ortogonales y por lo tanto, una reflexión central. También existe una simetría de rotación de eje $\frac{\pi}{2}$. Gran parte de la importancia de mostrar esta imagen reside en el proceso de creación. El niño comienza uniendo las dos piezas triangulares rojas y posteriormente añade las azules. Para colocar las piezas azules, comienza por la esquina superior izquierda, inmediatamente después y de manera rápida, toma otra pieza azul y la coloca en la esquina inferior izquierda, a continuación observa su figura y posteriormente repite este mismo proceso en el lado derecho.

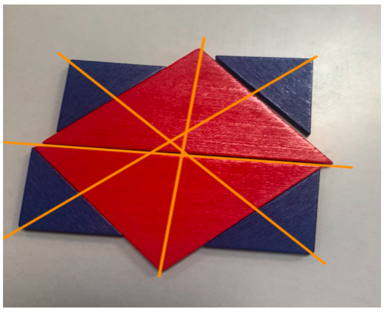


Figura 3.11: Figuras simétricas construidas con piezas de tangram. Elaboración propia.

Otra construcción interesante es la mostrada en la Figura 3.12. En esta, el niño deja de trabajar sobre el plano para comenzar a buscar figuras en el espacio. Coloca las piezas en un plano vertical. Este hecho es relevante ya que ninguno de sus compañeros lo realiza en ningún momento. Su objetivo inicial es construir una fila de triángulos alternando las piezas azules y verdes. Para ello, coloca una pieza central de color azul y posteriormente coge dos piezas iguales verdes cada una con una mano y las pone en la fila. Reitera este movimiento con dos piezas azules. Al realizarlo construye una figura con simetría de reflexión especular. En este momento inicial, aunque la simetría de traslación es infinita, podríamos decir que se intuye cierta idea de este tipo de simetría de objetos en esta serie creada por el niño. Sin embargo, un instante después el niño observa que todavía tiene una pieza verde y decide quitar la pieza azul de lado izquierdo y colocar en su lugar la verde. Al preguntarle por qué ha realizado esto, el niño responde que es porque así crea una fila más bonita.

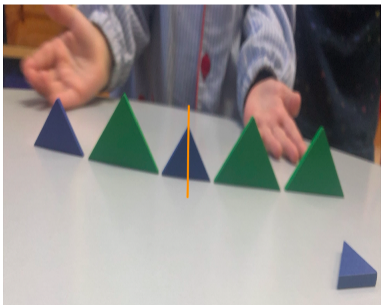


Figura 3.12: Figura con intencionalidad simétrica construida en el espacio. Elaboración propia.

En la Figura 3.13 los niños intentan crear una construcción simétrica, pero al colocar el segundo romboide no lo consiguen. Las dimensiones de esta pieza son muy similares, pero no idénticas. El ángulo de rotación que se puede establecer en el romboide para que exista una simetría de rotación es de π. Sin embargo, los niños rotan la figura un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ como podemos ver en las imágenes. Por lo tanto, al no estar colocado de manera correcta este romboide no existe una reflexión axial, aunque se puede intuir.

Por lo tanto, podemos comprobar que los niños muestran intenciones simétricas al crear construcciones con piezas de tipo tangram. Veamos las conclusiones obtenidas al realizar esta sesión:

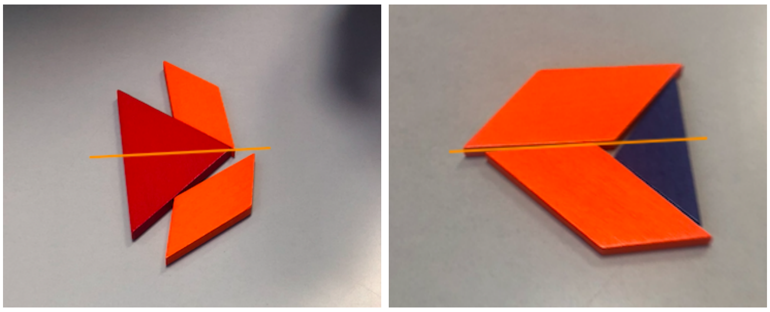


Figura 3.13: Figura con intencionalidad simétrica. Elaboración propia.

- Al elegir las piezas los niños se muestran atentos y cautelosos con la intención de poder crear construcciones simétricas. Este hecho nos muestra una concepción ingenua de simetría.
- En esta sesión algunos niños han realizado producciones con reflexión axial respecto a dos ejes ortogonales, lo que implica una reflexión central. Esto ocurre en la Figura 3.11.
- En las construcciones 3.11 y 3.12 hemos podido observar una clara acción simétrica. El niño coloca una pieza en un lado del eje de reflexión y posteriormente coloca la pieza reflejada.
- Algunos niños encuentran cierta atracción en las construcciones asimétricas como podemos comprobar en la Figura 3.12.
- Los niños analizan las simetrías de las piezas de manera dinámica. Por ejemplo, aprovechan la simetría de rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ del cuadrado y rotan esta pieza de manera natural o utilizan su simetría en el espacio y la voltean comprobando que obtienen la misma forma. El objetivo de esta acción se encuentra en la satisfacción de comprobar que la pieza encaja en el lugar que se había pensado. A esta acción la denominaremos *acción de comprobación.*
- También hemos podido observar cómo los niños buscan de manera intuitiva el equilibrio de la figura. Intentan colocar los baricentros alineados a lo largo de la producción generando un eje de reflexión axial.
- Gracias a la composición de figuras el niño puede observar algunos ejes de simetría de los objetos. El hecho de que componga figuras puede indicarnos que él posee una concepción ingenua de dichos ejes.

Construcciones en 3D con regletas de Cuisenaire

En esta última sesión con los niños de Educación Infantil trabajamos con las regletas de Cuisenaire. La intención es que realicen las construcciones que ellos quieran. Nosotros utilizaremos la observación de los procedimientos y los resultados para explorar sus concepciones ingenuas. Nuevamente nos fijamos en sus acciones, que pueden tener o no intencionalidad simétrica y también analizamos el resultado obtenido. Dicho análisis realizado será cualitativo y nos centraremos en las construcciones que nos parezcan más relevantes.

Una de las propiedades intrínsecas de los objetos simétricos es el equilibrio. La necesidad de construir figuras en las que ningún lado pese más que otro para que no se derrumben. Este hecho, es explorado en el momento en el que los niños comienzan a colocar una pieza encima de otra. Sin darse cuenta, al ver cómo su construcción peligra, estabilizan automáticamente su producción añadiendo otra regleta en busca del equilibrio o centran las maderas a lo largo de un eje de reflexión. Esto mismo, es lo que ocurre en la Figura 3.14. En ella podemos descubrir dos construcciones con una reflexión axial clara.

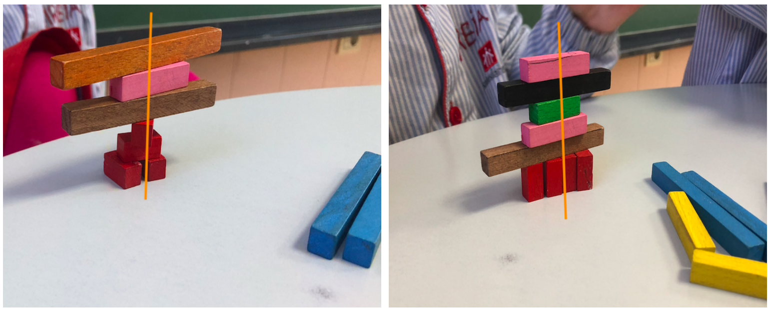


Figura 3.14: Actividad de construcciones. Equilibrio. Elaboración propia.

En la siguiente imagen, Figura 3.15 podemos observar las representaciones más realizadas por los niños; los llamados puentes. De manera general, para estas construcciones utilizan tres piezas: dos iguales para las columnas y una para la fila. Tratan de realizarlo con mucha precisión ya que saben que si dejasen caer la pieza de arriba se les desmontaría su figura. Lo más interesante en este caso, es la imagen de la derecha. Al realizar su construcción, sin tener en cuenta ni color ni forma de las regletas el niño observa que cuando coloca el puente transversal este se desestabiliza. Mira detenidamente su figura y él solo decide que falta una pieza para que sus dos columnas tengan la misma longitud y por lo tanto, para que su figura sea estable. Desmonta la figura, compara varias piezas y finalmente se da cuenta de que la unión de la madera blanca y la roja mide exactamente lo mismo que la regleta verde. Vuelve a construir su figura y muy contento la enseña. Este niño crea una figura con reflexión axial buscando la propiedad de estabilidad intrínseca de los objetos con simetría.

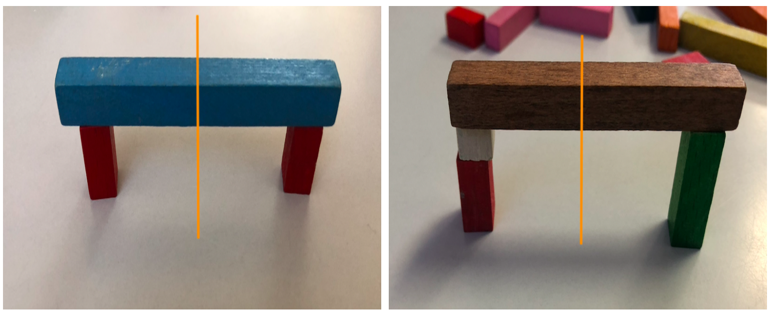


Figura 3.15: Actividad de construcciones. Puentes. Elaboración propia.

En la siguiente Figura 3.16 observamos a un niño que trata de realizar una acción simétrica en una figura que posee una simetría de reflexión especular. Rescato esta imagen para describir dicha acción. En ese preciso instante el niño esta terminando de colocar la pieza de arriba y decide sostener toda la figura con sus manos. Su intención es levantarla y mostrarla con gran entusiasmo pero, antes de separarla de la mesa, el niño observa la construcción y comprende que, como las piezas están sueltas, necesita ayuda de las dos manos para alzarla. Por ello, coloca cada una de sus manos en uno de los lados del plano de simetría. Observamos la necesidad de realizar esta acción ya que dicha figura posee una simetría de reflexión especular.

Por último, nos gustaría mostrar la imagen de la Figura 3.17. En ella vemos cómo un niño decide trabajar en el plano con las regletas. Este hecho se produce una sola vez con los

Figura 3.16: Actividad de construcciones. Acción simétrica. Elaboración propia.

niños de Educación Infantil. En este caso, el pequeño inicialmente crea la construcción que vemos en la parte de arriba. En ella, podemos observar un eje de reflexión axial horizontal, sin embargo el vertical no existe debido a las piezas de los extremos. La pieza amarilla es un poco más larga que la rosa y obviamente, de distinto color. Cuando el niño observa su primera construcción, esta no le agrada y decide realizar otra. Siente cierta inconformidad con lo construido previamente. Al ir a poner la última regleta en esta segunda construcción, el niño se lo piensa. Busca entre todas las que tiene encima de la mesa y vuelve a repetir su acción anterior: coger una pieza de color rosa. Ahora sí que queda satisfecho con lo realizado y lo muestra muy contento. El niño ha construido una figura con una reflexión axial respecto a dos ejes ortogonales, lo que implica una reflexión central.

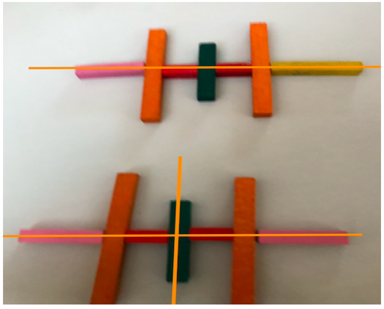


Figura 3.17: Juego de construcciones. Figuras en el plano. Elaboración propia.

En esta exploración podemos observar de nuevo un trabajo simétrico por parte del niño. Extraigamos las conclusiones más relevantes de esta sesión.

- En las construcciones con las regletas observamos como el niño trata de realizar figuras simétricas, normalmente con una simetría de reflexión.
- En la Figura 3.15 el niño va más allá e integra aritmética y geometría. El niño, buscando la estabilidad de su construcción simétrica, descubre el diferente tamaño de las regletas y subsana su problema de desequilibrio.
- El niño muestra una intencionalidad de acción simétrica tanto a la hora de realizar las construcciones; 3.17 como al intentar mostrarlas; 3.16.
- Tal y como nos ocurrió con la actividad de construcciones con las piezas tipo tangram, vuelve a aparecer la reflexión central. En este caso en la Figura 3.18.
- Los niños contemplan y valoran la simetría. En la Figura 3.18 la niña no solo se esfuerza porque su figura posea una reflexión axial sino que todavía va más allá y busca una reflexión central.

- Al realizar las construcciones el niño busca cierto equilibrio. En las construcciones en 3D es necesaria la estabilidad para que la producción no se derrumbe. Por ello, el niño de manera intuitiva busca el baricentro de su figura simétrica y alinea su construcción respecto a este eje.

3.3.2. Descripción y análisis de las sesiones realizadas en Sesdown. Elaboración propia.

La exploración realizada en Sesdown cuenta con la asistencia de tres niños que en el momento en el que se inicio la exploración tenían 4 años y 4 meses, 4 años y 5 meses y 5 años y 3 meses. Cada uno tiene habilidades diferentes, pero ninguno de ellos posee lenguaje. Son niños muy pequeños que no han trabajado la simetría de manera formal. Necesitan un tiempo de descubrimiento para poder ir forjando nuevas ideas que pueden proceder del descubrimiento o de la imitación de sus compañeros.

Las sesiones se realizan en el local que posee la asociación. Para ayudar a que los niños desarrollen una rutina de trabajo y que entiendan que al entrar en el aula van a trabajar matemáticas, utilizamos siempre la misma disposición de clase. Colocamos en el suelo tres alfombras diferentes para que cada niño se siente siempre en la misma y yo me sitúo enfrente de ellos. Las sesiones se realizan los viernes por la tarde de 18h a 19h y se distribuyen en cinco viernes diferentes como se muestra en el Cuadro 3.5.

Número de sesión	Día de realización	Material utilizado
Sesión 1	8 Noviembre 2019	Construcciones en 3D: bloques y policubos
Sesión 2	20 Diciembre 2019	Construcciones en 3D: bloques y policubos
Sesión 3	10 Enero 2020	Construcciones en 3D: bloques y en 2D: regletas
Sesión 4	24 Enero 2020	Construcciones en 3D: bloques y en 2D: regletas
Sesión 5	28 Febrero 2020	Construcciones en 3D: bloques y policubos

Cuadro 3.5: Sesiones de Sesdown

En este caso, utilizamos la actividad de los bloques de construcción en todas las sesiones para que se acostumbren a trabajar con este material y para evitar la monotonía cambiamos de actividad a la media hora de comenzar. Estos niños necesitan más tiempo de exploración de los materiales para sacarles partido y hacer que emerjan en su mente ciertas concepciones ingenuas. Siempre buscaremos implicar a los niños en las actividades para facilitar que saquen a la luz las ideas que tienen. Debido a que en cada sesión se trabajan diversas actividades, para facilitar la recogida de resultados realizamos un análisis cuantitativo de cada tipo de actividad en el siguiente orden:

1. Construcciones en 3D con el juego de bloques

2. Construcciones en 3D con policubos

3. Construcciones con las regletas de Cuisenaire

Construcciones en 3D con el juego de bloques

Para esta actividad dejamos a los niños que trabajen libremente con los bloques de construcciones y que realicen las producciones que ellos quieran. Nosotros observaremos cuáles son tanto sus producciones como sus acciones a la hora de crear nuevas figuras.

Lo primero que queremos mostrar de esta exploración es la cara de entusiasmo de los chicos. Esta se aprecia en la Figura 3.18. Los niños se encuentran encantados con este material que propicia que emerjan nuevas ideas matemáticas. La implicación, el interés por descubrir y el entusiasmo son acciones que nos ayudan a construir el pensamiento y recordarlo de una manera agradable.

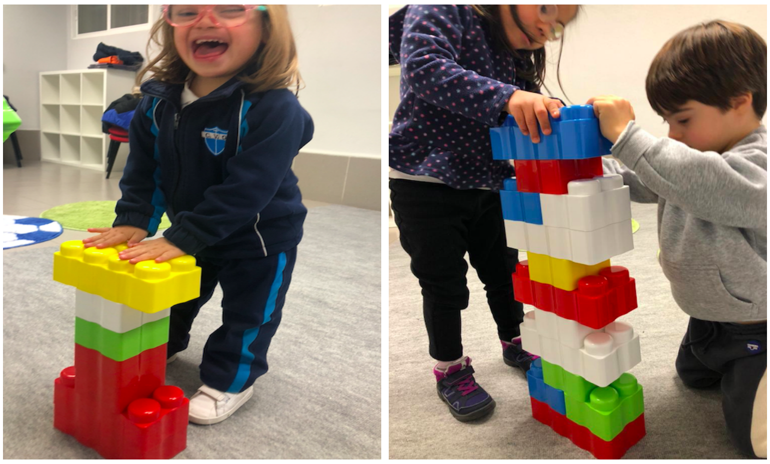


Figura 3.18: Actividades de bloques. Niños disfrutando. Elaboración propia.

Centrándonos en la exploración de las concepciones ingenuas de simetría que tienen los niños, en una primera instancia, suelen realizar construcciones asimétricas. Colocan las piezas tal y como las reciben, unas encima de otras y sin visualizar la figura completa como podemos observar en la Figura 3.19. Es a lo largo de la segunda sesión cuando comienzan a caer en la cuenta de la estética y la estabilidad de la reflexión. A partir de este momento gran número de sus construcciones son simétricas.

Figura 3.19: Primeras construcciones con los bloques. Elaboración propia.

En la Figura 3.20 podemos apreciar dos figuras que poseen una simetría de reflexión especular respecto a los tres planos ortogonales y por lo tanto una reflexión central. Además, en ambas fotos podemos observar una clara intencionalidad simétrica. En la primera la niña tiene colocadas las dos manos encima de la figura una a cada lado del plano de reflexión. En la segunda, vemos a la niña en plena acción simétrica; tiene dos piezas idénticas colocadas una en cada mano. La niña busca colocar estas piezas, en el mismo momento, encima del soporte que ya tiene construido.

Figura 3.20: Juego de bloques. Simetría. Elaboración propia.

Siguiendo en la misma línea de acción simétrica, en las fotos de la Figura 3.21, podemos observar cómo los niños miran con atención su producción. Este hecho no se remarca con ningún otro juego de manera tan clara y relevante. Además, estas fotos todavía tienen más peso, puesto que los niños al colocar sus bloques buscan alinearlos respecto al plano de reflexión de la figura. Si uno de los niños coloca una pieza fuera de dicho plano de reflexión enseguida, al observar la construcción, mueve el bloque para conseguirla de nuevo.

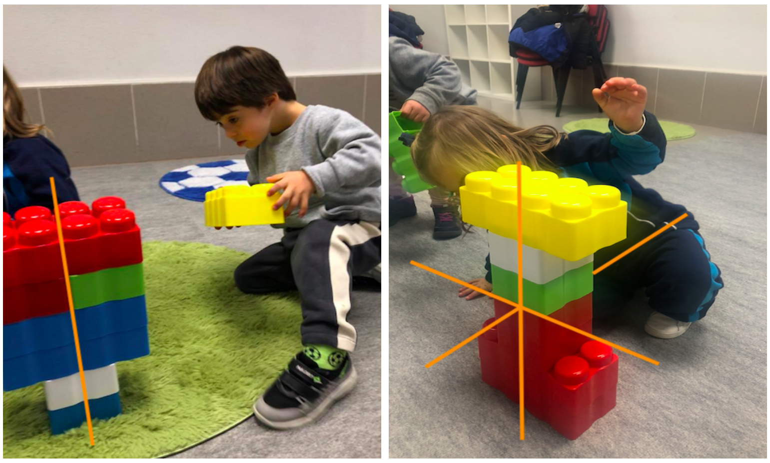


Figura 3.21: Actividad de bloques. Intencionalidad. Elaboración propia.

Sin embargo, pese a que en alturas pequeñas las construcciones suelen poseer una reflexión especular, cuando sus creaciones comienzan a tener más altura, los niños empiezan a tener problemas para encontrar el plano de simetría. Esto es lo que ocurre en la Figura 3.22. En estas imágenes podemos observar cómo las construcciones comienzan a tener cierto desequilibrio y la simetría deja de encontrarse de manera general. Sí que es cierto, que en tramos concretos de cada una de las figuras volvemos a observar simetrías de reflexión especular.

Figura 3.22: Actividad de bloques. Dificultades. Elaboración propia..

Podemos observar cómo, gracias a este juego, en niños con Trisomía 21 van aflorando ciertas concepciones ingenuas de simetría de los objetos. Veamos cuáles son estas ideas.

- Gracias al trabajo con este material los niños nos muestran sus concepciones ingenuas de simetría. Inicialmente sus construcciones no siguen un orden en la colocación de las piezas y estas se derrumban ya que no poseen estabilidad. Poco a poco, el niño comienza a rotar las piezas atendiendo al tamaño de estas y realiza una construcción simétrica en la que cuida las propiedades de estabilidad y belleza.

- Al realizar las producciones los niños buscan que sean simétricas porque encuentran cierta idea de belleza en ellas.

- Vemos que los niños al realizar construcciones simétricas tienen una intencionalidad de acción simétrica como se observa en la Figura 3.20. Los niños colocan las piezas con las dos manos a la vez a lo largo del plano de reflexión.

- Cuando los niños construyen sus piezas parece que imaginan el plano de reflexión en su mente, ya que intentan realizar construcciones simétricas a lo largo de este.

- Los niños analizan las simetrías de manera dinámica aprovechando las simetrías de las piezas para realizar una acción simétrica de comprobación.

- Los niños comienzan a intuir el plano de reflexión ya que antes de colocar su siguiente pieza, como ocurre en la Figura 3.21, los niños observan la toda la construcción completa.

- Cuando los niños intentan construir figuras altas, las simetrías de los objetos comienzan a aparecer por tramos como se observa en la Figura 3.22. Los niños tienen cierta dificultad para conseguir una reflexión especular de su construcción completa. Este hecho puede indicarnos que, pese a que toda la figura no posea dicha simetría, el niño siempre intenta encontrarla aunque sea únicamente en una parte de la figura.

Construcciones planas con policubos

Para la realización de las actividades con policubos, dejamos en el suelo el material y les pedimos a los niños que realicen las construcciones que ellos quieran. En algunas ocasiones hay que ayudarles a desmontar figuras, pero aun así pueden construir todo lo que ellos quieren sin excesiva dificultad.

En la Figura 3.23 podemos ver dos producciones con una simetría de reflexión especular. Además, en la primera imagen podemos contemplar también una reflexión axial. El proceso de construcción de estas figuras también es un hecho a remarcar ya que la niña coloca siempre una pieza en el lado derecho y posteriormente, sin atender al color, coloca la misma pieza en el lado izquierdo.

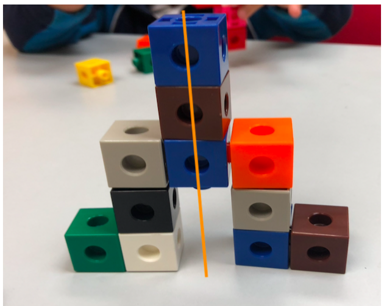
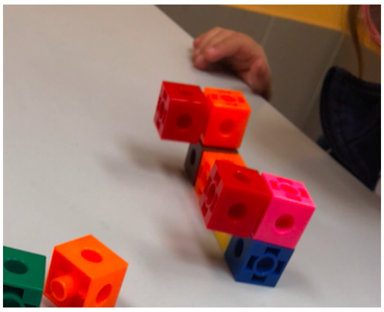



Figura 3.23: Policubos. Figuras simétricas. Elaboración propia.

Otra construcción bastante recurrente realizada por los chicos es la mostrada en la Figura 3.24. En esta imagen observamos la creación de lo que podemos denominar una pared de policubos. Su interés radica en su proceso de creación. Esta niña coloca un policubo y completa de manera simétrica la figura añadiendo otro a derecha e izquierda del ya colocado. Posteriormente, coloca otro policubo en el centro de la fila superior y añade otros dos de manera simétrica a derecha e izquierda del policubo que acaba de colocar. Podemos observar en esta pared de policubos una reflexión axial y especular respecto a dos ejes y planos ortogonales respectivamente, esto implica que esta figura también posee una simetría de reflexión central.

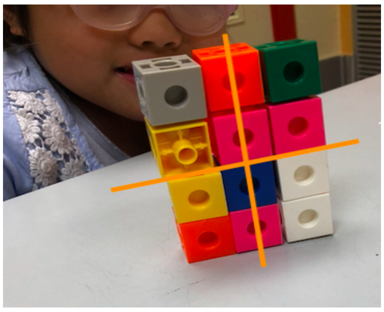


Figura 3.24: Policubos. Figuras simétricas. Elaboración propia.

Veamos ahora dos imágenes en la Figura 3.25 en las que los niños juegan con unos policubos diferentes a los utilizados anteriormente, pero que poseen unas características similares. Con estas imágenes queremos mostrar la concentración de los niños en el trabajo que están realizando. Todos miran muy atentamente la figura que ya tienen construida antes de colocar su siguiente pieza. Una vez colocado por el niño que sea el bloque de la izquierda, otro niño coge otro policubo y lo coloca en la derecha para completar la altura que les queda por poner. Además, si algún policubo no se coloca de manera correcta enseguida, cualquiera de los niños, trata de solventar el error cambiándolo o colocando otro que devuelva a la figura su simetría.

Figura 3.25: Policubos. Figuras simétricas. Elaboración propia.

En estas imágenes se observa cómo con la actividad de los policubos han surgido más ideas ingenuas de los niños sobre simetría. Veamos dichas ideas.

- Los niños utilizan la acción simétrica para realizar sus figuras.
- Buscan construir figuras simétricas que estéticamente sean agradables a la vista. Esto se puede observar ya que, como ocurre en la Figura 3.25, cuando un policubo no preserva la simetría de la figura, los niños automáticamente lo quitan o tratan de colocar otro que ayude a conservar la simetría de la figura.
- Los niños utilizan la acción simétrica de rotación al realizar sus construcciones. Aprovechan las simetrías rotaciones de los policubos para no tener en cuenta su posición.
- Los niños no atienden al color de los policubos al ir a realizar sus construcciones.
- Podríamos afirmar que los niños nos muestran que poseen cierta concepción ingenua de simetría cuando observan la figura de manera global antes de colocar la siguiente pieza y colocan esta de manera que su construcción sigue siendo simétrica.
- Los niños al construir figuras parece que visualizan el eje o el plano de reflexión. Siempre procuran colocar las piezas de manera que su figura sea simétrica.

Juego de construcciones con regletas Cuisenaire

En esta última actividad dejamos que los niños utilicen las regletas de Cuisenaire de manera libre y sin ninguna regla establecida. Para que no les abrume la cantidad de regletas existentes, les damos a cada niño un número concreto de piezas que describiremos a lo largo del texto. De manera novedosa, los niños con síndrome de Down realizan construcciones planas, mientras que los niños del otro grupo de investigación utilizaron las regletas para realizar construcciones en 3D.

A la niña de la Figura 3.26 se le dan para la primera figura seis regletas azules y diez blancas. Y para la segunda siete regletas azules y el mismo número de regletas blancas que anteriormente. La intención es ver si desecha alguna de las piezas dadas para construir figuras simétricas o si por el contrario siempre utiliza todas las regletas que se ponen a su disposición. Un número par de piezas nos da más facilidad a la hora de construir figuras simétricas que un número impar de piezas. Observaremos qué realiza sin imponerle reglas, solamente se le dan las piezas y se le dice que puede construir lo que ella quiera. Como podemos apreciar, da igual el número de piezas dadas, ella tiende a utilizar todas las regletas azules. Es con estas con las que siempre trabaja primero y posteriormente coloca, si lo ve necesario, las blancas. Lo importante es que, aunque en estas dos figuras tiende a utilizar todas las piezas, de manera inicial siempre construye una figura con una reflexión axial. En la primera imagen, podemos ver cómo su figura posee dos ejes ortogonales de reflexión axial y por lo tanto, posee una reflexión central. En la segunda imagen, observamos cómo al colocar la última regleta azul rompe uno de los ejes de reflexión axial de su construcción.

Figura 3.26: Actividad con regletas. Figuras simétricas. Elaboración propia.

Descubramos otra de las construcciones realizadas por esta misma niña. Le entregamos dos piezas marrones, dos azules y dos naranjas y le decimos que construya lo que quiera. Enseguida se dispone a colocar las regletas de diferentes colores en forma de fila. Si en la producción que observamos en la Figura 3.27 únicamente atendemos a la posición de las regletas dejando de lado los colores o el tamaño, ya que la diferencia de longitud entre las piezas es pequeña, podemos observar una reflexión axial respecto a dos ejes ortogonales y por lo tanto, una reflexión central y además, una simetría de traslación. Esta simetría es la primera vez que se produce y su importancia reside en la colocación minuciosa que realiza la niña de las regletas atendiendo a la distancia que deja entre ellas.

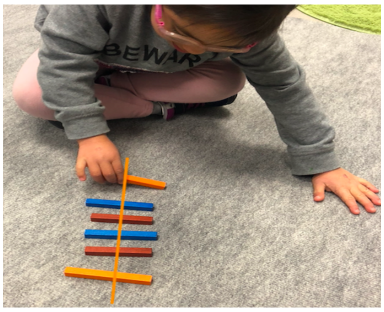


Figura 3.27: Actividad con regletas. Elaboración propia.

Y por último, veamos en la Figura 3.28 cómo otra niña con las mismas piezas que su compañera, trata de imitar lo que esta realiza. Aunque intenta copiar el modelo que ha observado, tiene cierta dificultad para conseguirlo. Acaba poniendo dos regletas juntas en la misma línea y por lo tanto, no establece ningún tipo de simetría. Este hecho, es muy frecuente sobre todo en las primeras construcciones realizadas. Los niños con las regletas crean filas largas en las que unen diferentes piezas sin importar ni los colores ni las longitudes de estas. Posteriormente, cuando van dominando un poco más este material, cambian las construcciones realizadas a producciones con cierta intencionalidad simétrica.

En esta sesión hemos vuelto a comprobar cómo los niños contemplan y valoran la simetría del entorno. Veamos qué concepciones ingenuas podemos observar con esta actividad.

- Todos los niños de manera inicial comienzan colocando sus regletas una detrás de la otra para construir filas muy largas. Esto puede deberse a una intencionalidad de querer visualizar todo el material.

Figura 3.28: Juego de construcciones. Figuras no simétricas. Elaboración propia.

- En la segunda imagen de la Figura 3.26 observamos cómo la niña que realiza esta construcción parece que visualiza uno de los ejes de reflexión de su figura porque decide colocar su última regleta en este.

- En las construcciones podemos observar cierta intencionalidad simétrica, aunque sí que es cierto que al ser piezas pequeñas los niños, por su psicomotricidad fina, tienen más dificultad para realizar una correcta colocación.

- Podemos observar cómo los niños realizan figuras con simetrías de reflexión axial; Figura 3.26 y por primera vez con el material de las regletas, podemos ver simetrías de traslación; Figura 3.27.

3.4. Conclusiones

Una vez analizadas las sesiones realizadas con niños de 3 a 5 años podemos concluir que estos reconocen y valoran los patrones de simetría del mundo. El ser capaces de identificarla hace que en muchas de sus producciones aparezca la simetría. Además, como hemos podido observar, muchos niños tienen cierta intencionalidad simétrica en el momento de realización de sus construcciones. Esto indica que, pese a no obtener una producción con un patrón completamente simétrico, los niños poseen cierta idea intuitiva sobre este concepto. Utilizar las dos manos a la vez para colocar dos piezas de construcción es un hecho clave que nos muestra cómo el niño visualiza el eje de simetría. Esta intencionalidad muchas veces puede ir ligada tanto a la búsqueda de una estética agradable como a la búsqueda de estabilidad intentando que sus construcciones en 3D no se puedan romper fácilmente.

Sin embargo, no todos los tipos de simetría surgen de forma tan intuitiva. Al analizar las sesiones hemos comprobado que la reflexión axial y especular son las más recurrentes en todo tipo de actividades. Las figuras producidas siguen unos patrones bastante claros de este tipo de simetría de los objetos.

El hecho de que los niños al construir aprovechen las simetrías de las piezas dadas y las roten de forma natural indica que, de alguna manera, perciben la congruencia de las piezas implicadas y visualizan la simetría de rotación de la pieza. El niño comprende que al girar la pieza un ángulo determinado obtiene la misma figura que la dada anteriormente.

La simetría de traslación no es muy utilizada y aparece únicamente en los momentos en los que el niño quiere preservar la misma distancia entre dos piezas. Tengamos en cuenta que la simetría de traslación es una serie infinita de elementos y por lo tanto es imposible de realizar. Por ello, nosotros diremos que observamos una simetría de traslación siempre y cuando el niño haya mostrado cierto interés en colocar al menos 4 piezas a la misma distancia.

Por lo tanto, una hipótesis plausible podría ser que la simetría de reflexión es la que más se encuentra en nuestro entorno y por lo tanto la que más valoran y aprecian los niños. Sin embargo, que este tipo de simetría surja de una manera más reiterada también puede deberse a las limitaciones del material entregado. La primera limitación es que los niños no poseen grandes cantidades de los materiales y por lo tanto, es complicado que puedan realizar series de objetos trasladados o reflexiones deslizantes. Otra limitación surge debido a que ninguna de las piezas entregadas tiene un ángulo de rotación menor de $\frac{\pi}{2}$ lo que restringe la posibilidad de observar simetrías de rotación.

Con esta información obtenida a través de la experiencia vivida con los niños vamos a tratar de mostrar en este epígrafe una propuesta de guía de observación en la acción para explorar las concepciones ingenuas del niño sobre simetría. Esta guía busca ampliar el material original propuesto por Millán-Gasca (2016). Además, en el próximo capítulo propondremos una serie de materiales de construcción propia que ayudan a trabajar las simetrías planas y que ayudan a favorecer el descubrimiento de las simetrías que en esta exploración han quedado más limitadas.

3.4.1. Guía de observación en la acción sobre simetría

En esta guía presentamos las concepciones ingenuas de simetría que debemos explorar y en cada una de ellas propondremos una lista de items claves que, según nuestra experiencia, nos pueden ayudar a desvelarlas. Dicha lista nos permitirá saber qué es a lo que debemos atender si queremos explorar este concepto matemático.

Simetría

- **Reflexión axial en el plano**
  - Realiza producciones donde se presentan ejes de reflexión.
  - Recorre con el dedo el eje de reflexión de sus producciones.
  - Crea primero un lado del eje de reflexión y posteriormente el otro.
  - Utiliza la acción simétrica a la hora de construir.
  - Presta atención a las piezas que utiliza para realizar construcciones simétricas.
  - Cuida los detalles para que su producción sea simétrica.
  - Compone figuras geométricas a través de dos formas idénticas estableciendo entre ellas un eje de reflexión axial.
  - Realiza construcciones con dos ejes de reflexión y por lo tanto, construcciones con una reflexión central.
- **Reflexión axial y especular en el espacio**
  - Realiza construcciones donde se presentan los ejes o planos de la reflexión.
  - Recorre con el dedo el plano o el eje de reflexión de sus producciones.
  - Busca el baricentro de las piezas colocadas para colocar la siguiente.
  - Construye lo que constituirá su eje o plano de simetría y posteriormente coloca sus piezas a cada uno de los lados de este.
  - Utiliza la acción simétrica a la hora de construir.
  - Presta atención al tamaño o al color de las piezas a la hora de construir.

- Realiza construcciones con dos ejes o planos de reflexión y por lo tanto, construcciones con una reflexión central.

- **Simetría de rotación**
  - Utiliza la acción simétrica de rotación.
  - Al realizar un dibujo que presta un ángulo de rotación gira la hoja para realizarlo desde otro ángulo.

- **Simetría de traslación**
  - Repite al menos cuatro veces del mismo dibujo separado por distancias iguales a lo largo de la misma dirección
  - Intenta colocar al menos cuatro piezas separadas por la misma distancia.

- **Simetría y estética**
  - Busca reiteradamente que su producción sea simétrica o asimétrica, mostrándonos su preferencia.
  - Desecha construcciones cuando comprueba que no poseen simetría o muestra satisfacción cuando si la poseen.
  - Observa su producción completa antes de continuar.
  - Realiza acciones simétricas.

- **Simetría y estabilidad**
  - Busca el baricentro de las construcciones para que su figura no se rompa.
  - Tiene cuidado a la hora de colocar sus piezas.
  - Realiza acciones simétricas a la hora de colocar sus piezas para que su figura no se derrumbe.

- **Simetría y orden**
  - Utiliza siempre un mismo patrón para realizar sus producciones.
  - Cuida que todas las piezas se encuentren en el lugar apropiado.
  - Utiliza siempre el mismo tamaño o color de piezas para crear una producción simétrica.

Capítulo 4

Propuesta de materiales y actividades

A la vista de las conclusiones obtenidas en el Capítulo 3, podemos afirmar que gracias al trabajo con el dibujo y a los juegos de construcción los niños son capaces de percibir algunas características asociadas a ciertos tipos de simetrías (reflexión axial y especular, simetría de rotación y simetría de traslación) adquiriendo así algunas concepciones ingenuas sobre este concepto. Que se ven reflejadas en las acciones que realizan durante las sesiones

En este Capítulo presentamos algunos materiales de diseño propio que sirven de refuerzo y ampliación a la exploración de las concepciones ingenuas anteriores. El primer material pretende afianzar el trabajo con objetos planos que presentan una reflexión axial, hecho que puede ser de especial interés para los niños con dificultades de aprendizaje. El segundo permite que los niños entren en contacto con algunas simetrías que apenas aparecieron en nuestra exploración, como son la simetría de traslación, la simetría de rotación y la reflexión deslizante. Quedaría para estudios posteriores, que caen fuera del alcance de este TFM, la puesta en práctica de actividades que pongan a prueba la utilidad de estos materiales para dichos fines.

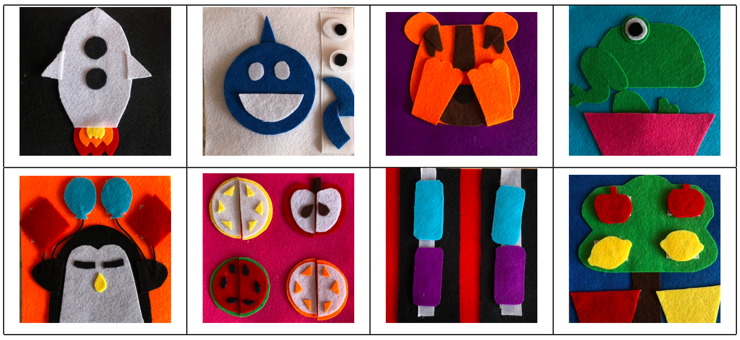
4.1. Libro sensorial de simetría de los objetos

Presentación del material

El primer material construido para trabajar la simetría en el plano viene inspirado en los libros sensoriales. Los libros sensoriales son un tipo de libros con actividades manipulativas y sensoriales así como con dibujos y representaciones que desarrollan una narrativa ligada a uno o dos personajes. Este material es una herramienta que promueve tanto el aprendizaje como el desarrollo de habilidades motoras para niños con y sin discapacidad. La ventaja de este material frente a otros se debe a que en cada ficha solo se realizan una o dos acciones. Recordemos la dificultad de los niños con síndrome de Down para visualizar los ejes de reflexión axial cuando realizaban construcciones en las que se involucraban muchas piezas.

Este material nos da la oportunidad de que los niños descubran nuevas ideas que hasta ahora no habían surgido sobre la simetría de los objetos y nos permite ayudar a los niños a caer en la cuenta de propiedades simétricas que hasta ahora no habían contemplado.

Hemos realizado 8 plantillas cuadradas de fieltro (Cuadro 4.1), todas de 18×18 cm, en las que hemos pegado sus objetos de diferente manera. Con ellas queremos trabajar la simetría de los objetos en el plano.



Cuadro 4.1: Libro sensorial de simetrías de los objetos. Elaboración propia.

Simetrías que se pueden trabajar con este material

Con el diseño de estas fichas hemos intentado potenciar el trabajo de la acción simétrica, el descubrimiento de la simetría de reflexión de objetos que encontramos en la vida cotidiana y la contemplación de la simetría en nuestro entorno. Veamos ahora las diferentes simetrías que podemos trabajar en cada ficha.

- La ficha del *cohete*. Esta ficha ha sido únicamente diseñada para visualizar el eje de reflexión axial que posee el cohete. Por ello, el cohete está pegado al soporte solo mediante su eje de reflexión como podemos observar en la Figura 4.1.

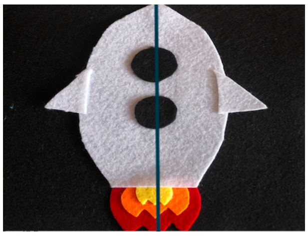


Figura 4.1: Cohete. Elaboración propia.

- La ficha del *tiburón*. En el centro de la ficha encontramos un tiburón que está unido a su plantilla únicamente por el eje de reflexión axial. Este tiburón posee la aleta superior, la boca y dos trozos de cinta autocierre como ojos. En la parte derecha encontramos dos aletas y dos ojos del tiburón tal y como observamos en la primera imagen de la Figura 4.2. Al colocar las dos aletas y los ojos en su posición más natural se genera una figura con una simetría de reflexión axial tal y como observamos en la segunda imagen de la Figura 4.2.

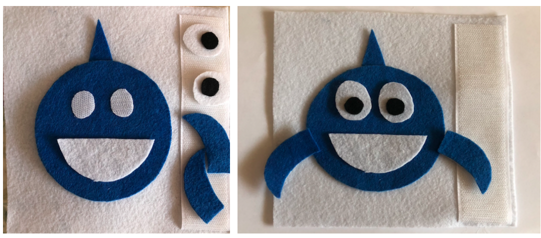


Figura 4.2: Tiburón. Elaboración propia.

- La ficha es la del *tigre*. Este animal posee una simetría de reflexión axial. Sin embargo, en esta ocasión no está únicamente unido al soporte por su eje de reflexión. En esta ficha se pueden colocar las manos del tigre sobre los ojos como podemos observar en la Figura 4.3 para poder trabajar la acción simétrica.

Figura 4.3: Tigre. Elaboración propia.

- La ficha de la *rana*. En esta ficha podemos observar cómo el eje de reflexión divide a la figura en dos partes de manera que en una encontramos ya colocados el ojo y la pierna y en la otra no. Las piezas que faltan se encuentran en la cesta rosa y al colocarlas podemos contemplar la segunda imagen de la Figura 4.4.

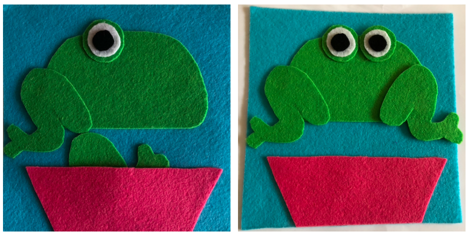


Figura 4.4: Rana. Elaboración propia.

- La ficha del *pingüino con globos*. Como podemos observar, hemos vuelto a elegir un animal con una simetría de reflexión axial. Inicialmente los globos se encuentran como se muestra en la primera imagen de la Figura 4.5 y posteriormente debemos colocarlos encima de la cinta autocierre. Los globos rojos con forma de rombo poseen una cuerda más pequeña que los azules.

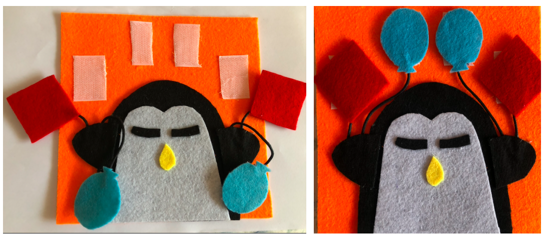


Figura 4.5: Pingüino. Elaboración propia.

- La ficha de las *frutas*. En esta ficha encontramos cuatro rodajas de frutas diferentes: sandia, naranja, manzana y limón. Estas frutas se encuentran divididas por su eje de reflexión axial de manera que una parte de la fruta se encuentra fija en el soporte y la otra la podemos poner y quitar gracias a la cinta autocierre como vemos en la Figura 4.6.

- La ficha de la *carretera*. Esta ficha, cuando no tiene colocados los coches, presenta una simetría de reflexión axial respecto a dos ejes ortogonales y por lo tanto una reflexión

Figura 4.6: Fruta. Elaboración propia.

central. Al colocar coches que se encuentran a la derecha de la imagen podemos observar la segunda imagen de la Figura 4.7. Tengamos en cuenta que por primera vez en este material aparece una simetría de rotación de ángulo π gracias a la forma que poseen los coches.

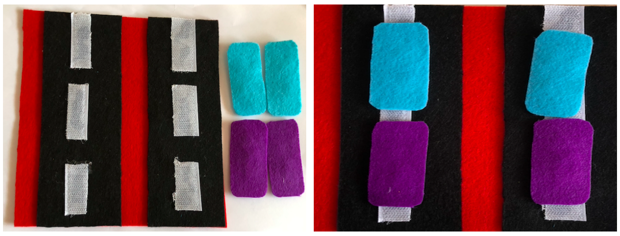


Figura 4.7: Carretera. Elaboración propia.

- La ficha del *árbol*. En esta ficha podemos observar un árbol que presenta de nuevo una simetría de reflexión axial y dos cestas como vemos en la primera imagen de la Figura 4.8. En cada una de las cestas podemos observar diferentes frutas: en una hay limones que presentan un ángulo de rotación π y una reflexión axial respecto a dos ejes ortogonales y otra hay manzanas que presentan únicamente una reflexión axial respecto al eje vertical. Para completar esta ficha se deben colocar las frutas encima del árbol tal y como se muestra en la segunda imagen de la Figura 4.8.

Figura 4.8: Árbol. Elaboración propia.

Propuesta de actividad. Viajando en nuestro cohete.

A continuación propondremos una actividad con la que trabajar este material. Naturalmente esta propuesta no es única y cada uno puede crear nuevas o adaptar las actividades aquí presentadas.

Contaremos, de forma dramatizada, un cuento que irá introduciendo de forma secuenciada el trabajo que se propone en cada ficha.

- *Juan y María eran unos astronautas que querían viajar con su cohete al mundo de los animales. Este cohete era tan tan grande y estaba tan bien construido que enseguida despegó y voló hacia este mundo.* Animar a los niños a que manipulen el cohete y descubran su eje de reflexión.

- *El primer animal que vieron Juan y María fue un tiburón. Este animal estaba muy triste. Tan triste que siempre llevaba escondidas sus aletas y los ojos cerrados. Un día se hizo muy amigo de otro tiburón y comenzó a abrir bien sus ojos y a mostrar siempre sus aletas.* Animar al niño a que coloque las aletas y los ojos del tiburón.

- *Después se encontraron con un tigre. Este tigre era el más bello de todo el lugar y siempre alardeaba de que nada le daba miedo. Sin embargo, un día empezó a llover muy muy fuerte y el tigre se asustó tanto, que quiso taparse los ojos para no ver los fuertes truenos.* Animar al niño a que tape los ojos al tigre.

- *Juan y María siguieron andando por el reino de los animales y encontraron una rana que saltaba muy feliz de charca en charca. Ella siempre estaba en el agua mostrando solo medio cuerpo, pero claro, Juan y María querían poder verle los dos ojos a la rana. Así que se zambulleron en el agua y observeron todo su cuerpo. ¿Puedes ayudarme a ver qué vio su amiga?* Darle al niño el anca y el ojo y dejar que los coloque.

- *Después de estar con la rana. Vieron a un pingüino que les dijo que hoy era su cumpleaños. Muy contentos Juan y María le regalaron unos globlos muy bonitos. Sin embargo, el pingüino no sabía hinchar los globos para que subieran bien bien alto. ¿Le ayudas a hincharlos y a que vayan hasta el cielo?* Invitar al niño a que haga como que hincha los globos y posteriormente, a que los coloque en la ficha en la cinta autocierre.

- *Después del largo viaje Juan y María estaban muy cansados. Así que decidieron parar a almorzar lo que sus madres les habían preparado. Era un almuerzo muy sano para que tuvieran mucha energía y pudieran vivir miles de aventuras. Estas son las frutas (mostrárselas al niño) y yo me quiero comer las dos piezas de una fruta juntas. ¿Me ayudas a conseguirlo?* Enseñarle todas las piezas al niño e ir preguntando una a una donde la colocarían.

- *De vuelta a casa, Juan y María vieron una carretera. En esta había un montón de coches. ¿Colocamos todos estos coches para que podamos imaginarnos la carretera?* Darle todos los coches al niño y esperar a que los coloque.

- *Finalmente, nuestros amigos Juan y María estaban tan tan cansados que decidieron sentarse en un árbol a descansar. Este árbol resulta que también era muy especial porque ¡daba limones y manzanas! ¿puedes mostrarme ese árbol colocando las frutas ?.* Animar al niño a que coloque las frutas en el árbol.

Guía de observación en la acción para esta actividad

La actividad anterior puede ser muy rica para el trabajo con simetrías axiales y de rotación en el plano si los profesores están atentos al trabajo del niño y saben orientarlo adecuadamente. Proponemos aquí una guía que facilite esta observación y algunas acciones que pueden realizar los maestros para encauzar el descubrimiento y potenciar el aprendizaje.

- Actividad con el *cohete*. En esta ficha queremos trabajar la reflexión axial.

- Contemplar qué realiza el niño con el cohete. Recordemos que únicamente está unido al soporte por su eje de reflexión por lo que es posible que el niño al manipularlo lo pueda observar. Sino siempre podemos pasar su dedo por el eje de reflexión.
- Observar si el niño se da cuenta que las alas del cohete están colocadas de manera simétrica y que las ventanillas están colocadas en el centro de manera que preservan la reflexión axial. Esto puede mostrárnoslo mediante gestos o acciones o de palabra.

- Actividad con el *tiburón*. Esta actividad pretende trabajar tanto la acción simétrica como la simetría de reflexión axial.
  - Contemplar si al darle las aletas y los ojos al niño este realiza una acción simétrica para colocarlos, es decir: coloca la aleta de la izquierda y luego la de la derecha o viceversa y posteriormente realiza lo mismo con los ojos.
  - Observar si el niño visualiza el eje de reflexión ya sea: doblando la figura por medio del eje, pasando el dedo por él, realizando algún gesto que nos muestre que lo observa... Si no lo visualiza podemos ayudarle a que lo descubra.

- Actividad con el *tigre*. En esta actividad nuestra intención es trabajar la acción simétrica.
  - Observar cómo coloca el niño las manos del tigre encima de los ojos. Si coloca primero una con una mano y luego la otra con otra mano, si coloca las dos a la vez una con cada mano, si coloca las dos patas del tigre con la misma mano... La acción simétrica requeriría que el niño las colocara una con cada mano.
  - Esperar a ver si el niño contempla la simetría de reflexión del tigre. Si no podemos mostrarle el eje ya sea pasando su dedo por el eje, mostrándole que el tigre tiene dos orejas una en cada lado de la cabeza, dos ojos uno en cada lado de la cabeza, dos manos uno en cada lado de la cabeza, unas manchas marrones una en cada lado de la cabeza...

- Actividad con la *rana.* Con esta actividad pretendemos trabajar la reflexión axial.
  - Lo importante de esta ficha no es que el niño coloque en su posición correcta el ojo o la anca, sino que tenga una intencionalidad de colocarlos simétricos respecto el eje de reflexión axial.
  - Cuando haya colocado las piezas, podemos moverlas de posición y observar cuál es la actitud del niño ante este cambio: si lo ve bello, si lo ve natural, si le agrada...

- Actividad con el *pingüino*. Esta actividad está diseñada para que el niño contemple la reflexión axial y trabajar la acción simétrica.
  - Observar si el niño contempla la reflexión axial del pingüino y trata de colocar los globos de manera que esta se preserve.
  - Ver cómo coloca los globos: si primero los rojos y luego los azules, si coloca a la vez dos, uno con cada mano, si va de uno en uno.... La acción simétrica se mostraría si colocase primero los de un color, uno con cada mano y posteriormente los del otro color, uno con cada mano y de manera que mantuvieran la simetría de reflexión del pingüino.

- Actividad con las *frutas*. Esta actividad ha sido diseñada con la intención de que el niño contemple los ejes de reflexión axial.

  - Observar si el niño contempla el eje de reflexión axial: pasa el dedo por encima del eje, expresa que sabe que es la mitad de la fruta...
  - Observar sus acciones ya que puede que el niño coloque las dos partes de una pieza de fruta una encima de otra para asegurarse que son iguales. Esto nos mostraría que comprende que el eje de reflexión ha dividido a la fruta en dos mitades iguales.

- Actividad con la *carretera.* Con esta actividad queremos observar la acción simétrica del niño y también la reflexión axial de la ficha.

  - Observar cuál es la actitud del niño al entregarle la ficha. Si aprecia que existen dos carreteras colocadas de manera paralela, si no le da importancia... Siempre podemos mostrárselo nosotros.
  - Observar cómo coloca los coches en las carreteras. Para realizar una acción simétrica el niño debe colocar primero los de un color, uno con una mano y otro con otra en ambas carreteras de manera paralela y después realizar lo mismo con el otro color.
  - Contemplar si el niño realiza una *acción de comprobación* con los coches.

- Actividad con el *árbol*

  - Esperar a ver si el niño aprecia la simetría de reflexión del árbol.
  - Observar cómo coloca las frutas en el árbol. Para realizar una acción simétrica el niño debe colocar primero las frutas de un color, una con una mano y otra con la otra en el árbol de manera paralela y después realizar lo mismo con las otras frutas.
  - Contemplar si el niño realiza una *acción de comprobación* con los limones.

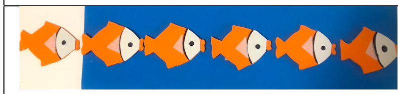
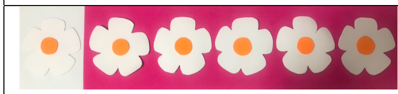
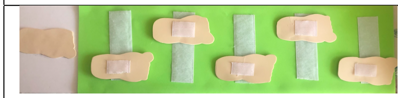
4.2. Frisos

Presentación del material

El segundo material construido para trabajar la simetría en el plano viene inspirado por los llamados frisos que estudiaremos en trabajos posteriores. Los frisos son objetos cuyo grupo de simetría es infinito y contiene las traslaciones en una dirección fija como subgrupo. Dicha simetría de traslación se suele denominar *serie* en el contexto de didáctica de las matemáticas.

El material que hemos realizado se trata de siete frisos, cada uno con elementos distintos (Cuadro 4.2). Realizamos siete para que haya diversidad y que podamos trabajar simetrías diferentes con cada uno de ellos. Las dimensiones de todos los soportes son $16{,}5 \times 71$cm. Además, cada friso posee al menos 4 elementos que serán los objetos que trasladaremos. Como hemos dicho en el Capítulo 3, a efectos didácticos consideraremos que existe una simetría de traslación cuando al menos trasladamos 4 elementos.

Los frisos se encuentran ordenados en el Cuadro 4.2 atendiendo a su dificultad. Esta dificultad viene establecida por nosotros y se debe tanto al número de simetrías que podemos realizar en los frisos como a la complejidad de la silueta de cada elemento.

	Dimensiones de los elementos
	Castillo: $10 \times 8{,}5$cm
	Casa: $11 \times 11{,}5$cm
	Mariposa: $11{,}5 \times 10{,}5$cm
	Pez: $10{,}5 \times 9$cm
	Flor: 10,5cm radio del círculo en el que está inscrita
	Pie: 12×6cm
	Gusano: $10{,}5 \times 4$cm

Cuadro 4.2: Frisos. Elaboración propia.

Simetrías que se pueden trabajar con este material

Describamos a continuación las simetrías de los elementos a trasladar ya que esta descripción en algunos casos puede sernos útil para comprender las simetrías de los frisos.

- Friso del *castillo*. El castillo trasladado presenta una reflexión axial de eje vertical y no presenta ángulo de rotación.

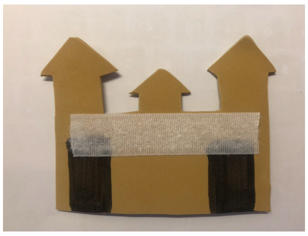


Figura 4.9: Castillo. Elaboración propia.

Cuando se coloquen los castillos en el soporte horizontal, suponiendo que el niño lo coloque siempre en su posición natural es decir con las torres hacia arriba, podemos contemplar una simetría de traslación. Además de esta simetría de traslación siempre existen sobre este friso dos tipos diferentes de simetrías de reflexión axial. En la primera imagen de la Figura 4.10, podemos observar una simetría de traslación y simetría de reflexión axial. El eje de esta reflexión axial se sitúa entre los castillos luego el elemento que trasladamos es un castillo. En la segunda imagen de la Figura 4.10 también observamos una traslación y una reflexión axial. El eje de esta reflexión axial está situado en la mitad de un castillo luego lo que trasladamos es un castillo y medio, ya que aprovechamos la reflexión axial del elemento.

Figura 4.10: Simetría de traslación y de reflexión axial de eje vertical. Elaboración propia.

- Friso de la *casa*. Observemos su elemento de traslación en la Figura 4.11. En este caso, este elemento no posee ningún tipo de simetría ya que hemos eliminado una de las torres del *castillo*.

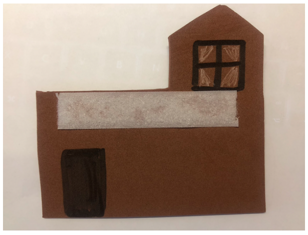


Figura 4.11: Casa. Elaboración propia.

Por ello, al colocar este elemento en el soporte horizontal podemos realizar dos configuraciones diferentes y hablar tanto de simetría de traslación; como observamos en la primera imagen de la Figura 4.12, como de reflexión axial de eje vertical; como vemos en la segunda imagen de la Figura 4.12.

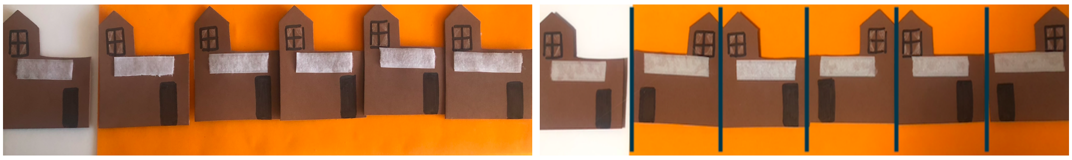


Figura 4.12: Simetría de traslación y simetría de reflexión. Elaboración propia.

- Friso de la *mariposa*. En este caso, si no atendemos al dibujo de los ojos y a los colores de cada ala, la base de la mariposa posee dos ejes ortogonales de reflexión axial y por lo tanto una reflexión central además de una simetría de rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$. Por el contrario, si atendemos a los ojos y al color de las alas, podemos afirmar que la mariposa no posee simetrías. La diferencia con los elementos de los anteriores frisos es que hemos introducido en cada ala un color diferente para romper la simetría. De manera que, como podemos ver en la Figura 4.13, al voltearla cambian los colores de posición.

Figura 4.13: Mariposa. Elaboración propia.

En este friso podemos observar una simetría de traslación como podemos ver en la primera imagen de la Figura 4.14. Además, gracias al hecho de poder voltear la mariposa podemos crear un friso con simetría de reflexión axial vertical si colocamos de manera alterna los colores de las alas de la mariposa como podemos ver en la segunda imagen de la Figura 4.14.

Figura 4.14: Simetría de traslación y simetría de reflexión. Elaboración propia.

- Friso del *pez* (Figura 4.15). Este pez posee una reflexión axial de eje horizontal que hasta ahora no habíamos trabajado. Además, ambas caras de este pez son iguales, lo que nos facilita la reflexión axial.

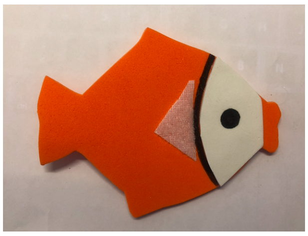


Figura 4.15: Pez. Elaboración propia.

En este friso podemos encontrar de nuevo una simetría de traslación como observamos en las imagenes de la Figura 4.16. También podemos obtener nuevas simetrías que no se habían dado hasta ahora como por ejemplo la reflexión axial de eje horizontal. En la segunda imagen de la Figura 4.16 podemos contemplar de nuevo una simetría de reflexión axial de eje horizontal y además otra simetría de reflexión axial de eje vertical. El hecho de que exista una reflexión axial respecto a dos ejes ortogonales implica que entre dos peces se establece una simetría de reflexión central.

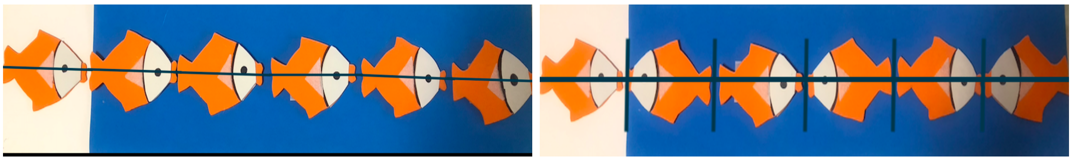


Figura 4.16: Simetría de traslación y simetría de reflexión. Elaboración propia.

- Friso de las *flores* (Figura 4.17). La flor además de poseer una simetría de reflexión axial, como poseían todos los elementos anteriores, tiene una simetría de rotación. Al ser una flor de cinco pétalos idénticos su ángulo de rotación será de $\frac{2\pi}{5}$.

  En este friso volvemos a tener una simetría de traslación y dos simetrías diferentes de reflexión axial, como ocurría en el friso del castillo. En cada una de las imágenes de la Figura 4.18, existen un eje diferente de simetría de reflexión axial que se produce en un caso gracias a la traslación y en otro gracias a la simetría de reflexión de la flor. Sin embargo, aunque la flor posee ángulo de rotación de $\frac{2\pi}{5}$ no existe una simetría de rotación en el friso.

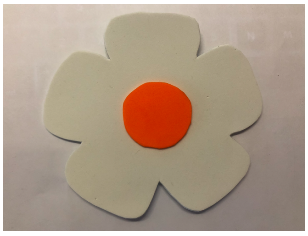


Figura 4.17: Flor. Elaboración propia.

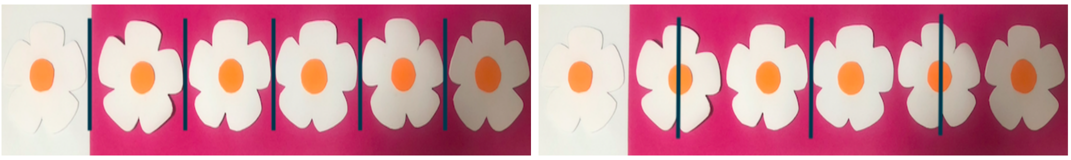


Figura 4.18: Simetría de traslación, de reflexión axial y de rotación. Elaboración propia.

En ambas simetrías debemos tener en cuenta que si los pétalos no coinciden en posición con los de la flor anterior estas se desvanecen. Esto mismo es lo que ocurre en la Figura 4.19. Como podemos comprobar la posición de las flores no es la misma en todos los casos. Por ejemplo, la primera y la segunda flor no coinciden en posición lo que implica que no exista ninguna de las simetrías mencionadas antes.

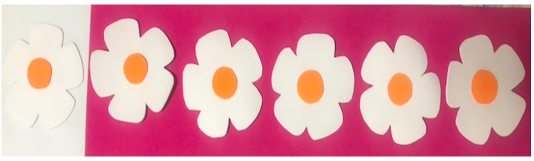


Figura 4.19: Friso sin simetrías. Elaboración propia.

- Friso de *los pies* (Figura 4.20). Aunque este elemento no posee ninguna simetría, veamos cuáles se dan en el friso compuesto por estos elementos.

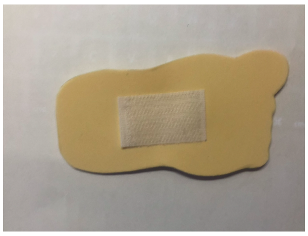


Figura 4.20: Pie. Elaboración propia.

Como en todos los anteriores, al ir colocando los elementos de este friso uno detrás del otro podemos obtener una simetría de traslación como podemos observar en la primera imagen de la Figura 4.21. Sin embargo, si colocamos las huellas tal y como se muestra en la segunda imagen de la Figura 4.21 podemos observar tanto una simetría de traslación como una simetría de reflexión axial respecto al ejes horizontal. Si bien es cierto, siempre hemos dicho que las series que poseen una simetría de traslación son infinitas y que como mínimo, para poder considerar que un friso presenta una simetría de traslación, necesitaríamos tener 4 repeticiones iguales.

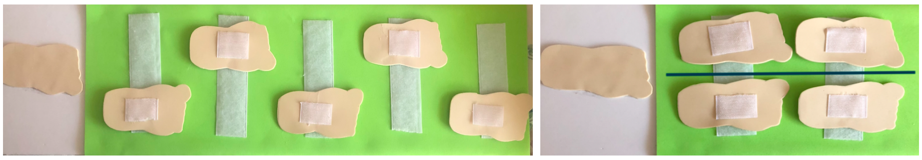


Figura 4.21: Simetría de traslación y de reflexión axial. Elaboración propia.

El último tipo de simetría que el niño puede realizar y que hasta ahora no se ha visto es la que observamos en la Figura 4.22. Esta simetría es la reflexión deslizante que mencionamos en el Capítulo 2. En realidad esta es la que se produce cuando nosotros mismos andamos sobre la arena y vamos observando las huellas que dejamos.

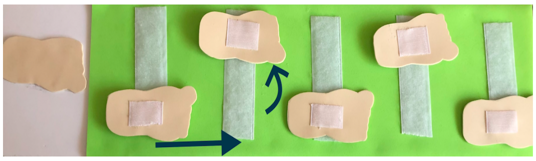


Figura 4.22: Reflexión deslizante. Elaboración propia.

- Friso del *gusano*. Este friso es el que consideramos más difícil debido a la silueta que posee el elemento. El gusano posee curvas que no serían un problema para poder establecer una simetría de rotación de ángulo π si no le hubiéramos dibujado los ojos. Sin embargo, al haber dibujado su figura, este elemento, tal y como podemos ver en la Figura 4.23, no posee simetrías.

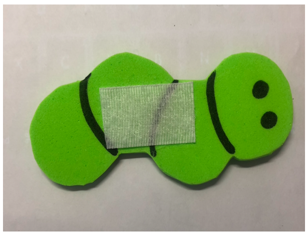


Figura 4.23: Gusano. Elaboración propia.

Al analizar las simetrías de este friso es claro que posee una simetría de traslación si siempre se coloca en una misma dirección, como podemos observar en la primera imagen de la Figura 4.24. Además, podría poseer una simetría de reflexión axial respecto al eje vertical si se colocasen los gusanos como en la segunda imagen de la Figura 4.24.

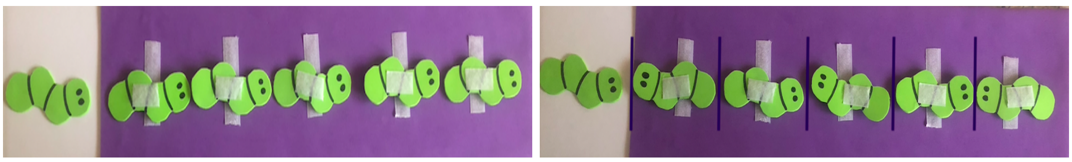


Figura 4.24: Simetría de traslación y de reflexión axial. Elaboración propia.

Propuesta de actividad. Decorando mis paredes.

A continuación propondremos una actividad que nos permita trabajar con este material. Como en el epígrafe 4.1, la propuesta que nosotros realizamos no es única y por ello, cada uno puede diseñar actividades diferentes.

Contaremos nuevamente una historia que ayude a los niños a introducirse en la actividad. *Seremos unos albañiles que quieren cambiar toda su casa para que esta sea la más bonita del mundo. Nos han llegado un montón de formas para poder decorar nuestras paredes y dejarlas muy bonitas. Sin embargo, al traérnoslas, todas las figuras que llevaban puestas nuestras baldosas se han caído. Como somos unos buenos albañiles vamos a decorar de nuevo cada una de las baldosas para que nuestra casa quede la más espectacular de todas.*

Para esta actividad iremos dando a los niños los frisos de uno en uno atendiendo a su grado de complejidad y seguiremos la secuencia que proponemos a continuación.

1. Dejaremos que cada niño explore libremente el elemento de traslación de cada friso para que descubra si presenta simetrías. Podemos tener los elementos de traslación impresos en papel de manera que puedan doblarse o incluso pintarse para visualizar los ejes de simetría.

2. Dejaremos que el niño coloque los elementos de traslación en el friso y observaremos si explora todas las posibles simetrías que se pueden dar en cada friso.

3. Si no explota todas las simetrías podemos ayudarle o incitarle a que lo haga. Podemos introducirlo como pequeñas modificaciones en la serie que el niño ha creado y esperar a ver si nos expresa su desencanto o si por el contrario nos muestra que le parece estéticamente bello.

Guía de observación en la acción para esta actividad

Igual que la actividad propuesta anteriormente, esta puede ser muy útil para el trabajo de las simetrías de traslación, simetrías de reflexión, simetrías de rotación y reflexión deslizante, siempre y cuando los maestros estén atentos al trabajo de los niños. Propondremos una guía de observación y cierta acciones que nos facilitarán el camino hacia el descubrimiento de la simetría.

- En el friso del *castillo* podemos observar si:

  - El niño percibe la simetría del castillo. Si no lo hace podemos ayudar a su descubrimiento: cogiéndole el dedo y pasándolo por el eje de reflexión axial, diciéndole que el castillo tiene dos torres iguales, doblando el elemento en papel por el eje de simetría para que este se intuya todavía mejor...
  - El niño realiza una *acción de comprobación* en el castillo.
  - Al colocar los elementos del friso sigue un patrón.
  - En algún momento el niño hace algún gesto o expresa verbalmente que está observando la simetría de traslación al colocar los castillos en el friso.

- En el friso de la *casa* tengamos en cuenta si:

  - El niño percibe que el elemento de traslación dado anteriormente y este son diferentes. Si no, hacerle ver al niño las diferencias dejándole que juegue con ambos elementos de traslación.
  - El niño observa la asimetría de este elemento de traslación. Esto lo podremos comprobar en sus acciones: nos dice que falta una torre, intenta doblarlo para observar que es distinto, al darle la vuelta nos indica que la torre cambia de lado...

  - El niño al colocar los elementos en el friso presenta una reflexión axial.
  - Observar si en algún momento realiza alguna acción que nos haga comprender que está visualizando las simetrías o el eje de reflexión.

- El el friso de las *mariposas* podemos observar con este material si:

  - Al dejarle interactuar con los elementos de traslación se da cuenta de la diferencia de los colores de las alas. Si no es así podemos mostrárselo.
  - El niño cuida la posición en la que coloca la mariposa, es decir, atiende tanto a los ojos como al color de las alas.
  - El niño coloca los elementos de traslación realizando las diferentes simetrías del friso ya sea atendiendo al color de las alas y la posición de los ojos o sin atender a ellos. Si no las realiza podemos mostrárselas o incitarle a que las consiga.
  - En algún momento el niño realiza alguna acción que nos haga comprender que está visualizando las simetrías.

- En el friso de los *peces*, en este friso podemos atender a si:

  - Al dejarle el material al niño este contempla su simetría de reflexión axial.
  - Realiza una *acción de comprobación* de los peces.
  - Atiende a la colocación de los peces o si por el contrario los coloca en la misma posición en la que se los das.
  - En algún momento observa las simetrías que van estableciéndose en el friso.
  - Coloca a los peces en el friso creando todas las simetrías posibles. Si no es así podemos mostrárselo o incitarle a que las consiga.

- En el friso de las *flores* estaremos atentos a si:

  - El niño percibe el ángulo de rotación de las flores, esto podemos apreciarlo si observamos por su parte una *acción de comprobación*.
  - El niño presta atención al momento de colocación de las flores en el friso. Esta intencionalidad por parte del niño de colocarlas de una manera determinada, aunque posteriormente el resultado sea como el observado en la Figura 4.19, nos muestra que el niño percibe la simetría.
  - Atender a si el niño realiza algún gesto o dice algo sobre las simetrías de este friso o de este elemento.

- En el friso de los *pies* tengamos en cuenta que es el primero en el que aparece una reflexión deslizante y por lo tanto podemos observar si:

  - Al darle el elemento de traslación al niño vemos que intuye la reflexión axial que hay entre nuestros dos pies: señala sus pies, pone las dos plantas de sus pies juntas para mostrarnos que son iguales...
  - Para colocar los pies en el friso, presta atención e intenta: colocar un pie detrás de otro, colocar el pie en una única dirección como si estuviera saltando a la pata coja, colocar dos pies paralelamente atendiendo a que los dos dedos gordos vayan en la parte interior o exterior...

  - El niño crea diferentes series de este elemento de traslación. Si no lo hace, podemos ayudarle a que intuya nuevas formas de colocación.
  - Atender a si el niño realiza algún gesto o dice algo sobre las simetrías de este friso o de este elemento de traslación.
  - El niño trata de realizar la misma serie que ha realizado con sus pies.

- El último friso es el del *gusano*. Recordemos que este, por la forma de su silueta, es el más complicado. Podemos estar atentos a ver si:

  - El niño intuye las diferencias que se pueden dar al colocar al gusano en una posición o en otra, es decir, si explora el elemento de traslación.
  - Atiende a la forma de curvas de la silueta o a los ojos del gusano al ir a colocarlo en el friso, ya que si no lo hace puede tratar de generar rotaciones de ángulo π.
  - El niño trata de colocar a los gusanos siguiendo un mismo patrón.
  - Realiza diferentes simetrías del objeto. Si no es así, podemos ayudarle a que las intuya.

Capítulo 5

Conclusiones

Los niños comienzan su escolarización formal con ciertos conceptos matemáticos adquiridos a través de la experiencia. La observación, la convivencia con el mundo adulto, los momentos de juego o el hecho de tener que dar respuesta a situaciones de la vida cotidiana son acciones que el niño vive y que le proporcionan un *conocimiento informal* que será el germen de futuras ideas matemáticas.

Este conocimiento informal es intuitivo e inconsciente propio del niño que no trata solo de imitar al adulto, sino que va generando su propia manera de ver el mundo no exenta de errores. Se trata de un saber conectado y gradual gracias al que poco a poco el niño va adquiriendo nuevas ideas matemáticas, ampliando las que ya posee. Es por lo tanto un saber útil que debemos valorar y potenciar desde etapas infantiles ya que será el cimiento sólido que dará lugar a un saber más meditado y profundo.

En este trabajo hemos tratado de explorar este conocimiento informal de los niños acerca de las ideas de simetría de los objetos. La línea de trabajo de la Profesora Ana Millán y las observaciones realizadas a lo largo de la investigación, parecen apoyar la hipótesis de que los niños poseen ciertas concepciones ingenuas sobre este concepto geométrico. Hemos podido observar que hay ciertas actividades que favorecen que este conocimiento informal salga a la luz como son el dibujo y las construcciones. Hemos diseñado materiales específicos que pueden ser útiles para el trabajo con las simetrías, aunque su eficacia está todavía por poner a prueba.

El hecho de que estas concepciones ingenuas emerjan cuando pensamos actividades basadas en ideas matemáticas sólidas y cuando la metodología que utilizamos sea la adecuada nos anima a continuar con esta investigación. En trabajos posteriores, siguiendo esta misma línea de actuación, nos proponemos ampliar la guía de observación en la acción propuesta por Ana Millán Gasca a otros conceptos geométricos.

Bibliografía

[Baroody, 1991] Baroody, A. (1991). *El pensamiento matemático de los niños*. A. Machado Libros S.A., España.

[Carpenter, 1999] Carpenter, T. (1999). *Children's Mathematics. Cognitively Guided Instruction*. Heinemann.

[Castro, 2012] Castro, C. (2012). Aparición espontánea de construcciones simétricas durante el juego libre en educación infantil. *Revista de Educación Matemática*, 29(3):23–40.

[Cockcroft, 1985] Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Estudios Educación, Madrid, España.

[Domingo, 2019] Domingo, J. (2019). La simetría, un recurso infantil espontáneo para dibujar el mundo vegetal. Comunicación Instruire aujourd'hui à l'école primaire, `https://actualidaduniversitaria.com/2019/01/la-simetria-un-recurso-infantil-espontaneo-para-dibujar-el-mundo-vegetal/`.

[du Sautoy, 2009] du Sautoy, M. (2009). *Simetría. Un viaje por los patrones de la naturaleza.* Acantilado, Barcelona, España.

[Fuson, 1987] Fuson, K. (1987). *Children's Counting and Concepts of Number*. Springer-Verlag, Nueva York, Estados Unidos.

[Galilei, 1623] Galilei, G. (1623). *Il Saggiatore*. Flammarion, Roma, Italia.

[Gil and Cogolludo, 2019] Gil, E. and Cogolludo, J. (2019). The effectiveness of teaching geometry to enhance mathematical understanding in children with down syndrome. *International Journal of Disability, Development and Education*, 2(66):168–205.

[Gil and Colella, 2017] Gil, E. and Colella, I. (2017). Combining historical, foundational and developmental insights to build children's first steps in mathematics. *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

[Giorgio and Millán, 2012] Giorgio, I. and Millán, A. (2012). *Pensare in matematica*. Zanichelli, Italia.

[Hughes, 1986] Hughes, M. (1986). *Children and number. Difficulties in Learning Mathematics.* Blackwell, Reino Unido.

[Keller, 2001] Keller, O. (2001). Éléments pour une préhistoire de la géométrie. *LAntropologie*, 105:327–349.

[Keller, 2004] Keller, O. (2004). Elements for a prehistory of geometry. Communication to the HPM conference. Congreso llevado a cabo en la Fourth European Summer University.

[Lafforgue, 2010] Lafforgue, L. (2010). L'importance du calcul et de la géométrie à l'école primaire. Comunicación Instruire aujourd'hui à l'école primaire, `https://www.laurentlafforgue.org/textes/ImportanceCalculGeometrie.pdf`.

[Millán, 2004] Millán, A. (2004). *Euclides. La fuerza del razonamiento matemático*. Nivola Libros Ediciones, España.

[Millán, 2016] Millán, A. (2016). *Numeri e forme*. Zanichelli, Bolonia, Italia.

[Poincaré, 1905] Poincaré, H. (1905). *Ciencia e hipótesis*. Flammarion, París, Francia.

[Ruiller, 2012] Ruiller, J. (2012). *Por cuatro esquinitas de nada*. Editorial Juventud, París, Francia.

[Schmandt-Besserat, 2017] Schmandt-Besserat, D. (2017). Making tokens talk. Non-sribal Communication Media in the Bronze Age Aegean and Surrounding Areas.

[Tolchinsky, 2003] Tolchinsky, L. (2003). *The Cradle of Culture and what children know about writing and numbers before being taught*. LEA, Toronto, Canada.

Anexo

En el Capítulo 3 hemos hecho referencia a la propuesta de guía de exploración en la acción realizada por Ana Millán Gasca (2016). Dicha propuesta se basa en dos ideas: por una parte la *intuición del continuo*, explorada por René Thom y la raíz común de la repetición de elementos idénticos de Lafforgue y por otra parte en la identificación de objetos y relaciones básicas primitivas de la axiomática de Hilbert y la de Peano (Gil-Clemente, 2015, p.193). Veamos dicha guía las posibles actuaciones de los niños para observar o explorar sus concepciones ingenuas.

1. Guía de observación para las habilidades numéricas

   - *Contar intransitivo*
     - Cuenta de modo progresivo o regresivo hasta..
     - Se olvida del número...
     - Confunde el orden de los números
     - Quiere ayuda (siempre, alguna vez...)
     - Cuenta correctamente sin ayuda
     - Conoce palabras variadas como mil, ciento uno, un millón...
   - *Contar transitivo*
     - Señala, toca, indica, mira o tacha para contar
     - Cuenta objetos hasta...
     - Cuenta objetos dibujados hasta...
     - Calcula la cantidad por "subitización" hasta...
     - Si los objetos están dispuestos simétricamente subitiza hasta cuatro/cinco/seis.
     - Durante la cuenta olvida algún número
     - Sabe o no sabe que la última palabra numeral es el resultado del contar
     - Cuenta un objeto más de una vez
     - Olvida contar algún objeto
     - Usa la misma "etiqueta" más de una vez
     - Cuenta correctamente asociando a cada objeto su etiqueta numeral
     - Reacciona con interés / preocupación / buen humor cuando se le señala un error.
   - *Número ordinal*
     - Pronuncia correctamente el orden hasta...
     - No responde
     - Responde con un número cardinal

- *El cero*
  - Modo en que expresa la idea: como inicio, como nada, si hace un símbolo redondo, como temperatura.
- *Los números (ideas de cualquier tipo)*
  - Sabe su edad
  - Sabe qué hay números de teléfono
  - Sabe cuántos son los miembros de la familia
  - Sabe en que piso vive
  - Sabe cuántos son los miembros de otra familia
  - Tiene un número preferido
  - Se sabe una canción con los números
  - Asocia el tres a algo: por ejemplo los tres cerditos
  - Conoce/no conoce le uso del dinero
- *Representación simbólica espontánea de cantidad o de palabras numéricas también usando las cifras*
  - Escribe correctamente hasta.. asociando el símbolo al numeral
  - Escribe los números correctamente pero no los asocia al numeral pronunciado
  - Escribe los números de forma equivocada
  - Utiliza símbolos de su invención para representar una cantidad: dibujos, puntos, palitos...
  - No utiliza ningún signo para indicar una cantidad
  - Reconoce/no reconoce los símbolos numéricos cuando los ve
- *Igualdad aritmética*
  - Sabe/no sabe distinguir cuando hay más objetos o cuando hay menos
  - Sabe/no sabe distinguir cuando dos personas tienen la misma cantidad de objetos
  - Usa palabras numéricas para precisar la comparación: cuánto cada uno, la diferencia.
- *Resolución de pequeños problemas aritméticos*
  - Resuelve pequeños problemas aritméticos con números hasta cinco, hasta diez..
  - Reacciona a las preguntas con espíritu de juego, buen humor, preocupación, inseguridad...
  - Hace, a su vez, preguntas a los demás niños

2. Guía de observación para las habilidades geométricas

   - *Medida*
     - Compara por superposición las longitudes y usa más, menos para expresar la comparación
     - Conoce/no conoce alguna unidad de medida. Cuál
     - Sabe/no sabe algo acerca de las unidades de medida conocidas
     - Mide con unidades de longitud: como pasos o palmos

  - Sabe que hay instrumentos para medir longitudes: la regla, el metro
  - Mide contando el tiempo
  - Cuantifica la medida con otras palabras (tanto, poco, más, menos)
- *Idea de punto*
  - El niño puede dibujar puntos, tiene una idea de posición, de extremo de un recorrido o de un segmento, conoce la palabra punto
- *Línea e idea de continuo*
  - Línea como recorrido: caminando, en bicicleta, en coche (dibuja la línea, habla de recorrido)
  - Línea como trazo en el folio con un lápiz (longitud sin anchura)
- *Distancia*
  - Tiene una idea de distancia entre dos niños, entre dos objetos como un hilo invisible estirado que los une
  - Tiene una idea de distancia entre dos ciudades, entre su casa y la escuela
- *Recto*
  - Se alinea para ponerse en fila
  - No se cae si atraviesa un murete
  - Recorre la mínima distancia entre dos posiciones
  - Es preciso al recortar una hoja recta con la tijera
  - Toca el borde del folio, de la mesa..
  - Dobla una hoja con un pliegue “limpio”
  - Traza una recta a mano alzada y la puede prolongar manteniendo el trazo (no necesariamente horizontal)
- *Expresa o comprende la idea de recorrido o trazo no recto (hablando de girar y por tanto de ángulo)*
- *Igualdad geométrica*
- *Círculo*
  - Gestos y palabras para rotación y expresar la idea de redondo
  - Se mete en un círculo: sabe ampliar el círculo
  - Conoce la palabra círculo
  - Propone ejemplos de círculo y de perfiles circulares de cilindros
- *Triángulos y cuadriláteros*
  - Conoce las palabras: triángulo, rectángulo, cuadrado, rombo
  - Dibuja triángulos
  - Dibuja rectángulos con precisión
  - Habla de rectángulos y dibuja cuadriláteros irregulares
  - Expresa las semejanzas y diferencias entre cuadrado y rectángulo, usando varias palabras: iguales, más largo, cuatro...
  - Recuerda personajes o cuentos en los que aparecen estas formas
  - Expresa la regularidad del círculo, del cuadrado y del triángulo equilátero y pentágono regular con sus palabras

- *Figuras sólidas*
    - Sentimiento, idea, importancia de la pelota (esfera)
    - Propone otros ejemplos como la sandia, la naranja..
    - Relaciona la esfera y el círculo
    - Propone ejemplos de figuras sólidas regulares como el tronco del árbol, el vaso, el cono helado...
    - Idea de la relación entre el dibujo plano y las formas reales, por ejemplo en un paseo: el sol, un volcán, un árbol, la pelota de un niño...
- *Resolución de pequeños problemas geométricos*
    - Resuelve pequeños problemas geométricos con cierta facilidad o con cierta dificultad manual: trazar, recortar, doblar...

[Millán, 2016, p.135]