



**Universidad**  
Zaragoza

## TRABAJO FIN DE MASTER

Energía Casimir en teorías gauge no abelianas

Autor:

Fernando Ezquerro Sastre

Director

Dr. Manuel Asorey

Facultad de Ciencias  
Departamento de Física Teórica

26 de junio de 2020

## Resumen

En este trabajo se aborda el cálculo de la energía Casimir para teorías gauge no abelianas en  $3 + 1$  dimensiones. En el caso de la teoría de Yang-Mills con grupo gauge  $SU(2)$  en  $2 + 1$  dimensiones se ha observado que hay una parametrización de los grados de libertad invariantes que implica a un solo campo escalar que adquiere masa debido a la presencia de una anomalía. En ese caso el cálculo de la energía Casimir generada por este campo coincide con la obtenida por las simulaciones numéricas de la teoría de campos gauge. Suponiendo que un fenómeno similar ocurre en  $3 + 1$ , calculamos la energía Casimir para un campo escalar masivo en un espacio-tiempo de  $3 + 1$  dimensiones con la esperanza de que coincida con las simulaciones numéricas de la teoría. Realizamos dicho cálculo para condiciones de contorno arbitrarias. Las simulaciones numéricas se han realizado con condiciones de contorno periódicas, pero recientemente se están considerando otro tipo condiciones de contorno. Desde un punto de vista analítico obtenemos fórmulas compactas en aproximación de baja masa y también cuando la separación de las placas es grande, mediante desarrollos asintóticos. En ambos casos se obtienen fórmulas explícitas para cualquier tipo de condiciones de contorno. El resultado es que las condiciones de contorno se dividen en dos clases: para unas el decaimiento exponencial con la distancia es de la forma  $e^{-ma}$  y para otras  $e^{-2ma}$ .

# Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introducción y Objetivos</b>                           | <b>1</b>  |
| <b>2. Teoría de Yang-Mills</b>                               | <b>3</b>  |
| 2.1. Hamiltoniano en la teoría de Yang-Mills . . . . .       | 3         |
| 2.2. Parametrización de Karabali-Kim-Nair . . . . .          | 4         |
| <b>3. Energía Casimir</b>                                    | <b>7</b>  |
| 3.1. Condiciones de contorno . . . . .                       | 7         |
| 3.2. Cálculo general . . . . .                               | 7         |
| 3.3. Casos particulares de condiciones de contorno . . . . . | 11        |
| 3.3.1. Dirichlet y Neumann . . . . .                         | 11        |
| 3.3.2. Pseudo-periódicas . . . . .                           | 11        |
| 3.3.3. Quasi-periódicas . . . . .                            | 12        |
| <b>4. Aproximación de baja masa</b>                          | <b>15</b> |
| 4.1. Dirichlet y Neumann . . . . .                           | 15        |
| 4.2. Periódicas . . . . .                                    | 16        |
| 4.3. Anti-periódicas . . . . .                               | 16        |
| 4.4. Zaremba . . . . .                                       | 17        |
| 4.5. Validez de la aproximación . . . . .                    | 18        |
| <b>5. Comportamiento asintótico de la energía Casimir</b>    | <b>19</b> |
| 5.1. Derivación de la fórmula . . . . .                      | 19        |
| 5.2. Resolución de las integrales . . . . .                  | 20        |
| 5.2.1. Caso $n_1 \sin \beta \neq 0$ . . . . .                | 20        |
| 5.2.2. Caso $n_1 \sin \beta = 0$ . . . . .                   | 23        |
| <b>6. Conclusiones</b>                                       | <b>26</b> |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>27</b> |

## 1. Introducción y Objetivos

La energía Casimir es la energía que se genera en el vacío de las teorías cuánticas de campos debido a la presencia de barreras físicas en el espacio. Esta fue predicha teóricamente por Hendrik Casimir en 1948 [1] para el caso de una teoría escalar sin masa en presencia de dos placas paralelas.

En este trabajo vamos a analizar el efecto Casimir en las teorías gauge no abelianas y en particular en la teoría de Yang-Mills. Estas son teorías de campos que describen la dinámica de numerosos sistemas físicos fundamentales y que no solamente se usan para las interacciones fundamentales en física de altas energías.

Debido a la complejidad de estas teorías el estado fundamental aún no se ha entendido completamente. Por ejemplo en el caso de 3+1 dimensiones espacio-temporales, se tiene el llamado "Mass Gas Problem", en el que las partículas cuánticas tienen masa positiva a pesar de que las ondas clásicas viajan a la velocidad de la luz. Esta propiedad solo se ha obtenido mediante simulaciones numéricas pero no de forma analítica.

Para abordar el problema se va a calcular la energía Casimir en un campo escalar masivo en 3 + 1 dimensiones para condiciones de contorno arbitrarias en una de las dimensiones espaciales. Se va a trabajar con este campo escalar masivo ya que, por analogía con el caso de 2 + 1 dimensiones, es esperable que a partir del estado de vacío de la teoría de Yang-Mills se genere un campo escalar masivo. Aunque no existe una demostración analítica de esto, mediante simulaciones numéricas se podría comprobar la validez de esta asunción.

En el trabajo se va a comenzar usando el desarrollo de Karabali y Nair para las teorías de Yang-Mills en 2 + 1 dimensiones, que permite generar un campo escalar masivo a partir del estado de vacío usando una parametrización invariante gauge. Con este método se obtiene una masa que depende de la constante de acople y es bastante menor que la primer partícula masiva de la teoría (glueball). Por desgracia este método no se puede aplicar para el caso de 3 + 1 dimensiones para obtener un resultado similar.

Posteriormente calcularemos la energía Casimir para un campo escalar masivo en 3+1 dimensiones aplicando un método [2] que permite obtenerla para condiciones de contorno arbitrarias en una de las dimensiones. Estas condiciones que se van a estudiar son equivalente a colocar dos placas paralelas infinitas bidimensionales que dan unas condiciones al valor del campo y su derivada normal en la dirección de las placas. Con este método se va a obtener una formula general y posteriormente se particularizará para algunas condiciones de contorno especialmente interesantes.

Como veremos se van a obtener fórmulas integrales que no se pueden resolver analíticamente por lo que realizaremos un desarrollo para baja masa con las condiciones más generales de condiciones de contorno, y posteriormente lo aplicaremos a algunas condiciones de contorno particulares. Esto nos permitirá comparar el resultado de la aproximación con la integración numérica de la fórmula exacta. Este desarrollo también nos permitirá ver la gran diferencia entre la existencia de esta masa con el caso sin masa.

Finalmente realizaremos un desarrollo asintótico en el límite en el que la distancia entre las placas es grande para las condiciones de contorno arbitrarias. Este nos permitirá obtener una fórmula analítica en función de la masa, la longitud entre las placas y los parámetros que definen las condiciones de contorno. Con este desarrollo veremos que la energía Casimir presenta un decaimiento exponencial con el producto de la masa y la distancia entre las placas, y que, en función de las condiciones de contorno, este decaimiento exponencial presenta dos comportamientos diferenciados.

## 2. Teoría de Yang-Mills

Como se ha comentado anteriormente no existe un desarrollo analítico en  $3 + 1$  dimensiones para llegar a un campo masivo escalar a partir de la teoría de Yang-Mills. Pero en el caso de  $2 + 1$  sí que existe, por lo que primero vamos a realizar una introducción a este desarrollo.

### 2.1. Hamiltoniano en la teoría de Yang-Mills

Antes de realizar este desarrollo veamos cual es el Hamiltoniano cuántico de la teoría a partir de su Lagrangiano. La densidad Lagrangiana en una teoría de Yang-Mills viene dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (2.2)$$

donde  $A_\mu = A_\mu(x)$  es el campo gauge no abeliano. La existencia de términos de autointeracción es la que complica el cálculo del estado del vacío.

Para obtener el Hamiltoniano realizamos la transformada de Legendre

$$\Pi_0 = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^0} = 0, \quad \Pi_i = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^i} = -F_{0i} \equiv -E_i, \quad (2.3)$$

por lo que la densidad Hamiltoniana es

$$h = \Pi_i \dot{A}_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2}|E_i|^2 + \frac{1}{2}|B|^2 + E_i (\partial^i A_0 - [A_i, A_0]), \quad (2.4)$$

donde  $B = 1/2\epsilon_{ij}F^{ij}$ . Así el Hamiltoniano queda

$$H = \int_\sigma d^2x \operatorname{tr} \left( \frac{1}{2}|E_i|^2 + \frac{1}{2}|B|^2 - \partial^i E_i A_0 + E_i [A_i, A_0] \right), \quad (2.5)$$

donde se ha integrado por partes el tercer término y  $\sigma$  es el recinto de integración en 2 dimensiones. Debemos mantener la condición  $\Pi_0 = 0$ , lo que nos impone que

$$G^t \equiv \dot{\Pi}_0^t = -\partial^i E_i^t - f^{tab} A_i^a E_i^b = 0 \quad (2.6)$$

con  $f^{abc}$  la constante de estructura del grupo de Lie. Es decir, que tenemos que escoger los campos que satisfacen esta condición. El Hamiltoniano, teniendo en cuenta estas indeterminaciones, viene dado por

$$\mathcal{H} = H + \int_\sigma d^2x (\alpha^a(x)\Pi_0^a(x) + \beta^a(x)G^a(x)). \quad (2.7)$$

Podemos escoger  $A_0 = 0$  con lo que el Hamiltoniano queda

$$\mathcal{H} = - \int_\sigma d^2x \frac{1}{2} \operatorname{tr} (|E_i|^2 + |B|^2). \quad (2.8)$$

Ahora quantizamos el Hamiltoniano, si es  $\Psi$  la función de onda en el espacio de campos gauge se tiene que

$$\hat{A}_i \Psi(A) = A_i \Psi(A), \quad \hat{\Pi}_i \Psi(A) = -i \frac{\delta}{\delta A^i} \Psi(A). \quad (2.9)$$

Por lo que el operador Hamiltoniano es (recuperando las constante de acople)

$$\mathbb{H} = \frac{-g^2}{2} \left| \frac{\delta}{\delta A^i} \right|^2 + \frac{1}{2g^2} |F_{ij}(A)|^2 \quad (2.10)$$

donde  $|\cdot|$  es la norma en el espacio de funciones de onda.

Los estados  $\Psi$  deben cumplir  $\hat{G}\Psi(A) = 0$  para que se puedan considerar estados físicos y sean independientes del gauge.

## 2.2. Parametrización de Karabali-Kim-Nair

Una vez que hemos calculado el Hamiltoniano veamos como se puede obtener el de un campo escalar masivo a partir de este. Para ello vamos a usar el desarrollo de [3].

Consideramos una teoría gauge de  $SU(N)$  en una variedad de  $2+1$  dimensiones y tomamos el gauge temporal  $A_0 = 0$ . El potencial se puede escribir como  $A_i = -it^a A_i^a$ , con  $t^a$  matrices  $N \times N$  que forman una base del álgebra de Lie tal que  $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$  y  $\text{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ . Las componentes de  $A$  se pueden parametrizar de la siguiente forma

$$A_z = \frac{1}{2} (A_1 + iA_2) = -\partial_z M M^{-1}, \quad A_{\bar{z}} = \frac{1}{2} (A_1 - iA_2) = (M^\dagger)^{-1} \partial_{\bar{z}} M^\dagger, \quad (2.11)$$

donde  $z = x_1 + ix_2$  y  $\bar{z} = x_1 - ix_2$  y  $M(x)$  es un elemento del grupo  $SU(N)_\mathbb{C}$ , es decir, una matriz de  $SL(N, \mathbb{C})$ . Con esta parametrización las transformaciones de gauge ( $M \rightarrow g^{-1}M$  con  $g(x) \in SU(N)$ ) tienen la siguiente forma,

$$A_z \rightarrow -\partial_z (g^{-1}M) M^{-1}g = g^{-1}A_z g + \partial_z g g^{-1} = A_z^g. \quad (2.12)$$

En esta representación los grados de libertad invariantes gauge están parametrizados por la matriz hermética  $H = M^\dagger M$  que no depende de  $g$  y de la que los estados físicos son funcionales.

La quantización requiere la introducción de una medida invariante gauge en el espacio de s campos  $A_z, A_{\bar{z}}$ , para lo que se define

$$d\sigma(\mathcal{A}) \equiv \frac{d\mu(\mathcal{A})}{\text{vol}(G)}, \quad (2.13)$$

con  $d\mu(\mathcal{A}) = \prod_{x,a} dA_z^a dA_{\bar{z}}^a$  la medida en el espacio de potenciales gauge  $\mathcal{A}$  y  $\text{vol}(G)$  es el volumen de las funciones evaluadas en  $SU(N)$ . Ahora veamos como expresar el elemento de volumen  $d\sigma(\mathcal{A})$  en función del elemento de volumen definido con  $H$ ,  $d\sigma(H)$ . A partir de (2.11) se obtiene

$$\delta A_z = -(\partial_z(\delta MM^{-1}) + [A_z, \delta MM^{-1}]) = D(\delta MM^{-1}), \quad \delta A_{\bar{z}} = \bar{D} \left( (M^\dagger)^{-1} \delta M \right). \quad (2.14)$$

Por lo que, usando la parametrización de  $M$ , se tiene que

$$d\mu(\mathcal{A}) = \det(D\bar{D}) d\mu(M, M^\dagger), \quad (2.15)$$

con  $d\mu(M, M^\dagger) = \prod_x dV(M, M^\dagger)$  y  $dV$  es el elemento de volumen para  $SL(N, \mathbb{C})$ , que es de la forma

$$\begin{aligned} dV(M, M^\dagger) &\propto \epsilon_{a_1 \dots a_n} (dMM^{-1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dMM^{-1})_{a_n} \\ &\times \epsilon_{b_1 \dots b_n} \left( (M^\dagger)^{-1} dM^\dagger \right)_{b_1} \wedge \dots \wedge \left( (M^\dagger)^{-1} dM^\dagger \right)_{b_n} \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $n = N^2 - 1$ . Sustituyendo  $M$  por su descomposición polar ( $M = U\rho$ ), se tiene

$$\begin{aligned} dV(M, M^\dagger) &\propto \epsilon_{a_1 \dots a_n} (dpp^{-1} + p^{-1}dp)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dpp^{-1} + p^{-1}dp)_{a_n} \\ &\times \epsilon_{b_1 \dots b_n} (U^{-1}dU)_{b_1} \wedge \dots \wedge (U^{-1}dU)_{b_n} \\ &\propto \epsilon_{a_1 \dots a_n} (H^{-1}dH)_{a_1} \wedge \dots \wedge (H^{-1}dH)_{a_n} d\mu(U) \end{aligned} \quad (2.17)$$

con  $d\mu(H)$  la medida de Haar para  $SU(N)$ . En esta expresión la parte invariante gauge viene dada por los campos  $H$ . Haciendo el producto sobre todos los puntos se obtiene

$$d\mu(M, M^\dagger) = \prod_x dV(M, M^\dagger) = \text{vol}(G)d\mu(H), \quad (2.18)$$

donde el término de  $d\mu(U)$  da el volumen de  $G$  y  $d\mu(H)$  es la medida de Haar para los campos evaluados en matrices hermíticas. Con estas expresiones podemos escribir (2.13) como

$$d\sigma(\mathcal{A}) = \det(D\bar{D}) d\mu(H), \quad (2.19)$$

solo nos falta obtener el determinante del operador bidimensional  $D\bar{D}$ . Este es un resultado bien conocido en la literatura [4] y es

$$\det(D\bar{D}) = \left( \frac{\det' \partial \bar{\partial}}{\int d^2x} \right)^n \exp(2c_A S(H)), \quad (2.20)$$

donde  $c_A \delta^{ab} = f^{amn} f^{bm}{}^n$  y  $S(H)$  es la acción de Wess-Zumino-Witten (WZW) que viene dada por [5]

$$S(H) = \frac{1}{2\pi} \int \text{tr} (\partial H \bar{\partial} H^{-1}) + \frac{i}{12\pi} \int \epsilon^{\mu\nu\alpha} \text{tr} (H^{-1} \partial_\mu H H^{-1} \partial_\nu H H^{-1} \partial_\alpha H). \quad (2.21)$$

Con esta medida en el espacio de los estados físicos el producto interno de dos estados es

$$\langle 1|2 \rangle = \int d\mu(H) e^{2c_A S(H)} \Psi_1^*(H) \Psi_2(H) \quad (2.22)$$

donde la medida (2.19) se ha integrado y es  $d\mu(A) = d\mu(H) \exp(2c_A S(H))$ .

Podemos aprovechar el resultado de que todas las funciones de onda de producto interno y norma finita son funciones de la corriente [3],

$$J_a(\vec{x}) = \frac{c_A}{\pi} (\partial H H^{-1})_a(\vec{x}) = \frac{c_A}{\pi} \left[ i M_{ab}^\dagger(\vec{x}) A_b(\vec{x}) + \left( \partial M^\dagger \left( M^\dagger \right)^{-1} \right)_a \right] (\vec{x}). \quad (2.23)$$

Por lo que se puede escribir el Hamiltoniano (2.10) ( $\mathbb{H} = \mathbb{T} + \mathbb{V}$ ) como

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\Psi &= \frac{g^2}{2} \int E_i^a E_i^a \Psi = \frac{-g^2}{2} \int_{x,y} \frac{\delta J^a(y)}{\delta A_i^c(x) \delta A_i^c(x)} \frac{\delta \Psi}{\delta J^a(y)} \\ &\quad - \frac{g^2}{2} \int_{x,y,z} \frac{\delta J^a(y)}{\delta A_i^c(x)} \frac{\delta J^b(z)}{\delta A_i^c(x)} \frac{\delta}{\delta J^a(y)} \frac{\delta \Psi}{\delta J^a(z)}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\mathbb{V} = \frac{1}{2g^2} \int B^a B^a. \quad (2.25)$$

Para poder calcular el coeficiente de  $\mathbb{T}$  hay que regularizarlo ya que es un término singular, usando el desarrollo de [3] se obtiene

$$\mathbb{T} = m \left( \int_x J^a(x) \frac{\delta}{\delta J^a(x)} + \int_{x,y} \Omega_{ab}(x,y) \frac{\delta}{\delta J^a(x)} \frac{\delta}{\delta J^b(y)} \right), \quad (2.26)$$

$$\mathbb{V} = \frac{\pi}{mc_A} \int \partial_{\bar{z}} J^a \partial_{\bar{z}} J^a, \quad (2.27)$$

donde

$$m = \frac{g^2 c_A}{2\pi} \quad \Omega_{ab}(x,y) = \frac{c_A}{\pi^2} \frac{\delta_{ab}}{(x-y)^2} - i \frac{f_{abc} J^c(y)}{\pi(x-y)} \quad (2.28)$$

El primer término en  $\mathbb{T}$  nos muestra que cada potencia de  $J$  da una contribución  $m$  a la energía, por lo que se puede considerar  $J^a$  como la definición invariante gauge del gluón con una masa dinámica  $m$ .

Usando que  $H = e^{t_a \varphi_a}$  podemos hacer una expansión de  $J$  en potencias  $\varphi_a$  y obtener que  $J \simeq (c_A/\pi) \partial_a t^a$  lo que simplifica el Hamiltoniano ya que pasa a depender del campo escalar  $\varphi_a$ . Podemos introducir el factor  $\exp(\frac{c_A}{2\pi} \int \partial \varphi \bar{\partial} \varphi)$  que se obtiene en  $d\mu(\mathcal{A})$  al realizar la expansión en la función de onda, es decir  $\Phi = \exp(\frac{c_A}{2\pi} \int \partial \varphi \bar{\partial} \varphi) \Psi$ . Con lo que el Hamiltoniano actuando sobre esta nueva función de onda se puede escribir como

$$\mathbb{H} \simeq \frac{1}{2} \int_x \left( -\frac{\delta^2}{\delta \phi_a^2(\vec{x})} + \phi_a(\vec{x}) (m^2 - \nabla^2) \phi_a(\vec{x}) \right) + \dots \quad (2.29)$$

donde  $\phi_a = \sqrt{c_A k \bar{k}/(2\pi m)} \varphi_a(\vec{k})$ , que se comporta como un bosón masivo con masa  $m$  que depende de la constante de acople.

### 3. Energía Casimir

Desgraciadamente no existe un argumento similar por el que el desarrollo anterior puede extenderse a teorías gauge en 3+1 dimensiones. Sin embargo, es sabido que las primeras excitaciones del vacío en este caso se describen por partículas bosónicas con masa (glueballs). Por ello, es muy plausible que el cálculo de la energía de Casimir del vacío sea equivalente al del caso de una partícula escalar con masa. Por lo que vamos a emprender el cálculo de la energía Casimir para campos masivo escalares en 3 + 1 dimensiones.

#### 3.1. Condiciones de contorno

Consideremos la modificación del vacío de la teoría debida a la presencia de dos placas homogéneas paralelas. Debido a la homeogeneidad de las placas las condiciones de contorno deben ser invariantes bajo traslaciones a lo largo de las placas. Por lo que, las posibles condiciones de contorno de los estados físicos  $\psi$  se van a caracterizar en términos de matrices  $2 \times 2$  unitarias  $U \in U(2)$  como se desarrolla en [2], de la siguiente forma:

$$\varphi - il\dot{\varphi} = U(\varphi + il\dot{\varphi}) \quad \text{donde} \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi(L) \\ \varphi(0) \end{pmatrix} \quad \dot{\varphi} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(L) \\ \dot{\varphi}(0) \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Es decir, que  $\varphi$  son los valores de los estados en las placas y  $\dot{\varphi}$  el de sus derivadas normales en dirección exterior.  $L$  será la distancia entre las placas. Tomando la parametrización usual de las matrices de  $U(2)$

$$U(\alpha, \beta, \vec{n}) = e^{i\alpha} (\mathbb{I} \cos \beta + i\vec{n}\vec{\sigma} \sin \beta) \quad \alpha \in [0, 2\pi], \beta \in [-\pi/2, \pi/2], \quad (3.2)$$

donde se ha tomado  $l = 1$ ,  $\vec{n} \in S^2$  y  $\vec{\sigma}$  son las matrices de Pauli. Por lo que con estos parámetros  $\alpha, \beta$  y  $\vec{n}$  podemos caracterizar las condiciones de contorno.

#### 3.2. Cálculo general

El estado correspondiente al vacío de una teoría escalar masiva libre con una condiciones de contorno dadas por una matriz  $U$  es único y viene dada por

$$\Psi_0[\psi] = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2}(\psi, \sqrt{-\nabla_U^2 + m^2}\psi)} \quad (3.3)$$

en la representación funcional de Schrödinger, con  $\mathcal{N}$  una constante de normalización. La energía correspondiente a este estado  $\Psi_0$  (energía Casimir) viene dada por la suma de los autovalores de  $\sqrt{-\nabla_U^2 + m^2}$ :

$$E_U = \text{tr} \left( \sqrt{-\nabla_U^2 + m^2} \right) \quad (3.4)$$

La suma de estos valores es divergente de forma ultravioleta, pero existen correcciones de volumen finito que dan lugar a un efecto Casimir finito. Para regularizar la expresión vamos a usar el método de *heat kernel*, por lo que sustituimos la expresión (3.4) por

$$E_U^\epsilon = \text{tr} \left( \sqrt{-\nabla_U^2 + m^2} \right) e^{-\epsilon \nabla_U^2}, \quad (3.5)$$

con  $\epsilon$  el parámetro de regularización ultravioleta que tiene dimensiones de inverso de energía. El espectro de  $\nabla_U^2$  tiene una componente continua en dos dimensiones mientras que la dirección perpendicular a las placas genera una componente discreta en el espectro que dependerá de las condiciones iniciales, es decir

$$\omega(k)_i^2 = \lambda_i + k_1^2 + k_2^2 = \lambda_i + k^2, \quad (3.6)$$

donde  $\vec{k} = (k_1, k_2)$  es cualquier vector de  $\mathbb{R}^2$  y  $\lambda_i^2$  con  $i = 0, 1, \dots, \infty$  son los autovalores del operador

$$-\nabla_U^2 = -\frac{d^2}{dx_1^2} - \frac{d^2}{dx_2^2} - \frac{d^2}{dx_3^2} \quad (3.7)$$

actuando en las funciones definidas en  $[0, L]$  con las condiciones de contorno de (3.1).

Así que la traza funcional se puede escribir como

$$\text{tr} \left( \sqrt{-\nabla_U^2 + m^2} \right) e^{-\epsilon \nabla_U^2} = \frac{S}{(2\pi)^2} \sum_{i=0}^{\infty} \int d^2 k e^{k^2 + \lambda_i^2} \sqrt{k^2 + \lambda_i^2 + m^2}, \quad (3.8)$$

donde  $S$  es la superficie de las placas. Integrando la parte angular y haciendo el cambio de variable  $t = k^2 / (\lambda_i^2 + m^2)$  se obtiene

$$E_U^\epsilon = \frac{S}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i^2 + m^2)^{3/2} e^{-\epsilon \lambda_i^2} \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t(\lambda_i^2 + m^2)} \sqrt{t+1}. \quad (3.9)$$

La integral en  $t$  se puede expresar en términos de la función hipergeométrica confluyente,  $U(a, b, z)$  como

$$\int_0^\infty dt e^{-\epsilon t(\lambda_i^2 + m^2)} \sqrt{t+1} = \Gamma(1) U \left( 1, \frac{5}{2}, \epsilon (\lambda_i^2 + m^2) \right). \quad (3.10)$$

Con lo que la energía regularizada del vacío por unidad de área de las placas queda

$$\frac{E_U^\epsilon}{S} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i^2 + m^2)^{3/2} e^{-\epsilon \lambda_i^2} U \left( 1, \frac{5}{2}, \epsilon (\lambda_i^2 + m^2) \right) \quad (3.11)$$

Para poder obtener la energía es necesario conocer los autovalores  $\lambda_i^2$ . Estos se pueden calcular imponiendo las condiciones de contorno (3.1) en la función de onda

$$\psi_k(x) = C_1 e^{-i\lambda x} + C_2 e^{i\lambda x}, \quad (3.12)$$

que da lugar a un sistema de ecuaciones lineales homogéneas para los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$ :

$$(M - UN) \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ C_1 - C_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

donde  $M$  y  $N$  son matrices  $2 \times 2$  complejas

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ \cos \lambda L + i\lambda \sin \lambda L & \lambda \cos \lambda L + i \sin \lambda L \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \cos \lambda L - i\lambda \sin \lambda L & -\lambda \cos \lambda L + i \sin \lambda L \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

El sistema lineal (3.13) tiene soluciones no triviales si y solo si  $\det(M - UN) = 0$ . Por lo que los autovalores  $\lambda_i^2$  de  $-\nabla_U^2$  están dados por los ceros de la función espectral:

$$\begin{aligned} h_u(k) = & \det(M - UN) = 4k \det U \cos kL - 2i(1+k^2) \det U \sin kL + 4(U_{21} + U_{12}) \\ & - 2i(1+k^2) \sin kL - 4k \cos kL + 2i(1-k^2) \text{tr} U \sin kL. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Estos ceros nos dan los autovalores de  $-\nabla_U^2$  excepto para el caso de  $k = 0$ , pero este caso no juega un papel relevante ya que solo añade un término constante a la energía. Por lo que podemos usar esta expresión, que usando la parametrización (3.2) se puede escribir

$$h_u(k) = 2ie^\alpha [\sin(kL)((k^2 - 1)\cos\beta + (k^2 - 1)\cos\alpha) - 2k\sin\alpha\cos(kL) - 2kn_1\sin\beta], \quad (3.17)$$

donde, como se ha comentado anteriormente, se ha tomado  $l = 1$  lo que provoca que haya una aparente falta de homogeneidad en las dimensiones. En general lo que aparecerá serán potencias de la variable adimensional  $kl$  en vez de  $k$  por lo que las expresiones son correctas dimensionalmente.

Un aspecto relevante de la función espectral es que no solo depende de los invariantes algebraicos de las matrices  $\det U$  y  $\text{tr} U$  sino también de los elementos  $U_{21}$  y  $U_{12}$  de fuera de la diagonal. Esto implica que el espectro de la teoría cuántica será diferente para matrices  $U$  con los mismos autovalores, aunque sean equivalentes como matrices.

Teniendo todo esto en cuenta, la suma de los autovalores del operador  $\sqrt{-\nabla_U^2}$  es equivalente a la suma de los ceros de la función espectral  $h_U(k)$ . Como  $h_U(k)$  es holomórfica en  $k$ , la suma de los ceros se puede reescribir en términos de una integral de contorno que contenga todos los ceros de la función. Debido a las condiciones de consistencia todos los ceros de  $h_U$  están contenidos en  $\mathbb{R}^+$ , por lo que usando el teorema de Cauchy de los residuos la expresión (3.11) se puede escribir como

$$\frac{E_U^\epsilon}{S} = \frac{1}{8\pi^2 i} \oint dk (k^2 + m^2)^{3/2} e^{-\epsilon k^2} U \left( 1, \frac{5}{2}, \epsilon (k^2 + m^2) \right) \frac{d}{dk} \log(h_U(k)), \quad (3.18)$$

donde el contorno de integración encierra el eje positivo real que incluye todos los ceros de  $h_U$ . Los ceros de la función espectral generan polos simples o dobles de la derivada logarítmica  $\frac{d}{dk} \log(h_U(k))$ .

En el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  la expresión anterior diverge con la siguiente expresión asintótica

$$\frac{E_U^\epsilon}{S} = \frac{c_0 L}{\epsilon^4} + \frac{c_1}{\epsilon^{3/2}} + \frac{c_3 m^2 L}{\epsilon^2} + c_c + \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}). \quad (3.19)$$

Por lo que para obtener la parte finita que contiene la energía Casimir hay que eliminar los tres primeros términos que son los que divergen. El primero de ellos es la divergencia dominante de la energía del vacío (que no depende de las condiciones de contorno), el segundo es la divergencia subdominante asociada a la auto-energía de las placas y el tercero es un término que se debe a la presencia de masa que tampoco depende de las condiciones de contorno. Como puede verse en [2] los dos primeros términos son iguales que en el caso de masa nula. Para eliminar estos términos divergentes restamos la energía del vacío de un sistema idéntico con las mismas condiciones de contorno definidas para otra distancia  $L_0$

$$\mathcal{E}(L) \equiv \frac{E_U^L}{S} = \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \left( \frac{c_0 + c_3 m^2 \epsilon^2}{\epsilon^4} \right) (L - L_0) - \frac{E_U^{(\epsilon, L)} - E_U^{(\epsilon, L_0)}}{S} \right), \quad (3.20)$$

donde el primer término es necesario para cancelar la primera y tercera divergencia, mientras que el segundo cancela la segunda. Así la energía Casimir vendrá dada por la parte finita de (3.18), que se obtiene quitando los términos divergentes y haciendo el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , para lo que es necesario obtener la parte no divergente de la función  $U$ . Cuyo desarrollo viene dado por [6]

$$U \left( 1, \frac{5}{2}, x \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3} + \mathcal{O}(x^{1/2}), \quad (3.21)$$

por lo que el término dominante no divergente es

$$U_+ \left( 1, \frac{5}{2}, \epsilon(k^2 + m^2) \right) = -\frac{2}{3}. \quad (3.22)$$

Teniendo todo esto en cuenta, la parte convergente de (3.18) es

$$\mathcal{E}(L) = \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{12\pi^2 i} \oint dk (k^2 + m^2)^{3/2} e^{-\epsilon k^2} \left( (L_0 - L) \frac{k - k^*}{|k - k^*|} - \frac{d}{dk} \log \left( \frac{h_U^L(k)}{h_U^{L_0}(k)} \right) \right). \quad (3.23)$$

Como la expresión será finita y convergente en el límite de  $\epsilon \rightarrow 0$  podemos eliminar el factor  $e^{-\epsilon k^2}$ . Debido a las propiedades holomórficas del integrando, la integral se puede extender a un contorno dado por un semi-círculo infinito limitado por el eje imaginario por su izquierda. Mientras la integración a lo largo del semicírculo es cero, la integración se reduce al eje imaginario en el plano complejo de  $k$  y teniendo en cuenta la invarianza por paridad del integrando, el intervalo de integración se puede reducir al eje positivo imaginario desde  $k = im$  hasta infinito. Así la expresión integral final para la energía Casimir es

$$\mathcal{E}(L) = \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{6\pi^2} \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{3/2} \left( L - L_0 - \frac{d}{dk} \log \left( \frac{h_U^L(ik)}{h_U^{L_0}(ik)} \right) \right). \quad (3.24)$$

### 3.3. Casos particulares de condiciones de contorno

Ahora vamos a obtener la expresión integral de la energía Casimir para algunos casos particulares de condiciones de contorno.

#### 3.3.1. Dirichlet y Neumann

Las condiciones de Dirichlet cumplen que  $\psi(0) = \psi(L) = 0$  por lo que su operador unitario asociado es  $U_d = -\mathbb{I}$  y su función espectral:

$$h_d^L(k) = 4i \sin(kL). \quad (3.25)$$

Para el caso de las condiciones de Neumann se cumple  $\psi'(0) = \psi'(L) = 0$  por lo que su operador unitario asociado es  $U_n = \mathbb{I}$  y su función espectral

$$h_n^L(k) = 4ik^2 \sin(kL). \quad (3.26)$$

Por lo que el cociente  $h_U^L/h_U^{L_0}$  será igual en ambos casos lo que implica que su expresión para la energía Casimir es igual y viene dada por

$$\mathcal{E}_D(L) = \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{6\pi^2} \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{3/2} (L - L_0 + L_0 \coth(kL_0) - L \coth(kL)). \quad (3.27)$$

Esta integral no se puede resolver analíticamente. En la figura 1 se muestra el resultado que se obtiene al realizar la integral numérica en función de  $L$  para distintas masas.

#### 3.3.2. Pseudo-periódicas

Estas son una familia uniparamétrica de condiciones de contorno que cumplen que:

$$\psi(L) = e^{-i\alpha} \psi(0), \quad \psi'(L) = e^{-i\alpha} \psi'(0). \quad (3.28)$$

Las matrices unitarias que definen estas condiciones son

$$U_{pp} = \cos \alpha \ \sigma_1 - \sin \alpha \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [-\pi, \pi]. \quad (3.29)$$

Su función espectral es

$$h_{pp} = 4k(\cos(kL) - \cos \alpha). \quad (3.30)$$

por lo que la energía Casimir tendrá la siguiente expresión integral

$$\mathcal{E}_{pp}(L) = \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{6\pi^2} \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{3/2} \left( L - L_0 + \frac{L_0 \sinh(kL_0)}{\cosh(kL_0) - \cos \alpha} - \frac{L \sinh(kL)}{\cosh(kL) - \cos \alpha} \right). \quad (3.31)$$

Dentro de esta familia hay dos condiciones de contorno particularmente interesantes.

## Periódicas

Estas corresponden a plegar el espacio en un cilindro, es decir  $\psi(0) = \psi(L)$  y  $\psi'(0) = \psi'(L)$ . Por lo que están descritas por el operador unitario

$$U_p = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

y la funciónpectral

$$h_p^L(k) = 4k(\cos(kL) - 1). \quad (3.33)$$

La energía Casimir tendrá la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_p(L) = \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{6\pi^2} \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{3/2} \left( L - L_0 + L_0 \coth\left(\frac{kL_0}{2}\right) - L \coth\left(\frac{kL}{2}\right) \right). \quad (3.34)$$

Que tampoco tiene solución analítica, pero en la figura 1 se muestran sus valores en función de  $L$  para distintas masas.

## Anti-periódicas

Estas condiciones corresponden a  $\psi(0) = -\psi(L)$  y  $\psi'(0) = -\psi'(L)$ , y son descritas por el operador unitario

$$U_p = -\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

La funciónpectral asociada es

$$h_{ap}^L(k) = 4k(\cos(kL) + 1) \quad (3.36)$$

por lo que la energía Casimir tiene la siguiente expresión integral

$$\mathcal{E}_{ap}(L) = \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{6\pi^2} \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{3/2} \left( L - L_0 + L_0 \tanh\left(\frac{kL_0}{2}\right) - L \tanh\left(\frac{kL}{2}\right) \right). \quad (3.37)$$

En la figura 1 se muestran sus valores en función de  $L$  para distintas masas.

### 3.3.3. Quasi-periódicas

Como las condiciones pseudo-periódicas, estas son una familia uniparamétrica de condiciones de contorno que viene dada por

$$\psi(L) = \tan \frac{\alpha}{2} \psi(0), \quad \psi'(L) = \cot \frac{\alpha}{2} \psi(0), \quad (3.38)$$

con el operador unitario

$$U_{qp} = \cos \alpha \sigma_3 + \sin \alpha \sigma_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Por lo que su función espectral es

$$h_{qp}^L = 4k(\cos(kL) - \sin \alpha), \quad (3.40)$$

y su energía Casimir viene dada por

$$\mathcal{E}_{qp}(L) = \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{6\pi^2} \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{3/2} \left( L - L_0 + \frac{L_0 \sinh(kL_0)}{\sin \alpha - \cosh(kL_0)} - \frac{L \sinh(kL)}{\sin \alpha - \cosh(kL)} \right). \quad (3.41)$$

### Condiciones de Zaremba

Un caso particular interesante de las condiciones quasi-periódicas son las de Zaremba. En estas, en una placa se dan las condiciones de Dirichlet y en la otra las de Neumann. Por lo que hay dos matrices unitarias que dan esta condición

$$U_Z = \pm \sigma_3 = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

pero que resultan en la misma función espectral

$$h_Z(k) = -8k \cos(kL), \quad (3.43)$$

por lo que la expresión integral de la energía Casimir es

$$\mathcal{E}_Z(L) = \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{6\pi^2} \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{3/2} (L - L_0 + L_0 \tanh(kL_0) - L \tanh(kL)). \quad (3.44)$$

Como en los casos anteriores, no se puede resolver analíticamente la integral, por lo que en la figura 1 se muestra la resolución numérica en función de  $L$  para distintas masas.

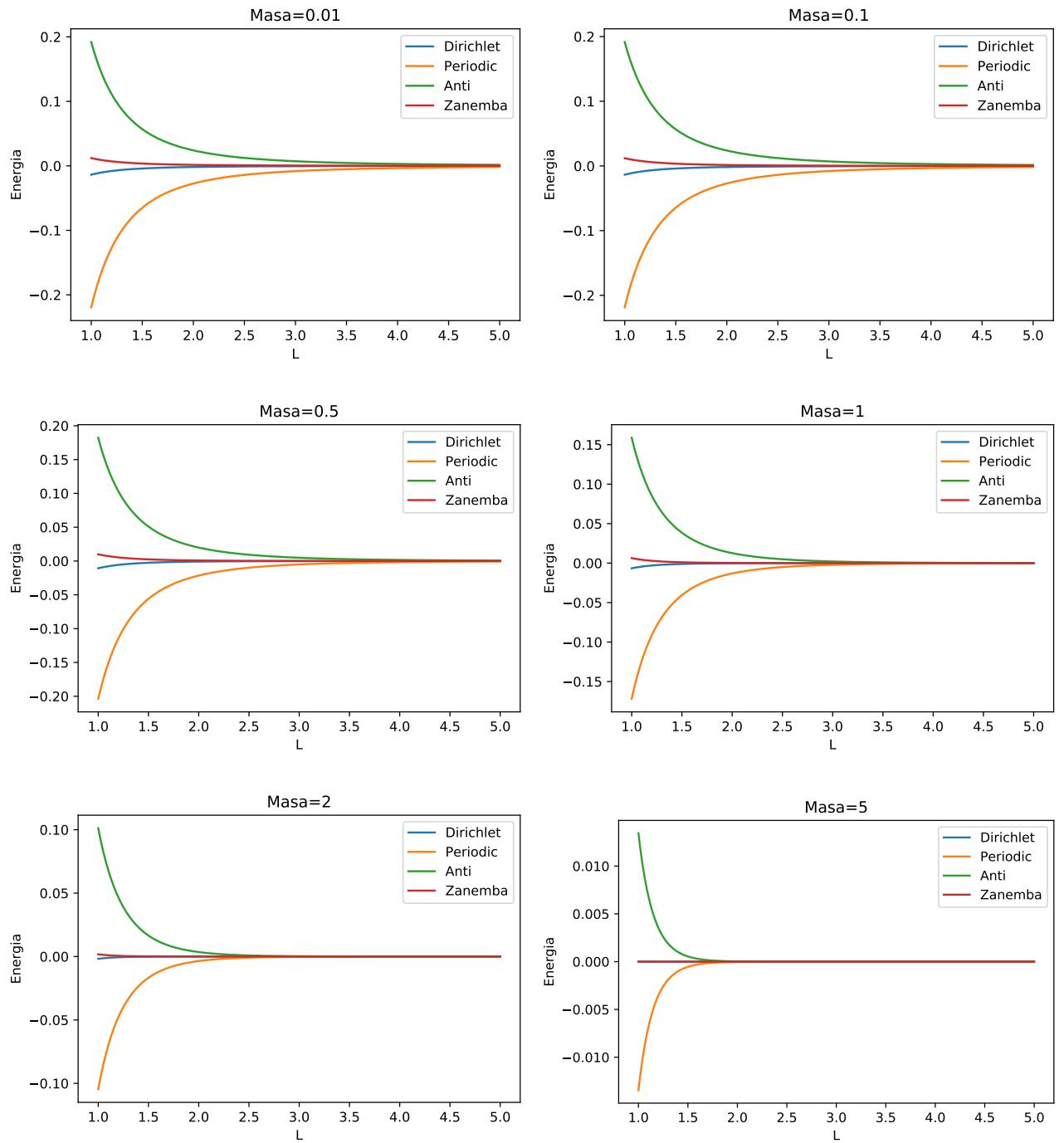


Figura 1: Valores de la energía Casimir en función de  $L$  para distintos valores de la masa usando distintas condiciones de contorno: Dirichlet, periódicas, anti-periódicas y Zaremba

## 4. Aproximación de baja masa

Ahora vamos a aproximar la expresión que hemos obtenido anteriormente para la energía Casimir para baja masa, lo que nos permitirá resolver las integrales de forma analítica. Para obtener la expresión vamos a hacer el desarrollo en serie de la expresión (3.24) hasta segundo orden en la masa, teniendo en cuenta que esta, ademas de aparecer en el integrando, lo hace en el límite inferior de la integral. Se obtiene la siguiente expresión

$$\mathcal{E}(L) = \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{6\pi^2} \int_0^\infty dk \left( k^3 - \frac{3}{2}m^2k \right) \left( L - L_0 - \frac{d}{dk} \log \left( \frac{h_U^L(ik)}{h_U^{L_0}(ik)} \right) \right) + \mathcal{O}(m^3). \quad (4.1)$$

El término sin masa que se obtiene es el correspondiente a calcular la energía Casimir de un campo escalar sin masa [2] en tres dimensiones. Una vez que tenemos esta expresión obtengamos los valores de la energía para las condiciones de contorno mencionadas anteriormente en esta aproximación.

### 4.1. Dirichlet y Neumann

Aplicando este desarrollo a (3.27) se obtiene

$$\mathcal{E}_D(L) \simeq \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{6\pi^2} \int_m^\infty dk (L - L_0 + L_0 \coth(kL_0) - L \coth(kL)) = -\frac{\pi^2}{720L^3} + \frac{m^2}{48L}. \quad (4.2)$$

Si comparamos esta aproximación con el valor que se obtiene de integrar numéricamente (3.27).

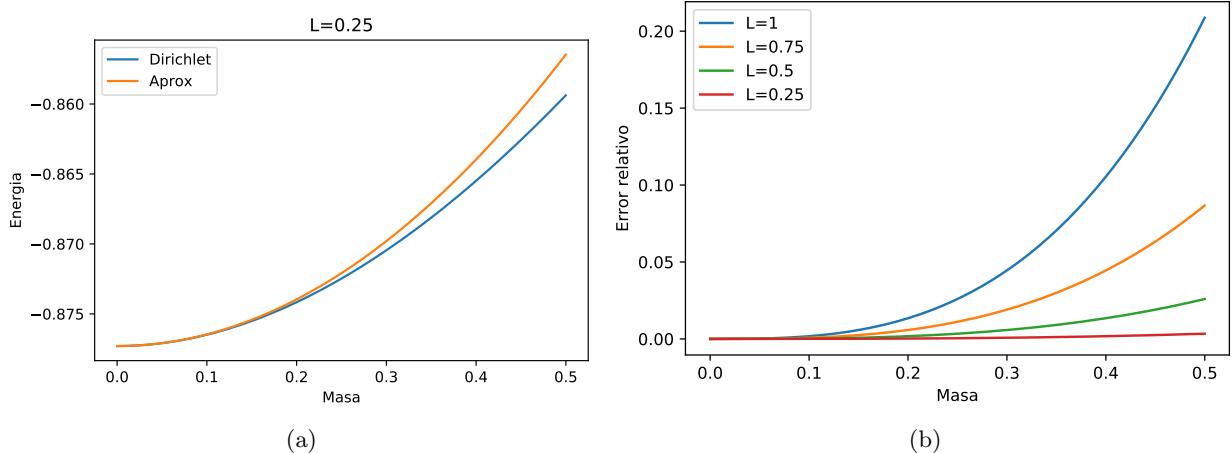


Figura 2: a) Valores obtenidos para  $L = 0,25$  en función de la masa integrando numéricamente la fórmula exacta y usando la aproximación de masa pequeña. b) Error relativo entre el valor obtenido integrando numéricamente y usando esta aproximación, en función de la masa para distintos valores de  $L$ . Ambos casos con las condiciones de contorno de Dirichlet.

## 4.2. Periódicas

Usando la expresión (3.34) y el desarrollo a baja masa se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p(L) &\simeq \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{6\pi^2} \int_m^\infty dk \left( k^3 - \frac{3}{2}m^2 \right) \left( L - L_0 + L_0 \coth \left( \frac{kL_0}{2} \right) - L \coth \left( \frac{kL}{2} \right) \right) \\ &= -\frac{\pi^2}{45L^3} + \frac{m^2}{12L}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Si comparamos esta aproximación con el valor que se obtiene de integrar numéricamente

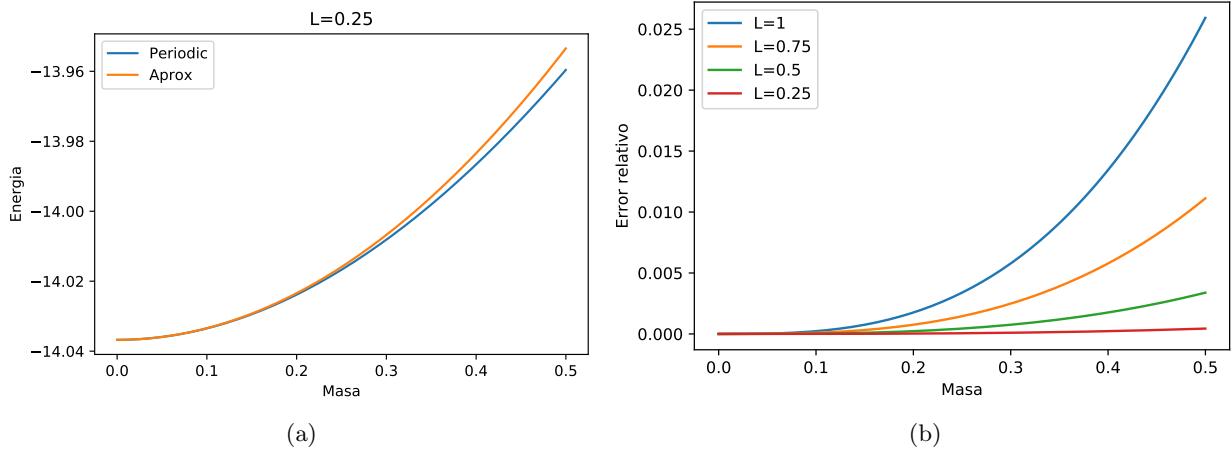


Figura 3: a) Valores obtenidos para  $L = 0,25$  en función de la masa integrando numéricamente la fórmula exacta y usando la aproximación de masa pequeña. b) Error relativo entre el valor obtenido integrando numéricamente y usando esta aproximación en función de la masa para distintos valores de  $L$ . Ambos casos con las condiciones de contorno periódicas.

## 4.3. Anti-periódicas

En este caso con (3.37) se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{ap}(L) &\simeq \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{6\pi^2} \int_m^\infty dk \left( k^3 - \frac{3}{2}m^2 \right) \left( L - L_0 + L_0 \tanh \left( \frac{kL_0}{2} \right) - L \tanh \left( \frac{kL}{2} \right) \right) \\ &= \frac{7\pi^2}{360L^3} - \frac{m^2}{24L}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Si comparamos esta aproximación con el valor que se obtiene de integrar numéricamente

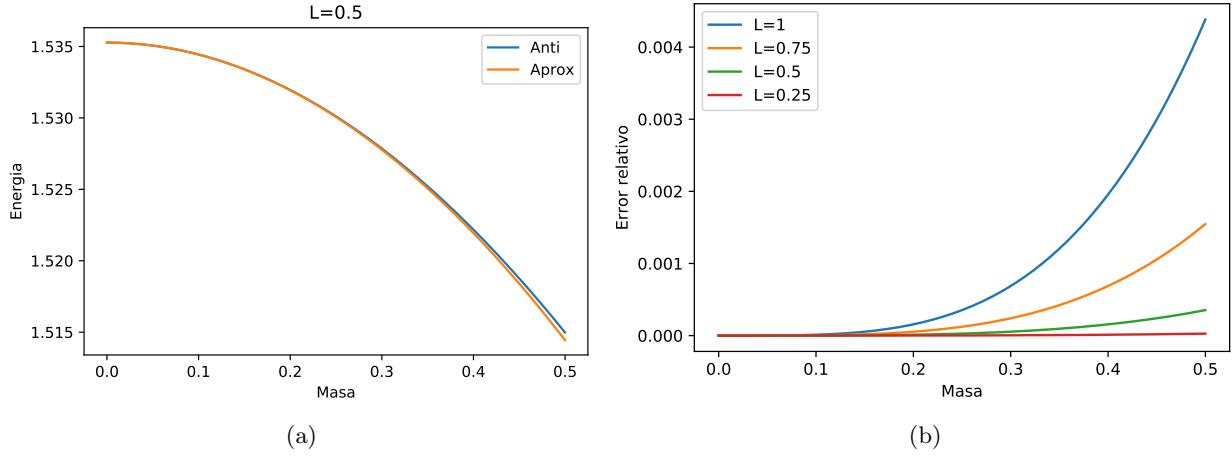


Figura 4: a) Valores obtenidos para  $L = 0,5$  en función de la masa integrando numéricamente la fórmula exacta y usando la aproximación de masa pequeña. b) Error relativo entre el valor obtenido integrando numéricamente y usando esta aproximación, en función de la masa para distintos valores de  $L$ . Ambos casos con las condiciones de contorno anti-periódicas.

#### 4.4. Zaremba

Con la expresión (3.44) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_Z(L) &\simeq \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{6\pi^2} \int_m^\infty dk \left( k^3 - \frac{3}{2}m^2 \right) (L - L_0 + L_0 \tanh(kL_0) - L \tanh(kL)) \\ &= \frac{7\pi^2}{5760L^3} - \frac{m^2}{96L}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si comparamos esta aproximación con el valor que se obtiene de integrar numéricamente

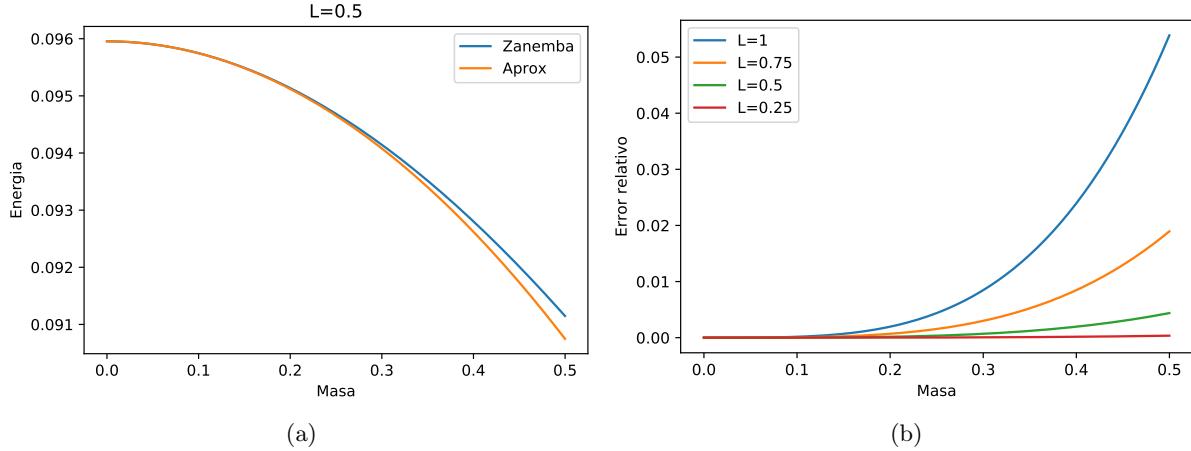


Figura 5: a) Valores obtenidos para  $L = 0,5$  en función de la masa integrando numéricamente la fórmula exacta y usando la aproximación de masa pequeña. b) Error relativo entre el valor obtenido integrando numéricamente y usando esta aproximación, en función de la masa para distintos valores de  $L$ . Ambos casos con las condiciones de contorno de Zaremba.

#### 4.5. Validez de la aproximación

En las gráficas 2,3,4 y 5 se observa como la aproximación para  $m$  pequeño tiene la misma dependencia que la integración numérica y que los valores coinciden muy bien.

Un factor importante que se observa en los cuatro casos es la fuerte dependencia del error relativo entre ambos con el valor de  $L$ , esto (como veremos posteriormente) se podría explicar por la dependencia exponencial con el producto de  $m$  y  $L$  de la energía Casimir. Lo que hace que al tener mayores valores  $L$  esta dependencia exponencial tenga mayor relevancia para valores menores de  $m$  por lo que la aproximación que se ha tomado a segundo orden en la masa deje de ser válida para valores menores de  $m$ .

Otro aspecto que se observa es la diferencia de esta dependencia de la calidad de la aproximación con  $L$  para las distintas condiciones de contorno. Para el caso de Dirichlet y Zaremba el error aumenta más rápido al tener un  $L$  mayor que en el caso de las condiciones periódicas y anti-periódicas. Esto se podría explicar teniendo en cuenta que estas condiciones de contorno se agrupan en dos familias que muestran diferente dependencia en el decaimiento exponencial de la energía Casimir. Esto podría explicar porque para unas condiciones la aproximación deja de ser válida para valores menores de  $m$  que en los otros casos. Esta diferencia en el comportamiento exponencial de la energía Casimir en función de las condiciones de contorno se desarrollará en el siguiente capítulo.

## 5. Comportamiento asintótico de la energía Casimir

Como se puede apreciar en la gráfica 1, la energía Casimir parece decaer de forma exponencial al aumentar  $L$  y  $m$ . Vamos a calcular una fórmula analítica en función de los parámetros que caracterizan las distintas condiciones de contorno ( $\alpha, \beta$  y  $n_1$ ) en el límite para valores grandes de  $L$ . Para ello se va a desarrollar la función  $h_u$  que contiene la información de las condiciones de contorno en este límite de  $L$  grande.

### 5.1. Derivación de la fórmula

Primero vamos a expresar la función  $h_u^L$  en función de términos exponenciales de  $L$  para poder hacer el desarrollo en el límite de  $L$  grande. Partiendo de (3.17) y recuperando el factor  $l$  (que anteriormente se había tomado como  $l = 1$ ) se puede llegar a

$$\begin{aligned} h_u^L(ik) &= 2ie^{i\alpha} [i \sinh(kL) ((-k^2l^2 - 1) \cos \beta + (-k^2l^2 + 1) \cos \alpha) - 2ikl \cosh(kL) \sin \alpha - 2ikln_1 \sin \beta] \\ &= e^{i\alpha} e^{kL} \left[ (k^2l^2 + 1) \cos \beta + (k^2l^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha + e^{-kL} 4kn_1 \sin \beta + \right. \\ &\quad \left. + e^{-2kL} ((-k^2l^2 + 1) \cos \beta - (k^2l^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha) \right] \\ &= e^{i\alpha} e^{kL} ((k^2l^2 + 1) \cos \beta + (k^2l^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha) \left[ 1 + e^{-kL} A + e^{-2kL} B \right], \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde los términos  $A$  y  $B$  son

$$A = \frac{4kl n_1 \sin \beta}{(k^2l^2 + 1) \cos \beta + (k^2l^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha}, \quad (5.2)$$

$$B = \frac{-(k^2l^2 + 1) \cos \beta - (k^2l^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha}{(k^2l^2 + 1) \cos \beta + (k^2l^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha}. \quad (5.3)$$

Usando esta expresión el logaritmo del cociente de las funciones  $h_u^L$  que aparece en la expresión general de la energía Casimir (3.24) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \log \frac{h_u^L}{h_u^{L_0}} &= \log \frac{e^{i\alpha} e^{kL} ((k^2l^2 + 1) \cos \beta + (k^2l^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha) [1 + e^{-kL} A + e^{-2kL} B]}{e^{i\alpha} e^{kL_0} ((k^2l^2 + 1) \cos \beta + (k^2l^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha) [1 + e^{-kL_0} A + e^{-2kL_0} B]} \\ &= k(L - L_0) + \log \frac{1 + e^{-kL} A + e^{-2kL} B}{1 + e^{-kL_0} A + e^{-2kL_0} B} \simeq k(L - L_0) + \log \left( 1 + e^{-kL} A + e^{-2kL} B \right) \\ &\simeq k(L - L_0) + e^{-kL} A + e^{-2kL} \left( B - \frac{1}{2} A^2 \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Donde se ha tomado el límite  $L_0 \rightarrow \infty$  y se ha desarrollado el logaritmo.

Introduciendo esta expresión en (3.24) (obviando el factor  $1/(6\pi^2)$ ), se obtiene

$$\begin{aligned} & \lim_{L \rightarrow \infty} \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{3/2} \left[ L - L_0 - \frac{d}{dk} \left( k(L - L_0) + e^{-kL} A + e^{-2kL} \left( B - \frac{1}{2} A^2 \right) \right) \right] \\ &= - \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{3/2} \frac{d}{dk} \left( e^{-kL} A + e^{-2kL} \left( B - \frac{1}{2} A^2 \right) \right) \\ &= \int_m^\infty dk 3k(k^2 - m^2)^{1/2} \left( e^{-kL} A + e^{-2kL} \left( B - \frac{1}{2} A^2 \right) \right) \\ &= \int_m^\infty dk 3k(k^2 - m^2)^{1/2} e^{-kL} \frac{4kln_1 \sin \beta}{((kl)^2 + 1) \cos \beta + ((kl)^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha} \quad (5.5) \\ &+ \int_m^\infty dk 3k(k^2 - m^2)^{1/2} e^{-2kL} \frac{-((kl)^2 + 1) \cos \beta - ((kl)^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha}{((kl)^2 + 1) \cos \beta + ((kl)^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha}. \quad (5.6) \end{aligned}$$

Entre la segunda y tercera igualdad se ha integrado por partes. Vemos que se obtienen dos comportamientos exponenciales distintos en función de si  $n_1 \cdot \sin \beta$  es cero o no. En el que caso de que no lo sea, el término dominante será el primero ( $e^{-kL}$ ) y en el límite que se está considerando será suficiente con solo considerar este término. Para el caso de que sea nulo hay que considerar el segundo término ( $e^{-2kL}$ ), notese que se ha eliminado el término de  $A^2$  ya que si se tiene en cuenta este término significa que  $A = 0$ .

## 5.2. Resolución de las integrales

Ahora para obtener las fórmulas analíticas se van a resolver las integrales. Como no es posible hacerlo de forma exacta, se va usar la aproximación de *saddle point* para ambos casos. En esta se approxima la integral de una exponencial por la integral de la exponencial del desarrollo a segundo orden de la función del exponente entorno a su máximo, es decir

$$\begin{aligned} \int_m^\infty e^{F(x)} dx &\simeq \int_m^\infty e^{F(x_0) + F'(x)(x-x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x-x_0)^2} dx = e^{F(x_0)} \int_m^\infty e^{\frac{1}{2}F''(x_0)(x-x_0)^2} \\ &= e^{F(k^*)} \sqrt{\frac{\pi}{-2F''(k^*)}} \cdot \text{Erfc} \left( \frac{(m-x_0)\sqrt{-F''(k^*)}}{\sqrt{2}} \right), \quad (5.7) \end{aligned}$$

con  $x_0$  el máximo de  $F(x)$  en el recinto de integración y Erfc la función error complementaria.

### 5.2.1. Caso $n_1 \sin \beta \neq 0$

En este caso, como se ha comentado anteriormente, hay que resolver la integral (5.5). Para aplicar el método de *saddle point* primero expresamos la integral de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \int_m^\infty dk 3k(k^2 - m^2)^{1/2} e^{-kL} \frac{4kln_1 \sin \beta}{((kl)^2 + 1) \cos \beta + ((kl)^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha} \\ &= 12n_1 \sin \beta \int_m^\infty dk \exp \left[ -kL + \log \frac{k^2 l (k^2 - m^2)^{1/2}}{((kl)^2 + 1) \cos \beta + ((kl)^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha} \right], \quad (5.8) \end{aligned}$$

por lo que la función a maximizar (el exponente) para este caso es

$$F_1(k) = -kL + \log \frac{k^2 l (k^2 - m^2)^{1/2}}{((kl)^2 + 1) \cos \beta + ((kl)^2 - 1) \cos \alpha + 2kL \sin \alpha}. \quad (5.9)$$

Para encontrar el máximo calculamos la primera derivada e igualamos a cero,

$$\begin{aligned} F'_1(k) = & \frac{-2kl \sin(\alpha) (k^3 L - 2k^2 - kLm^2 + m^2)}{k(k^2 - m^2)(\cos(\beta) + \cos(\alpha)(k^2 l^2 - 1) + k^2 l^2 \cos(\beta) + 2kl \sin(\alpha))} \\ & + \frac{\cos(\alpha) (k^5 (-l^2) L + k^4 l^2 + k^3 (l^2 Lm^2 + L) - 3k^2 - kLm^2 + 2m^2)}{k(k^2 - m^2)(\cos(\beta) + \cos(\alpha)(k^2 l^2 - 1) + k^2 l^2 \cos(\beta) + 2kl \sin(\alpha))} \\ & + \frac{\cos(\beta) (k^5 (-l^2) L + k^4 l^2 + k^3 L (l^2 m^2 - 1) + 3k^2 + kLm^2 - 2m^2)}{k(k^2 - m^2)(\cos(\beta) + \cos(\alpha)(k^2 l^2 - 1) + k^2 l^2 \cos(\beta) + 2kl \sin(\alpha))} = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Puede verse que la solución que corresponde al máximo se puede aproximar por  $k_0 = m + \epsilon$ , donde  $\epsilon \sim 1/L$ . Como estamos trabajando en el límite de  $L$  grande,  $\epsilon$  será un término pequeño. Probando esta solución en los tres sumandos y quedándonos a primer orden en  $\epsilon$  se obtiene,

$$\begin{aligned} 2klL \sin \alpha \left( 2m^2 \epsilon - \frac{m^2}{L} \right) & \Rightarrow \epsilon = \frac{1}{2L}, \\ L \cos \alpha \left( \frac{1}{L} (l^2 m^4 - m^2) + \epsilon (2m^2 - 2l^2 m^4) \right) & = 0 \Rightarrow \epsilon = \frac{1}{2L}, \\ L \cos \beta \left( \frac{1}{L} (m^4 + m^2) - \epsilon (2m^2 + 2m^4) \right) & = 0 \Rightarrow \epsilon = \frac{1}{2L}. \end{aligned}$$

Vemos como con ese valor  $\epsilon$  se anulan los tres sumandos a primer orden, por lo que cumple la condición de extremo. Como habíamos supuesto el término de  $\epsilon$  es inversamente proporcional a  $L$ .

Ahora calculamos la segunda derivada del exponente,

$$\begin{aligned} F''_1(k) = & -\frac{(k^8 l^4 + k^6 l^4 m^2) (\cos(\alpha) + \cos(\beta))^2 + (3k^4 - 3k^2 m^2 + 2m^4) (\cos(\beta) - \cos(\alpha))^2}{k^2 (k^2 - m^2)^2 ((k^2 l^2 + 1) \cos(\beta) + \cos(\alpha) (k^2 l^2 - 1) + 2kl \sin(\alpha))^2} \\ & - \frac{(-8k^6 l^2 + 10k^4 l^2 m^2 - 6k^2 l^2 m^4) (\cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta)) + 4k^2 l^2 \sin^2(\alpha) (2k^4 - k^2 m^2 + m^4)}{k^2 (k^2 - m^2)^2 ((k^2 l^2 + 1) \cos(\beta) + \cos(\alpha) (k^2 l^2 - 1) + 2kl \sin(\alpha))^2} \\ & - \frac{4kl \sin(\alpha) [(3k^4 - 3k^2 m^2 + 2m^4) (\cos(\beta) - \cos(\alpha)) + (2k^6 l^2 - k^4 l^2 m^2 + k^2 l^2 m^4) (\cos(\alpha) + \cos(\beta))]}{k^2 (k^2 - m^2)^2 ((k^2 l^2 + 1) \cos(\beta) + \cos(\alpha) (k^2 l^2 - 1) + 2kl \sin(\alpha))^2} \end{aligned}$$

Una vez tenemos la expresión evaluamos la segunda derivada en el extremo obtenido anteriormente ( $k_0 = m + 1/(2L)$ ) para los dos primeros órdenes en  $1/L$ . Para aligerar la notación se van a usar las siguientes definiciones

$$C = (m^2 l^2 + 1) \cos \beta + (m^2 l^2 - 1) \cos \alpha + 2ml \sin \alpha, \quad D = \cos \beta + \cos \alpha, \quad E = \cos \beta - \cos \alpha. \quad (5.11)$$

Con lo que la segunda derivada en ese punto es

$$\begin{aligned} F''_1(k_0) \simeq & -\frac{2m^4 C^2 + \frac{m^4}{mL} (7m^4 l^4 D^2 + 3E^2 + 10m^2 l^2 DE + 20m^2 l^2 \sin^2 \alpha + 4ml \sin \alpha (6m^2 l^2 D + 4E))}{(m^2 + \frac{m}{L}) \frac{m^2}{L^2} (C^2 + \frac{2}{mL} (m^2 l^2 D + lm \sin \alpha) C)} \\ = & -\frac{2m^4 C^1 (1 + \frac{1}{2mLC^2} (7m^4 l^4 D^2 + 3E^2 + 10m^2 l^2 DE + 20m^2 l^2 \sin^2 \alpha + 4ml \sin \alpha (6m^2 l^2 D + 4E)))}{\frac{m^4 C^2}{L^2} \left( 1 + \frac{1}{mL} \left( 1 + \frac{2(m^2 l^2 D + lm \sin \alpha)}{C^2} \right) \right)} \\ \simeq & -2L^2 \left( 1 + \frac{F}{mL} \right), \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde

$$F = \frac{7m^4l^4D^2 + 3E^2 + 10m^2l^2DE + 20m^2l^2\sin^2\alpha + 4ml\sin\alpha(6m^2l^2D + 4E - 1) - 4m^2l^2D}{2C^2} - 1. \quad (5.13)$$

Vemos que la segunda derivada es negativa lo que nos confirma que el punto escogido es un máximo.

Una vez que tenemos el máximo, vamos a evaluar el exponente en ese punto hasta segundo orden en  $1/L$

$$\begin{aligned} e^{F_1(k_0)} &\simeq \frac{e^{-Lm-\frac{1}{2}}l(m^2 + \frac{m}{L})(\frac{m}{L} + \frac{1}{4L^2})^{1/2}}{C + \frac{m}{L}l^2(\cos\alpha + \cos\beta) + \frac{l}{L}\sin\alpha} \simeq \frac{e^{-Lm}\frac{m^{5/2}}{L^{1/2}}l(1 + \frac{9}{8mL})}{\sqrt{e}C(1 + \frac{1}{mLC}(m^2l^2D + lm\sin\alpha))} \\ &\simeq \frac{e^{-Lm}m^{5/2}l}{\sqrt{e}L^{1/2}C} \left(1 + \frac{1}{mL} \left(\frac{9}{8} - \frac{m^2l^2D + lm\sin\alpha}{C}\right)\right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Con estos valores ya podemos usar la expresión (5.7) para resolver la integral, pero primero desarrollemos el factor de la función error en función de  $1/L$

$$\begin{aligned} \text{Erfc}\left(\frac{(m-k_0)\sqrt{-F''(k_0)}}{\sqrt{2}}\right) &= \text{Erfc}\left(\frac{-\sqrt{2L^2(1 + \frac{F}{mL})}}{2\sqrt{2}L}\right) \simeq \text{Erfc}\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{F}{2mL}\right)\right) \\ &\simeq 1 + \text{Erf}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{F}{2mLe^{1/4}\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Donde se ha usado el desarrollo en serie de la función error. Con las expresiones (5.12), (5.14) y (5.15), podemos obtener la expresión asintótica para la energía Casimir

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(L) &\simeq \frac{e^{-Lm}m^{5/2}ln_1\sin\beta(1 + \text{Erf}\left(\frac{1}{2}\right))}{\pi^{3/2}\sqrt{e}L^{3/2}((m^2l^2 + 1)\cos\beta + (m^2l^2 - 1)\cos\alpha + 2ml\sin\alpha)} \\ &\times \left(1 + \frac{1}{mL} \left(\frac{9}{8} - \frac{m^2l^2D + lm\sin\alpha}{C} - \frac{F}{2} + \frac{F}{2e^{1/4}\sqrt{\pi}(1 + \text{Erf}\left(\frac{1}{2}\right))}\right)\right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Como habíamos comentado, la energía Casimir decae exponencialmente con  $e^{-Lm}$ . La dependencia que se obtiene del término dominante es  $m^{5/2}/L^{3/2}$  y la del término subdominante  $m^{3/2}/L^{5/2}$ .

Una vez que tenemos la fórmula, comparemos el valor de esta con lo que se obtiene integrando numéricamente (3.24). Para las condiciones periódicas (que son de este tipo ya que cumplen que  $n_1 \sin \beta \neq 0$ ) se tiene

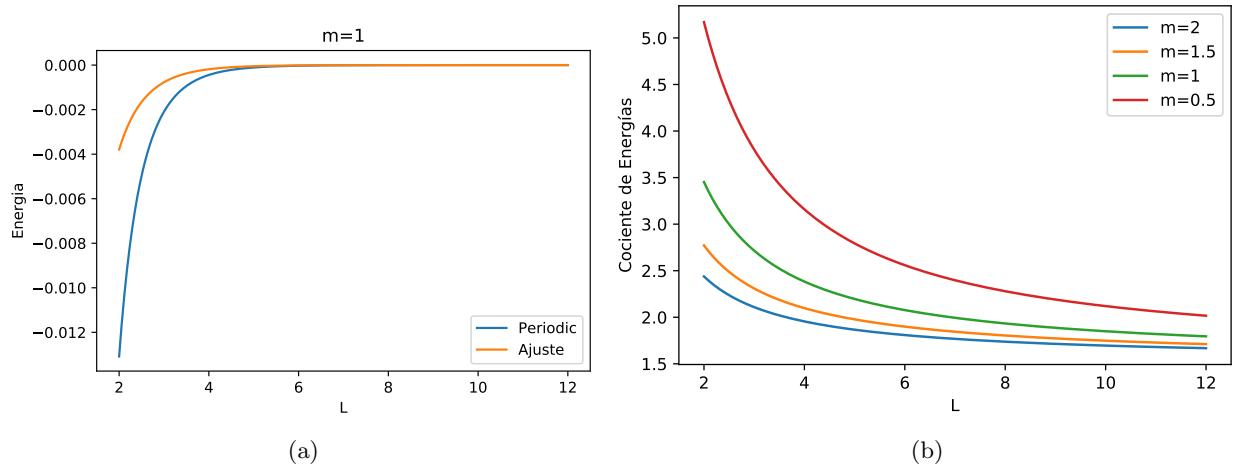


Figura 6: a) Valores obtenidos para  $m = 1$  en función de  $L$  integrando numéricamente la fórmula exacta y usando el desarrollo asintótico. b) Cociente entre el valor obtenido integrando numéricamente y usando el desarrollo asintótico en función de  $L$  para distintos valores de  $m$ . Ambos casos con las condiciones de contorno periódicas

Se observa como al aumentar  $L$  ambos valores se acercan y el cociente parece tender a un valor cercano a la unidad. También se puede apreciar como, al aumentar la masa, los dos valores necesitan un mayor valor de  $L$  para coincidir pero al final el cociente parece tender a un mismo valor independientemente de la masa.

Finalmente comentar que se ha comprobado que la dependencia del término dominante con  $m$  y  $L$  es la adecuada, ya que es la que mejor se ajusta al valor que se obtiene integrando numéricamente.

### 5.2.2. Caso $n_1 \sin \beta = 0$

En este caso hay que resolver la integral (5.6). Primero expresamos la integral como

$$\begin{aligned} & \int_m^\infty dk 3k(k^2 - m^2)^{1/2} e^{-2kL} \frac{-((kl)^2 + 1) \cos \beta - ((kl)^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha}{((kl)^2 + 1) \cos \beta + ((kl)^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha} \\ &= -3 \int_m^\infty dk \exp \left[ -2kL + \log \frac{\left( k\sqrt{k^2 - m^2} \right) ((kl)^2 + 1) \cos \beta + ((kl)^2 - 1) \cos \alpha - 2kl \sin \alpha}{((kl)^2 + 1) \cos \beta + ((kl)^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha} \right], \end{aligned} \quad (5.17)$$

con lo que la función a maximizar es

$$F_2(k) = -2kL + \log \frac{\left( k\sqrt{k^2 - m^2} \right) ((kl)^2 + 1) \cos \beta + ((kl)^2 - 1) \cos \alpha - 2kl \sin \alpha}{((kl)^2 + 1) \cos \beta + ((kl)^2 - 1) \cos \alpha + 2kl \sin \alpha}. \quad (5.18)$$

La primera derivada de la función en este caso es

$$F'_2(k) = L \frac{(\cos \alpha(k^2 l^2 - 1) + \cos \beta(k^2 l^2 + 1))^2 \left(2k^3 - \frac{2k^2}{L} - 2kLm^2 + \frac{m}{L}\right)}{k(k^2 - m^2) \left[(\cos \alpha(k^2 l^2 - 1) + \cos \beta(k^2 l^2 + 1))^2 - 4k^2 l^2 \sin^2 \alpha\right]} \\ + 4kl \sin \alpha \frac{(\cos \alpha(k^2 l^2 - 1) + \cos \beta(k^2 l^2 + 1)) \frac{k^2 - m^2}{L} + kl \sin \alpha \left(2k^3 - \frac{2k^2}{L} - 2kLm^2 + \frac{m}{L}\right)}{k(k^2 - m^2) \left[(\cos \alpha(k^2 l^2 - 1) + \cos \beta(k^2 l^2 + 1))^2 - 4k^2 l^2 \sin^2 \alpha\right]}. \quad (5.19)$$

Como en el caso anterior, suponemos una solución de la forma  $k_0 = m + \epsilon'$  con  $\epsilon' \sim 1/L$ . Quedándonos solo con los términos a primer orden en  $1/L$ , se obtiene la siguiente solución

$$-2 \frac{m^2}{L} + 6m^2 \epsilon' + \frac{m^2}{L} - 2m^2 \epsilon' = 0 \Rightarrow \epsilon' = \frac{1}{4L}, \quad (5.20)$$

donde se ha tenido en cuenta que a primer orden solo contribuyen el primero y tercer término de (5.19). Por que el extremo se da en  $k'_0 = m + 1/(4L)$ .

La segunda derivada de la función del exponente es

$$F''_2(k) = - \frac{(2k^4 - k^2 m^2 + m^4)}{k^2(k^2 - m^2)^2} \\ - \frac{4k^2 l^2 \sin \alpha (2k^5 l^5 D^3 + 4k^3 l^3 (\cos^3 \alpha - \cos^3 \beta + \cos^2 \alpha \cos \beta - \cos \alpha \cos^2 \beta) + 8klE)}{k^2(P(k)^2 - 4k^2 l^2 \sin^2 \alpha)^2}, \quad (5.21)$$

donde se han usado las definiciones de (5.11) y  $P(k) = \cos \alpha(k^2 l^2 - 1) + \cos \beta(k^2 l^2 + 1)$ . Ahora vamos a calcular el valor de la segunda derivada en el máximo  $k_0$ , quedándonos con los términos hasta segundo orden en  $1/L$  se tiene

$$F''_2(k'_0) \simeq - \frac{m^4 + \frac{3m^3}{2L}}{\left(m^2 + \frac{m}{2L}\right) \frac{m^2}{4L^2}} \simeq - \frac{m^4 \left(1 + \frac{3}{2mL}\right)}{\frac{m^4}{4L^2} \left(1 + \frac{1}{2mL}\right)} \simeq -4L^2 \left(1 + \frac{1}{mL}\right). \quad (5.22)$$

El segundo sumando de (5.21) no contribuye ya que es de tercer orden. Vemos como la segunda derivada es negativa lo que confirma que el extremo  $k'_0$  es el máximo.

Ahora evaluamos el valor del exponente en el máximo hasta segundo orden,

$$e^{F_2(k'_0)} \simeq \frac{e^{-2Lm - \frac{1}{2}} \left(m + \frac{1}{4L}\right) \left(\frac{m}{2L} + \frac{1}{16L^2}\right)^{1/2} \left(C_- + \frac{1}{2Lm} (l^2 m^2 D - lm \sin \alpha)\right)}{C + \frac{1}{2Lm} (l^2 m^2 D + lm \sin \alpha)} \\ \simeq \frac{e^{-2Lm} m^{3/2} C_- \left(1 + \frac{5}{16mL} + \frac{1}{2LmC_-} (l^2 m^2 D - lm \sin \alpha)\right)}{\sqrt{2eLC} \left(1 + \frac{1}{2LmC} (l^2 m^2 D + lm \sin \alpha)\right)} \\ \simeq \frac{e^{-2Lm} m^{3/2} C_-}{\sqrt{2eLC}} \left(1 + \frac{1}{mL} \left(\frac{5}{16} + \frac{ml \sin \alpha (l^2 m^2 D - E)}{CC_-}\right)\right), \quad (5.23)$$

donde  $C_- = (m^2 l^2 + 1) \cos \beta + (m^2 l^2 - 1) \cos \alpha - 2ml \sin \alpha$ .

Como en el caso anterior desarrollamos la función error para este caso:

$$\begin{aligned} \text{Erfc}\left(\frac{(m - k'_0)\sqrt{-F''(k'_0)}}{\sqrt{2}}\right) &= \text{Erfc}\left(\frac{-\sqrt{4L^2(1 + \frac{1}{mL})}}{2\sqrt{2}L}\right) \simeq \text{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2mL}\right)\right) \\ &\simeq 1 + \text{Erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2mLe^{1/4}\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Con las expresiones (5.22), (5.23) y (5.24), podemos obtener la expresión asintótica para la energía Casimir:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(L) &\simeq -\frac{e^{-2mL}m^{3/2}\left((m^2l^2+1)\cos\beta+(m^2l^2-1)\cos\alpha-2ml\sin\alpha\right)\left(1+\text{Erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)}{8\pi^{3/2}\sqrt{e}L^{3/2}\left((m^2l^2+1)\cos\beta+(m^2l^2-1)\cos\alpha+2ml\sin\alpha\right)} \\ &\times \left(1 + \frac{1}{mL}\left(-\frac{3}{16} + \frac{ml\sin\alpha(l^2m^2D-E)}{CC_-} + \frac{1}{2e^{1/4}\sqrt{\pi}\left(1+\text{Erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)}\right)\right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

En este caso la energía Casimir decae exponencialmente como  $e^{-2mL}$ . El término dominante tiene una dependencia con  $(m/L)^{3/2}$  y el subdominante con  $m^{1/2}/L^{5/2}$ .

Una vez que tenemos la fórmula comparemos el valor de esta con lo que se obtiene integrando numéricamente (3.24), para las condiciones de Dirichlet (que cumplen que  $n_1\sin\beta = 0$ ), se tiene

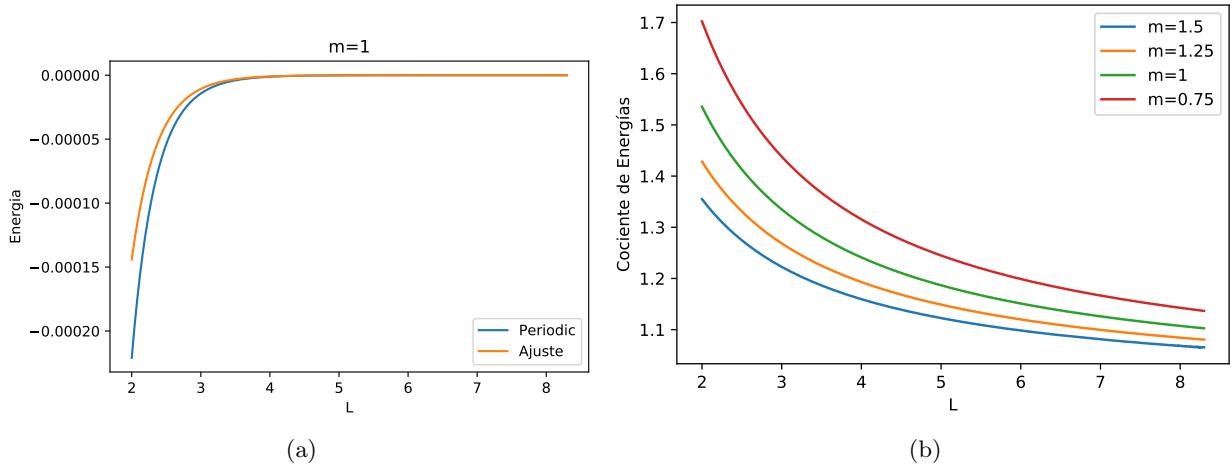


Figura 7: a) Valores obtenidos para  $m = 1$  en función de  $L$  integrando numéricamente la fórmula exacta y usando el desarrollo asintótico. b) Cociente entre el valor obtenido integrando numéricamente y usando el desarrollo asintótico en función de  $L$  para distintos valores de  $m$ . Ambos casos con las condiciones de contorno de Dirichlet

Igual que anteriormente se observa como al aumentar  $L$  ambos valores se acercan y el cociente parece tender a un valor cercano a la unidad. Pero en este caso lo hace con mayor rapidez y a un valor mucho más cercano a la unidad que en el caso anterior. También se aprecia la misma dependencia con  $m$  que en el otro caso.

Finalmente comentar que también se ha comprobado que la dependencia del término dominante con  $m$  y  $L$  es la adecuada, ya que es la que mejor se ajusta al valor que se obtiene integrando numéricamente.

## 6. Conclusiones

Hemos demostrado como en  $2 + 1$  dimensiones se puede llegar desde una teoría gauge no abeliana hasta un campo bosónico con masa  $m = g^2 c_A / (2\pi)$  (dependiente de la constante de acople). Esto sugiere que quizás el mismo fenómeno ocurre en  $3 + 1$  dimensiones, ya que ambas teorías presentan un gap de masa en su espectro de energías. Con esa perspectiva, en este trabajo emprendemos el cálculo de la energía Casimir para un campo escalar masivo en  $3 + 1$  dimensiones. Hemos usado un método novedoso que nos permite obtenerla para condiciones de contorno arbitrarias, aunque el resultado es una fórmula con una integral sin expresión analítica (3.24).

Posteriormente, se ha desarrollado una fórmula analítica en la aproximación en la que la masa es pequeña, cuya validez (como ya se ha comentado), depende no solo de la masa sino también de  $L$ . En estas fórmulas se puede observar la gran diferencia entre el comportamiento con masa y sin masa, ya que en la ausencia esta, no hay un decaimiento exponencial con  $L$  sino uno potencial con  $L^3$ .

Finalmente se ha obtenido una fórmula analítica para el comportamiento asintótico cuando  $L \rightarrow \infty$ , en función de los parámetros de los que dependen las condiciones de contorno. En el desarrollo de esta se ha observado dos comportamientos asintóticos diferenciados en función de las condiciones de contorno

$$\mathcal{E} \sim \begin{cases} e^{-mL} & \text{si } \text{tr}(U\sigma_1) \neq 0 \\ e^{-2mL} & \text{si } \text{tr}(U\sigma_1) = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Se ha comprobado que, efectivamente, la integración numérica de un caso particular de cada tipo de dependencia sigue el decaimiento predicho por esta fórmula. Como se ha mencionado anteriormente, esta dependencia exponencial podría explicar porqué la validez de la aproximación de baja masa depende de  $L$ . También está de acuerdo con los dos comportamientos diferenciados que se habían observado para las distintas condiciones de contorno, ya que las de Dirichlet y Zaremba cumplen  $\text{tr}(U\sigma_1) = 0$  por lo que la importancia del factor exponencial ( $e^{-2mL}$  en este caso) es mayor que para las condiciones periódicas y anti-periódicas que decaen con  $e^{-mL}$ .

Todas estas predicciones que se han hecho a lo largo de este trabajo, se podrían usar para compararlas con los resultados que se obtendrían mediante simulaciones numéricas de la teoría de Yang-Mills para distintas condiciones de contorno. Esto nos daría indicios de si esta teoría también se puede aproximar por un campo escalar masivo en  $3 + 1$  dimensiones como en el caso de  $2 + 1$ . También nos permitiría estimar el valor de la masa de ese campo escalar, ya que como se ha visto, la energía Casimir tiene una fuerte dependencia con esta y especialmente en el régimen asintótico en  $L$  con la dependencia exponencial con la masa.

## Bibliografía

- [1] Hendrick BG Casimir. On the attraction between two perfectly conducting plates. In *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, volume 51, page 793, 1948.
- [2] M. Asorey and J.M. Muñoz-Castañeda. Attractive and repulsive casimir vacuum energy with general boundary conditions. *Nuclear Physics B*, 874(3):852 – 876, 2013.
- [3] Dimitra Karabali, Chanju Kim, and VP Nair. Planar yang-mills theory: Hamiltonian, regulators and mass gap. *Nuclear Physics B*, 524(3):661–694, 1998.
- [4] Alexander M Polyakov and PB Wiegmann. Goldstone fields in two dimensions with multi-valued actions. *Physics Letters B*, 141(3-4):223–228, 1984.
- [5] Edward Witten. Non-abelian bosonization in two dimensions. In *Bosonization*, pages 201–218. World Scientific, 1994.
- [6] Frank W. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert, and Charles W. Clark. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, USA, 1st edition, 2010.
- [7] M Asorey, A Ibort, and G Marmo. Global theory of quantum boundary conditions and topology change. *International Journal of Modern Physics A*, 20(05):1001–1025, 2005.
- [8] Manuel Asorey and Jose M Munoz-Castaneda. Boundary effects in quantum physics. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 9(02):1260017, 2012.
- [9] M Asorey, D Garcia-Alvarez, and JM Munoz-Castaneda. Boundary effects in bosonic and fermionic field theories. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 12(06):1560004, 2015.
- [10] Manuel Asorey, Alberto Ibort, and Amelia Spivak. Admissible boundary conditions for hamiltonian field theories. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14(08):1740006, 2017.
- [11] Kimball A Milton. *The Casimir effect: physical manifestations of zero-point energy*. World Scientific, 2001.
- [12] Emili Elizalde and August Romeo. Rigorous extension of the proof of zeta-function regularization. *Physical Review D*, 40(2):436, 1989.