

# A. Distribución t-Student [23]

Dadas  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes distribuidas normalmente con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ .

Sea  $\bar{x}_n = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}{n}$  la media muestral. Entonces,

$$Z = \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (\text{A.1})$$

sigue una distribución normal de media 0 y varianza 1.

No obstante, no siempre se conoce de antemano la varianza,  $\sigma^2$ . Se define así una nueva variable,

$$t = \frac{\bar{x}_n - \mu}{s_n/\sqrt{n}} \quad (\text{A.2})$$

donde  $s_n$  es la desviación estándar de la muestra, que viene dada por,

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 \quad (\text{A.3})$$

Entonces, la variable aleatoria t tiene distribución t-Student con  $\nu = n - 1$  grados de libertad.

## A.1. Prueba t-Student

Cuando la variable aleatoria tiene una distribución t-Student, se puede aplicar sobre esa variable la prueba t-Student. La hipótesis nula,  $H_0$ , que usamos es  $\bar{x} = \mu$  ( $t=0$ ) y el resultado que observamos para t nos dirá cuán de probable es equivocarnos rechazando la hipótesis nula. Asimismo, es necesario definir cuál es el intervalo de confianza que adoptaremos para rechazar o no la hipótesis nula.

Si  $\bar{x}$  y  $s$  son la media y la desviación estándar de una muestra aleatoria que sigue una distribución normal con media  $\mu$  y con varianza desconocida  $\sigma^2$ , se tiene que,

$$\text{Prob}\left(-t_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{s_n/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \quad (\text{A.4})$$

donde  $t_{\alpha/2}$  es tal que el área en el intervalo  $[t_{\alpha/2}, \infty)$  =  $\alpha/2$  (ver figura A.1).

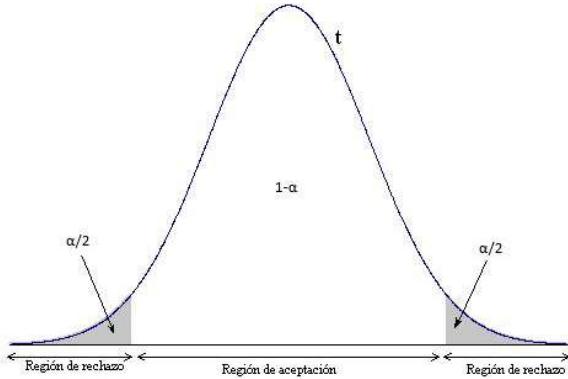


Figura A.1: Distribución t-Student. Figura recuperada de [24].

En la figura A.1, si el valor observado de  $t$  está en la región de aceptación  $-t_{\alpha/2} \leq t \leq t_{\alpha/2}$ , se acepta la hipótesis nula y si está en la región de rechazo,  $|t| > t_{\alpha/2}$ , se rechaza. La probabilidad de rechazar una hipótesis nula verdadera es  $\alpha$  y nuestro nivel de confianza es  $100(1 - \alpha)\%$ .

### Prueba t-Student para las medias de dos poblaciones

Dadas dos distribuciones normales con distintas varianzas  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$ , queremos decidir si sus medias  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son iguales. Entonces, con las medias  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  y las desviaciones estándar  $s_1$  y  $s_2$ , de dos muestras de tamaños  $n_1$  y  $n_2$ , definimos la variable  $t$ , que sigue una distribución t-Student si  $\mu_1 = \mu_2$ ,

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} \quad (\text{A.5})$$

donde  $s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$  es,

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \quad (\text{A.6})$$

Los grados de libertad de esta distribución,  $\nu$ , vienen dados por la ecuación de Welch-Satterthwaite,

$$\nu = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{(s_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)} \quad (\text{A.7})$$

Se define la hipótesis nula,  $H_0$ , como,

$$H_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad (\text{A.8})$$

La expresión anterior implica que no existe diferencia entre las medias de las muestras 1 y 2, es decir,  $\mu_1 = \mu_2$ . Para rechazar o no  $H_0$ , hemos decidido considerar un intervalo de confianza al 95 %. Tenemos que,

$$0,95 = (1 - \alpha) \quad (\text{A.9})$$

entonces,  $\alpha/2 = 0,025$ . Por tanto, si  $t$  se encuentra dentro del intervalo  $[-t_{0,025}, t_{0,025}]$  aceptamos la hipótesis nula, mientras que si  $t$  no pertenece a dicho intervalo rechazamos la hipótesis nula.

## B. Dosis producida por fuentes de rayos $\gamma$ [25]

Las fuentes de rayos  $\gamma$  emiten fotones. Los principales procesos de interacción de los fotones con la materia son el efecto fotoeléctrico, la dispersión Compton y la producción de pares. Todos estos procesos contribuyen al coeficiente de atenuación,  $\mu$ . Conociendo el coeficiente de atenuación y el número de fotones emitidos por segundo desde la fuente, intensidad  $I_0$ , se puede calcular el número de fotones por unidad de tiempo que atraviesan sin interaccionar un espesor  $l$  de un material determinado,

$$I = I_0 e^{-\mu l} \quad s^{-1} \quad (\text{B.1})$$

No obstante, la ecuación anterior es válida siempre que la radiación incidente sea monoenergética y el haz incidente sea colimado.

Si las fuentes son múltiples, debido a que los campos de rayos gamma son campos escalares, los efectos de las fuentes de radiación se pueden obtener a partir del sumatorio de las intensidades procedentes de fotones con distinta energía y obtener así la radiación que es absorbida por el medio. A continuación, veremos los casos de una fuente puntual emitiendo radiación en el centro de un medio material homogéneo e isótropo y el modelo de nube radiactiva en el que la fuente es una esfera radiactiva homogénea y cuya radiación es registrada en su centro por un objeto de una determinada densidad.

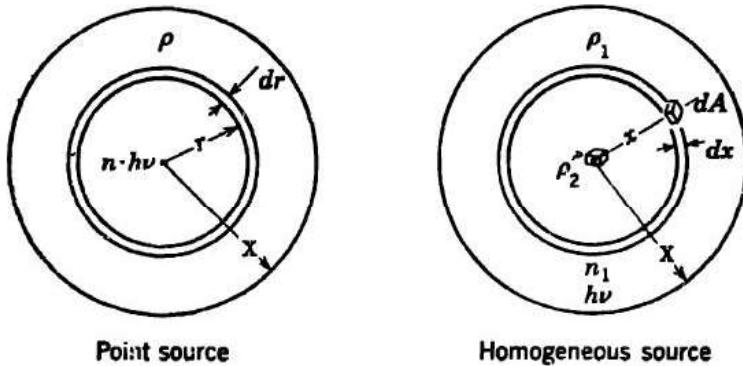


Figura B.1: Geometría y notación de los modelos que se van a estudiar: fuente puntual (izquierda) y modelo de nube radiactiva (derecha). Figura recuperada de [25].

### B.1. Fuente puntual

Vamos a considerar una distribución de radiación ionizante primaria (fotones emitidos por la fuente que todavía no han interaccionado con la materia) y secundaria (fotones que ya han sufrido alguna interacción sin haber sido absorbidos) producida por una fuente puntual en un medio isótropo

(figura izquierda B.1). Suponemos que la fuente puntual emite  $n$  fotones/s cada uno con una energía  $h\nu$ , entonces la tasa de fluencia energética  $\dot{\Psi}_{prim}$  a una distancia  $r$  de la fuente es,

$$\dot{\Psi}_{prim} = \frac{nh\nu}{4\pi r^2} e^{-\mu_0 r} \quad MeV/(cm^2 \cdot s) \quad (B.2)$$

y la tasa de dosis de la radiación primaria incidente en  $r$  es,

$$R_{prim} = \dot{\Psi}_{prim} \frac{\mu_a}{\rho} \quad MeV/(g \cdot s) \quad (B.3)$$

donde  $\rho$  es la densidad en  $g/cm^3$ ,  $\mu_0$  es el coeficiente de atenuación total,  $\mu_a = \mu_0 - \sigma_s$  es el coeficiente de absorción del medio y  $\sigma_s$  es el coeficiente de dispersión Compton, estos últimos expresados en  $cm^{-1}$ .

En una delgada capa esférica de espesor  $dr$ , el ritmo de absorción de energía o potencia absorbida en las colisiones primarias,  $dP_{prim}$ , es el producto de  $R_{prim}$  y la masa de la capa,

$$dP_{prim} = \rho \cdot 4\pi r^2 dr R_{prim} = nh\nu \mu_a e^{-\mu_0 r} dr \quad MeV/s \quad (B.4)$$

Integrando la ecuación anterior se obtiene la potencia total  $P_{prim}$  absorbida en las colisiones primarias dentro de una esfera de radio arbitrario  $X$ . Entonces,

$$P_{prim} = \int dP_{prim} = nh\nu \mu_a \int_0^X e^{-\mu_0 r} dr = nh\nu \frac{\mu_a}{\mu_0} (1 - e^{-\mu_0 X}) \quad MeV/s \quad (B.5)$$

Extendiendo  $X$  a infinito, tenemos la potencia total absorbida en todas las colisiones primarias en el espacio.

$$P_{prim} = nh\nu \frac{\mu_a}{\mu_0} = nh\nu \frac{\mu_0 - \sigma_s}{\mu_0} = nh\nu - nh \frac{\sigma_s}{\mu_0} \quad MeV/s \quad (B.6)$$

Se observa que es menor que la potencia emitida  $nh\nu$  MeV/s. La diferencia entre ambas representa la energía transferida a los fotones secundarios por unidad de tiempo.

Vamos a obtener la potencia de absorción debida a estos fotones secundarios. Definimos el factor de acumulación,  $B$ , que tiene en cuenta la contribución adicional de la radiación dispersa añadida a la radiación primaria. Si la contribución total debida a la radiación primaria es  $N_p$  y la contribución de la radiación secundaria es,  $N_d$ , se define,

$$B = \frac{N_p + N_d}{N_d} = 1 + \frac{N_p}{N_d} \quad (B.7)$$

Este factor nos permite obtener la potencia de absorción en las colisiones secundarias, pues podemos redefinir  $B$  como,

$$B = 1 + \frac{dP_{sec}}{dP_{prim}} \quad (B.8)$$

Aproximadamente, podemos considerar que  $B$  aumenta linealmente con el número de recorridos libres medios  $\mu_0 r$  que realiza la radiación primaria. Suponemos así que,

$$B \approx 1 + a(\mu_0 r) \quad o \quad dP_{sec} \approx a(\mu_0 r) dP_{prim} \quad (B.9)$$

donde  $a$  es una constante sin dimensiones cuya expresión la vamos a obtener más tarde aplicando conservación de la energía.

Teniendo en cuenta la expresión de  $dP_{prim}$  tenemos,

$$dP_{sec} = a(\mu_0 r) nh\nu \mu_a e^{-\mu_0 r} dr \quad MeV/s \quad (B.10)$$

Si integramos la expresión anterior a lo largo de una esfera de radio  $X$ ,

$$P_{sec} = \int dP_{sec} = a\mu_0 \mu_a nh\nu \int_0^X r e^{-\mu_0 r} dr = a \frac{\mu_a}{\mu_0} nh\nu [1 - e^{-\mu_0 X} (1 + \mu_0 X)] \quad MeV/s \quad (B.11)$$

Cuando  $X$  tiende a infinito llegamos a,

$$P_{sec} = a \frac{\mu_a}{\mu_0} nh\nu \quad MeV/s \quad (B.12)$$

Podemos obtener la constante  $a$  fácilmente porque el resultado anterior es igual a la diferencia entre la absorción primaria y la potencia total  $nh\nu$ . Por tanto,

$$P_{sec} = a \frac{\mu_a}{\mu_0} nh\nu = \frac{\sigma_s}{\mu_0} nh\nu \quad MeV/s \quad (B.13)$$

y entonces,

$$a = \frac{\sigma_s}{\mu_a} \quad (B.14)$$

Así para una esfera de radio  $X$ ,

$$P_{sec} = \frac{\sigma_s}{\mu_0} nh\nu [1 - e^{-\mu_0 X} (1 + \mu_0 X)] \quad MeV/s \quad (B.15)$$

## B.2. Modelo de nube radiactiva

Lo que nos interesa para nuestro objetivo es obtener la energía de absorción primaria y secundaria en el centro de una esfera homogénea de material radiactivo. Se define  $n_1$  desintegraciones por gramo y por segundo dentro de la nube, donde cada fotón emitido tiene una energía  $h\nu$ . Entonces, si  $\rho_1$  es la densidad de la nube, la energía de emisión de los fotones por unidad de tiempo y volumen es,

$$n_1 h\nu \rho_1 \quad MeV/(cm^3 \cdot s) \quad (B.16)$$

Se quiere estimar la tasa de dosis debida a la radiación primaria y secundaria en un pequeño detector de densidad  $\rho_2$  en el centro de la nube.

Utilizamos en los coeficientes de absorción y dispersión Compton los subíndices 1 y 2 cuando hacemos referencia a la nube radiactiva y al detector respectivamente.

Dado un elemento de la nube de volumen  $dA \cdot dx$  (figura B.1, derecha) la emisión total es  $n_1 h\nu \rho_1 dA dx$  y la tasa de fluencia energética de los fotones primarios en el centro es,

$$d\dot{\Psi}_{prim} = n_1 h\nu \rho_1 \cdot dA \cdot dx \cdot \frac{1}{4\pi x^2} e^{-\mu_{01} x} \quad (B.17)$$

Si  $dA = 4\pi x^2$ ,

$$d\Psi_{prim} = n_1 h\nu \rho_1 e^{\mu_{01}x} \quad MeV/(cm^2 \cdot s) \quad (B.18)$$

En el centro de la nube, la energía absorbida de la radiación primaria por unidad de masa y tiempo es,

$$dR_{prim} = d\Psi_{prim} \frac{\mu_{a2}}{\rho_2} \quad MeV/(g \cdot s) \quad (B.19)$$

Entonces la tasa de dosis en el centro, para la radiación primaria procedente de una esfera uniforme con radio  $X$ , es,

$$R_{prim} = \int dR_{prim} = n_1 h\nu \rho_1 \frac{\mu_{a2}}{\rho_2} \int_0^X e^{-\mu_{01}x} dx = n_1 h\nu \frac{\mu_{a2}/\rho_2}{\mu_{01}/\rho_1} (1 - e^{-\mu_{01}X}) \quad (B.20)$$

Si  $h\nu$  está en el rango entre 0,1 y 10 MeV y  $Z$  se encuentra comprendido entre los valores 1 y 50, los coeficientes básicos de absorción,  $\mu_a/\rho$ , son independientes del medio por lo que  $(\mu_{a2}/\rho_2) \approx (\mu_{a1}/\rho_1)$ . Entonces la ecuación anterior nos queda,

$$R_{prim} \approx n_1 h\nu \frac{\mu_{a1}}{\mu_{01}} (1 - e^{-\mu_{01}X}) \quad MeV/(g \cdot s) \quad (B.21)$$

Esta ecuación es completamente análoga a la obtenida para el caso de una fuente puntual situada en el centro de una distribución esférica salvo que en este caso, los papeles de fuente y absorbente se han invertido. Al igual que hemos hecho para una fuente puntual, se puede obtener la tasa de dosis debida a los fotones secundarios,

$$dR_{sec} \approx \frac{\sigma_{s1}}{\mu_{a1}} (\mu_{01}x) dR_{prim} \quad MeV/(g \cdot s) \quad (B.22)$$

Así,

$$R_{sec} = \int dR_{sec} = n_1 h\nu \rho_1 \frac{\mu_{a2}}{\rho_2} \frac{\sigma_{s1}}{\mu_{a1}} \mu_{01} \int_0^X x e^{-\mu_{01}x} dx = n_1 h\nu \frac{\mu_{a2}/\rho_2}{\mu_{a1}/\rho_1} \frac{\sigma_{s1}}{\mu_{01}} [1 - e^{-\mu_{01}X} (1 + \mu_{01}X)] \quad (B.23)$$

Finalmente, como hemos visto antes, podemos decir que  $(\mu_{a2}/\rho_2) \approx (\mu_{a1}/\rho_1)$ , y

$$R_{sec} \approx n_1 h\nu \rho_1 \frac{\sigma_{s1}}{\mu_{01}} [1 - e^{-\mu_{01}X} (1 + \mu_{01}X)] \quad MeV/(g \cdot s) \quad (B.24)$$

Si consideramos que el radio de la esfera radiactiva es infinito, es decir, que las dimensiones de la fuente son lo suficientemente grandes en comparación con el recorrido libre medio de la radiación  $\mu_{01}X \gg 1$  y que  $R = R_{prim} + R_{sec}$ , la energía absorbida total por unidad de masa y tiempo, obtenemos,

$$R = n_1 \left( \frac{\text{desint.}}{g \cdot s} \right) h\nu \left( \frac{MeV}{\text{desint.}} \right) \quad (B.25)$$

## C. Cadena de desintegración del $^{238}U$

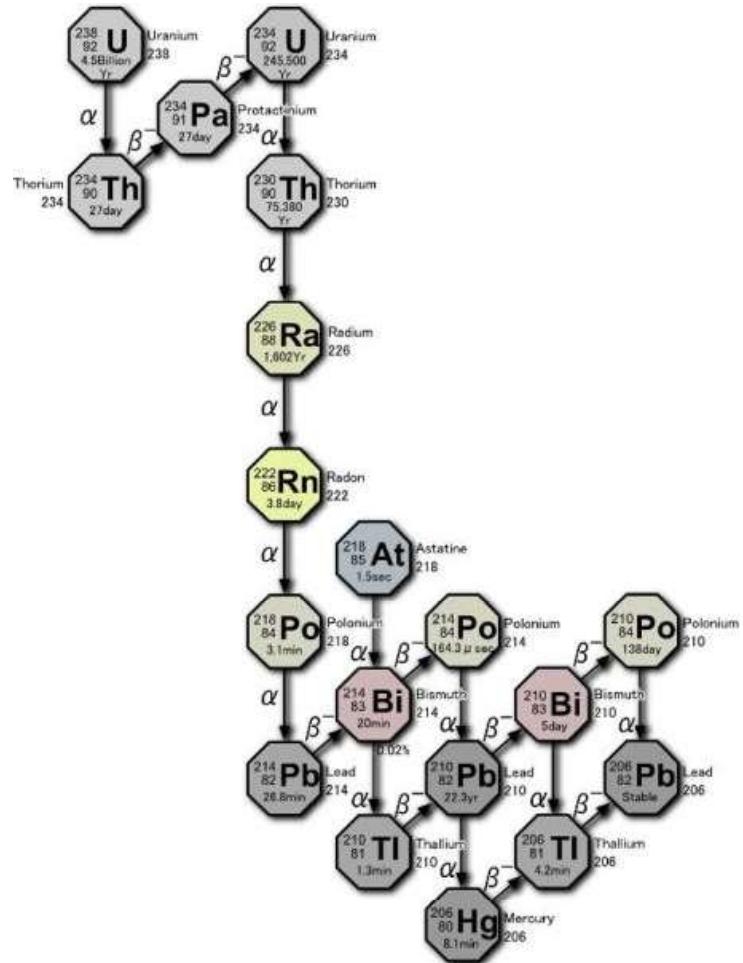


Figura C.1: Cadena de desintegración del  $^{238}U$ . Figura recuperada de [26].