Trabajo de Fin de Grado

Cotas a la escala de energías de una deformación de la cinemática de relatividad especial

Autor:

Lucía Castells Tiestos

Directores:

José Luis Cortés Azcoiti
José Javier Relancio Martínez

Departamento de Física Teórica
Zaragoza, 13 de julio de 2020

Resumen

En el presente trabajo se estudian los motivos teóricos para considerar una deformación de la cinemática de Relatividad Especial (SR), así como las teorías construidas sobre una desviación de SR: la violación y la deformación de simetría de Lorentz. En primer lugar, se expone parte de la fenomenología que se utiliza actualmente para buscar efectos de una posible desviación de invariancia de Lorentz. En concreto, se estudia el efecto de la violación (o deformación) de la cinemática en la determinación del umbral de la reacción responsable de la pérdida de energía en la propagación de los rayos cósmicos de más alta energía. De los datos del final del espectro de rayos cósmicos se extrae información con la que imponer restricciones y cotas, no solo sobre los efectos de la violación (o deformación), sino también sobre la escala de energías que la parametriza.

Índice de contenidos

1. Introducción

1.1. Motivación

¿Qué ocurre con la simetría de Lorentz a energías del orden de la escala de Planck? ¿Siguen siendo válidas las leyes de Relatividad Especial en la física de altas energías?

La teoría de la Relatividad Especial (SR) nos ha acompañado ya durante más de cien años, desde que fue formulada por Albert Einstein en 1905. A pesar de tratarse de un caso particular de la Relatividad General, se considera una teoría fundamental, aplicable a una larga lista de problemas de la Física; en muchos contextos es posible describir el sistema a partir de la métrica de Minkowski. Es por ello que una gran parte de la comunidad científica se ha volcado, a lo largo del pasado siglo, en el estudio de esta teoría y de sus implicaciones en áreas como la Física de Partículas. Sin embargo, ¿podemos estar seguros de su validez en todos los contextos? ¿O, por el contrario, sería necesario adaptar sus leyes y postulados en determinados casos? Del mismo modo que el Modelo Estándar se sigue poniendo en duda a pesar de conseguir explicar muchos de los datos experimentales de los que se dispone actualmente, y se siguen buscando nuevas estructuras en sus leyes de la naturaleza, ¿por qué íbamos a estar tan seguros de que la Relatividad Especial es una teoría "correcta"?

La teoría de SR ha dado muy buenos resultados al ser sometida a diversos tests para probar su validez. Sin embargo, cabe la posibilidad de que esta precisión se dé tan solo en el régimen de energías que nos es accesible, rompiéndose para energías de orden superior. Es por ello que en los últimos años ha surgido un creciente interés en el estudio de la Física *más allá de Relatividad Especial*. A lo largo de este trabajo veremos algunas de las causas que han llevado a numerosos investigadores a considerar una posible desviación de Relatividad Especial, y cómo la corrección de las leyes de la física para energías del orden de la escala de Planck podría conducirnos a plantear soluciones a grandes problemas en la Física Teórica.

El principal motivo que nos lleva a considerar una salida de Relatividad Especial es la transición de la Teoría Cuántica de Campos, que trabaja de acuerdo a las leyes de Relatividad Especial, a la todavía desconocida Gravedad Cuántica, una teoría en desarrollo pero que ya sugiere que quizás la SR no sea suficiente para describir por completo los procesos de la Física de Partículas. Es natural preguntarse si tomar el límite clásico minkowskiano en Gravedad Cuántica ($\hbar \to 0,\ G \to 0$) nos reconduce a una situación gobernada por las leyes de SR. Sin embargo, no podemos ignorar que existen algunas características derivadas de la escala de Planck ($M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$) por las cuales la solución a nuestro problema de QG no es tan sencilla como simplemente tomar el límite minkowskiano de la métrica.

Dentro del marco de esta teoría se adopta, entre otras cosas, una descripción discreta de las coordenadas espacio-tiempo; la curvatura espacio-temporal se hace despreciable, y se admite también la posibilidad de que en el límite en el que los efectos gravitatorios clásicos son despreciables todavía exista un límite minkowskiano no trivial en la métrica. Una de las principales consecuencias son las alteraciones que puede sufrir la simetría de Lorentz; habitualmente se parametrizan como correcciones proporcionales al inverso de la escala de Planck en, por ejemplo, las leyes cinemáticas de la teoría, y en particular en la relación de dispersión energía-momento.

Hablaremos de ellas en más profundidad en próximas secciones, junto con las dos posibles teorías que se proponen para dar explicación a las desviaciones de la simetría de Poincaré, y en concreto la de Lorentz. Por ahora es interesante ponerlas en contexto mediante una breve introducción.

Los primeros estudios que se publicaron sobre una posible desviación de Relatividad Especial, desde que se empezaron a considerar posibles efectos derivados de Gravedad Cuántica, asumían que la única opción era que se produjese una violación de la simetría de Poincaré; el principio relativista que hasta ahora había permitido transformar las leyes físicas entre distintos observadores inerciales falla a la escala de Planck. Esta situación implica, en primera instancia, la ruptura de la invariancia de Lorentz y que, por lo tanto, el módulo de los cuadrivectores no tenga por qué permanecer invariante bajo cambios de sistema de referencia [1]. El ejemplo más claro es el del módulo del cuadrimomento de una partícula:

$$P^\mu P_\mu = E^2 - p^2 = m^2 \ . \tag{1}$$

La no invariancia de esta ecuación se traduce en una modificación de la relación de dispersión energía-momento, violando así las leyes de la Relatividad Especial en el régimen de altas energías ($m \ll p \ll M$). Dicha relación se puede reescribir si se le añaden correcciones proporcionales al inverso de la escala de Planck, como ya hemos mencionado anteriormente:

$$E^2 - p^2 - m^2 = p^2 f\left(\frac{p}{M}\right) \ , \tag{2}$$

donde M es la escala de energías que caracteriza la teoría. Esta ecuación es universal (no depende del tipo de partícula) e invariante bajo rotaciones.

La no formulación de un principio relativista supone también la existencia de un sistema de referencia privilegiado; se elige este sistema como aquel que se mueve con la expansión del Universo, para el cual los fotones de fondo (que jugarán un papel fundamental en los procesos de interacción de partículas que someteremos a estudio en próximas secciones) presentan una distribución isótropa.

Existen diversos modelos dentro del marco de la violación de invariancia de Lorentz [1], todos ellos construidos sobre efectos de gravedad cuántica. En lo que sigue, trabajaremos con modelos para los que sigan siendo válidas las leyes de conservación clásicas de energía y momento (es decir, adición de los momentos de cada de una de las partículas individuales para obtener el momento total de un sistema de multipartículas).

A pesar de que inicialmente toda la tendencia científica dentro de la Física más allá de Relatividad Especial apuntaba en la línea de una posible violación de simetría de Lorentz, varios años más tarde nacieron estudios presentando una teoría alternativa: la Relatividad Doblemente Especial (DSR), basada en una deformación de la simetría de Poincaré, en contraposición a la ruptura en el caso de violación de invariancia de Lorentz. Se construye principalmente sobre dos postulados [2]: el primero de ellos es que se mantiene el principio relativista, es decir, la equivalencia entre observadores inerciales, tal y como ocurría en SR; el segundo es la existencia de dos, en vez de una, escalas independientes del observador (de ahí el nombre de DSR), que son la velocidad de la luz c y una escala M, cuya elección natural es la escala de Planck. Esta teoría se presenta como una necesidad de corregir las leyes de transformación entre sistemas inerciales (como ocurrió en su día cuando se produjo la transición entre las transformaciones de Galileo de la mecánica newtoniana y las de Lorentz de Relatividad Especial, a través de un análisis de la electrodinámica de Maxwell), sin que exista así un sistema de referencia privilegiado.

Sin embargo, es difícil conciliar este principio relativista con la existencia de la masa y la longitud de Planck pues, como es bien sabido de SR, las energías y longitudes medidas por distintos observadores no son las mismas; una forma de hacerlo es considerar una descripción no-conmutativa de la geometría espacio-temporal para que estos dos postulados puedan coexistir [3]. Además, como ya hemos comentado, esta teoría requiere de una deformación de los generadores de las simetrías de Poincaré [2]. En este trabajo nos centraremos en dos consecuencias principales de esta deformación: la modificación de las leyes de conservación de la energía y el momento, y la correspondiente (derivada del principio relativista y, por lo tanto, de unas leyes físicas independientes del observador) corrección a la relación de dispersión.

Con todo lo anterior expuesto, no es de extrañar que muchos investigadores hayan optado por adentrarse más allá de Relatividad Especial. A pesar de que muchos autores siguen anclados en la idea de que la SR "está bien", otros muchos estudios recientes se han replanteado esta teoría y han trabajado por sembrar el pensamiento de que, a pesar de que la SR ha demostrado funcionar muy bien en los regímenes que nos son accesibles, deberíamos estar abiertos a la posibilidad de que en cualquier momento podamos encontrar desviaciones con respecto a los resultados predichos por esta teoría. Y no solo eso, sino que, aunque nuestro interés se desarrolle en la línea de seguir apoyando el éxito de la teoría de la relatividad, la física más allá de Relatividad Especial puede ser interesante a la hora de elaborar pruebas de dicha teoría. Estos son algunos de los motivos por los que el estudio de las desviaciones de la simetría de Lorentz está adquiriendo cada vez más madurez y consistencia.

Conforme se desarrollaba la investigación en gravedad cuántica, la conclusión teórica de que efectivamente la relación de dispersión debía ser modificada a la escala de Planck se presentaba más robusta. Sin embargo, como hemos comentado, los estudios realizados durante años hasta el año 2000 (algunos de ellos, [4, 5]) contemplaban únicamente una modificación basada en la violación de la simetría de Lorentz. No fue hasta unos años más tarde que se consideró la idea de que era posible evitar un sistema de referencia privilegiado mediante un cambio en las leyes de transformación entre observadores inerciales [6]. Fue en este contexto cuando nació la teoría de DSR, como una perspectiva alternativa a los resultados obtenidos hasta entonces sobre desviaciones de SR. Esta teoría no solo se nos presenta a modo de estudio del problema de gravedad cuántica, sino que también puede ofrecer soluciones a algunas de las cuestiones más importantes de la Física. Este es el caso de la "velocidad de la luz dependiente del tiempo" [7], una hipótesis basada en principios de DSR y que puede suponer una alternativa a la inflación en Cosmología: la causalidad en el Universo ya no se explicaría en términos de inflación, sino a partir de una dependencia de la constante c con la energía; como la energía de las partículas ha variado a lo largo de las distintas etapas del Universo, esto se traduce en una dependencia temporal implícita.

El problema con la teoría de DSR es que todavía no está completa, y que su fenomenología es escasa y todavía está en sus primeras fases. Al contrario del caso de violación de Lorentz, para el que sí se han publicado muchos estudios, no hay un estudio sistemático en DSR, y ninguno de los modelos candidatos ha conseguido satisfacer todos los requerimientos de la teoría. Seguir desarrollando esta teoría, aparentemente tan inmadura, pero con tanto potencial, podría llevarnos a arrojar algo de luz en un camino hasta hace pocos años inexplorado, y tan distinto de la Física que conocíamos hasta la fecha. Y quizás también a acercarnos más a una respuesta para algunas de las preguntas fundamentales que todavía nos ocupan.

1.2. Fenomenología

El principal motivo por el que no se dispone de suficiente evidencia experimental para desarrollar un modelo robusto de DSR es que la escala de energías a la que trabajan los aceleradores de partículas actuales no es lo suficientemente alta como para que se manifiesten las correcciones derivadas de la escala de Planck. De hecho, inicialmente la física más allá de Relatividad Especial no recibió mucha atención por parte de la comunidad científica, pues se creía que los efectos de una posible ruptura de simetría de Lorentz solo eran patentes a energías del orden de la escala de Planck, un régimen de energías por ahora inaccesible. Por ello, fue conveniente poner el foco de atención en otro tipo de fenomenología, y es aquí donde la física de rayos cósmicos se presenta como una ventana a nueva física. Los rayos cósmicos de muy alta energía (UHECR) llegan a alcanzar energías siete órdenes de magnitud por encima de las del gran colisionador de hadrones (LHC), por lo que podrían contribuir a algunos de los progresos de la física de altas energías [8], y en concreto constituyen el sistema que podría hacer posible observar los efectos de una posible desviación de Relatividad Especial.

Los fenómenos que analizaremos en este trabajo para estudiar posibles salidas de invariancia de Lorentz se basan principalmente en la interacción de las partículas de rayos cósmicos, mientras se propagan por el Universo, con otras partículas de baja energía pertenecientes a radiación de fondo, tales como el fondo cósmico de microondas (CMB). Veremos cómo considerar una violación (o deformación) de invariancia de Lorentz afecta al umbral de la energía por encima o por debajo de la cual se puede producir una reacción [9]; es decir, las anomalías en los límites impuestos a las energías en los procesos de creación de partículas nos ayudan a evaluar los efectos de las salidas de SR, estudiando cuánto difieren los valores obtenidos en el caso de ruptura de invariancia de Lorentz de los que se esperarían en relatividad ordinaria.

Otra fenomenología que se utiliza para estudiar los posibles efectos de una desviación (en concreto, violación) de simetría de Lorentz consiste en establecer límites energéticos a reacciones que, en el marco de la Relatividad Especial, estarían prohibidas. Un ejemplo sencillo con el que ilustrar este fenómeno es el decaimiento de fotones a un par electrón-positrón, es decir, el proceso $\gamma \to e^+e^-$ [10]. En el caso de invariancia de Lorentz, el fotón es estable y este decaimiento no se produce; se puede comprobar fácilmente viendo cómo el cuadrado del cuadrimomento de un par electrón-positrón es siempre positivo, mientras que el de un fotón es cero. Por lo tanto, con la relación de dispersión y las leyes de conservación ordinarias, la desintegración de un fotón en un electrón-positrón no es posible. Sin embargo, en el caso de violación de Lorentz, sustituyendo la relación de dispersión modificada en la ley de conservación clásica energía-momento, se obtiene una relación entre la energía de las partículas y el ángulo θ entre los momentos del par e^+e^- de la forma:

$$cos\,\theta \simeq \frac{E_+(E_\gamma - E_+) + m_e^2 \pm E_\gamma E_+(E_\gamma - E_+)/M}{E_+(E_\gamma - E_+)}\,, \qquad (3)$$

donde E_γ es la energía del fotón y E_+, la del positrón. Tomando el signo positivo en la ecuación, podemos comprobar que existe una cierta (aunque restringida) región del espacio de fases de la energía para la cual el proceso está cinemáticamente permitido.

Otra de las pruebas, de especial importancia a la hora de imponer límites a la teoría de DSR, es el retraso en el vuelo de fotones [11] como consecuencia de una pequeña dependencia de la velocidad de los fotones con su energía. Esto provoca una diferencia en el tiempo de llegada a la Tierra entre dos fotones de distinta energía que son emitidos simultáneamente por una fuente lejana. La enorme distancia que recorren dichos fotones hasta que son detectados actúa como mecanismo de amplificación para los efectos, de por sí muy pequeños, de una deformación de SR.

Vamos a analizar más en profundidad dos procesos de especial relevancia en la física de rayos cósmicos, y que son clave a la hora de elaborar pruebas astrofísicas a la invariancia de Lorentz. Estudiaremos cada uno de ellos tanto desde la perspectiva de violación de simetría de Lorentz como desde la de deformación. A continuación se introducen brevemente estos dos procesos de interacción de partículas.

1.2.1. Producción de pares e^+e^- en interacciones fotón-fotón

El primero que vamos a estudiar es el proceso $\gamma\gamma \to e^+e^-$ de creación de un par electrón-positrón a partir de la colisión de un fotón de alta energía E proveniente de fuentes cósmicas con un fotón de baja energía $\omega = |k| \sim 0.01\,\text{eV}$ perteneciente al fondo extragaláctico (EBL). Este proceso es importante cuando se trata de analizar qué efectos tiene la violación de la simetría de Lorentz en la opacidad que el Universo presenta a los fotones, y es de fácil estudio por la simplicidad que supone el hecho de que las dos partículas resultantes de la reacción tengan la misma masa y que las dos entrantes sean fotones. En próximas secciones detallaremos el cálculo de la energía umbral de la reacción, y demostraremos cómo la expresión correspondiente a dicha energía contiene un término proveniente de la corrección a la escala de Planck.

Una forma de evaluar la efectividad de este proceso de producción de pares es a través del estudio del espectro de energía de los fotones detectados en la Tierra; esto nos puede ayudar a estimar cuál ha sido el ratio de absorción de dichos fotones en su viaje por el espacio o, dicho de otro modo, cuánta ha sido la interacción con la radiación de fondo para dar lugar a pares electrón-positrón. De esta manera, lo que difieran estas observaciones de lo que se esperaría bajo una descripción de SR permite estimar cuáles son los efectos de la escala de Planck en el valor de la energía umbral de este proceso y, por lo tanto, qué correcciones a la relación de dispersión se derivan de una violación (o deformación) de simetría de Lorentz.

Sin embargo, se presentan varios problemas a la hora de estimar la efectividad con la que ocurre este proceso: no solo habría que tener en cuenta la condición sobre la energía umbral, sino también las características de la fuente que ha emitido estos fotones, su distancia a los detectores, y la densidad de fotones de fondo que interactúan con los de alta energía en su viaje hacia la Tierra. Tampoco conocemos por completo todas las características del proceso, ni sabemos si la absorción de los fotones de alta energía se debe únicamente a su interacción con el fondo extragaláctico o si también han podido existir interacciones con otros fotones de fondo más energéticos.

1.2.2. Fotoproducción de piones en interacciones de rayos cósmicos: el límite GZK

El proceso $p\gamma \to p\pi$ está despertando mucho interés en el estudio de posibles efectos a la escala de Planck. El principal motivo es que juega un papel fundamental a la hora de explicar el espectro de rayos cósmicos de muy alta energía. El espectro detectado en la Tierra presenta un corte, por encima del cual no se perciben protones procedentes de fuentes de rayos cósmicos, o los que pocos que se detectan no son suficientes para generar un número significativo de eventos. Este corte está directamente relacionado con el mínimo valor de la energía necesario para que estos protones produzcan piones a partir de la colisión con fotones de fondo de microondas, y se le conoce como "límite GZK" (Greisen-Zatsepin-Kuzmin) [10].

Este fenómeno explica las observaciones de rayos cósmicos que se llevan a cabo en la Tierra; su espectro de energías se caracteriza por una acumulación de protones en torno a la energía umbral, mientras que está prácticamente vacío por encima de dicho umbral. Dicha acumulación se explica si consideramos que los protones por encima del límite GZK tienden a perder energía en el proceso de producción de piones hasta que dicha energía se encuentra en torno al umbral. Los efectos a la escala de Planck desplazan el límite a un valor superior respecto de las predicciones de relatividad clásicas. Como hemos mencionado anteriormente, es la medida de este desplazamiento lo que nos permite estimar las posibles desviaciones de SR.

Los datos experimentales recogidos hasta ahora son contradictorios: mientras el observatorio de rayos cósmicos AGASA presenta un espectro del tipo esperado bajo efectos a la escala de Planck [12], los datos del observatorio Pierre Auger parecen concordar con la predicción espacio-temporal clásica [13]. Estas discrepancias nacen principalmente de un pobre entendimiento del espectro de rayos cósmicos y de su composición, además de otros problemas que también se nos presentaban en el proceso de creación de pares, tales como un desconocimiento de la distancia y la composición de las fuentes. Además, no sabemos con seguridad si los fotones de CMB son los únicos que interaccionan con los protones de alta energía, o si por el contrario existen también otros fotones de fondo responsables en cierta manera del límite GZK. Sin embargo, el interés cada vez más arraigado en utilizar la física de rayos cósmicos como prueba a Relatividad Especial contribuirá a que se siga investigando para elaborar una descripción cada vez más completa del espectro de protones de muy alta energía, con el objetivo de imponer límites experimentales al proceso de producción de piones.

1.3. Objetivos

A pesar de que la gran diferencia de energía que existe entre la escala de Planck y las partículas más energéticas conocidas imposibilita la observación directa de violación de Lorentz, sí es posible diseñar pruebas a invariancia de Lorentz que, trabajando a energías mucho más bajas, sean sensibles a efectos residuales de una posible desviación de Relatividad Especial. El objetivo de este trabajo es utilizar la física de rayos cósmicos, y en concreto las reacciones que acabamos de describir, para dar cuenta de ello, a partir del cálculo de la energía umbral de dichas reacciones.

A pesar de que ya hemos comentado las características principales de las dos teorías que postulan una desviación de la simetría de Lorentz, conviene detenernos de nuevo en ellas y comentar más en profundidad sus modificaciones a la relación de dispersión y a las leyes de transformación, que son piezas clave a la hora de derivar un límite teórico a la energía de una reacción.

2. Violación de invariancia de Lorentz

Hemos comentado que una de las principales consecuencias derivadas de los efectos de una descripción espacio-temporal cuántica es la invalidez de la invariancia de Lorentz a altas energías. Las primeras teorías que empezaron a considerar esta idea se construyeron sobre la premisa de una ruptura total de la simetría de Lorentz, lo que rompe con el principio relativista y establece, por lo tanto, un sistema de referencia privilegiado. Esto se conoce como violación de invariancia de Lorentz.

Dentro del marco de esta teoría, se mantienen las leyes de composición energía-momento clásicas; sin embargo, se modifica la relación de dispersión. En la introducción de este trabajo se ha presentado una forma general de la relación de dispersión en violación de Lorentz, la ecuación (2), con el único interés de hacer ver cómo las correcciones se parametrizan en términos proporcionales al inverso de la escala de Planck. Es posible llevar a cabo un desarrollo de esta expresión, en el régimen $m \ll p \ll M$ y aplicando ciertas condiciones que se detallan a continuación [1].

En el régimen $\frac{p}{M} \ll 1$, la función f se puede expandir en serie de Taylor:

$$E^2 - p^2 - m^2 = p^2 \left(f(0) + f'(0)\frac{p}{M} + f''(0)\frac{p^2}{M^2} + ... \right) . \tag{4}$$

En el límite $M \to \infty$ se recupera la invariancia de Lorentz, por lo que $f(0) = 0$. Además, los coeficientes $f'(0)$ y $f''(0)$ son del orden de la unidad. Estos argumentos nos llevan a establecer la siguiente relación de dispersión:

$$I_\pm : \qquad E^2 - p^2 \approx m^2 \pm \frac{p^3}{M} \tag{5}$$

$$II_\pm : \qquad E^2 - p^2 \approx m^2 \pm \frac{p^4}{M^2} \tag{6}$$

donde $I_\pm$ hace referencia a las correcciones de primer orden, e $II_\pm$, a las de segundo. El término lineal no siempre está presente; sin embargo, si lo está, prevalece sobre el término cuadrático y este segundo puede despreciarse. Por este motivo, podemos simplificar el problema y limitarnos a considerar tan solo una de las dos correcciones (primer o segundo orden), y no las dos de forma simultánea.

Los términos adicionales derivados de la ruptura de simetría de Lorentz dan lugar a un desplazamiento en el umbral teórico de la energía de una reacción. En próximas secciones veremos cómo el valor esperado por la teoría de SR se ve afectado por la aparición de estas correcciones.

3. Deformación de invariancia de Lorentz: Relatividad Doblemente Especial

La teoría de DSR surgió como una alternativa a la violación de Lorentz, bajo la idea de una deformación del álgebra de Poincaré, en contraposición a la ruptura de la que se había hablado hasta entonces. Como ya comentamos en la sección introductoria, en el límite $G \to 0$ no recuperamos las leyes de Relatividad Especial, sino que nos vemos obligados a tomar el siguiente límite:

$$\lim_{G,\, \hbar \to 0} \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = M \neq 0 \ , \tag{7}$$

donde M, la ya mencionada masa de Planck, es, en un contexto de DSR, una de las dos escalas invariantes para todos los observadores inerciales. Su valor está muy por encima de los regímenes de energías por los que se caracterizan los experimentos actuales ($M \sim 10^{19}$ GeV).

Podemos resumir la idea principal detrás de DSR como la formulación de una teoría que, además de incluir una escala de altas energías M, conserva el principio relativista, con las correspondientes modificaciones tanto a las transformaciones de Lorentz como a la relación de dispersión y la ley de composición (y por lo tanto también a la ley de conservación energía-momento). Al igual que en el caso de violación de invariancia de Lorentz, las salidas de SR se pueden expandir en series de potencias de p/M. A continuación se detallan las expresiones modificadas tanto de la relación de dispersión como de la ley de composición [14], restringiéndonos a situaciones en las que se mantenga la ley de transformación lineal bajo rotaciones propia de Relatividad Especial.

Para el caso general (3+1 dimensiones) se tiene, para la ley de composición de un sistema de dos partículas (las dos reacciones que se estudian en este trabajo disponen únicamente de dos partículas en el estado inicial y en el estado final, por lo que no nos interesa extender el análisis al caso de sistemas de más de dos partículas)

$$[p \oplus q]_0 = p_0 + q_0 + \frac{\beta_1}{M} p_0 q_0 + \frac{\beta_2}{M} \vec{p} \cdot \vec{q} \ , \tag{8}$$

$$[p \oplus q]_i = p_i + q_i + \frac{\gamma_1}{M} p_0 q_i + \frac{\gamma_2}{M} p_i q_0 + \frac{\gamma_3}{M} \epsilon_{ijk} p_j q_k \ , \tag{9}$$

donde se ha impuesto la condición

$$p \oplus q|_{q=0} = p \qquad p \oplus q|_{p=0} = q \ . \tag{10}$$

Por otro lado, la relación de dispersión se expresa de la siguiente manera:

$$C(p) = p_0^2 - \vec{p}^2 + \frac{\alpha_1}{M} p_0^3 + \frac{\alpha_2}{M} p_0 \vec{p}^2 = m^2 \ . \tag{11}$$

Los coeficientes $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$, son adimensionales y cumplen la relación

$$\alpha_1 = -\beta_1 \ , \qquad \alpha_2 = \gamma_1 + \gamma_2 - \beta_2 \ , \tag{12}$$

conocidas como reglas de oro (véase [14] para una derivación detallada). Juntando ambas queda la identidad

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \ . \tag{13}$$

Estas dos igualdades se deben satisfacer para que la modificación en la relación de dispersión sea compatible con la de las leyes de conservación y, por lo tanto, la teoría sea también compatible con un principio relativista. El coeficiente γ_3, por su parte, se anula si existe simetría de paridad bajo la transformación $p_0 \to p_0,\ \vec{p} \to -\vec{p},\ q_0 \to q_0,\ \vec{q} \to -\vec{q}$.

El caso particular en 1+1 dimensiones es mucho más simple que el general, y resulta de mucho interés para los procesos de colisión de partículas que se van a estudiar en este trabajo; las leyes de composición siguen la siguiente expresión:

$$[p \oplus q]_0 = p_0 + q_0 + \frac{\beta_1}{M} p_0 q_0 + \frac{\beta_2}{M} p_1 q_1 \ , \tag{14}$$

$$[p \oplus q]_1 = p_1 + q_1 + \frac{\gamma_1}{M} p_0 q_1 + \frac{\gamma_2}{M} p_1 q_0 \ . \tag{15}$$

Dentro de la teoría de DSR, se trabaja con distintos modelos, caracterizados por sus relaciones energía-momento y sus leyes de composición; es decir, por el valor que adquieren sus parámetros α, β, γ. Todos ellos sirven para probar la validez de las reglas de oro y cómo dichas reglas son suficientes para hacer la teoría compatible con un principio relativista. Un ejemplo es el modelo $DSR1$ [15], descrito por los valores

$$\alpha_1 = 0 \ , \quad \alpha_2 = 1 \ , \quad \beta_1 = 0 \ , \quad \alpha_2 = 1 \ , \quad \gamma_1 = 1 \ , \quad \gamma_2 = 1 \ .$$

En lo que sigue, llevaremos a cabo los cálculos reemplazando la notación covariante por

$$p_0 \to E \ , \qquad p_i \to \vec{p} = (p_x, p_y, p_z) \ . \tag{16}$$

4. Cálculo de la energía umbral de una reacción

Hemos comentado que uno de los efectos que pueden provocar las desviaciones respecto de la simetría de Lorentz es el desplazamiento del umbral de energía de una reacción ya existente en la teoría de Relatividad Especial. Nuestro objetivo a lo largo de esta sección es llevar a cabo el procedimiento por el cual se obtiene el valor para la energía umbral de una reacción, tanto para el caso de violación de invariancia de Lorentz como para el de deformación DSR, y comparar ambos resultados entre sí y respecto del valor esperado por la SR clásica. De esta forma será posible contrastar los datos fenomenológicos, y en concreto los obtenidos en experimentos de rayos cósmicos, con un valor teórico.

El procedimiento que nos permite extraer un valor teórico para el límite de la energía consiste en sustituir la relación de dispersión modificada en las leyes de conservación energía-momento (junto con la correspondiente ley de composición, modificada o no según estemos considerando una teoría u otra). Sin embargo, es necesario primero conocer cuál es la configuración del sistema que minimiza la energía de la reacción (energía umbral); el método de multiplicadores de Lagrange nos permite obtener la mínima energía de la partícula incidente necesaria para que se produzca la reacción, restringiéndonos a las leyes de conservación.

En primer lugar, llevaremos a cabo los cálculos para el caso de Relatividad Especial, y serán estos resultados los que utilizaremos como referencia en lo que hagamos posteriormente. Después, repetiremos el procedimiento para el caso más general posible: la colisión de dos partículas en el estado inicial (que denotaremos con los subíndices 1 y 2) resultante en otras dos partículas en el estado final (que denotaremos con 3 y 4), con una relación energía-momento dada por una relación de dispersión genérica $E(p)$ y una ley de composición de la forma (8) y (9). Una vez hayamos desarrollado el método de Lagrange, particularizaremos a cada una de las dos teorías (tomando la expresión $E(p)$ pertinente en cada caso y asignando valores a los coeficientes α, β, γ) y a cada una de las reacciones que nos interesan (producción de pares y fotoproducción de piones).

La función a minimizar es la energía de la partícula altamente energética (o, equivalentemente, el módulo del momento), es decir,

$$|\vec{p}_1| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \equiv p_1 \ , \tag{17}$$

sometida a las ligaduras

$$[E_1 \oplus E_2] - [E_3 \oplus E_4] = 0 \ , \tag{18}$$

$$[p_{i,1} \oplus p_{i,2}] - [p_{i,3} \oplus p_{i,4}] = 0 \ , \qquad i = x, y, z \ , \tag{19}$$

esto es, las leyes de conservación. Vemos primero este método sin considerar correcciones a la escala de Planck.

4.1. Relatividad Especial clásica

Para poder cuantificar cuánto difieren los resultados en ruptura de invariancia de Lorentz de lo que se esperaría en una teoría clásica, debemos primero determinar el valor de la energía umbral de acuerdo a las leyes de Relatividad Especial ordinaria. En este caso, el momento total de un sistema de multipartículas viene dado por la adición de los momentos de cada una de las partículas por separado (leyes de composición clásicas), de forma que

$$\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \ .$$

La relación de dispersión es la ya conocida

$$E^2 = p^2 + m^2 \ . \tag{20}$$

Imponiendo estas condiciones en el método de Lagrange, definimos una función auxiliar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h &= p_1 + \lambda_0 \left(E_1 + E_2 - E_3 - E_4\right) + \sum_{i=x,y,z} \lambda_i \left(p_{i,1} + p_{i,2} - p_{i,3} - p_{i,4}\right) = \\ &= p_1 + \lambda_0 \left(E(p_1) + E(p_2) - E(p_3) - E(p_4)\right) + \\ &\quad + \sum_{i=x,y,z} \lambda_i \left(p_{i,1} + p_{i,2} - p_{i,3} - p_{i,4}\right) = \\ &= h(\vec{p}_1, \vec{p}_3, \vec{p}_4, \lambda_0, \vec{\lambda}) \ , \end{aligned} \tag{21}$$

donde $\vec{\lambda} = (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$ representa el vector de los multiplicadores de Lagrange asociados a las ecuaciones de conservación del momento. Al optimizar estas funciones respecto de las variables del sistema (las componentes del momento de cada una de las partículas que intervienen en el proceso, salvo de la segunda, que al tratarse en ambos procesos de un fotón de fondo tiene una energía definida), obtenemos el mínimo restringido de nuestra función de interés p_1.

Empezando por las componentes asociadas al momento de la primera partícula:

$$\frac{\partial h}{\partial p_{j,1}} = \frac{p_{j,1}}{p_1} + \lambda_0 \, \frac{p_1}{E(p_1)} \frac{p_{j,1}}{p_1} + \lambda_j = 0 \ . \tag{22}$$

De esta ecuación se extrae una importante relación:

$$\frac{\lambda_j}{p_{j,1}} = -\frac{1}{p_1} - \frac{\lambda_0}{E(p_1)} \,, \qquad \forall j \,, \tag{23}$$

que no es sino una relación de proporcionalidad entre $\vec{p}_1$ y $\vec{\lambda}$; esto es, la partícula incidente se mueve en la dirección del vector de multiplicadores.

El procedimiento es análogo para los momentos de las partículas salientes:

$$\frac{\partial h}{\partial p_{j,3}} = -\lambda_0 \, \frac{p_3}{E(p_3)} \frac{p_{j,3}}{p_3} - \lambda_j = 0 \,, \tag{24}$$

$$\frac{\partial h}{\partial p_{j,4}} = -\lambda_0 \, \frac{p_4}{E(p_4)} \frac{p_{j,4}}{p_4} - \lambda_j = 0 \,, \tag{25}$$

de forma que

$$\frac{\lambda_j}{p_{j,3}} = -\frac{\lambda_0}{E(p_3)} \,, \qquad \forall j \,, \tag{26}$$

$$\frac{\lambda_j}{p_{j,4}} = -\frac{\lambda_0}{E(p_4)} \,, \qquad \forall j \,. \tag{27}$$

Este resultado nos indica que los momentos de las tres partículas son proporcionales al vector de multiplicadores, por lo que el movimiento de las tres partículas se produce en la dirección de un mismo vector director $\vec{\lambda}$. Además, exigiendo que en la reacción se cumplan las ecuaciones de conservación del momento ($p_{j,1} + p_{j,2} - p_{j,3} - p_{j,4} = 0$), podemos establecer que $\vec{p}_2$ sigue también esta misma dirección. De aquí se extrae una importante conclusión: la configuración del sistema que minimiza la energía del proceso es aquella para la cual la reacción es unidimensional. Este resultado es independiente de la naturaleza de las partículas que intervienen en el proceso (para una relación de dispersión universal, como es el caso de SR).

Como último apunte, se debe mencionar que la colisión entre el fotón de fondo y la partícula incidente solo puede ser frontal, pues dicha partícula, tanto si tiene masa como si no, no puede nunca alcanzar a un fotón que se desplaza con velocidad c, si ambos se propagan en el mismo sentido.

Vamos ahora a analizar cada una de las reacciones por separado.

Producción de pares

El proceso $\gamma\gamma \to e^+e^-$ es especialmente sencillo porque las masas de las dos partículas resultantes son iguales; esto implica que, para un mismo valor del momento, la energía de ambas partículas es la misma. De esta manera, las λ_0 de las ecuaciones (26) y (27) son dos funciones idénticas (e invertibles), la primera sobre la variable $p_{i,3}$ (que ahora renombramos como $p_{i,+}$, por ser el momento del positrón) y la segunda sobre $p_{i,4}$ (que renombramos como $p_{i,-}$, por tratarse del electrón). Así, es posible igualar las variables sobre las que estas dos funciones actúan y establecer que

$$\vec{p}_+ = \vec{p}_- \equiv \vec{p}_e \,. \tag{28}$$

Podemos pues concluir que la configuración que minimiza la energía del proceso es aquella para la que los momentos del par positrón-electrón son iguales.

Conociendo la configuración del sistema, estamos en disposición de aplicar las leyes de conservación para calcular la energía umbral. En primer lugar, la conservación de p nos permite obtener una relación entre el momento de la partícula incidente (p_{th}, donde el subíndice th hace referencia al valor límite) y el del electrón/positrón p_e:

$$p_{th} - \omega = 2p_e \, . \tag{29}$$

La ecuación del límite se obtiene a partir de la ecuación de conservación de la energía:

$$\begin{aligned} &E_{th} + \omega = 2E_e \implies \\ &p_{th} + \omega = 2\sqrt{p_e^2 + m_e^2} = 2\sqrt{\frac{1}{4}(p_{th} - \omega)^2 + m_e^2} \implies \\ &p_{th} = \frac{m_e^2}{\omega} \, . \end{aligned} \tag{30}$$

Este es el mínimo valor del momento del fotón incidente para que interaccione con un fotón de fondo y produzca un par electrón-positrón, y será el que utilizaremos de referencia tras estudiar los casos de violación y de deformación de simetría de Lorentz.

Fotoproducción de piones

La reacción $p\gamma \to p\pi$ no es tan inmediata dada la dificultad que introduce el hecho de que las dos partículas finales no tengan la misma masa. Sin embargo, el caso de invariancia de Lorentz es especialmente sencillo, ya que el ratio entre los momentos de dichas partículas es igual al ratio de sus masas. En efecto, si igualamos las ecuaciones (26) y (27), observamos que

$$\frac{E(p_p)}{p_p} = \frac{E(p_\pi)}{p_\pi} \implies \frac{p_p}{p_\pi} = \frac{m_p}{m_\pi} \, . \tag{31}$$

De esta forma, la ley de conservación del momento nos ofrece una relación entre el momento del protón incidente y el del pion resultante de la reacción,

$$p_{th} - \omega = p_\pi \left(1 + \frac{m_p}{m_\pi}\right) \, , \tag{32}$$

y la ley de conservación de la energía nos permite obtener el valor umbral. Trabajaremos con la aproximación

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} \approx p + \frac{m^2}{2p} \tag{33}$$

válida para $m \ll p$.

$$\begin{aligned} &E_{th} + \omega = E_p + E_\pi \implies \\ &p_{th} + \frac{m_p^2}{2p_{th}} + \omega = \frac{m_p}{m_\pi} p_\pi + \frac{m_\pi m_p}{2p_\pi} + p_\pi + \frac{m_\pi^2}{2p_\pi} \approx p_{th} - \omega + \frac{(m_\pi + m_p)^2}{2p_{th}} \implies \\ &p_{th} = \frac{m_\pi^2 + 2m_\pi m_p}{4\omega} \, , \end{aligned} \tag{34}$$

donde se ha aproximado $p_\pi \approx \frac{m_\pi}{m_\pi + m_p} p_{th}$ en el término proporcional al cuadrado de la masa, haciendo uso de que la energía del fotón de fondo ω es muy pequeña respecto de las otras magnitudes del sistema, por lo que el error cometido es despreciable.

De acuerdo con esta teoría, la acumulación de protones procedentes de fuentes de rayos cósmicos detectados en la Tierra debería producirse en torno a este valor de p_{th} (si no se consideran efectos derivados de la expansión del Universo, con el fin de facilitar la observación de las modificaciones a la cinemática de Relatividad Especial). Veamos cómo cambia si consideramos correcciones a la escala de Planck.

4.2. Desviaciones de invariancia de Lorentz

Nuestro objetivo ahora es observar los efectos de una posible desviación de Relatividad Especial sobre el valor de la energía umbral de estas reacciones. Como hemos comentado a lo largo de este trabajo, se trabaja sobre dos teorías principales, violación y deformación de Lorentz, y dentro de esta última se consideran varios modelos, en función de la ley de composición y de la relación de dispersión. Con la finalidad de englobarlos todos, desarrollaremos el método de Lagrange para unos coeficientes genéricos $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

Del mismo modo que en el caso de SR, definimos una función auxiliar:

$$\begin{aligned}
h = {} & p_1 + \lambda_0\,(\,[E_1 \oplus E_2] - [E_3 \oplus E_4]\,) + \sum_{i=x,y,z} \lambda_i\,(\,[p_{i,1} \oplus p_{i,2}] - [p_{i,3} \oplus p_{i,4}]\,) = \\
& = p_1 + \lambda_0 \Bigg(E(p_1) + E(p_2) + \frac{\beta_1}{M} E(p_1)E(p_2) + \frac{\beta_2}{M}\vec{p}_1\vec{p}_2 - \\
& \quad - E(p_3) - E(p_4) - \frac{\beta_1}{M}E(p_3)E(p_4) - \frac{\beta_2}{M}\vec{p}_3\vec{p}_4 \Bigg) + \\
& \quad + \sum_{i=x,y,z} \lambda_i \Big(p_{i,1} + p_{i,2} + \frac{\gamma_1}{M}E(p_1)p_{i,2} + \frac{\gamma_2}{M}p_{i,1}E(p_2) - \\
& \quad - p_{i,3} - p_{i,4} - \frac{\gamma_1}{M}E(p_3)p_{i,4} - \frac{\gamma_2}{M}p_{i,3}E(p_4) \Big) = \\
& = h(\vec{p}_1, \vec{p}_3, \vec{p}_4, \lambda_0, \vec{\lambda})\ ,
\end{aligned} \tag{35}$$

con $\vec{\lambda} = (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$ el vector de los multiplicadores de Lagrange. Optimizando esta función respecto de las componentes asociadas al momento de la primera partícula

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial p_{j,1}} = {} & \frac{p_{j,1}}{p_1} + \lambda_0 \left(\frac{\partial E(p_1)}{\partial p_1}\frac{p_{j,1}}{p_1} + \frac{\beta_1}{M}\frac{\partial E(p_1)}{\partial p_1}\frac{p_{j,1}}{p_1}E(p_2) + \frac{\beta_2}{M}p_{j,2} \right) + \\
& + \lambda_j \left(1 + \frac{\gamma_2}{M}E(p_2)\right) + \frac{\gamma_1}{M}\frac{\partial E(p_1)}{\partial p_1}\frac{p_{j,1}}{p_1}\sum_i \lambda_i p_{i,2} = 0\ ,
\end{aligned} \tag{36}$$

donde hemos utilizado $\frac{\partial E(p)}{\partial p_j} = \frac{\partial E(p)}{\partial p}\frac{p_j}{p}$, se obtienen tres expresiones equivalentes para λ_0, una de ellas para cada una de las componentes $p_{j,1}$:

$$1:\ \lambda_0 = -\frac{\lambda_j\left(1 + \frac{\gamma_2}{M}E(p_2)\right) + \frac{\gamma_1}{M}\frac{\partial E(p_1)}{\partial p_1}\frac{p_{j,1}}{p_1}\sum_i \lambda_i p_{i,2} + \frac{p_{j,1}}{p_1}}{\frac{\partial E(p_1)}{\partial p_1}\frac{p_{j,1}}{p_1} + \frac{\beta_1}{M}\frac{\partial E(p_1)}{\partial p_1}\frac{p_{j,1}}{p_1}E(p_2) + \frac{\beta_2}{M}p_{j,2}}\ . \tag{37}$$

El cálculo es análogo para las componentes p_j de las dos partículas finales:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial p_{j,3}} = {} & -\lambda_0 \left(\frac{\partial E(p_3)}{\partial p_3}\frac{p_{j,3}}{p_3} + \frac{\beta_1}{M}\frac{\partial E(p_3)}{\partial p_3}\frac{p_{j,3}}{p_3}E(p_4) + \frac{\beta_2}{M}p_{j,4} \right) - \\
& - \lambda_j \left(1 + \frac{\gamma_2}{M}E(p_4)\right) - \frac{\gamma_1}{M}\frac{\partial E(p_3)}{\partial p_3}\frac{p_{j,3}}{p_3}\sum_i \lambda_i p_{i,4} = 0
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial p_{j,4}} =& -\lambda_0 \left(\frac{\partial E(p_4)}{\partial p_4} \frac{p_{j,4}}{p_4} + \frac{\beta_1}{M} E(p_3) \frac{\partial E(p_4)}{\partial p_4} \frac{p_{j,4}}{p_4} + \frac{\beta_2}{M} p_{j,3} \right) - \\ & - \lambda_j \left(1 + \frac{\gamma_1}{M} E(p_3) \right) - \frac{\gamma_2}{M} \frac{\partial E(p_4)}{\partial p_4} \frac{p_{j,4}}{p_4} \sum_i \lambda_i p_{i,3} = 0 \,,\end{aligned} \tag{39}$$

de forma que se obtienen las siguientes expresiones equivalentes para λ_0:

$$3: \; \lambda_0 = - \frac{\lambda_j \left(1 + \frac{\gamma_2}{M} E(p_4)\right) + \frac{\gamma_1}{M} \frac{\partial E(p_3)}{\partial p_3} \frac{p_{j,3}}{p_3} \sum_i \lambda_i p_{i,4}}{\frac{\partial E(p_3)}{\partial p_3} \frac{p_{j,3}}{p_3} + \frac{\beta_1}{M} \frac{\partial E(p_3)}{\partial p_3} \frac{p_{j,3}}{p_3} E(p_4) + \frac{\beta_2}{M} p_{j,4}} \tag{40}$$

$$4: \; \lambda_0 = - \frac{\lambda_j \left(1 + \frac{\gamma_1}{M} E(p_3)\right) + \frac{\gamma_2}{M} \frac{\partial E(p_4)}{\partial p_4} \frac{p_{j,4}}{p_4} \sum_i \lambda_i p_{i,3}}{\frac{\partial E(p_4)}{\partial p_4} \frac{p_{j,4}}{p_4} + \frac{\beta_1}{M} E(p_3) \frac{\partial E(p_4)}{\partial p_4} \frac{p_{j,4}}{p_4} + \frac{\beta_2}{M} p_{j,3}} \,. \tag{41}$$

En el caso de las dos reacciones que nos interesan, la energía de la segunda partícula, el fotón de fondo, toma un valor muy pequeño ω, muchos órdenes de magnitud por debajo de las demás magnitudes del sistema. Además, aplicando el teorema de la función implícita, podemos conocer de forma aproximada el orden de magnitud de la derivada de la energía respecto del momento:

$$\frac{\partial E(p)}{\partial p} = - \frac{\frac{\partial}{\partial p}(C(p))}{\frac{\partial}{\partial E}(C(p))} = - \frac{-2p + 2\frac{\alpha_2}{M} E(p) p}{2E(p) + 3\frac{\alpha_1}{M} E^2(p) + \frac{\alpha_2}{M} p^2} \,. \tag{42}$$

Sabiendo que los coeficientes que parametrizan las correcciones a la relación de dispersión no deben ser mucho mayores que la unidad, podemos concluir que $\frac{\partial E(p)}{\partial p}$ es aproximadamente de orden unidad.

De esta forma, y llevando a cabo las aproximaciones propias del régimen de energías que estamos considerando, $\omega \ll m \ll p \ll M$, la expresión de λ_0 para la primera partícula se simplifica de la siguiente manera:

$$1: \; \lambda_0 \approx - \frac{\lambda_j + \frac{p_{j,1}}{p_1}}{\frac{\partial E(p_1)}{\partial p_1} \frac{p_{j,1}}{p_1}} \,. \tag{43}$$

De esta ecuación se extrae una importante relación:

$$\frac{\lambda_j}{p_{j,1}} = - \frac{\lambda_0}{p_1} \frac{\partial E(p_1)}{\partial p_1} - \frac{1}{p_1} \,, \qquad \forall j = x, y, z \,, \tag{44}$$

que, de nuevo, no es sino una relación de proporcionalidad entre $\vec{p}_1$ y $\vec{\lambda}$.

Para el caso de las partículas salientes, el procedimiento para extraer una relación entre $\vec{\lambda}$ y las componentes del momento es más complicado. Sin embargo, se puede simplificar si consideramos que el ratio entre los momentos de dichas partículas es el mismo que el ya calculado en SR; es decir,

$$\frac{p_3}{p_4} = \frac{m_3}{m_4} \,. \tag{45}$$

Este argumento es válido cuando la relación de dispersión modificada es un desarrollo en serie a primer orden en $1/M$ (como es el caso de los modelos de DSR que estamos considerando), o cuando se sigue la ley de composición energía-momento clásica (como es el caso de violación de invariancia de Lorentz). De esta forma, la relación $\frac{\lambda_j}{p_j}$ para las partículas finales queda:

$$3: \; \frac{\lambda_j}{p_{j,3}} = - \frac{\lambda_0 \left(\frac{\partial E(p_3)}{\partial p_3} \frac{1}{p_3} + \frac{\beta_1}{M} \frac{\partial E(p_3)}{\partial p_3} \frac{1}{p_3} E(p_4) + \frac{\beta_2}{M} \frac{m_4}{m_3} \right) + \frac{\gamma_1}{M} \frac{\partial E(p_3)}{\partial p_3} \frac{1}{p_3} \sum_i \lambda_i p_{i,4}}{1 + \frac{\gamma_2}{M} E(p_4)} \,, \qquad \forall j \,, \tag{46}$$

$$4: \frac{\lambda_j}{p_{j,4}} = -\frac{\lambda_0 \left(\frac{\partial E(p_4)}{\partial p_4} \frac{1}{p_4} + \frac{\beta_1}{M} E(p_3) \frac{\partial E(p_4)}{\partial p_4} \frac{1}{p_4} + \frac{\beta_2}{M} \frac{m_3}{m_4} \right) + \frac{\gamma_2}{M} \frac{\partial E(p_4)}{\partial p_4} \frac{1}{p_4} \sum_i \lambda_i p_{i,3}}{1 + \frac{\gamma_1}{M} E(p_3)} , \qquad \forall j , \tag{47}$$

por lo que, como ocurría en SR, la configuración que minimiza la energía del sistema es aquella para la que el movimiento de las cuatro partículas se produce en una sola dirección. Suponiendo una relación de dispersión universal, este argumento es válido tanto para el proceso de producción de pares como para el de producción de piones. Dado que en el límite $M \to \infty$ se recuperan las leyes de Relatividad Especial, y en esta teoría la colisión entre el fotón y la partícula incidente es frontal, esta característica se da también bajo una desviación de invariancia de Lorentz; de lo contrario, se produciría una discontinuidad al pasar del caso de violación (o deformación) al caso clásico.

Solo nos queda aplicar las leyes de conservación para obtener las ecuaciones del momento umbral para cada una de las teorías ligadas a una desviación de Relatividad Especial.

4.2.1. Violación de Lorentz

En el marco de esta teoría, se mantienen las leyes de composición clásicas, por lo que

$$\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0 .$$

Además, la relación de dispersión viene dada por las ecuaciones (5) y (6), de forma que podemos sustituir estas expresiones en $E(p)$ (separando las correcciones en primer y segundo orden) en las ecuaciones de conservación energía-momento. Utilizaremos la aproximación

$$\begin{aligned} I_\pm : E = p \sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2} \pm \frac{p}{M}} \approx \left(p + \frac{m^2}{2p} \pm \frac{p^2}{2M} \right) , \\ II_\pm : E = p \sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2} \pm \frac{p^2}{M^2}} \approx \left(p + \frac{m^2}{2p} \pm \frac{p^3}{2M^2} \right) , \end{aligned} \tag{48}$$

válida para el régimen de energías que estamos considerando. Veamos cada una de las dos reacciones por separado.

Producción de pares

Tal y como hemos razonado a la hora de identificar la configuración del sistema que minimiza la energía del proceso, se puede tomar el mismo ratio entre p_3 y p_4 que se tenía en la teoría de SR. En el caso de la reacción $\gamma\gamma \to e^+e^-$, para la que las partículas finales tienen la misma masa, se tiene que

$$\vec{p}_+ = \vec{p}_- \equiv \vec{p}_e . \tag{49}$$

Ahora, basta con aplicar la ley de conservación del momento para obtener una relación entre los momentos

$$p_{th} - \omega = 2p_e , \tag{50}$$

y la ley de conservación de la energía para calcular la energía umbral. De esta manera:

$$\begin{aligned} I_{\pm}: E_{th} + \omega = 2E_e \implies \\ p_{th} \pm \frac{p_{th}^2}{2M} + \omega = 2\left(p_e + \frac{m_e^2}{2p_e} \pm \frac{p_e^2}{2M}\right) \approx p_{th} - \omega + \frac{2m_e^2}{p_{th}} \pm \frac{p_{th}^2}{4M} \implies \\ \pm \frac{p_{th}^3}{8Mm_e^2} + \frac{p_{th}\omega}{m_e^2} - 1 = 0 \ , \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} II_{\pm}: E_{th} + \omega = 2E_e \implies \\ p_{th} \pm \frac{p_{th}^3}{2M^2} + \omega = 2\left(p_e + \frac{m_e^2}{2p_e} \pm \frac{p_e^3}{2M^2}\right) \approx p_{th} - \omega + \frac{2m_e^2}{p_{th}} \pm \frac{p_{th}^3}{8M^2} \implies \\ \pm \frac{3p_{th}^4}{16M^2m_e^2} + \frac{p_{th}\omega}{m_e^2} - 1 = 0 \ , \end{aligned} \tag{52}$$

donde se ha utilizado $2p_e \approx p_\gamma$ en los términos proporcionales al cuadrado de la masa o al inverso de la escala de Planck, para los que el error cometido en la aproximación, ω, es despreciable. Estas ecuaciones se pueden condensar de la siguiente manera:

$$I_{\pm}: \ \pm\alpha_I x^3 + x - 1 = 0 \ , \tag{53}$$

$$II_{\pm}: \ \pm\alpha_{II} x^4 + x - 1 = 0 \ , \tag{54}$$

donde $x = \frac{p_{th}}{p_0}$ y $p_0 = \frac{m_e^2}{\omega}$ es el límite para $M \to \infty$, y los coeficientes α vienen dados por

$$\alpha_I = \frac{p_0^3}{8m_e^2 M} \ , \qquad \alpha_{II} = \frac{3p_0^4}{16m_e^2 M^2} \ . \tag{55}$$

El valor de p_{th} que satisfaga las ecuaciones (51) y (52) es el mínimo valor del momento del fotón incidente para que se produzca la reacción, y por tanto con él se puede obtener la energía umbral. Vemos que las ecuaciones son las mismas que las del caso SR, más un término adicional procedente de las correcciones a la escala de Planck.

Fotoproducción de piones

El proceso $p\gamma \to p\pi$ es de especial relevancia cuando se estudian los efectos que produce una desviación de Relatividad Especial en el límite de una reacción. Ya hemos comentado que en el espectro de rayos cósmicos detectado en la Tierra se produce una acumulación de protones (de nuevo, si no se incluyen los efectos derivados de la expansión del Universo), el corte GZK. En un escenario de violación de invariancia de Lorentz como el que estamos considerando, el valor de este límite a la energía se modifica, por lo que el corte GZK resulta de gran importancia a la hora de establecer restricciones a esta teoría.

El proceso de fotoproducción de piones se nos vuelve a presentar más complicado que el de producción de pares, como ya vimos en el caso de invariancia de Lorentz: la masa de las partículas resultantes de la reacción no es la misma. Tomar el mismo ratio entre los momentos finales que el de la teoría SR (ecuación (31)) se traduce en una relación entre el momento de la partícula incidente y el del pion resultante del tipo (32). De esta manera, y utilizando la aproximación (48), la ecuación de conservación de la energía queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&I_{\pm}: E_{th} + \omega = E_p + E_\pi \implies \\
&\quad p_{th} + \frac{m_p^2}{2p_{th}} \pm \frac{p_{th}^2}{2M} + \omega = \frac{m_p}{m_\pi}p_\pi + \frac{m_p m_\pi}{2p_\pi} \pm \frac{m_p^2}{m_\pi^2}\frac{p_\pi^2}{2M} + p_\pi + \frac{m_\pi^2}{2p_\pi} \pm \frac{p_\pi^2}{2M} \approx \\
&\quad \approx p_{th} - \omega + \frac{(m_\pi + m_p)^2}{2p_{th}} \pm \frac{p_{th}^2}{2M}\frac{m_\pi^2 + m_p^2}{(m_\pi + m_p)^2} \implies \\
&\quad \pm \frac{2m_\pi m_p}{M(m_\pi + m_p)^2(m_\pi^2 + 2m_\pi m_p)}\, p_{th}^3 + \frac{4\omega}{m_\pi^2 + 2m_\pi m_p}\, p_{th} - 1 = 0 \, ,
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
&II_{\pm}: E_{th} + \omega = E_p + E_\pi \implies \\
&\quad p_{th} + \frac{m_p^2}{2p_{th}} \pm \frac{p_{th}^3}{2M^2} + \omega = \frac{m_p}{m_\pi}p_\pi + \frac{m_p m_\pi}{2p_\pi} \pm \frac{m_p^3}{m_\pi^3}\frac{p_\pi^3}{2M^2} + p_\pi + \frac{m_\pi^2}{2p_\pi} \pm \frac{p_\pi^3}{2M^2} \approx \\
&\quad \approx p_{th} - \omega + \frac{(m_\pi + m_p)^2}{2p_{th}} \pm \frac{p_{th}^3}{2M^2}\frac{m_\pi^3 + m_p^3}{(m_\pi + m_p)^3} \implies \\
&\quad \pm \frac{3m_\pi m_p}{M^2(m_\pi^2 + 2m_\pi m_p)(m_\pi + m_p)^2}\, p_{th}^4 + \frac{4\omega}{m_\pi^2 + 2m_\pi m_p}\, p_{th} - 1 = 0 \, ,
\end{aligned} \tag{57}$$

donde se ha utilizado $p_\pi \approx \frac{m_\pi p_{th}}{m_\pi + m_p}$ en los términos proporcionales al cuadrado de la masa o al inverso de la escala de Planck, para los que el error es despreciable. Las ecuaciones se pueden reescribir como

$$I_{\pm}: \ \pm\alpha_I x^3 + x - 1 = 0 \, , \tag{58}$$

$$II_{\pm}: \ \pm\alpha_{II} x^4 + x - 1 = 0 \, , \tag{59}$$

donde $x = \frac{p_{th}}{p_0}$ y $p_0 = \frac{m_\pi^2 + 2m_\pi m_p}{4\omega}$ es el límite para $M \to \infty$, y los coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned}
\alpha_I &= \frac{2p_0^3}{(m_\pi^2 + 2m_\pi m_p)M}\frac{m_\pi m_p}{(m_\pi + m_p)^2} \, , \\
\alpha_{II} &= \frac{3p_0^4}{(m_\pi^2 + 2m_\pi m_p)M^2}\frac{m_\pi m_p}{(m_\pi + m_p)^2} \, .
\end{aligned} \tag{60}$$

Con estas ecuaciones se obtiene el valor límite del momento del protón de rayos cósmicos para que se pueda producir la reacción; de esta manera, sustituyendo dicho valor en las relaciones de dispersión, en primer y en segundo orden, se lleva a la energía umbral del proceso de producción de piones en violación de Lorentz. De nuevo, las ecuaciones para obtener p_{th} son las mismas que para el caso de SR, pero con un término adicional dependiente de la escala de Planck.

4.2.2. Deformación de Lorentz

El caso de deformación de simetría de Lorentz es distinto del contemplado en violación de invariancia de Lorentz; la existencia de un principio relativista provoca que el límite de una reacción no pueda depender del observador. Además, el cálculo de dicho límite se complica ya que no es solo la relación de dispersión la que debe ser modificada sino también las leyes de composición. Llevaremos a cabo el cálculo de la energía umbral para un modelo genérico de DSR, con unos coeficientes $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sin determinar. La expresión para $E(p)$ se obtiene de sustituir E en la ecuación (11). Llevando a cabo las aproximaciones correspondientes al régimen de energías en el que estamos trabajando, nos queda una relación de dispersión de la forma

$$E(p) \approx p + \frac{m^2}{2p} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2M}\, p^2 \,. \tag{61}$$

Las leyes de composición energía-momento son las dadas en las ecuaciones (14) y (15). Veremos cómo las correcciones derivadas de una modificación de la relación de dispersión se cancelan con aquellas derivadas de las nuevas leyes de conservación, por lo que los términos adicionales en la ecuación de la energía umbral, que se podían observar en el caso de violación de Lorentz, desaparecen en la teoría de DSR.

Analicemos, de nuevo, cada una de las dos reacciones por separado.

Producción de pares

Al igual que cuando estudiamos la reacción $\gamma\gamma \to e^+e^-$ en la teoría de violación de invariancia de Lorentz, en DSR podemos también aprovecharnos del hecho de que las dos partículas finales tengan la misma masa: los momentos del electrón y del positrón son iguales. De este modo, aplicando la ley de conservación del momento, podemos obtener una relación entre p_e y p_{th}, el valor límite del momento del fotón incidente:

$$\begin{aligned} &p_{th} - \omega - \frac{\gamma_1}{M}\, E(p_{th})\omega + \frac{\gamma_2}{M}\, p_{th}\omega = 2p_e + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{M}\, E(p_e)p_e \implies \\ &p_e \approx \frac{p_{th} - \omega}{2} - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{8M}\, p_{th}^2 \,. \end{aligned} \tag{62}$$

Sustituyendo este valor en la ley de conservación de la energía, llegamos al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} &E(p_{th}) + \omega + \frac{\beta_1}{M}\, E(p_{th})\omega - \frac{\beta_2}{M}\, p_{th}\omega = 2E(p_e) + \frac{\beta_1}{M}\, E^2(p_e) + \frac{\beta_2}{M} p_e^2 \implies \\ &\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2}{8M\omega}\, p_{th}^2 + \frac{m_e^2}{p_{th}\omega} - 1 = 0 \,. \end{aligned} \tag{63}$$

Este resultado se ha obtenido suponiendo que la escala de Planck pertenece a un régimen de energías muy superior a las de las partículas que intervienen en el proceso, de forma que el cuadrado de la masa del electrón-positrón y la energía del fotón de fondo son despreciables frente a M ($\frac{m_e^2}{M} \ll 1$, $\frac{\omega}{M} \ll 1$). El cálculo completo puede verse en el código de Mathematica adjunto en el anexo A.

Esta es la ecuación del límite para el caso de producción de pares en la teoría DSR; a partir de p_{th} podemos calcular el valor de la energía umbral. Vemos cómo, tal y como ocurría en violación de Lorentz, la ecuación es la misma que teníamos en Relatividad Especial, más un término adicional que recoge los efectos derivados de la escala de Planck. Sin embargo, se observa también un importante resultado: si se exige que los coeficientes $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ cumplan la regla de oro mencionada en la sección anterior, (13), necesaria para que se satisfaga el principio relativista, el término proporcional al inverso de la escala de Planck se anula; esto es, para la teoría de DSR, las correcciones derivadas de una deformación de la simetría de Lorentz desaparecen, y la energía umbral adquiere el mismo valor que en el caso de Relatividad Especial clásica. En otras palabras, los efectos derivados de una modificación de la relación de dispersión se cancelan con los derivados de las nuevas leyes de conservación, lo que provoca que el valor límite de la reacción sea indistinguible del que ya teníamos en la teoría de SR. Veamos cómo esta característica no es única del proceso de producción de pares mediante el análisis de la reacción de fotoproducción de piones.

Fotoproducción de piones

Las teoría de DSR y la modificación de las leyes de conservación, aplicadas al proceso $p\gamma \to p\pi$, también desembocan en un resultado distinto para el corte GZK respecto del que hemos obtenido en violación de Lorentz. La ecuación de conservación del momento ofrece la siguiente relación entre el momento del protón de rayos cósmicos y el del pion resultante de la reacción:

$$\begin{aligned} &p_{th} - \omega - \frac{\gamma_1}{M}\, E(p_{th})\omega + \frac{\gamma_2}{M}\, p_{th}\omega = p_p + p_\pi + \frac{\gamma_1}{M} E(p_p)p_\pi + \frac{\gamma_2}{M} p_p E(p_\pi) \implies \\ &p_\pi \approx \frac{m_\pi}{m_p + m_\pi}(p_{th} - \omega) - \frac{m_p m_\pi^2(\gamma_1 + \gamma_2)}{M(m_p + m_\pi)^3}\, p_{th}^2 \ . \end{aligned} \tag{64}$$

La ecuación de conservación de la energía se escribe pues de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &E(p_{th}) + \omega + \frac{\beta_1}{M}\, E(p_{th})\omega - \frac{\beta_2}{M}\, p_{th}\omega = E(p_p) + E(p_\pi) + \frac{\beta_1}{M}\, E(p_p)E(p_\pi) + \frac{\beta_2}{M} p_p p_\pi \implies \\ &\frac{2m_p m_\pi(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2)}{M(m_p + m_\pi)^2(2m_p m_\pi + m_\pi^2)}\, p_{th}^3 - \frac{4\omega}{2m_p m_\pi + m_\pi^2}\, p_{th} + 1 = 0 \ . \end{aligned} \tag{65}$$

Este resultado es válido para una escala de Planck perteneciente a un régimen de energías muy superior al de las partículas que intervienen en la reacción ($\frac{m^2}{M} \ll 1$, $\frac{\omega}{M} \ll 1$). El código de Mathematica con el cálculo completo queda adjunto en el anexo B.

Al igual que para el proceso de producción de pares, la ecuación de p_{th} es la misma que en SR junto con un término adicional en el que se ponen de manifiesto los efectos derivados de Gravedad Cuántica. Y también, tal y como ocurría en el anterior caso, dicho término se anula cuando exigimos que los coeficientes cumplan la regla de oro (13); las modificaciones a las leyes de composición compensan las de la relación de dispersión, por lo que no hay diferencia entre el valor del corte GZK en el marco de la teoría de Relatividad Especial clásica y el obtenido para DSR, sin importar el modelo que estemos considerando.

Esta característica limita mucho los efectos procedentes de una deformación de la simetría de Lorentz que se pueden observar desde la Tierra en experimentos de rayos cósmicos. Así como en violación de invariancia de Lorentz, la ausencia de un principio relativista no solo hace que los umbrales de ciertas reacciones varíen respecto a su valor esperado en una teoría clásica (como es el caso de los procesos de producción de pares y fotoproducción de piones), sino que también provoca que algunas reacciones, prohibidas en SR, pasen a estar permitidas (como es el caso de ciertos procesos de decaimiento de partículas), en deformación de simetría de Lorentz forzar la equivalencia entre observadores inerciales mediante la modificación de las leyes de conservación implica que estos efectos se vuelvan despreciables.

Aquí se nos presenta un problema: aun suponiendo que se conociesen por completo tanto las características de la fuente como la composición de los rayos cósmicos, así como todas las variables necesarias para caracterizar por completo el espectro de rayos cósmicos detectado por la Tierra, resultaría casi imposible imponer límites a la teoría de DSR y distinguirla de la relatividad ordinaria. Esto nos lleva a pensar que quizás estos experimentos no sean suficientes para desarrollar un modelo sólido para esta teoría, y nos abre la puerta a considerar otro tipo de pruebas astrofísicas, como el retraso en el tiempo de vuelo de los fotones, en el que, como ya comentamos brevemente en la sección introductoria de este trabajo, la distancia de la fuente al detector es tan grande que provoca un efecto de amplificación para los efectos derivados de una deformación de Lorentz. Sin embargo, incluso para esta fenomenología, existen varios modelos de DSR que postulan que es posible ir más allá de SR sin que exista un retraso observable en el vuelo de fotones [11]. ¿Cómo entonces es posible distinguir entre deformación de invariancia de Lorentz y Relatividad Especial?

La solución a este problema puede ser que la escala que caracteriza esta teoría no sea la masa de Planck, sino una mucho menor, muchos órdenes de magnitud por debajo de M. La elección de M en DSR no se basa en argumentos teóricos sólidos, ya que la teoría de Gravedad Cuántica es todavía desconocida, sino en que la masa de Planck es la única combinación posible con dimensiones de masa que se puede construir a partir de las tres constantes fundamentales $\hbar$, c, G. La deducción de M, tan pronto como se conozcan más detalles de la teoría de QG, podría demostrar que este argumento no es válido, generando de esta manera una escala de DSR muy por debajo de la masa de Planck. Esto traería consecuencias importantes en los resultados fenomenológicos, y en concreto en los experimentos que hemos analizado: en el cálculo para obtener la ecuación de la energía umbral, los términos proporcionales al cuadrado de las masas no serían despreciables frente a la escala, por lo que en la ecuación (65) quedaría un término adicional proporcional al inverso de la nueva escala. Este término no se anularía al exigir que los coeficientes α, β, γ cumpliesen la regla de oro; esto es, en el valor de la energía umbral, existiría una corrección derivada de DSR que no existe si trabajamos con la masa de Planck.

Este resultado es muy importante, pues implica que, una vez conocidas por completo las fuentes y la composición de rayos cósmicos, los experimentos vistos hasta ahora no solo permitirían distinguir entre relatividad ordinaria y DSR, sino que harían posible imponer fuertes restricciones a esta teoría y, por lo tanto, contribuirían a su caracterización. La física de rayos cósmicos puede de esta manera allanar el camino que nos permita explorar la física más allá de Relatividad Especial.

5. Conclusiones

Nuestro objetivo con este trabajo ha sido buscar, en la física de rayos cósmicos, y en concreto en los procesos de colisión de partículas, posibles efectos derivados de ruptura de invariancia de Lorentz en el valor teórico de la energía umbral de una reacción, con la finalidad de imponer límites a las dos teorías que trabajan en el marco de una desviación de Relatividad Especial derivada de la escala de Planck: violación y deformación de invariancia de Lorentz. La primera de ellas postula una ruptura completa de la simetría de Lorentz, mientras que la segunda simplemente la deforma, manteniendo así la equivalencia entre observadores inerciales. Hemos podido comprobar que, como consecuencia de esta diferencia (ausencia o no de principio relativista), la fenomenología de rayos cósmicos es completamente distinta en ambos casos; en el primero se produce una modificación considerable en el valor del umbral, mientras que en el segundo los efectos son tan pequeños que pueden despreciarse. Este resultado implica que la teoría de DSR es indistinguible de SR, al menos para los experimentos con los que se trabaja actualmente.

Esto nos ha llevado a plantear una importante conclusión: la escala en la teoría de DSR puede no ser la masa de Planck, que hemos utilizado a lo largo de este trabajo para obtener los valores de la energía umbral, sino una mucho más pequeña. Tomar una escala muchos órdenes de magnitud por debajo de la masa de Planck supone que algunos términos en la ecuación de la energía umbral, que hasta ahora eran despreciables, dejen de serlo y se tengan, por lo tanto, correcciones derivadas de una deformación de la simetría de Lorentz.

El problema queda abierto a la espera de que se clarifiquen los problemas que presenta el análisis de los experimentos actuales: el desconocimiento de las fuentes y su distancia a los detectores, y de la composición de rayos cósmicos, grandes fuentes de incertidumbre a la hora de estudiar el espectro que vemos en la Tierra. Una vez se alcance un mayor entendimiento de estos factores, estaremos en disposición de empezar a construir una teoría sólida en la física más allá de Relatividad Especial.

6. Bibliografía

[1] Roberto Aloisio y col. «Probing the structure of space-time with cosmic rays». En: *Physical Review D* 62.5 (2000), pág. 053010.

[2] Jerzy Kowalski-Glikman. «Introduction to doubly special relativity». En: *Planck Scale Effects in Astrophysics and Cosmology*. Springer, 2005, págs. 131-159.

[3] Jerzy Kowalski-Glikman y Sebastian Nowak. «Non-commutative space–time of doubly special relativity theories». En: *International Journal of Modern Physics D* 12.02 (2003), págs. 299-315.

[4] TG Pavlopoulos. «Breakdown of Lorentz invariance». En: *Physical Review* 159.5 (1967), pág. 1106.

[5] Holger Bech Nielsen e I Picek. «Lorentz non-invariance». En: *Nuclear Physics B* 211.2 (1983), págs. 269-296.

[6] Giovanni Amelino-Camelia y Tsvi Piran. «Planck-scale deformation of Lorentz symmetry as a solution to the ultrahigh energy cosmic ray and the TeV-photon paradoxes». En: *Physical Review D* 64.3 (2001), pág. 036005.

[7] G Amelino-Camelia. «Anything beyond special relativity?» En: *Special Relativity*. Springer, 2006, págs. 227-278.

[8] Luis A Anchordoqui. «Ultra-high-energy cosmic rays». En: *Physics Reports* (2019).

[9] David Mattingly. «Modern tests of Lorentz invariance». En: *Living Reviews in relativity* 8.1 (2005), pág. 5.

[10] Giovanni Amelino-Camelia. «Quantum-spacetime phenomenology». En: *Living Reviews in Relativity* 16.1 (2013), pág. 5.

[11] JM Carmona, JL Cortes y JJ Relancio. «Does a deformation of special relativity imply energy dependent photon time delays?» En: *Classical and Quantum Gravity* 35.2 (2017), pág. 025014.

[12] M al Takeda y col. «Extension of the cosmic-ray energy spectrum beyond the predicted Greisen-Zatsepin-Kuz'min cutoff». En: *Physical Review Letters* 81.6 (1998), pág. 1163.

[13] J Abraham y col. «Measurement of the energy spectrum of cosmic rays above 1018 eV using the Pierre Auger Observatory». En: *Physics Letters B* 685.4-5 (2010), págs. 239-246.

[14] José Manuel Carmona, José Luis Cortés y Flavio Mercati. «Relativistic kinematics beyond special relativity». En: *Physical Review D* 86.8 (2012), pág. 084032.

[15] NR Bruno, G Amelino-Camelia y J Kowalski-Glikman. «Deformed boost transformations that saturate at the Planck scale». En: *Physics Letters B* 522.1-2 (2001), págs. 133-138.