# Signaturas de sistemas
# &
# aplicaciones en fiabilidad

**Belén Aguayo Bueno**
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directora del trabajo: Carmen Sangüesa Lafuente
26 de junio de 2020

# Resumen


Reliability theory is a discipline which studies systems depending on their failure. The aim of this document is to study systems made up of some components and how the failure of each component causes the system failure.

The content is divided into five chapters. We begin the document with a review, Chapter 1: ‘General notions’. In this section we are going to study the following:

- Probability spaces: The paragraph focuses on explaining the basic concept of random variables such as their definition or different functions defined in order to study them: distribution function, survival fuction... Besides, we show some attractive results about the mean that we will need in the next chapters.

- Order Statistic: We are going to focus on the definition of Order Statistic and how to calculate their distribution.

Chapter 2 represents an introduction to systems and their relationship with their components. We consider the structure function $\varphi$, which is a mapping that associates the condition of the components (working or not) with the work or the failure of a system. This function brings back the value 1 if the system works and 0 elsewhere. We will analize how the way the components are organized affects to the structure function, so we will see the most commonly used systems. Then, we consider the most important feature for designing a system: monotonicity and absence of irrelevant component. These two properties form the basis for the following definition, coherent system. The end of the chapter studies path sets and cut sets. Their properties and results provide a way to calculate the structure function. Besides, we will define the reliability of a system.

In Chapter 3 we introduce an alternative index which has the virtue of being manageable and easily interpretable, although it is less general than a structure function. Such index is called the system’s signature and it is denotes by $\mathbf{s}_\tau$. In this chapter is very important the use of order statistics. Taking into account the random variables $X_1, ..., X_n$ independently and identically distributed (i.i.d) which represesent the component lifetimes of an $n$ component coherent system with signature $\mathbf{s}$, we will study the computation of the signature vector. In addition, we go on with the concept of a mixed system. Considering the collection of all coherent systems of order $n$, one of them is selected by a random process according to a fixed and known probability.

At this stage the question of how to order the random lifetimes arises. For this reason, the Chapter 4 is based on Stochastic Orders. We will study the following orders, the relatinship between them and some results of interest. In particular, let $X$ and $Y$ be two random variables, we will see the next orders:

- Usual Stochatic Order $X \leq_{st} Y$: It is the most natural candidate for a stochastic order due to it is based on the comparison of the distribution function, i.e., $X$ is said smaller than $Y$ with respect to usual stochastic order if $F_X(t) \geq F_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

- Hazard Rate Order $X \leq_{hr} Y$: It implies that $\frac{\overline{F}_Y(t)}{\overline{F}_X(t)}$ is increasing, being $\overline{F}$ the survival function. Furthermore, we describe the Reversed Hazard rate order $X \leq_{rh} Y$ which implies that the function $\frac{F_Y(t)}{F_X(t)}$ is increasing.

- Likelihood Ratio Order $X \leq_{lr} Y$: It implies that $\frac{f_Y(t)}{f_X(t)}$ is increasing over the union of the supports of $X$ and $Y$

Finally, in the last chapter, Chapter 5, we will focus on the application of the concepts and results provided in Chapter 3 to study systems as defined in Chapter 3. We consider the problem of comparing the performance of two mixed systems. Three different scenarios will be treated, each one identifying conditions which yield increasingly stronger conclusions about the superiority of one system over another. Our treatment focuses on the three orders explained in the Chapter 4, usual order, hazard rate order and likelihood ratio order. The main part of the section is the proof the the following theorems:

- Let $\mathbf{s}_1$ and $\mathbf{s}_2$ be the signatures of the two mixed systems of order $n$, both based on components with i.i.d lifetimes with common distribution F. Let $T_1$ and $T_2$ be their respective lifetimes. If $\mathbf{s}_1 \leq_{st} \mathbf{s}_2$, then $T_1 \leq_{st} T_2$.

- Let $\mathbf{s}_1$ and $\mathbf{s}_2$ be the signatures of the two mixed systems of order $n$, both based on components with i.i.d lifetimes with common distribution F. Let $T_1$ and $T_2$ be their respective lifetimes. If $\mathbf{s}_1 \leq_{hr} \mathbf{s}_2$, then $T_1 \leq_{hr} T_2$.

- Let $\mathbf{s}_1$ and $\mathbf{s}_2$ be the signatures of the two mixed systems of order $n$, both based on components with i.i.d lifetimes with common distribution F. Let $T_1$ and $T_2$ be their respective lifetimes. If $\mathbf{s}_1 \leq_{lr} \mathbf{s}_2$, then $T_1 \leq_{lr} T_2$.

# Índice general

# Capítulo 1

# Nociones generales

A lo largo de este capítulo veremos ciertos conceptos de probabilidad, que serán necesarios para el seguimiento y comprensión del documento.

## 1.1. Espacios de probabilidad

Comenzaremos por los conceptos más generales, definiendo los diferentes tipos de funciones que usaremos, el espacio en el que están definidas y algunos resultados sobre la esperanza.

**Definición 1.** Sea $\Omega$ un conjunto. Una $\sigma$-álgebra $\mathscr{F}$ es una colección de subconjuntos de $\Omega$ tal que :

- $\emptyset \in \mathscr{F}$
- $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^C \in \mathscr{F}$
- Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $A_n \in \mathscr{F}$, para todo $n \geq 1$; se tiene $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

El par $(\Omega, \mathscr{F})$ se llama *espacio medible* o *espacio probabilizable*

**Definición 2.** Sea $(\Omega, \mathscr{F})$ un espacio medible, una *probabilidad* es una función $P : \mathscr{F} \rightarrow [0,1]$ tal que

- $P(\Omega) = 1$
- Para todo $A \in \mathscr{F}$, $P(A^C) = 1 - P(A)$
- Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $A_n \in \mathscr{F}$, para todo $n \geq 1$ y $A_j \cap A_i = \emptyset$ para todo $j \neq i$; se tiene $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

La terna $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ se llama *espacio de probabilidad*.

**Definición 3.** Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Una *variable aleatoria* X es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ para todo $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Ahora que tenemos claras las variables y dónde están definidas vamos a pasar a definir las funciones de distribución, masa de probabilidad y de densidad. Además, veremos alguna propiedad relevante de algunas de ellas.

**Definición 4.** Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria. La función $F : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ definida por $F(x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x)$ se llama *función de distribución*.

**Proposición 1.1.** *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria con función de distribución F. Se tiene*

1. *F es no decreciente*

2. *F es continua por la derecha y tiene límites a izquierda* $F(x^-) = P(X < x)$
3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
4. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

**Definición 5.** Una variable aleatoria es *discreta* si existe un conjunto de puntos $\{x_n\} \in \mathbb{R},\ n \geq 1$ tal que $P(X = x_n) > 0$ y $\sum_n P(X = x_n) = 1$. La *función masa de probabilidad* de X es $\{p_n\}$ con $p_n = P(X = x_n)$

**Definición 6.** Una variable aleatoria X con función de distribución F es (absolutamente) *continua* si existe una función integrable $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ tal que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. La función f se denomina *densidad* de X.

**Proposición 1.2.** *Sea* $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ *integrable con* $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. *Entonces f es la función de densidad de una variable aleatoria X.*

**Proposición 1.3.** *Sea X una variable aleatoria continua con densidad f. Se tiene*

1. *F es continua*
2. *Si f es continua en* $x_0$ *entonces F es derivable en* $x_0$ *y* $F'(x_0) = f(x_0)$
3. *Sea* $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, *entonces* $P(X \in A) = \int_A f(x)dx$

**Definición 7.** Sea X una variable aleatoria con función de distribución F, se define la *función de supervivencia*, $\overline{F}$, como

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

### 1.1.1. Esperanza

**Definición 8.**

- Sea X una variable aleatoria discreta con valores $\{x_n\}$ y función de masa de probabilidad $\{p_n\}$. La *esperanza de X* se define como $E(X) = \sum_n x_n p_n$ si $\sum_n |x_n| p_n < \infty$
- Sea X una variable aleatoria continua con densidad f. La *esperanza de X* se define como $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ si $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx < \infty$

En el siguiente teorema demostraremos otra forma de calcular la esperanza de una variable aleatoria $X$ .

**Teorema 1.4.** *Sea X una variable aleatoria , con esperanza finita. Tenemos que:*

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F_X(t)]dt - \int_{-\infty}^{0} F_X(t)dt$$

*Demostración.* Notar que

$$\int_0^{\infty} [1 - F_X(t)]dt = \int_0^{\infty} P(X > t)dt = \int_0^{\infty} \left( \int_t^{\infty} f(u)du \right) dt$$

donde $f(\cdot)$ es la función de densidad de la variable aleatoria de X, teniendo en cuenta el Teorema de Fubini:

$$\int_0^{\infty} [1 - F_X(t)]dt = \int_0^{\infty} \left( \int_t^{\infty} f(u)du \right) dt = \int_0^{\infty} \left( \int_0^{u} 1dt \right) f(u)du = \int_0^{\infty} u f(u)du \tag{1.1}$$

Por otro lado,

$$\int_{-\infty}^{0} F(t)dt = \int_{-\infty}^{0} P(X \leq t)dt = \int_{-\infty}^{0} \left( \int_{-\infty}^{t} f(u)du \right) dt = \int_{-\infty}^{0} \left( \int_u^{0} 1dt \right) f(u)du = -\int_{-\infty}^{0} u f(u)du \tag{1.2}$$

Por lo tanto, agrupando (1.1) y (1.2) obtenemos:

$$\int_0^{\infty} [1 - F_X(t)]dt - \int_{-\infty}^{0} F_X(t)dt = \int_0^{\infty} u f(u)du + \int_{-\infty}^{0} u f(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u)du = E(X)$$

□

## 1.2. Estadísticos Ordenados

Antes de definir estadísticos ordenados, veamos las definiciones previas de muestra aleatoria y muestra aleatoria simple.

**Definición 9.** Una *población* es un colectivo que nos interesa conocer, describir o sobre el que queremos decir algo. Por ejemplo, en este documento la población sometida a estudio serán los tiempos de vida de los componentes de un sistema.

**Definición 10.** El estudio de una población se hace, casi siempre, examinando una pequeña fracción de sus individuos, una *muestra*. El menor costo y el mejor control del proceso de obtención de los datos, aconsejan ese procedimiento, en vez del estudio exhaustivo (*censo*).

Los procesos de muestreo en los que cada miembro de la población tiene una probabilidad específica de ser incluido en la muestra son de carácter aleatorio. Y la muestra resultante será una seleción aleatoria a la que denominamos *muestra aleatoria*.

**Definición 11.** Una *muestra aleatoria simple* de tamaño $n$, de una variable aleatoria $X$ con distribución F, son $n$ variables aleatorias $(X_1,...,X_n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con distribución común F.

**Definición 12.** Dada una muestra aleatoria $\mathbf{X} = (X_1,...,X_n)$, los *estadístico de ordenados* de $\mathbf{X}$ son las variables aleatorias $X_{(i)}$ que proporcionan los valores de la muestra en orden creciente. De este modo se verifica que: $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n)}$

En el siguiente teorema vamos a ver cómo calcular la probabilidad de que estadístico de orden $i$ sea mayor que $t$. Este resultado está tomado del libro '*A first course in Order Statistics*' página 12, [1], donde también encontramos su demostración.

**Teorema 1.5.**

$$P(X_{k:n} > t) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (\overline{F}(t))^{n-j}$$

# Capítulo 2

# Sistemas coherentes

A lo largo del trabajo utilizaremos el término 'sistema' en un sentido amplio. De forma informal, nos referiremos a él como una colección de componentes que están conectados entre sí para formar un todo. Ejemplos: una radio, un automóvil, un ordenador o un teléfono móvil.
La principal característica de nuestro término 'sistema' es que funcionará o no según si sus componentes funcionan correctamente o fallan.

## 2.1. Sistemas

Para cuantificar el funcionamiento de los componentes emplearemos las siguientes definiciones.

**Definición 13.** Consideramos el *indicador* $x_i$ que nos informa del estado del componente $i$-ésimo de forma que

$$x_i = \begin{cases} 1 & si\ el\ componente\ i\ esimo\ funciona \\ 0 & si\ el\ componente\ i\ esimo\ no\ funciona \end{cases}$$

Para un sistema de $n$ componentes, esta idea da lugar a la noción de *vector de estado*.

**Definición 14.** El vector generado por los indicadores de todos los componentes de un sistema se denomina *vector de estado*.

Para un sistema de $n$ componentes, el vector de estado sería $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \in \{0,1\}^n$ donde $x_i$ nos informa del estado del componente $i$-ésimo, para cada $i = 1, 2, ..., n$.

El fin es cuantificar si el sistema funciona o no dependiendo del estado de los componentes, para ello definimos la siguiente función.

**Definición 15.** Considerar el espacio $\{0,1\}^n$ de todos los vectores de estado posibles de un sistema de $n$-componentes. La *función de estructura* asocia los vectores de estado para los que el sistema funciona con el valor 1 y los vectores de estado para los que el sistema falla con el valor 0.

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \{0,1\}^n & \to & \{0,1\} \\ & \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) & \mapsto & \varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & si\ el\ sistema\ funciona \\ 0 & si\ el\ sistema\ no\ funciona \end{cases} \end{array}$$

**Definición 16.** Al número de componentes del sistema se le denomina *orden del sistema*.

### 2.1.1. Tipos de sistemas

Con el fin de aclarar este concepto, vamos a estudiar los distintos tipos de sistemas más comunes y sus funciones estructura.

**Sistemas $k$ de $n$**

Son aquellos sistemas que funcionan cuando al menos $k$ de sus componentes funcionan correctamente. La función estructura de un sistema $k$ de $n$ siguiendo esta definición es:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & si \quad \sum_{i=1}^{n} x_i < k \\ \\ 1 & si \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \end{cases}$$

**Ejemplo 1.** Veamos algunos sencillos:
Sistema 1 de 2: Los riñones u ojos de humanos.
Sistema 2 de 2: Pilas de un mando de televisión.
Sistema 2 de 4: Un avión con cuatro motores que vuela si, al menos, dos de sus motores funcionan .

**Sistemas en serie:**

El sistema funciona si cada componente funciona correctamente, por ello, también podemos definirlos como sistemas $n$ de $n$. Su función estructura viene dada por:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i = \min_{1\leq i\leq n} x_i.$$

**Ejemplo 2.** Un sistema en serie cotidiano es, por ejemplo, el equipo de un coche formado por motor, embrague, transmisión y rueda. Otro ejemplo, podría ser nuestro sistema cardiovascular, formado por el corazón, las arterias y las venas.

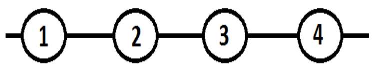


Figura 2.1: Representación de un sistema en serie de orden 4.

**Sistemas en paralelo:**

El sistema funciona si, al menos, funciona un componente, por ello, también podemos definirlos como sistemas 1 de $n$. Su función estructura viene dada por:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) = \max_{1\leq i\leq n} x_i.$$

**Ejemplo 3.** Un ejemplo fácil de sistema en paralelo puede ser nuestros pulmones, dado que podemos vivir con un único pulmón.

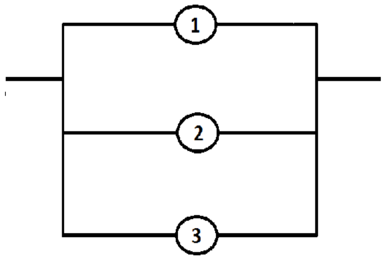


Figura 2.2: Representación de un sistema en paralelo de orden 3.

**Sistemas híbridos:**

Son aquellos sistemas resultado de combinar los sistemas en serie y en paralelo; son más complejos ya que combinan las propiedades de ambos. Por tanto, la función estructura también tendrá elementos de ambos. Por ejemplo, la función estructura $\varphi(\mathbf{x}) = x_1[1-(1-x_2)(1-x_3x_4)]$ corresponde al sistema de la Figura 2.3.

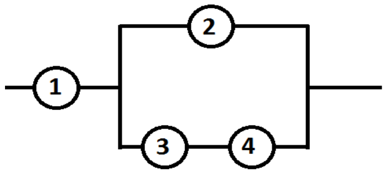


Figura 2.3: Representacion de un sistema híbrido.

## 2.2. Clasificación de sistemas

La utilidad de las funciones de estructura será la de clasificar los sistemas. Por ello, en este apartado vamos a estudiar sus características. Para diseñar un sistema deberíamos centrarnos primero en la influencia de los componentes. Por ejemplo, podemos encontrarnos con un componente cuyo funcionamiento no influya en el sistema. Es decir:

**Definición 17.** Sea $(x_1,...,x_{i-1},a,x_{i+1}...,x_n)$ un vector de estado de un sistema arbitrario de orden $n$ tal que $x_i = a \in \{0,1\}$. El componente $i$ se dice *irrelevante* si la función estructura del sistema $\varphi$ cumple: $\varphi(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1}...,x_n) = \varphi(x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1}...,x_n)$ para todos los posibles valores de $(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1}...,x_n) \in \{0,1\}^{n-1}$

Por lo tanto, si un sistema contiene un componente irrelevante, este podría ser eliminado, simplificándo y disminuyendo el orden del sistema y, sin embargo, producir el mismo resultado.
Otra característica a tener en cuenta es que el fallo de un componente propicie el fallo del sistema. A medida que empiezan a fallar los componentes, el sistema puede seguir funcionando por un tiempo, pero si el funcionamiento de un componente demostrase ser crítico para el funcionamiento del sistema, arreglando dicho componente resolveríamos el problema. En ningún caso un sistema se estropearía. Ello propicia la siguiente definición.

**Definición 18.** Un sistema se denomina *monótono* cuando al arreglar un componente no empeora el sistema. Su función de estructura cumple que $\varphi(\mathbf{x}) \leq \varphi(\mathbf{y})$ si $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, donde las desigualdades de los vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ se aplica al componente deseado.

Con estas dos características esenciales tenemos la base de la siguiente definición:

**Definición 19.** Decimos que un sistema es *coherente* si cada componente es relevante y su función estructura es monótona.

A pesar de que la definición de coherencia restringe el número de funciones posibles de $\{0,1\}^n$ en $\{0,1\}$, tenemos que el número $Z(n)$ de sistemas coherentes crece exponencialmente con $n$. Este hecho se debe a que un nuevo componente se puede añadir en serie o en paralelo, duplicando el número de sistemas coherentes.

## 2.3. Sistemas coherentes

A lo largo de esta sección vamos a centrarnos en estudiar en profundidad los sistemas coherentes de orden $n$. Por ello, vamos a centrarnos en la influencia de las agrupaciones de componentes en el funcionamiento del sistema, la relación dual entre sistemas y la fiabilidad.

### 2.3.1. Conjuntos de camino y de corte

**Definición 20.** Un conjunto de componentes $P$ se denomina *conjunto camino* cuando el sistema funciona siempre que todos los componentes en el conjunto $P$ funcionan.

**Propiedades de los conjuntos camino**

1. El conjunto de todos los componentes de un sistema es un conjunto camino.
2. Sea $B$ un conjunto y $A$ un subconjunto propio de $B$ tal que $A$ es un conjunto camino. Entonces $B$ es un conjunto camino.

**Definición 21.** Los conjuntos camino que no contienen subconjuntos propios de camino se llaman *conjunto de camino mínimo*. Se denotan como $P_1, P_2 ..., P_r$.

**Propiedades de subconjuntos de camino mínimo**

1. Ningún conjunto de camino mínimo es subconjunto propio de otro.
2. La unión algebráica de todos los conjuntos de camino mínimo es el conjunto de todos los componentes del sistema.

**Ejemplo 4.** Tomando un sistema general de orden 4 , veamos los conjuntos de camino mínimo dependiendo del tipo de sistema:

- Sistema de orden 4 en serie: $\{1,2,3,4\}$
- Sistema 3 de 4: $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$
- Sistema 2 de 4: $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$
- Sistema de orden 4 en paralelo: $\{1\}$, $\{2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$
- Sistema híbrido, Figura 2.3: $\{1,2\}$ y $\{1,3,4\}$. Notar que el componente 1 es imprescindible para el funcionamiento del sistema y, por ello, aparece en ambos conjuntos.

Es posible caracterizar todos los sistemas coherentes de un orden dado con las propiedades anteriores de conjuntos de camino mínimo. Notar que en la segunda propiedad, todo componente es elemento de, al menos, un conjunto de camino mínimo y, por tanto, cada componente es relevante. La monotonía de un sistema en función de los conjuntos camino puede ser argumentada de la siguiente manera.
Si el componente $k$ no está funcionando y el sistema tampoco, entonces la función estructura $\varphi$ permanecerá igual a 0 o incrementará a 1 cuando el componente $k$ sea reemplazado. Por otro lado, si el sistema funciona, hay un conjunto de camino mínimo $P$ cuyos componentes están en funcionamiento. Puesto que cualquier conjunto de componentes que contenga a $P$ también será un conjunto de camino, se sigue que el conjunto $\{P \cup \{k\}\}$ es un conjunto de camino y que la función estructura del sistema permanecerá igual a 1 cuando el componente $k$ sea reemplazado por un componente que funcione.
Por otro lado, hay una relación entre el conjunto camino y el conjunto de componentes cuyo fallo garantiza el fallo del sistema. Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 22.** Un conjunto de componentes $C$ se llama *conjunto de corte* si el sistema falla siempre que todos los componentes del conjunto $C$ fallan.

**Definición 23.** Un conjunto de corte se llama *mínimo* si no tiene subconjuntos propios que son también conjuntos de corte.

**Propiedades de los conjuntos de corte mínimo**

1. Ningún conjunto de corte mínimo es subconjunto propio de otro.
2. La unión algebráica de todos los conjuntos de corte mínimo es el conjunto de todos los componentes del sistema.

**Ejemplo 5.** Tomando un sistema general de orden 4 , veamos los conjuntos de corte mínimo dependiendo del tipo de sistema:

- Sistema de orden 4 en serie: $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$
- Sistema 3 de 4: $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$
- Sistema 2 de 4: $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$
- Sistema de orden 4 en paralelo: $\{1,2,3,4\}$
- Sistema híbrido, Figura 2.3: $\{1\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$

**Observación 1.** La relación entre los conjuntos de corte y los conjuntos de camino de un sistema cualquiera es la siguiente:

- Sea $P$ un conjunto de camino mínimo y $A$ un subconjunto propio de $P$, entonces $A^C$ es un conjunto de corte.
- Sea $C$ un conjunto de corte mínimo y $B$ un subconjunto propio de $C$, entonces $B^C$ es un conjunto camino.

Notar que ni $A^C$ ni $B^C$ necesitan ser mínimos.

Hay una conexión entre la función de estructura de un sistema coherente y sus conjuntos de camino mínimo y corte mínimo. Como ya hemos visto, para que un sistema funcione debe darse el caso de que todos los componentes de, al menos, un conjunto de camino mínimo funcionen. De forma similar, el sistema funcionará si y solo si al menos funciona uno de los componentes de cada conjunto de corte mínimo. Esto nos proporcionará las herramientas para el cálculo de la función estructura.

**Definición 24.** Sean $P_1,\ldots,P_r$ los conjuntos de corte mínimo de un sistema dado. Para cada conjunto se define *la función estructura de camino* $p_j(\mathbf{x})$ como

$$p_j(\mathbf{x}) = \prod_{i\in P_j} x_i$$

Notar que $p_j(\mathbf{x}) = 1$ se da cuando cada componente de $P_j$ está funcionando. Luego la función estructura puede ser representada como:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^{r}(1 - p_j(\mathbf{x}))$$

o equivalentemente:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max_{\{1\leq j\leq r\}} p_j(\mathbf{x}) = \max_{\{1\leq j\leq r\}} \min_{i\in P_j}(x_i)$$

Es fácil ver que dichas ecuaciones confirman que la función estructura es 1 si y solo si hay al menos un conjunto de camino mínimo para el cual todos los componentes funcionan.

**Definición 25.** Sean $C_1, \dots C_k$ el conjunto de corte mínimo del sistema de interés. Definimos la *función estructura de corte* como:

$$c_j(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)$$

Notar que $c_j(\mathbf{x}) = 1$ se da cuando el conjunto $C_j$ de corte mínimo contiene, al menos, un componente que funciona. Como el sistema funciona si y solo si cada conjunto de corte mínimo contiene, al menos, un componente que funciona, se sigue que la función estructura puede ser representada como:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{k} c_j(\mathbf{x})$$

o equivalentemente:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min_{\{1 \le j \le k\}} c_j(\mathbf{x}) = \min_{\{1 \le j \le k\}} \max_{i \in C_j} (x_i)$$

Esta representación de la función de estructura demuestra que los sistemas coherentes pueden ser representados de dos formas equivalentes: como sistemas paralelos en los que cada elemento es un sistema en serie formado por un conjunto de camino mínimo, o como sistemas en serie en los que cada elemento es un sistema en paralelo formado por el conjunto de corte mínimo.

**Ejemplo 6.** Para ilustrar este último hecho tomamos el sistema híbrido de la Figura 2.3, de la cual ya conocemos sus conjuntos de camino, $P_1 = \{1,2\}$ y $P_2 = \{1,3,4\}$ y sus conjuntos de corte, $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2,3\}, C_3 = \{2,4\}$. Sea $x_i$ el indicador de estado del componente $i$-ésimo y $\varphi(\mathbf{x})$ la función estructura del sistema, vamos a calcularla de las dos formas que acabamos de ver:

**Según los conjuntos de camino:** Las funciones de estructura de camino son $p_1(\mathbf{x}) = x_1x_2$ y $p_2(\mathbf{x}) = x_1x_3x_4$. Por tanto, es fácil ver que $p_j(\mathbf{x}) = 1$ si cada componente de $P_j$ está funcionando, ya que todos los indicadores $x_i$ serán iguales a 1. Así, la función estructura queda representada como:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_1x_3x_4)$$

o equivalentemente:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max[(x_1x_2); (x_1x_3x_4)] = \max[\min(x_1; x_2); \min(x_1; x_3; x_4)]$$

**Según los conjuntos de corte:** Las funciones estructura de corte son $c_1(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1)$, $c_2(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_2)(1 - x_3)$ y $c_3(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_2)(1 - x_4)$. Por tanto, es fácil ver que $c_j(\mathbf{x}) = 1$ cuando al menos un componente está funcionando, ya que así el producto se anula. Así, la función estructura queda representada como:

$$\varphi(\mathbf{x}) = [1 - (1 - x_1)][1 - (1 - x_2)(1 - x_3)][1 - (1 - x_2)(1 - x_4)]$$

o equivalentemente:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min[1 - (1 - x_1); 1 - (1 - x_2)(1 - x_3); 1 - (1 - x_2)(1 - x_4)] = \min[x_1; \max(x_2; x_3); \max(x_2; x_3)]$$

### 2.3.2. Sistemas duales

**Definición 26.** Un sistema coherente $A$ es el *dual* del sistema coherente $B$ si un conjunto de camino mínimo de $A$ es un conjunto de corte mínimo de $B$. Y de forma análoga, un conjunto de corte mínimo de $A$ es un conjunto de camino mínimo de $B$.

**Ejemplo 7.** Como podemos comprobar en los ejemplos 4 y 5, el conjunto de camino mínimo de un sistema en paralelo es exactamente el conjunto de corte mínimo de un sistema en serie.
Para un sistema $k$ de $n$ su dual es un sistema ($n$-$k$+1) de $n$, como podemos comprobar también en los ejemplos 4 y 5, el conjunto de camino mínimo del sistema 2 de 4 es el conjunto de corte mínimo del sistema 3 de 4.

Además, la relación entre sistemas coherentes duales está presente en sus respectivas funciones de estructura de la siguiente manera:

**Definición 27.** Si $A$ y $B$ son *sistemas duales*, entonces sus funciones de estructura están relacionadas por la ecuación:

$$\varphi^A(\mathbf{x}) = 1 - \varphi^B(\mathbf{1} - \mathbf{x})$$

**Ejemplo 8.** En el ejemplo anterior hemos visto que un sistema en paralelo es el dual de un sistema en serie. Vamos a comprobar que sus funciones estructura están relacionadas de la forma mencionada usando sistemas de orden 4. Primero vamos a calcular por separado sus funciones estructura; para ello usaremos los conjuntos camino que hemos calculado en el Ejemplo 4.
**Para el sistema en serie:** El conjunto camino es $P_1 = \{1,2,3,4\}$, la función estructura de camino $p_1(\mathbf{x}) = x_1x_2x_3x_4$ y, por tanto, su función estructura

$$\varphi^S(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1x_2x_3x_4).$$

**Para el sistema en paralelo:** Los conjuntos de camino son $P_i = \{i\}$ para $i = 1,2,3,4$; las funciones estructura de camino $p_i(\mathbf{x}) = x_i$ para $i = 1,2,3,4$ y, por tanto, su función estructura

$$\varphi^P(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4).$$

Por lo tanto,

$$\varphi^S(\mathbf{x}) = 1 - \varphi^P(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 1 - [1 - (1 - (1 - x_1))(1 - (1 - x_2))(1 - (1 - x_3))(1 - (1 - x_4))] = 1 - [1 - x_1x_2x_3x_4]$$

### 2.3.3. Fiabilidad de sistemas coherentes

Consideramos un sistema coherente con $n$ componentes que funcionan o no de modo independiente. Consideramos que fijado un tiempo $t$, en el cual se examina el sistema, cada componente $i$ puede funcionar (con probabilidad $p_i$) o no ( con probabilidad $1 - p_i$). Esto es, si $X_i$ es una variable aleatoria con distribución Bernoulli que indica con valor 1 que el componente funciona y con valor 0 que no funciona, entonces tenemos que $p_i = P(X_i = 1)$.
Consideremos que el vector de estado $(X_1, X_2, ..., x_n)$ está compuesto por $n$ variables aleatorias independientes, definimos la probabilidad de que el sistema funciona como:

**Definición 28.** La probabilidad de que un sistema a tiempo $t$ funcione se define como *fiabilidad* del sistema. Se denota con $h(\mathbf{p})$ y puede calcularse a través de la función estructura como:

$$h(\mathbf{p}) = P(\varphi(\mathbf{X}) = 1) = E\varphi(\mathbf{X})$$

Notar que $h(\mathbf{p})$ es multilineal, puesto que es lineal en cada $p_i$. Esto se observa al ser $h(\mathbf{p})$ una suma de productos de una o varias probabilidades de $p = (p_1, p_2..., p_n)$

**Ejemplo 9.** Tomamos de nuevo el sistema de la Figura 2.3 que tiene función de estructura $\varphi(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_1x_3x_4)$, calculada en el Ejemplo 6 según sus conjuntos de camino mínimo. Queremos calcular la fiabilidad del sistema, usando la definición anterior:

$$h(\mathbf{p}) = P(\varphi(\mathbf{X}) = 1) = E\varphi(\mathbf{X}) = E(1 - (1 - X_1X_2)(1 - X_1X_3X_4))$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la esperanza obtenemos:

$$1 - E((1 - X_1X_2)(1 - X_1X_3X_4)) = 1 - E(1 - X_1X_3X_4 - X_1X_2 + X_1X_3X_4X_1X_2) =$$

$$1 - E(1) + E(X_1X_3X_4) + E(X_1X_2) - E(X_1X_3X_4X_1X_2) =$$

$$1 - 1 + E(X_1)E(X_3)E(X_4) + E(X_1)E(X_2) - E(X_1)E(X_3)E(X_4)E(X_1)E(X_2) =$$

$$p_1p_3p_4 + p_1p_2 - p_1p_3p_4p_1p_2 = 1 - (1 - p_1p_2)(1 - p_1p_3p_4)$$

Cuando los componentes vienen definidos por variables aleatorias idénticamente distribuidas, tenemos $p_i = p$, y la función de fiabilidad $h$ se simplifica.

**Definición 29.** Si las variables son independientes e idénticamente distribuidas, entonces nos referimos a $h$ como *polinomio de fiabilidad*.

**Ejemplo 10.** Tomamos un sistema en serie de $n$ componentes independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d), es decir, $p_i = p$. Su función de estructura será:

$$\varphi(\mathbf{X}) = 1-(1-\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

Calculamos la fiabilidad del sistema:

$$h(\mathbf{p}) = E\varphi(\mathbf{X}) = E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i) = \prod_{i=1}^{n} p = p^n$$

Por otro lado, tomamos un sistema en paralelo de $n$ componentes i.i.d, es decir, $p_i = p$ . Su función de estructura será:

$$\varphi(\mathbf{X}) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-X_i)$$

Calculamos la fiabilidad del sistema:

$$h(\mathbf{p}) = E\varphi(\mathbf{X}) = E(1-\prod_{i=1}^{n}(1-X_i)) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-E(X_i)) = 1-(1-p)^n$$

# Capítulo 3

# Signatura de sistemas

Como hemos visto en el capítulo anterior, el número de sistemas coherentes de orden $n$ crece exponencialmente con $n$. Las funciones de estructura son expresiones algebraicas complejas que, en general, admiten múltiples representaciones equivalentes.
En este capítulo, presentaremos una alternativa que, aunque es menos general que la función estructura, tiene una expresión más manejable y fácil de interpretar. Destacar que para los sistemas de orden $n$, será de dimensión fija. Recordar para la próxima definición lo visto en el Capítulo 1 de estadísticos ordenados .

**Definición 30.** Sea $\tau$ un sistema coherente de orden $n$. Asumir que los tiempos de vida de los $n$ componentes de un sistema, $X_1, X_2 \ldots, X_n$ son independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d) de acuerdo con la distribución (continua) F.
Dado un sistema $\tau$ se define su *signatura* , denotada por $\mathbf{s}_\tau$ o simplemente $\mathbf{s}$ si el sistema correspondiente está claro en el contexto, como un vector de probabilidades $n$-dimensional cuyo $i$-ésimo elemento, $s_i$, es igual a la probabilidad de que el fallo del sistema sea debido a que han fallado exactamente $i$ componentes.
En resumen, $s_i = P(T = X_{i:n})$, donde $T$ es *el tiempo de vida del sistema* y $X_{i:n}$ es el *estadístico de orden i* de los tiempos de vida del los $n$ componentes, es decir, es el momento de fallo del componente $i$-ésimo.

En las condiciones de la Definición 30, supongamos que las variables $X_i$ son i.i.d con función de distribución común F. Escribimos $(i_1, \ldots i_n)$ indicando los componentes por su orden de fallo. Las $n!$ permutaciones del vector son equiprobables.
La característica esencial del cálculo de signaturas es considerar el número de permutaciones de los tiempos de vida de los $n$ componentes potenciales y contar los que se corresponden con el fallo del sistema sobre el fallo de $i$ entre los $n$ componentes.

**Observación 2.** Dado que $T$ pertenece al conjunto $\{X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}\}$ con probabilidad uno, se deduce que la signatura $\mathbf{s}$ en un vector de probabilidad tal que $s_i \geq 0 \ \ \forall i$ y $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$

## 3.1. Cálculo del vector signatura para sistemas coherentes

Vamos a comenzar la siguiente sección viendo un ejemplo particular de un sistema de 3 componentes distribuidos como en la Figura 3.1. A continuación nos centraremos en calcular la probabilidad de que el tiempo de vida del sistema dado sea mayor que $t$, definiendo así la función de supervivencia y en consecuencia la tasa de fallo.

**Ejemplo 11.** Consideramos el siguiente sistema de tres componentes, cuya función de estructura es $\phi(x) = 1-(1-x_1)(1-x_2x_3)$.

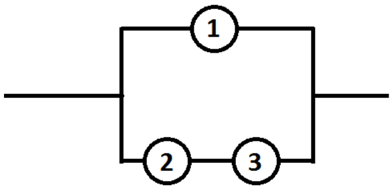


Figura 3.1: Sistema de tres componentes

Sean $X_1, X_2, X_3$ variables i.i.d que representan los tiempos de vida de los componentes del sistema dado, tenenemos que pueden ser odenados de $3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$ formas distintas e igualmente probables. Ponemos en común en la siguiente tabla las 6 formas distintas de ordenar los tiempos de vida y el estadístico ordenado igual al tiempo de vida del sistema ($T$).

| Orden de los tiempos de vida | Estadístico ordenado |
|---|---|
| $X_1 < X_2 < X_3$ | $X_{2:3}$ |
| $X_1 < X_3 < X_2$ | $X_{2:3}$ |
| $X_2 < X_1 < X_3$ | $X_{2:3}$ |
| $X_2 < X_3 < X_1$ | $X_{3:3}$ |
| $X_3 < X_1 < X_2$ | $X_{2:3}$ |
| $X_3 < X_2 < X_1$ | $X_{3:3}$ |

Tabla 3.1: Resumen de los estadísticos ordenados que dan lugar al fallo del sistema

De la tabla anterior deducimos que la signatura del sistema es **s**$= (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Es fácil de ver que los cinco posibles sistemas coherentes de orden 3 tienen las siguientes signaturas $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ y $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$. Las tres primeras corresponden a los sistemas $i$ de 3 para $i = 1,2,3$ y el quinto corresponde a un elemento en serie con los otros dos en paralelo (Figura 3.2). Para los cinco sistemas mencionados, notar que el primer sistema es el dual del tercero y el cuarto el dual del quinto.

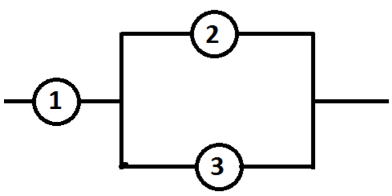


Figura 3.2:

La combinatoria involucrada en el cálculo de signaturas de un sistema puede ser compleja. Por ello, cabe destacar el concepto de dualidad, ya que puede reducir el calculo a la mitad al obtenerse la signatura de un sistema dual mediante argumentos simétricos.

Ahora vamos a establecer una propiedad fundamental para la signatura **s**. Además, consideramos $P(X_{i:n} > t)$ la función de supervivencia del $i$-ésimo tiempo de vida vista en el Teorema 1.5.

**Teorema 3.1.** *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ las variables i.i.d que representan los tiempos de vida de los n componentes un sistema coherente con signatura* **s** *y sea $T$ el tiempo de vida del sistema. Entonces*

$$\overline{F}_T(t) \equiv P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (\overline{F}(t))^{n-j}$$

*Demostración.* Notar que el sistema falla cuando uno de sus componentes deja de funcionar, por lo que $T$ tomará los valores de uno de los estadísticos ordenados $X_{i:n}$ de la muestra $(X_1, X_2, ..., X_n)$, es decir, $T \in \{X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{n:n}\}$ con probabilidad 1. Entonces aplicando la ley de probabilidad total y suponiendo que las variables $X_i$ son i.i.d podemos escribir:

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} P(T > t,\ \ T = X_{i:n}) = \sum_{i=1}^{n} P(T > t, |T = X_{i:n}) P(T = X_{i:n})$$

Debido al Teorema 1.5 :

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i P(X_{i:n} > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (\overline{F}(t))^{n-j}$$

□

**Definición 31.** La función definida en el teorema anterior

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (\overline{F}(t))^{n-j} \tag{3.1}$$

se denomina *función de supervivencia del sistema*. Puede también representarse intercambiando los sumatorios:

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{i=j+1}^{n} s_i \right) \binom{n}{j} (F(t))^j (\overline{F}(t))^{n-j} \tag{3.2}$$

**Observación 3.** La igualdad (3.2) también puede ser escrita como función que involucra las probabilidades de fallo y supervivencia, $G(t) = \frac{F(t)}{\overline{F}(t)}$.

$$\overline{F}_T(t) = (\overline{F}(t))^n \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{i=j+1}^{n} s_i \right) \binom{n}{j} (G(t))^j$$

De esta manera, la función supervivencia se representa en términos de signaturas.

**Observación 4.** Consideramos un sistema basado en $n$ componentes i.i.d funcionando en un instante fijo de tiempo $t_0$. Tomando $p = \overline{F}(t_0)$ y $q = F(t_0)$, se puede escribir el polinomio de fiabilidad $h(p)$ en forma $pq$ usando (3.2) y así obteniendo dos versiones equivalentes de h

$$h(p) = \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{i=j+1}^{n} s_i \right) \binom{n}{j} q^j p^{n-j}$$

Y cambiando $j = n - j$ tendremos

$$h(p) = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=n-j+1}^{n} s_i \right) \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$$

**Nota 1.** La función de supervivencia de un sistema con tiempo de vida $T$ puede escribirse en términos de funciones de supervivencia de los estadísticos ordenados de los tiempo de vida de los componentes, es decir,

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i P(X_{i:n} > t).$$

Además, por la identidad para variables aleatorias consecuencia del caso general visto en el Teorema 1.4, tenemos que:

$$E(Y) = \int_0^\infty \overline{F}(y)dy.$$

Lo que nos proporciona otra conexión útil entre el tiempo de vida de un sistema y el estadístico ordenado del tiempo de vida, ya que integrando la última expresión de la página anterior tenemos:

$$E(T) = \sum_{i=1}^{n} s_i \;\; E(X_{i:n})$$

La representación (3.2) se puede aplicar para obtener otras representaciones de la función de densidad de un sistema y la tasa de fallo cuando F es absolutamente continua.

**Corolario 3.2.** *Sea $X_1,\dots,X_n$ las variables aleatorias i.i.d con función de distribución F, que representan los tiempos de vida de los n componentes de un sistema coherente con signatura* **s** *y sea $T$ el tiempo de vida del sistema. Si F es absolutamente continua, entonces*

$$f_T(t) = -\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} i s_i \binom{n}{i} (F(t))^{i-1} (\overline{F}(t))^{n-i} f(t) \tag{3.3}$$

*Demostración.* Derivando $\overline{F}_T(t)$ en la igualdad (3.1). □

**Definición 32.** La *tasa* de fallo de un sistema $r_T(t)$ se define como la relación

$$\frac{f_T(t)}{\overline{F}_T(t)}$$

y puede escribirse en términos de la signatura **s** y el componente subyacente de la distribución F.

La relación entre la densidad en (3.3) y la función de supervivencia en (3.1) puede ser simplificada para obtener una relación útil de la tasa de fallo del sistema.

**Corolario 3.3.** *Considerar un sistema coherente de n componentes con signatura* **s** *y asumir que los tiempos de vida de las componentes $X_1,\dots,X_n$ son i.i.d con distribución F y densidad f. Sea $T$ el tiempo de vida del sistema. Entonces*

$$r_T(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} i \;\; s_i \binom{n}{i} (F(t))^{i-1} (\overline{F}(t))^{n-i+1}}{\sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^{j} (\overline{F}(t))^{n-j}} \tag{3.4}$$

*Donde $r(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)}$ es la tasa de fallo común de los componentes.*
*Otra versión más útil y equivalente:*

$$r_T(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (n-i) s_{i+1} \binom{n}{i} (F(t))^{i} (\overline{F}(t))^{n-i}}{\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} s_j\right) \binom{n}{i} (F(t))^{i} (\overline{F}(t))^{n-i}} r(t) \tag{3.5}$$

*O en términos de la función de probabilidad $G(t) = \frac{F(t)}{\overline{F}(t)}$*

$$r_T(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (n-i) s_{i+1} \binom{n}{i} (G(t))^{i}}{\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} s_j\right) \binom{n}{i} (G(t))^{i}} r(t) \tag{3.6}$$

**Observación 5.** Como se deduce de la ecuación (3.1), el tiempo de vida de un sistema coherente con componentes i.i.d depende de la estructura del sistema solo a través de la signatura. Si dos sistemas con componentes i.i.d tienen la misma signatura el comportamiento estocástico de sus tiempos de vida es igual. Notar que, dos sistemas coherentes pueden tener la misma signatura.

## 3.2. Sistemas mixtos

El conjunto de todos los sistemas coherentes de orden $n$, con $n$ arbitrario, sería el marco apropiado para aplicaciones. Pero este conjunto tiene sus limitaciones dado que el número de sistemas coherentes de orden $n$ a veces resulta insuficiente.
En aplicaciones, resulta conveniente trabajar con un conjunto más amplio de sistemas (no todos ellos necesariamente coherentes). La idea es formar nuevos sistemas como 'mezcla' (aleatoria) de sistemas coherentes.

### 3.2.1. Aleatoriedad en la elección del sistema

Supongamos que disponemos de un suministro ilimitado de componentes cuyos tiempos de vida son variables i.i.d con función de distribución común F. Consideramos el conjunto de todos los sistemas coherentes de orden $n$, notar que este conjunto es finito. Teniendo en cuenta el proceso de seleccionar un sistema coherente al azar de acuerdo con una distribución de probabilidad fija y conocida **p**. El vector de probabilidad **p** será $m$-dimensional y le dará un peso positivo a cada uno de los $m$ sistemas coherentes de orden $n$ con sus correspondientes signaturas $\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_m$. Entonces
P( El sistema falle por el fallo del componente $i$-ésimo) $=$
$\sum_{k=1}^{m}$ P(elegir el sistema $k$-ésimo) P(fallo del componente $i$ provoca el fallo del sistema $k$ | el sistema $k$ ha sido elegido) $= \sum_{k=1}^{m} p_k s_{k_i}$
La signatura, $\mathbf{s}^*$ asociada a este proceso viene definida por el vector $\mathbf{s}^* = \sum_{k=1}^{m} p_k \mathbf{s}_k$

**Ejemplo 12.** La signatura de un sistema $k$ de $n$ es el vector $n$-dimensional $\mathbf{s}_{k:n} = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ con un 1 en el elemento $k$. Por tanto, cualquier vector de probabilidad que cumpla $\mathbf{p} \in [0,1]^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ será la signatura del sistema mixto, es decir, el sistema que mezcla el sistema $k$ de $n$ con la distribución **p**. Esta observación se deduce de lo anterior dado que el vector probabilidad **p** puede escribirse como

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^{n} p_k \mathbf{s}_{k:n}$$

Expandir el conjunto de los sistemas coherentes de orden $n$ al conjunto de todos los sistemas mixtos de orden $n$ posee sus beneficios. Por ejemplo, los resultados vistos en la sección 3.1 se pueden aplicar de la misma manera a los sistemas mixtos. De hecho, los sistemas mixtos incluyen sistemas coherentes como casos especiales, es decir, como mezclas degeneradas que colocan toda su masa en un solo sistema coherente. Por tanto, todos los resultados relacionados con signaturas son aplicables a sistemas mixtos.

# Capítulo 4

# Órdenes estocásticos univariantes

## 4.1. Introducción

El capítulo que vamos a desarrollar a continuación está basado en el libro de Muller y Stoyan, *Comparison methods for stochastic models and risks*,[5]. Estos conceptos se usarán en el siguiente capítulo.
Comenzamos definiendo lo que es un orden parcial puesto que veremos que las relaciones de órdenes estocásticos son casos especiales .

**Definición 33.** Un relación binaria $\preceq$ en un conjunto arbitrario $S$ se denomina orden (parcial) si cumple las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: $x \preceq x \ \ \forall x \in S$
2. Transitiva: Si $x \preceq y$ además $y \preceq z$ entonces $x \preceq z$
3. Antisimétrica: Si $x \preceq y$ además $y \preceq x$ entonces $x = y$

Notar que, a veces es conveniente escribir $y \succeq x$ como equivalente a $x \preceq y$

**Definición 34.** Sea $S$ un conjunto (o subconjunto adecuado) de todas las funciones de distribución de variables aleatorias en los reales. Un orden parcial en dicho conjunto se denomina *orden estocástico*.

**Notación.** Sea $X$ una variable aleatoria en los reales denotamos con $P_X$ su distribución y con $F_X$ su función de distribución, es decir:

$$F_X(t) = P_X((-\infty, t]) = P(X \leq t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

A menudo es conveniente no distinguir entre una relación de orden entre funciones de distribución y la correspondiente relación de distribución y variables aleatorias.

**Convenio.** Sean las variables aleatorias $X$ e $Y$ con distribuciones $P_X$ y $P_Y$ respectivamente, y funciones de distribución $F_X(t)$ y $F_Y(t)$ tales que $F_X(t) \preceq F_X(t)$. Entonces usaremos la siguiente notación cuando sea conveniente $P_X \preceq P_Y$ y $X \preceq Y$.
Además, en algunas ocasiones no se hará distinción entre distribuciones y sus funciones de distribución. Usaremos el mismo carácter.

**Nota 2.** Existen variables aleatorias diferentes con la misma distribución. Luego la relación $\preceq$ es antisimétrica como relación entre distribuciones pero no puede serlo como relación entre variables aleatorias.

## 4.2. Orden estocástico usual

El candidato más natural para un orden estocástico es el de la comparación puntual de las funciones de distribución. Si $F_X \geq F_Y \quad \forall t \in \mathbb{R}$, entonces $X$ toma valores pequeños con mayor probabilidad que $Y$, por lo tanto, $X$ toma valores altos con menor probabilidad que $Y$.

**Definición 35.** La variable aleatoria $X$ es más pequeña que la variable $Y$ con respecto el *orden estocástico usual*, $X \leq_{st} Y$, si $F_X(t) \geq F_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, o equivalentemente si $\overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ donde $\overline{F}_X(t)$ denota la función de supervivencia de $X$. Habitualmente lo denominaremos simplemente *orden estocástico*.

A primera vista puede parecer contradictorio decir que $F_X \leq_{st} F_Y$ si $F_X(t) \geq F_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Es claro que queremos definir $Y$ estocásticamente mayor que $X$, es decir, que toma valores altos con mayor probabilidad. Sin embargo, la función de distribución describe la probabilidad de tomar valores pequeños y, por ello, invertimos el signo de desigualdad.

Consideramos la notación $\leq_{st}$ como una generalización del orden $\leq$ en el eje real, puesto que para los números reales $a, b$ tenemos que $a \leq b$ implica $a \leq_{st} b$ donde $a$ y $b$ denotan las distribuciones degeneradas en los respectivos puntos. En otras palabras, $a \leq b$ implica $\delta_a \leq_{st} \delta_b$, donde $\delta_a$ es la delta de Dirac en el punto $a$, es decir, la función de distribución de dicha variable aleatoria.
El siguiente resultado (sin demostración) se utilizará en el Teorema 4.2.

**Teorema 4.1.** *Sean $X$,$Y$ variables aleatorias con funciones de distribución $F_X$ y $F_Y$ respectivamente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $X \leq_{st} Y$
- *Existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ y existen variables aleatorias $\hat{X}$ y $\hat{Y}$ con funciones de ditribución $F_X$ y $F_Y$ tales que $\hat{X} \leq \hat{Y}$ $\forall \omega \in \Omega$*

**Observación 6.** Considerar $X$,$Y$ tales que están definidos sobre el mismo espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Un candidato para orden parcial que compare el tamaño de las variables aleatorias sería la relación $X \leq_{a.s.} Y$, que se cumple si y solo si $X(\omega) \leq Y(\omega)$ para casi todo $\omega \in \Omega$. Esta relación de orden no depende sólo de las distribuciones. Es fácil ver que siempre se cumple $X \leq_{a.s.} X$, pero no se cumple que $X \leq_{a.s.} Y$ cuando $X$ e $Y$ son independientes e idénticamente distribuidas con la misma distribución no degenerada. El orden $\leq_{a.s.}$ es por tanto más fuerte que el usual, esto es $X \leq_{a.s.} Y$ implica $F_X \leq_{st} F_Y$, pero no a la inversa.

**Nota 3.** Recordar que a.s. es la abreviatura en inglés de *almost surely* (casi seguro).

Veamos que el orden estocástico puede ser caracterizado de la siguiente manera:

**Teorema 4.2.** *Las siguientes expresiones son equivalentes:*

1. $X \leq_{st} Y$
2. *La desigualdad*
$$Ef(X) \leq Ef(Y) \tag{4.1}$$
*se cumple para toda función creciente f, para la cual ambas esperanzas existen.*

*Asimismo,si dada f se cumple la desigualdad* (4.1) *para todo $X$ e $Y$ tales que $X \leq_{st} Y$, entonces f debe ser creciente.*

*Demostración.* Veamos la doble implicación:

1. $\Rightarrow$ 2. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $X \leq Y$ casi seguro, por el Teorema 4.1. Entonces, si f es creciente $f(X) \leq f(Y)$ a.s. y por la monotonía de la esperanza tenemos que $Ef(X) \leq Ef(Y)$.

2. $\Rightarrow$ 1. Se sigue inmediatamente de la observación $P(X > t) = E\ I_t(X)$ para la función indicativa:
$$I_t(x) = 1_{(t,\infty)} = \begin{cases} 1 & x > t \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$
que efectivamente es creciente.

Para ver la última afirmación, asumimos que f es no creciente, luego existe $x \leq y$ tal que $f(x) > f(y)$. Tomando $X$ e $Y$ tales que $P(X = x) = P(Y = y) = 1$, entonces $X \leq_{st} Y$. Pero $Ef(X) > Ef(Y)$. Contradicción por tomar f no creciente. □

**Teorema 4.3.** *Sea $X$ e $Y$ variables aleatorias con esperanzas finitas.*

*a)* $X \leq_{st} Y$ *entonces* $E(X) \leq E(Y)$

*b) Si* $X \leq_{st} Y$ *y* $E(X) = E(Y)$ *entonces* $X$ *e* $Y$ *tienen la misma distribución.*

*Demostración.*

a) tomando $f(x) = x$ y aplicando las equivalencias del Teorema 4.2

b) Sabemos por el Teorema 1.4 que

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F_X(t)]dt - \int_{-\infty}^{0} F_X(t)dt$$

Luego

$$E(X) - E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} [F_X(t) - F_Y(t)]dt \tag{4.2}$$

Si $X \leq_{st} Y$ y $E(X) = E(Y)$, entonces la parte izquierda de (4.2) es 0 y la derecha es la integral de una función no negativa continua. Luego solo se dará la igualdad si $F_X = F_Y$.

□

**Observación 7.** Hay más órdenes naturales que el orden estocástico usual, por ejemplo el llamado 'orden ingeniero'. Este se basa en la comparación de las medias, es decir, la variable aleatoria $X$ es menor que $Y$ en media, $X \leq_{\mu} Y$, si $E(X) \leq E(Y)$. Observamos que el orden estocástico usual implica este orden.

## 4.3. Orden de la tasa de fallo

Hay muchas situaciones donde conceptos más fuertes que el orden estocástico usual son necesarios. Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 13.** Consideramos la situación donde alguien quiere comprar un coche y puede elegir entre dos opciones. El tiempo de vida de cada coche es descrito por una variable aleatoria diferente, $X$ e $Y$. Es claro que si $X \leq_{st} Y$ y el precio es el mismo, entonces elegiría el segundo coche. Pero supongamos que ambos son de segunda mano con un año de antiguedad, entonces los tiempos de vida restantes vienen dados por $X'$ e $Y'$ donde $P(X' > t) = P(X > 1 + t | X > 1)$ e igualmente $Y$. ¿Se sigue cumpliendo que $X' \leq_{st} Y'$? A priori no podríamos asegurar que el segundo coche sea mejor opción.

Vamos a ilustrar a través de un ejemplo concreto como $X \leq_{st} Y$ no se conserva bajo envejecimiento.

**Ejemplo 14.** Sea $X$ una variable aleatoria con distribución uniforme (0,3) e $Y$ una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(y) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{6} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{3} & 2 < x \leq 3 \end{array} \right\}$$

Calculamos las funciones de distribución de X e Y:

$$F_X(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{3} & 0 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{array} \right\}$$

$$F_Y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{6} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x}{3} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{array} \right\}$$

Es fácil ver que $F_X(t) \geq F_Y(t)$ en cada intervalo, luego $X \leq_{st} Y$.
Por otro lado, si calculamos como en el Ejemplo 13: $P(X' > x) = P(X > 1+x|X > 1)$ tenemos que

$$P(X' > x) = \frac{P(X > 1+x)}{P(X > 1)} = \frac{(2-x)/3}{2/3} = 1 - \frac{x}{2} \quad 1 < x \leq 2$$

Por tanto, $F_{X'}(x) = \frac{x}{2}$ y $X'$ es uniforme en $(0,2)$.
Análogamente se podría ver que $Y'$ tiene densidad:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{3}{5} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{5} & 1 < x \leq 2 \end{array} \right\}$$

Con lo que se comprobaría que $X' >_{st} Y'$ (a pesar de que $X \leq_{st} Y$).

**Volvemos al Ejemplo 13:** A raíz de este hecho, nos surgen la siguiente cuestión sobre el Ejemplo 13: ¿Qué suposiciones son necesarias para garantizar que se mantenga el orden estocástico usual para los coches con cualquier año de antigüedad, es decir, $[X|X > t] \leq_{st} [Y|Y > t] \quad \forall t$?
Empleando la definición de orden estocástico $\leq_{st}$ , la desigualdad anterior puede reescribirse como:

$$P(X > s+t|X > t) \leq P(Y > s+t|Y > t) \quad \forall s \geq \ t$$

Y esto es equivalente a la expresión:

$$\frac{\overline{F}_Y(t)}{\overline{F}_X(t)} \leq \frac{\overline{F}_Y(s+t)}{\overline{F}_X(s+t)} \quad \forall s \geq 0 \quad \forall t$$

donde $\overline{F}_X(t) = 1 - F_X(t)$

**Definición 36.** La variable aleatoria $X$ es más pequeña que la variable aleatoria $Y$ con respecto *el orden de la tasa de fallo*, $X \leq_{hr} Y$, si la siguiente función es creciente

$$t \to \frac{\overline{F}_Y(t)}{\overline{F}_X(t)}.$$

El nombre de este orden se debe al hecho de que existe una caracterización equivalente en términos de la comparación puntual de las llamadas tasas de fallo, suponiendo la existencia de densidades continuas y por lo tanto de las tasas de fallo.

**Teorema 4.4.** *Sean $X$ e $Y$ variables aleatorias con densidades continuas, entonces $X \leq_{hr} Y$ es equivalente a $r_X(t) \geq r_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$*

*Demostración.* $\frac{\overline{F}_Y(t)}{\overline{F}_X(t)}$ es creciente si y solo si

$$\ln\left(\frac{\overline{F}_Y(t)}{\overline{F}_X(t)}\right) = \overline{F}_Y(t) - \overline{F}_X(t)$$

es creciente. Dado que $r_X(t) = \frac{d}{dt}\ln(\overline{F}_X(t))$ el resultado se obtiene debido a que una función diferenciable es creciente si y solo si su derivada es no negativa. $\square$

**Teorema 4.5.** *Supongamos que $X \leq_{hr} Y$ y que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente. Entonces $g(X) \leq_{hr} g(Y)$.*

*Demostración.* Suponiendo que exista la inversa de g, la demostración es inmediata por la identidad

$$\overline{F}_{g(X)}(t) = P(g(X) > t) = P\left(X > g^{-1}(t)\right) = \overline{F}_X\left(g^{-1}(t)\right).$$

□

**Teorema 4.6.** *$X \leq_{hr} Y$ implica $X \leq_{st} Y$*

*Demostración.* Tenemos que $X \leq_{hr} Y$ implica $\frac{\overline{F}_Y(t)}{\overline{F}_X(t)} \geq 1$ y entonces $F_X(t) \geq F_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, es decir, $X \leq_{hr} Y$. □

A veces es útil considerar el orden estocástico que se obtiene cuando consideramos la función de supervivencia en vez de la función de distribución en la definición del orden de tasa de fallo.

**Definición 37.** La variable aleatoria $X$ es más pequeña que la variable aleatoria $Y$ con respecto al *orden de la tasa de fallo inverso*, $X \leq_{rh} Y$, si la siguiente función es creciente

$$t \to \frac{F_Y(t)}{F_X(t)}.$$

El orden de la tasa de fallo inverso comparte muchas propiedades con el orden de la tasa de fallo usual. Asimismo, hay una fuerte dualidad entre ambos. De nuevo tenemos:

**Teorema 4.7.** *Sea g una función continua y estrictamente decreciente. Entonces $X \leq_{hr} Y$ si y solo si $g(X) \geq_{rh} g(Y)$*

*Demostración.* Si g es continua y estrictamente decreciente entonces también lo es $g^{-1}$ . La afirmación se sigue de la identidad

$$F_{g(X)}(t) = P(g(X) \leq t) = P(X \geq g^{-1}(t)) = \overline{F}_X(g^{-1}(t))$$

□

De este resultado podemos trasladar las propiedades de orden de la tasa de fallo ($\leq_{hr}$) a propiedades para el orden de la tasa de fallo inverso ($\leq_{rh}$) y viceversa. Por ejemplo:

**Teorema 4.8.** *$X \leq_{rh} Y$ implica $X \leq_{st} Y$*

*Demostración.*

$$X \leq_{rh} Y \Rightarrow -X \geq_{hr} -Y \Rightarrow -X \geq_{st} -Y \Rightarrow X \leq_{st} Y$$

□

## 4.4. Orden de razón de verosimilitudes

Una interesante característica del orden de la tasa de fallo es que $X \leq_{hr} Y$ se cumple si y solo si $[X|X > t] \leq_{st} [Y|Y > t] \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Es muy importante para analizar los tiempos de vida de las distribuciones. Sin embargo, hay otras situaciones donde nos gustaría tener $[X|X \in A] \leq_{st} [Y|Y \in A]$ para todos los posibles sucesos. Por ello, vamos a definir orden de razón de verosimilitud, como viene en el libro 'An Introduction to Stochastic Orders' página 60, [2].

**Definición 38.** Dadas dos variables aleatorias continuas $X$ e $Y$ con funciones de densidad $f_X$ y $f_Y$ respectivamente. La variable $X$ es más pequeña que la variable aleatoria $Y$ respecto al *orden de razón de verosimilitud*, $X \leq_{lr} Y$, si

$$f_X(t)f_Y(s) \leq f_X(s)f_Y(t) \quad \forall s \leq t \tag{4.3}$$

o equivalentemente, si $\frac{f_Y(t)}{f_X(t)}$ es creciente en $t$ en la unión de los soportes de $X$ e $Y$.

**Observación 8.** La ecuación establece una relación entre $\frac{f_Y}{f_X}$ creciente, pero escrita de tal forma que indica qué hacer si numerador o denominador son 0.

La definición anterior permite comparar dos variables aleatorias continuas con respecto al orden de razón de verosimilitud. Veamos ahora el caso con dos variables aleatorias discretas:

**Definición 39.** Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias que toman valores sobre los enteros, con funciones de probabilidad $p_X(i)$ y $p_Y(i)$ respectivamente, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Diremos que $X$ es más pequeña que la variable aleatoria $Y$ respecto al *orden de razón de verosimilitud*, $X \leq_{lr} Y$, si

$$p_X(j)p_Y(i) \leq p_X(i)p_Y(j) \quad \forall i \leq j \tag{4.4}$$

Como conclusión del capítulo veamos las implicaciones entre los distintos tipos de órdenes estocásticos estudiados.

**Teorema 4.9.** *$X \leq_{lr} Y$ implica $X \leq_{rh} Y$ y $X \leq_{hr} Y$*

# Capítulo 5

# Teoremas de preservación basados en las propiedades de la signatura

En esta sección consideraremos el problema de comparar el rendimiento de dos sistemas mixtos. En el capítulo anterior nos centrábamos en estudiar cuándo una variable aleatoria es mayor que otra en el sentido estocástico.
Supongamos dos variables aleatorias discretas $X_1$ y $X_2$ cuyas funciones de masa de probabilidad vienen dadas por las signaturas $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ respectivamente. La condición $\overline{F}_1(x) \leq \overline{F}_2$ $\forall x$ se puede comprobar que es equivalente a $\sum_{i=j}^{n} s_{1i} \leq \sum_{i=j}^{n} s_{2i}$ para $j = 1, ..., n$.
Cuando las distribuciones son absolutamente continuas, el orden de la tasa de fallo es equivalente a comparar las tasas de fallo $r_1$ y $r_2$, esto es $X_1 \leq_{hr} X_2$ si y solo si $r_1(t) \geq r_2(t)$

El primer resultado compara estocásticamente, con el orden usual, dos signaturas de sistemas mixtos.

**Teorema 5.1.** *Sean $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ las signaturas de dos sistemas mixtos de orden n, ambos formados por componentes con tiempos de vida i.i.d y ditribución F común. Sea $T_1$ y $T_2$ sus respectivos tiempos de vida. Si $\mathbf{s}_1 \leq_{st} \mathbf{s}_2$ entonces $T_1 \leq_{st} T_2$.*

*Demostración.* De la representación de la función de supervivencia (3.2) tenemos que para todo $t$ no negativo:

$$\overline{F}_1(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{i=j+1}^{n} s_{1i} \right) \binom{n}{j} (F(t))^j (\overline{F}(t))^{n-j} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{i=j+1}^{n} s_{2i} \right) \binom{n}{j} (F(t))^j (\overline{F}(t))^{n-j} = \overline{F}_2(t)$$

Esta desiguald proviene de la suposición de $\mathbf{s}_1 \leq_{st} \mathbf{s}_2$. □

Veamos el uso de este teorema con un ejemplo.

**Ejemplo 15.** Notar que los cinco sistemas coherentes vistos en el Capítulo 3 están completamente ordenados en el sentido del teorema que acabamos de ver. Sin embargo, hay ciertos sistemas coherentes para los cuales este orden no es válido. Por ejemplo, las signaturas de los sistemas coherentes de orden cuatro siguientes no están ordenadas estocásticamente:

- Sistema de orden cuatro con conjuntos mínimos $\{1\}$,$\{2, 3, 4\}$ y signatura $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$
- Sistema de orden cuatro con conjuntos mínimos $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$ y signatura $(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$

Ahora, vamos a comparar estocásticamente, con el orden de la tasa de fallo, dos sistemas mixtos. Se mostrará que el orden entre signaturas de dos sistemas mixtos implica que los tiempos de vida de los correspondientes sistemas están ordenados en el orden de la tasa de fallo.
Primero necesitaremos los siguientes resultados técnicos:

**Lema 5.2.** *Sean $\alpha(\cdot)$ y $\beta(\cdot)$ dos funciones tales que $\beta(\cdot)$ es no negativa; $\dfrac{\alpha(\cdot)}{\beta(\cdot)}$ y $\alpha(\cdot)$ son no decrecientes. Sean $X_1$ y $X_2$ dos variableas aleatorias con funciones de distribución $F_1$ y $F_2$ respectivamente tales que $X_1 \leq_{hr} X_2$. Entonces*

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)dF_1(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x)dF_1(x)} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)dF_2(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x)dF_2(x)} \tag{5.1}$$

El siguiente lema está extraído del artículo de Boland, El-Newehi y Proschan [4].

**Lema 5.3.** *Sean $X_1,\ldots X_n$ los tiempos de vida de los componentes de un sistema de orden n, independientes no necesariamente idénticamente distribuido y sea $X_{k:n}$ el estadístico de orden k. Entonces $X_{k+1:n}$ es mayor que $X_{k:n}$ con respecto el orden de la tasa de fallo para todo $k = 1,\ldots,n-1$.*

Ahora, estamos en condiciones de demostrar el siguiente resultado:

**Teorema 5.4.** *Sean $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ las signaturas de dos sistemas mixtos de orden n, ambos basados en componentes con tiempos de vida definidos por variables aleatorias i.i.d y distribución F. Sean $T_1$ y $T_2$ los tiempos de vida de cada sistema. Si $\mathbf{s}_1 \leq_{hr} \mathbf{s}_2$, entonces $T_1 \leq_{hr} T_2$*

*Demostración.* Como vimos en la Nota 1 del Capítulo 3 la función supervivencia $\overline{F}_j$ de un sistema con tiempo de de vida $T_j$ puede ser escrita en términos de la función de supervivencia de los estadísticos ordenados de los tiempos de vida de los componentes. Luego para $j = 1,2$ tenemos

$$\overline{F}_j(t) = \sum_{i=1}^{n} s_{ji} \;\; P(X_{i:n} > t)$$

Asumimos que $\mathbf{s}_1 \leq_{hr} \mathbf{s}_2$ y veamos que $T_1 \leq T_2$ demostrando que $\frac{\overline{F}_2(t)}{\overline{F}_1(t)}$ es creciente en $t$. Esto es equivalente a demostrar que

$$\frac{\overline{F}_2(x)}{\overline{F}_1(x)} \leq \frac{\overline{F}_2(y)}{\overline{F}_1(y)} \quad \forall x \leq y$$

por la Nota 1, podemos reescribirlo de la siguiente manera

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} s_{1i} \;\; P(X_{i:n} > y)}{\sum_{i=1}^{n} s_{1i} \;\; P(X_{i:n} > x)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} s_{2i} \;\; P(X_{i:n} > y)}{\sum_{i=1}^{n} s_{2i} \;\; P(X_{i:n} > x)} \quad \forall x < y \tag{5.2}$$

Pero (5.2) se puede demostrar a partir de (5.1) del Lema 5.2 tomando $\alpha$ y $\beta$ como las funciones discretas $\alpha(i) = P(X_{i:n} > y)$ y $\beta(i) = P(X_{i:n} > x)$ y tomando $F_1$ y $F_2$ las distribuciones discretas de $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ respectivamente. Solo necesitamos verificar que las funciones elegidas como $\alpha$ y $\beta$ satisfacen las hipotesis del Lema 5.2.
La monotonía de $\beta$ se sigue del hecho de que los estadísticos ordenados están ordenados en el orden estocástico usual $\leq_{st}$, ya que están ordenados en el orden a.s. (recuérdese la Observación 6). La desigualdad

$$\frac{\alpha(i)}{\beta(i)} \leq \frac{\alpha(i+1)}{\beta(i+1)}$$

podemos escribirla

$$\frac{P(X_{i+1:n} > x)}{P(X_{i:n} > x)} \leq \frac{P(X_{i+1:n} > y)}{P(X_{i:n} > y)} \quad \forall x < y$$

Esta desigualdad es equivalente a $X_{i:n} \leq_{hr} X_{i+1:n}$ como sabemos por el Lema 5.3. $\square$

El siguiente resultado establece el orden de la razón de verosimilitud de dos sistemas mixtos, en términos de sus signaturas, entre tiempos de vida.

**Teorema 5.5.** *Sean $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ las signaturas de dos sistemas mixtos de orden n, ambos basados en componentes con tiempos de vida definidos por variables aleatorias i.i.d y distribución F. Sean $T_1$ y $T_2$ los tiempos de vida de cada sistema. Si $\mathbf{s}_1 \leq_{lr} \mathbf{s}_2$, entonces $T_1 \leq_{lr} T_2$*

*Demostración.* Sean $f_1$ y $f_2$ las funciones de densidad de $T_1$ y $T_2$ respectivamente. Veamos que $\frac{f_2(t)}{f_1(t)}$ es creciente para todo $t$. Usando la representación de la densidad (3.3), dividiendo numerador y denominador por $f(t)(\overline{F}(t))^{n-1}$ y usando la notación $G(t) = \frac{F(t)}{\overline{F}(t)}$, podemos escribir

$$\frac{f_2(t)}{f_1(t)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} i s_{2i} \binom{n}{i} (G(t))^{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} i s_{1i} \binom{n}{i} (G(t))^{i-1}} \tag{5.3}$$

Una condición necesaria y suficiente para que el anterior cociente sea creciente en $(0,\infty)$ es que para cualquier $c \in \mathbb{R}$ la diferencia $f_2(t) - cf_1(t)$ cambie de signo como máximo una vez y pase de negativo a positivo cuando $t$ avanza de 0 a $\infty$.
Si (5.3) es creciente, es obvio que se verifica la propiedad anterior. Mientras que si la diferencia cruza el 0 más de una vez (de positivo a negativo) tendriamos que para todo $t$ entre los dos ceros, $\frac{f_2(t)}{f_1(t)} > c$, y por encima del segundo cero, $\frac{f_2(t)}{f_1(t)} < c$. Por tanto el cociente no podría ser creciente.
Sea $x = G(t)$, estudiamos el siguiente polinomio $t(x)$ de grado máximo $n-1$

$$t(x) = f_2(G^{-1}(x)) - cf_1(G^{-1}(x)) = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} (s_{2i} - cs_{1i}) x^{i-1} \tag{5.4}$$

Suponiendo $\mathbf{s}_1 \leq_{lr} \mathbf{s}_2$ tenemos que la razón $\frac{s_{2i}}{s_{1i}}$ es creciente cuando $i$ aumenta de 1 a $n$. Esto implica que, para cualquier número real $c$, $\{s_{2,i} - cs_{1,i}\}$ tiene como mucho un cambio de signo de negativo a positivo cuando $i$ aumenta de 1 a $n$. Por lo tanto, podemos suponer que los coeficientes de (5.4) tienen como máximo un cambio de signo. La regla de signos de Descartes establece que el número de raíces positivas de un polinomio arbitrario con coeficientes reales es , como mucho, igual al número de cambios de signo que se produzcan entre sus coeficientes diferentes a 0.
En conclusión , para cualquier $c \in \mathbb{R}$ el polinomio (5.4) cruza el cero como máximo una vez cuando $x$ aumenta de 0 a $\infty$. El hecho de que los coeficientes en (5.3) solo puedan cambiar de signo de negativo a positivo implica que si $t(x)$ sufre un cambio de signo, cambiará de negativo a positivo. Ambos hechos justifican que la relación $\frac{f_2(t)}{f_1(t)}$ es creciente en $t \in [0,\infty]$ es decir, $T_1 \leq_{lr} T_2$

$\square$

# Bibliografía


[1] ARNOLD B.C., BALAKRISHNAN N. Y NAGARAJA H.N. *A first course in Order Statistics* Society for Industrial and Applied Mathematics, Colección Classics in Applied Mathematics, 2008.

[2] BELZUNCE F. , MARTÍNEZ-RIQUELME C. Y MULERO J. *An Introduction to Stochastic Orders* Capitulo 2 - Univariate stochastic orders, Academic Press,2016, Páginas 27-113.

[3] BILLINGSLEY P. *Probability and Measure.* Wiley-Interscience, 1995.

[4] BOLAND P.J. , EL-NEWEIHI E. Y PROSCHAN F. *Applications of the hazard rate ordering in reliability and order statistics.* Journal of Applied Probability, Volumen 31, Número 1, 1994, Páginas 180–192.

[5] MÜLLER A, STOYAN D *Comparison methods for stochastic models and risks* Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, Chichester, 2002

[6] SAMANIEGO F. J., *System Signatures and their Applications in Engineering Reliability*, Springer Science+Business Media, LLC, 2007.