Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Máster

Didáctica del logaritmo para primero de bachillerato

Didactic of the logarithm for the first year of high school

Autor

Miguel Samplón Chalmeta

Director

Víctor Manero García

FACULTAD DE EDUCACION

2020

Introducción

¿Pero cómo transformar el saber para hacerlo provisionalmente inteligible, sin hacerlo demasiado falso en los aspectos que no puedan ser borrados?¿Y cómo rectificar a continuación los errores?

Guy Brousseau
Utilidad e interés de la didáctica para un profesor

El presente documento constituye la memoria presentada por el autor del Trabajo Fin de Máster (TFM), del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas de la Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza, dentro del curso 2019-2020.

En él se pretende concretar y justificar una didáctica de un objeto matemático concreto utilizando para ello los conocimientos adquiridos en el máster, así como las aportaciones de las revisiones bibliográficas que todo trabajo de este tipo comporta. Un TFM no necesariamente tiene que constituir un trabajo de investigación en didáctica y éste no pretende serlo. En una decisión deliberada, para su elaboración se ha evitado consultar otros TFM de la misma temática y elaborados en el mismo máster de la Universidad de Zaragoza. Dado que ambos beberían del mismo *corpus* de teoría es posible que tuviesen muchos puntos en común y el autor prefería tener su génesis propia de ideas, aunque fueran similares, y no verse atrapado por lo expuesto en un TFM previo.

Se estructura en tres grandes bloques. En el primero, que abarca desde la sección 1 hasta la sección 3 inclusive, se establece el objeto matemático y se revisan los elementos que van a guiar la decisiones a tomar para la creación de la didáctica: normativa curricular, origen histórico y bibliografía sobre el tema.

En el segundo bloque, secciones 4 hasta la 9, se construye el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) a partir del cual se establecen las razones de ser, campos de problemas, técnicas y tecnologías. Tras ello, se plantea una posible secuenciación y se analizan algunos libros de texto comerciales para ver su grado de adecuación a la propuesta presentada. Para evitar la influencia del *currículo de facto* que estos libros representan, se ha retenido este análisis hasta tener construida la propuesta.

En el tercer bloque, que corresponde a la sección 10, se diseña y analiza en profundidad una prueba de evaluación construida en base a todas las secciones anteriores.

Índice

1 Objeto matemático a enseñar

El presente documento pretende construir las bases de una secuencia didáctica sobre el concepto de logaritmo que se encuadra en la asignatura de Matemáticas I dentro de la modalidad de Ciencias del primer curso de bachillerato.

Una posible definición formal del logaritmo (Spivak, 2012) se puede establecer caracterizándolo como la función de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ que verifica:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Sin embargo esta definición ni pone de manifiesto de forma directa sus propiedades, ni su utilidad, ni su importancia intrínseca. En una primera lectura se antoja como una definición arbitraria y hasta caprichosa y sin mayor interés que muchas otras funciones que se podrían haber considerado, por ejemplo variando el integrando. Gran parte del contenido del presente trabajo consiste en analizar de qué forma puede incorporarse esos matices (importancia, interés, propiedades...) en la presentación de la misma.

El marco teórico en el que se circunscribe es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999; Otero et al. 2013). Existe una evidente conexión entre los logaritmos, las exponenciales y el número e. Aunque el objeto de este TFM es fundamentalmente la problemática didáctica de los primeros, resultará inevitable hacer referencia a los otros dos.

Para avanzar en el establecimiento de una razón de ser que justifique la presencia de los logaritmos en los programas curriculares podemos realizar una primera enumeración no exhaustiva de los campos o aplicaciones en los que los logaritmos hacen notar su presencia:

- Linealización de funciones con factores multiplicativos (regresión lineal)
- Compresión de escalas. Representación gráfica.
- Definición de magnitudes relativas (dB).
- Definición de pH (Watters & Watters, 2006).
- Definición de la escala sismológica Richter.
- Datación Carbono14 (es la inversa de un proceso exponencial).
- Subsidiariamente, como inversa de la función exponencial (transitorios eléctricos, ecuaciones diferenciales lineales, temporizaciones.)
- Estadística, distribuciones, entropía, información.
- Complejidad algorítmica. Tiempos de búsquedas en árboles binarios.
- Sentido numérico. Ordenes de magnitud. Prefijos de unidades

Basándonos en esta enumeración, podemos realizar un análisis de las finalidades que puede tener el conocimiento de los logaritmos a partir de la clasificación dada por Rico (2016). Este análisis condicionará el modo en que se van a presentar los contenidos.

Finalidad cultural. Todas los aspectos de la matemáticas forman parte de nuestra herencia cultural y, así, esta finalidad resulta obvia. Sin embargo ¿qué nivel de importancia han tenido los logaritmos en el desarrollo de nuestra cultura en comparación con otros elementos: cálculo diferencial, Teorema de Pitágoras, numeración posicional...? En cualquier caso, no parece que este criterio por sí solo sea suficiente para su inclusión en el currículo.

Finalidad funcional. Es decir, su utilización en los procesos habituales que llevamos a cabo en el día a día. Es evidente que los logaritmos se emplean escasamente por el ciudadano medio[1]. Pese a todo, cabe indicar aquí el apoyo que los logaritmos pueden aportar al sentido numérico: clasificación de cantidades en órdenes de magnitud.

Finalidad formativa. Como elemento estimulante del desarrollo cognitivo. Ciertamente; pero no es el único contenido posible para ello, de forma que esta finalidad no justifica por sí misma su presencia.

Finalidad política. Es decir, favorecer nuestro desempeño como ciudadanos y nuestra capacidad de análisis de la sociedad. La sobresaturación actual de información y el uso masivo de datos hacen cobrar cada vez más importancia a este aspecto. Las dependencias exponenciales son frecuentes y su conocimiento mejorará la interpretación y análisis de gráficas. En este sentido y a modo de ejemplo, nos remitimos a toda la comunicación reciente sobre la evolución de la infección por COVID-19.

Finalidad instrumental. Como objeto cuyo conocimiento da soporte a otros que vendrán. Seguramente, la funcionalidad más importante. Está en concordancia con el hecho de que su presentación se ha relegado prácticamente al bachillerato. Su uso como herramienta aritmética —que constituyó su origen histórico— actualmente ha decaído. Fuera de eso, las funciones exponencial y logarítmica, son elementos de indudable interés, pero cuando se ponen al servicio de otros contenidos de mayor envergadura.

Para la elaboración de la secuencia didáctica se analizarán previamente las referencias curriculares al objeto matemático así como la bibliografía sobre el tema. A partir de todo ello se construirá un MER que vertebrará toda la secuencia. Todo esto se desarrollará en las siguientes secciones.

2 Análisis Curricular

La construcción de una secuencia didáctica tiene que atender a las referencias legislativas curriculares del objeto. Este apartado está dedicado a su análisis, no sólo para el curso para el que está destinada la secuencia didáctica, sino que se ampliará a toda la educación secundaria a fin de disponer de una visión general sobre la aparición de los diferentes aspectos del objeto, o elementos relacionados, a lo largo de los cursos. Para ello se va recurrir a la Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo, así como a la Orden

[1] Habría aquí un debate sobre si no se enseñan antes porque no se emplean o no se emplean porque no se enseñan. Lo mismo podría decirse del resto de las matemáticas.

ECD/489/2016, de 26 de mayo que se integran dentro de los diferentes desarrollos autonómicos de la actual Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE). En lo que sigue se expondrán las conclusiones obtenidas, dejando la transcripción de las partes relevantes de la normativa para el anexo A.

Existen dos elementos claros de referencia: la exponenciación y los logaritmos en sí. Y en ambos casos pueden considerarse desde dos ópticas: como una operación aritmética o como una función. Esto se evidencia en los currículos al incluir contenidos de ambos en el bloque de *números y álgebra* y en el de *funciones* ó *análisis*.

2.1 Números y álgebra

Para la parte aritmético-algebraica la evolución es como sigue. En 1º y 2º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) únicamente se tratan la exponenciación de números enteros y fraccionarios con exponente natural. En 3º de ESO, aplicadas, se amplía lo anterior a exponentes enteros, pero con base natural y en 4º de ESO, aplicadas, se culmina el desarrollo de la exponenciación con la introducción de los número reales[2].

En 3º ESO, académicas, se tratan las potencias de racionales con exponente entero. En 4º ESO se amplia la exponenciación a exponente fraccionario y se introducen por primera vez los logaritmos. Dentro de los estándares de aprendizaje se habla de *la aplicación de sus propiedades*, por lo que se puede suponer que, además de la utilización de diferentes bases, se incluyen las propiedades de conversión de sumas en productos. No hay mención específica al número e ni a los logaritmos neperianos.

Actualmente se puede acceder al bachillerato tanto desde la opción de enseñanzas académicas como desde las aplicadas de la ESO, tal como viene regulado en el Real Decreto 562/2017, de 2 de junio. Por otra parte, no resulta inhabitual que, de forma práctica, la parte de logaritmos de 4º ESO académicas se vea muy reducida o eliminada en caso de limitaciones temporales a fin de cubrir todo el temario. Por ello, puede darse la circunstancia de que haya estudiantes que accedan a bachillerato sin haber tenido contacto con este objeto matemático.

En 1º de bachillerato, ciencias sociales, se generaliza el uso de la aritmética a *operaciones con números reales*. Dentro del álgebra, se especifican las ecuaciones exponenciales y logarítmicas. En 2º de bachillerato, ciencias sociales, no hay menciones explícitas dentro del bloque de números y álgebra, lo que evidencia que la presentación de estos contenidos concluye en el curso anterior y en éste se usan de forma instrumental.

En 1º de bachillerato, ciencias, se presentan los logaritmos, el número e y los logaritmos neperianos; propiedades y ecuaciones. En los estándares de aprendizaje se hace una mención específica a su aplicación a *fenómenos físicos, biológicos y económicos*. Con esto también concluye su presentación dado que en 2º de bachillerato, ciencias,

[2]Lo que se indica explícitamente es *Interpretación y utilización de los números reales y las operaciones en diferentes contextos*.

	$\{\mathbb{Z},\mathbb{Q}\}^{\mathbb{N}}$	$\{\mathbb{N}\}^{\mathbb{Z}}$	$\{\mathbb{Q}\}^{\mathbb{Z}}$	$\{\mathbb{Q}\}^{\mathbb{Q}}$	Logaritmo Propiedades	Número e Log. neper.	Ecuaciones Logarítmicas
1º ESO	✓						
2º ESO	✓						
3º ESO Apli.		✓					
4º ESO Apli.				✓			
3º ESO Aca.			✓				
4º ESO Aca.				✓	✓		
1º Bach. C.S.				✓			✓
2º Bach. C.S.							
1º Bach. C.					✓	✓	✓
2º Bach. C.							

Cuadro 1: Presencia de la exponenciación y logaritmización en los bloques de números y álgebra de los diferentes currículos. La notación $\{\mathbb{Q}\}^{\{\mathbb{Z}\}}$ representa exponenciales de base racional y exponente entero. De la misma forma se interpretan los otros símbolos.

no hay mención explícita a ellos en la parte de números y álgebra.

Toda la información anterior se recoge de forma esquemática en el cuadro 1.

2.2 Funciones

No hay referencia a las funciones exponencial y logarítmica hasta 3º ESO inclusive. En 4º ESO, aplicadas no aparecen explícitamente en los contenidos, pero en los estándares de aprendizaje se indica el reconocimiento de la función exponencial en representaciones gráficas así como la capacidad de detectarla en situaciones de la vida real. Para la modalidad de académicas lo anterior se hace extensivo a la función logarítmica también.

Los contenidos curriculares con respecto a este tema son similares para 1º Bachillerato en las dos modalidades de ciencias y ciencias sociales. Se presentan las funciones exponencial y logarítmica y se inicia el Análisis hasta llegar a la derivada. En la opción de ciencias sociales el tratamiento es más liviano: solo se indica *identificación de la expresión analítica y gráfica*. Por contra, en la opción de académicas se realiza una mayor profundización en esos contenidos. En ambos cursos se concluye el tratamiento *per se* de esas funciones. En 2º de bachillerato se tratan cuestiones generales de análisis para las que esas funciones pueden tener un papel instrumental.

El cuadro 2 muestra un resumen de lo expuesto en este apartado.

2.3 1º de bachillerato, ciencias

A modo de conclusión de lo anterior y considerando en más detalle el currículo de 1º de bachillerato, ciencias, podemos apuntar lo siguiente:

- En este curso aparecen los logaritmos en su vertiente aritmético/algebraico y como funciones, incluyendo el número e y los logaritmos naturales. En el curso siguiente no se mencionan explícitamente, por lo que se hará un uso instrumental de los mismos. Por tanto, en este curso se da por terminada su presentación.

	Exp. Ident. Gráfica	Log Ident. Gráfica	Exp Derivada	Log Derivada	Exp Análisis II	Log Análisis II
1 ESO						
2 ESO						
3 ESO Apli.						
4 ESO Apli.	✓					
3 ESO Aca.						
4 ESO Aca.	✓	✓				
1 Bach. C.S.	✓	✓	✓	✓		
2 Bach. C.S.					✓	✓
1 Bach. C.	✓	✓	✓	✓	✓	✓
2 Bach. C.					✓	✓

Cuadro 2: Presencia de las funciones exponenciales y logarítmicas en los diferentes currículos

- Aunque los logaritmos aparecen por primera vez en el cuarto curso de la ESO, académicas, no hay garantía que todos los estudiantes de primero de bachillerato, ciencias, los hayan visto con antelación.
- El principal conocimiento previo requerido —la exponenciación con números racionales— queda adecuadamente cubierto en los cursos previos.
- No se realiza en cursos previos una presentación rigurosa de los números reales[3]. Por ello los logaritmos se introducirán en base a los racionales y se asumirá su extensión a los reales.
- Prácticamente todo el bloque 1 (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas) del currículo es aplicable a este objeto matemático. Sin embargo, entre ellos destacamos los referentes a la práctica de las demostraciones matemáticas, que aparecen por primera vez.

3 Estado de la enseñanza-aprendizaje

En ausencia de una experiencia previa del autor en la docencia del tema, se ha confiado en la bibliografía publicada para tener una visión de los distintos enfoques y dificultades asociadas que se han venido empleando para la enseñanza de los logaritmos. Adicionalmente, la consulta del origen histórico de los diferentes objetos aporta una valiosa información sobre los motivos que dieron pie a la aparición de esos objetos y en qué forma fueron construidos.

3.1 Dificultades de la enseñanza

La bibliografía es esencialmente unánime con respecto a la dificultad de la enseñanza de los logaritmos y los problemas que tienen los docentes y discentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje[4].

[3]Requería de unas matemáticas excesivamente sofisticadas.

[4]Desde un cierto punto de vista, ésto tampoco resulta demasiado significativo. No es habitual escribir artículos o comunicaciones a congresos sobre temas que se consideran resueltos, por lo que todos los documentos de este tipo se inician declarando la dificultad de la tarea.

A continuación se presenta una clasificación de los errores cometidos por los estudiantes y que se exponen en la literatura. La población que se analiza suele estar constituida por estudiantes de últimos años de secundaria y primeros años de universidad:

Desconocimiento, conocimiento impreciso de la definición de logaritmo. (Aziz, Pramudiani & Purnomo, 2017), (Chua & Wood, 2005)

Manipulación indebida del símbolo del logaritmo (log). Consideración del símbolo como una variable con significado en sí mismo y no como un operador. (Aziz et al. 2017). A modo de ejemplo es interesante observar los siguientes vídeos referentes a las ecuaciones logarítmicas que se encuentran en Internet cuyo tratamiento de esta simbología permite trazar, en los dos primeros, la técnica que se constituye en el posible origen de este error.

Susi Profe. Ecuaciones logarítmicas[5]
Unicoos. Ecuación logaritmica 01 Bachillerato matemáticas[6]
NancyPi. Solving Logarithmic Equations... How?[7]

Uso incorrecto de la propiedad distributiva en el logaritmo. Considerar que $\log(a+b) = \log(a) + \log(b)$. Podría considerarse un obstáculo epistemológico al tratar de aplicar las mismas reglas que son válidas para los números reales: distributiva del producto, en este caso, el símbolo log, con respecto a la suma (Berezovski, 2008), (Chua & Wood, 2005).

Falta de comprobación de las soluciones (Chua & Wood, 2005)

Descuidos de razonamiento o procesamiento Errores debido a una manipulación descuidada, pero que no son achacables a desconocimiento. (Aziz et al. 2017),

Movshovitz-Hadar, Zaslavsky y Inbar (1987) realizan una clasificación de errores genérica y adaptable a cualquier objeto matemático, mediante la que establecen seis categorías:

a) Utilización/interpretación incorrecta de los datos.
b) Interpretación inadecuada del lenguaje.
c) Realización de inferencias erróneas.
d) Utilización de una definición o teorema de forma distorsionada.
e) Falta de verificación de la solución.
f) Error técnico.

En base a esta clasificación, Ganesan y Dindyal (2014) realizan un estudio en el que se detecta que los mayores errores cometidos en un ejercicio de logaritmos caen dentro de la categoría d), especificada en este contexto como *improper or incorrect use of the laws of logarithms*. Su estudio no parece cubrir la parte de logaritmos como funciones.

[5] https://youtu.be/EnHi4XPmfB4?t=35
[6] https://youtu.be/g9tfN-oiG4s?t=127
[7] https://youtu.be/rBnQiLa2TYo?t=159

Mas interesante resulta el estudio de Rafi y Retnawati (2018) en el que se realiza un test con diferentes problemas con el que tratan de analizar la respuesta de los estudiantes a diferentes aspectos de los logaritmos. Cada uno de los problemas los analizan en base a la clasificación de Movshovitz, concluyendo que para problemas referentes a las propiedades de los logaritmos los errores caen mayoritariamente en la categoría de errores técnicos, mientras que para problemas de ecuaciones logarítmicas se encuentran mucho más repartidos entre el mal uso de los datos, falta de verificación de la solución y error técnico.

En su tesis de máster, Berezovski (2008) realiza una profunda revisión de la teoría del entendimiento como punto de partida para diseñar una secuencia didáctica en base a ese objetivo. Dentro de esa teoría, de especial interés resulta el trabajo de Skemp (1978). En él se establece dos tipos de entendimiento con respecto a las matemáticas: relacional e instrumental. El segundo implica conocer los procedimientos para realizar/resolver los problemas mientras que el primero pretende crear una red de relaciones entre conceptos de forma que permita decidir qué hay que hacer y porqué hay que hacerlo de esa forma. Skemp apunta a ventajas e inconvenientes de cada método, dependiendo de la finalidad y contexto. Por otra parte, ésto se aplica tanto a la orientación del profesor a la hora de plantear la didáctica, como a la forma en que el estudiante interpreta la información. Así, puede surgir conflictos si profesor y alumnos no afrontan la docencia/enseñanza de la misma forma.

Quizá sea demasiado restrictivo realizar una división tajante entre ambas y en muchos casos se va progresando de una forma a la otra. Con referencia a la TAD la comprensión instrumental la podríamos relacionar con el momento de trabajo de la técnicas, frente a la comprensión relacional que progresa hacia tecnologías y teorías y adquiere mayor incidencia en los momentos de institucionalización. Skemp más adelante introduce una tercer alternativa al modo de entendimiento: el entendimiento formal, que permite relacionar conceptos con la simbología que se emplea (o empleará) para representarlos.

3.2 Metodologías

Desde un punto de vista metodológico la bibliografía suele indicar que el uso común consiste en introducir el concepto de logaritmo a través de su definición euleriana, esto es, como inverso de la exponenciación. Dados los problemas detectados en los estudiantes en el uso de los logaritmos, parece que esta aproximación no resulta óptima[8]. Lo cierto es que constituye una definición indirecta que obliga a realizar una pirueta mental para pensar en términos de exponenciales: *¿a qué número debo elevar b para obtener A?* Se han propuesto diferentes vías de ataque del problema:

Con base histórica Recorrer el camino histórico de la génesis de los logaritmos (Toumasis, 1993; Panagiotou, 2011), fundamentalmente apoyándose en la relación entre

[8] Otra cuestión es si existen alternativas mejores.

progresiones aritméticas y geométricas.

A partir de las propiedades del logaritmo Define el logaritmo esencialmente como una función que convierte productos en sumas, deduce propiedades y finalmente la conecta con la exponencial. (Seebeck & Hummel, 1959)

Con trucos notacionales Destinados a facilitar la pirueta mental antes aludida para definir el logaritmo en base a la inversa de la exponencial. (Hurwitz, 1999; Hammack & Lyons, 1995)

Análisis de covariación de secuencias Esta técnica, de aplicación más amplia, introduce el concepto de función como dos secuencias numéricas con entidad propia que se ponen en relación. (Confrey & Smith, 1995; Ferrari-Escolá, Martínez-Sierra & Méndez-Guevara, 2016)

Generalización del concepto de duplicar, triplicar... (Kuper & Carlson, 2020). Este método ha tenido una cierta atención en la literatura. Así como la división puede entenderse como la búsqueda del número de veces que puede restarse el divisor al dividendo, la logaritmización puede entenderse como la búsqueda del número de veces que puede dividirse un número por la base del logaritmo. Sin embargo su aplicación práctica no resulta sencilla.

Con base geométrica Basadas en construcciones históricas del logaritmo dadas por María Agnesi (1718-1799) y otros. (Vargas, Pérez & González, 2011; Vargas, Cortés & Olaya, 2014). Resultan interesantes desde un punto de vista histórico y rescatan la figura de María Agnesi. Sin embargo, quizá su uso resultaría un tanto artificial hoy.

Reglas de cálculo Mostrar y utilizar las reglas de cálculo como elemento de ilustración de las propiedades de los logaritmos. (Wolbert, 2012; Higuera de Frutos, 2016)

3.3 Génesis histórica

Resulta interesante revisar la génesis histórica de los logaritmos para comprender los motivos que propiciaron su definición. Dada la gran profusión de literatura al respecto no se pretende realizar aquí un recorrido por todos los detalles, para lo que nos remitimos a la fuentes bibliográficas (Ayoub, 1993; Bruce, 2002; Cajori, 1913; Roegel, 2010; Dorce, 2014a; Dorce, 2014b). Algunos autores presentan la revisión histórica en conexión con secuencias didácticas (Toumasis, 1993; Panagiotou, 2011). Dentro ya de la historia de nuestro país resulta especialmente interesante la monografía de Roldán de Montaud y Sampayo Yáñez (2015), donde se incluye una amplia referencia a las tablas de logaritmos de Vicente Vázquez Queipo (1804-1893), que, en sus más de cuarenta ediciones fueron una presencia habitual en las carteras de los estudiantes desde mediados del sigo XIX hasta el último cuarto del siglo XX.

A la vista de la evolución histórica del logaritmo resulta interesante notar los siguientes aspectos:

- Tradicionalmente se asocia a John Napier (1550-1617) la invención de los logaritmos. La motivación que le condujo a su invención fue la búsqueda de un método que facilitase los cálculos aritméticos y que superase las técnicas basadas en la prostaféresis usadas hasta entonces.
- La posibilidad de convertir productos en sumas mediante una correlación entre sucesiones geométricas y aritméticas era conocido con anterioridad, pero no se consideraba un sustituto adecuado a la prostaféresis debido a la falta de muchos valores intermedios en las sucesiones.
- Aunque esta correlación arimética-geométrica pudo servir de inspiración a Napier, presentaba problemas prácticos para construir una tabla densa de valores[9]. Por ello Napier utilizó una modelo matemático inspirado en la mecánica que le permitía definir una función φ que verificaba:

$$\varphi(k\,a\,b) = \varphi(k\,a) + \varphi(k\,b)$$

  donde k era una constante. Esta función no es logarítmica —aunque está cerca— pero resolvía el problema de la conversión de productos en sumas. Generó la primera tabla de uso práctico. Su idea estableció una metodología de cálculo aritmético que se ha mantenido durante unos 350 años.
- En su últimos años ayudó a Henry Briggs (1561-1630) a la definición y generación de la primera tabla de logaritmos decimales.
- Grégoire de Saint-Vincent (1584 - 1667) estudiando la cónicas, estableció (geométricamente) la conexión entre segmentos bajo una hipérbola $1/x$ que están en proporción geométrica y las áreas que sustienden, que están en progresión aritmética. Alfonso Antonio de Sarasa (1618-1667), basándose en el trabajo del anterior, propuso una conexión entre la integral de $1/x$ y los logaritmos. Todavía no había nacido el Cálculo por lo que se empleó para ello el método de exhaución principalmente.
- Después vendría el desarrollo del Cálculo, de la mano de (las discusiones de) Newton (1643-1727) y Leibniz (1646-1716), y se asociaría claramente el logaritmo con la integral de la función $1/x$.
- Finalmente, Euler (1707-1783) uniría la función logarítmica y la exponencial, introduciendo su definición de logaritmo como la inversa de la exponencial. Daría nombre propio al número e e identificaría su papel relevante en las funciones exponenciales.

3.4 Conclusión

A modo de conclusión de esta sección podemos plantear las siguientes reflexiones:

- La bibliografía es unánime afirmando que los logaritmos resultan un concepto pro-

[9] Se cuestiona si la primera persona que introdujo esta idea fue Joost Bürgi (1552-1632), ayudante de Tycho Brahe (1546-1601). Parece ser que Bürgi sí generó una tabla más reducida e imperfecta de logaritmos para su propio uso, pero que no la publicó. Su tabla se basaba en sucesiones aritmético-geométricas, era menos práctica y tuvo menor recorrido. En cualquier caso, la motivación de Bürgi también era simplemente mejorar la técnica de la prostaféresis.

blemático para el alumno. La forma más habitual de introducirlos es mediante la definición euleriana y posiblemente parte del problema venga de ahí. La definición euleriana es una definición indirecta que dificulta su asimilación.

- Aunque aparecen metodologías diversas, no parece haber una clara preponderancia por una u otra. Posiblemente por el hecho de que la eficacia de una metodología no es intrínseca a ella sino que depende de muchos otros factores.
- La asimilación del concepto tienen que pasar por crear una red de conceptos interconectados que se asimile progresivamente. Dado el curso en el que se van a presentar los logaritmos, restringirse a un entendimiento puramente instrumental de los mismos parece insuficiente y debería progresarse hacia una comprensión relacional.
- Los errores de los estudiantes suelen estar asociados a la mala asimilación de las propiedades de los logaritmos. De forma adicional, la simbología $\log x$ tiende a hacer que los estudiantes identifiquen ambos elementos ($\log$ y x) como independientes.
- La representación simultánea y reiterada de las funciones exponencial y logarítmica puede inducir a pensar al estudiante de que se trata de una sola función.
- La génesis histórica apunta claramente a dos problemáticas separadas: logaritmos como inversos de la función exponencial y logaritmos como elementos de cómputo.

4 Modelo epistemológico de referencia

La enumeración de ámbitos de utilización de los logaritmos presentada en la sección 1 permite agruparlas en tres focos principales de interés compatibles con el análisis curricular hecho en la sección 2:

- Uso de los logaritmos como elemento que convierte factores en sumandos. En una doble vertiente: a nivel aritmético (en desuso) y como elemento de transformación (linealización) de funciones.
- Como inversa de la función exponencial y para resolver ecuaciones con dependencias de ese tipo[10].
- Como elemento de compresión de datos. A nivel de secundaria se refleja en escalas logarítmicas que, de paso, linealizan las dependencias exponenciales.

Las ecuaciones logarítmicas, mencionadas explícitamente en el currículo, pueden verse como elemento subsidiario de los anteriores. Habitualmente se les presta gran atención[11] por lo que podrían considerarse un foco adicional.

[10]Siendo las funciones logarítmicas y exponenciales una inversa de la otra no hay motivo para dar mayor importancia a una frente a la otra. En este sentido, resulta notable que en uno de los problemas resueltos encontrados en un libro de una editorial importante solicita: *averiguar la relación que hay entre x e y, sabiendo que verifica:* $\ln y = x + \ln 7$. La relación así indicada resulta bastante simple y clara y parece que no hay más que hacer; como mucho escribir $\ln y = x + k$ con $k =$ cte. Quizá el ejercicio hubiera tenido una mejor redacción solicitando que se despejara la y para llegar a la solución que propone el libro: $y = 7e^x$. Sin embargo parece que los usos matemáticos tradicionales tienden a decantarse por potenciar la funcion exponencial frente a la logarítmica.

[11]Sobre esta atención nos extenderemos más adelante.

La forma en que se van a estructurar estos elementos —que constituyen los diferentes aspectos del elemento a enseñar— a fin de establecer el orden y la manera en que se harán emerger constituye lo que se denomina un MER. Cid y Muñoz-Escolano (2019, sección 7.3, pág. 13) lo definen como *el conjunto de cuestiones generatrices, asociadas a uno o varios campos de problemas, cuyas respuestas hacen emerger los distintos aspectos del objeto matemático que se quiere enseñar.*

4.1 Limitaciones y ligaduras

Los logaritmos están ubicados en dos bloques diferentes de currículo, habitualmente separados temporalmente: Números y Álgebra por un lado y Funciones por otro. Asimismo, diferentes aspectos están en relación con diferentes elementos conceptuales (límites, derivadas...) que imponen restricciones propias a la hora de plantear una secuenciación. En particular, se presentan las siguientes dificultades:

- La aproximación histórica consistente en asociar los logaritmos a las sucesiones aritméticas y geométricas resulta interesante, pero solo ofrece un conjunto discreto de valores. La extensión a conjuntos más nutridos conlleva una complejidad excesiva, hasta el punto que Napier optó por otra metodología[12].
- La extensión de las sucesiones aritméticas/geométricas hacia un continuo de valores conducen a una definición del logaritmo como asociada al área bajo la curva $1/x$. Pero no se puede considerar esa definición salvo que previamente ya se haya introducido la integral. Apoyarse en métodos aproximados históricos, tipo exhaución, requeriría un esfuerzo previo considerable en su presentación además que, en el fondo, inevitablemente se estaría rondando el concepto de integral.
- Los logaritmos neperianos requieren presentar previamente el número e, y justificar su importancia. Sin embargo, la característica que hace extraordinario al número e consiste en que es la base para la que la derivada de la función exponencial coincide consigo misma[13]. Por tanto, sólo se puede introducir con propiedad el número e tras el bloque de derivación, lo que retrasaría hasta entonces la definición de la función exponencial y del logaritmo neperiano.
  Por otra parte, las definiciones habituales del número e se basan en series infinitas, que están fuera de contenidos curriculares, o en límites de sucesiones. Igualmente, no podrían introducirse los logaritmos neperianos hasta haber introducido el concepto de límite.
- La definición y justificación del logaritmo como inversa de la exponencial dada por Euler está basada en series infinitas por lo que no resulta fácil de incorporar.

Todo lo anterior, junto con una cierta inercia histórica, justifica el del paradigma de *visita a la obra* (Chevallard, 2013) que se ha venido utilizando en este tema. En

[12]Mas artificial si cabe.
[13]Un argumento similar se podría plantear en términos de integrales.

contraposición a esto, el MER que se plantea a continuación trata de escapar *en la medida de lo posible* de ello.

4.2 Una propuesta de modelo epistemológico de referencia

A la vista de lo anterior, la estructura por la que se opta es la siguiente:

1. Postular la existencia de una cierta tabla de valores $(a, \mathfrak{L}a)$ que verifica la siguiente propiedad:
$$\mathfrak{L}(a \cdot b) = \mathfrak{L}a + \mathfrak{L}b$$
El símbolo se elige para que sea cercano al del logaritmo pero que evite la necesidad de definir la base. La cuestión que se plantea es buscar una forma de acelerar los cálculos aritméticos empleando esta tabla; en particular, convertir las multiplicaciones en sumas. La tabla se pondrá a disposición de los estudiantes[14].
En el proceso de ir ampliando la utilidad de la tabla a otras operaciones irán surgiendo progresivamente las propiedades derivadas de la anterior propiedad fundamental. En este paso se pretende poner el foco en las propiedades de los logaritmos, dotándolas de sentido e importancia.
2. Revisión de las propiedades de la exponenciación. Se suponen ya vistas en cursos anteriores (ver sección 2).
3. Definición euleriana del logaritmo como inversa de la exponencial. La cuestión que se abre es ¿los logaritmos verifican la propiedad de la tabla $(a, \mathfrak{L}a)$? Cuando se responda afirmativamente se trasladarán todas las propiedades deducidas para la tabla a los logaritmos. ¿Qué otras propiedades, asociadas a la introducción de una base de logaritmos, se verifican?
4. Aplicación de la definición de logaritmo a la resolución de ecuaciones logarítmicas, fundamentalmente como un ejercicio de aplicación de las propiedades ya vistas[15]. La cuestión generatriz se puede enunciar de la siguiente forma: ¿cómo resolver una ecuación en la que la incógnita queda dentro de un logaritmo?
5. Número e. Antes se han enumerado las dificultades asociadas a su justificación en un temario ordenado, por lo que se introducirá mediante monumentalismo didáctico, dando su valor y asegurando su importancia aunque dejando la justificación de dicha importancia para más adelante. Si la presentación se realiza a la vez que la teoría de límites, se introducirá el número e mediante la definición basada en el límite.
6. Función exponencial y logarítmica. Representación gráfica. Se pretende asociar la representación algebraica de ambas funciones con su representación gráfica y remarcar el carácter inverso una de la otra. La cuestión generatriz será la simulación numérica de un proceso de crecimiento natural que responda a una ecuación $y = Ae^{\alpha x}$

[14] Como una tabla en papel o bien por medios electrónicos.

[15] La sofisticación de las ecuaciones logarítmicas que se ven en las colecciones de ejercicios difícilmente tienen un reflejo en las aplicaciones prácticas, de forma que es fácil caer en este bloque en el brousseniano *deslizamiento metadidáctico* (Brousseau, 1989), (Brosseau, 1997).

y se solicitará la determinación mediante tanteo gráfico de los parámetros A y α. El proceso se extenderá a la función logarítmica.

7. Aplicación: escalas logarítmicas como compresión de datos. La cuestión generatriz se basará en la presentación de datos experimentales de variación exponencial para los que no se pueda utilizar una escala lineal.

5 Razones de ser

El MER establecido anteriormente se vertebra sobre cuatro focos de actividad:

- Conversión de productos en sumas.
- Resolución de ecuaciones logarítmicas.
- Reconocimiento y uso de funciones exponenciales y logarítmicas.
- Compresión de datos mediante escalas logarítmicas.

¿A que necesidad objetiva obedecen esos cuatro focos? ¿Que problemáticas resuelven? ¿Cuales son, en definitiva, sus razones de ser?

> ...el profesor debe presentar a los alumnos tareas que contribuyan a una construcción escolar del saber matemático a enseñar. Esto exige una recontextualización y una repersonalización de dicho saber. Una recontextualización en la que se presente un campo de problemas cuyos enunciados puedan expresarse en términos de saberes anteriormente aprendidos, pero que dé sentido al nuevo objeto de saber, que justifique la necesidad de construirlo como medio para resolver dicho campo de problemas. En estas condiciones, el campo de problemas se constituye en la razón de ser del objeto matemático a enseñar. (Cid & Muñoz-Escolano, 2019, sección 7.5, pág. 13)

En esta sección se van a proponer las cuestiones generatrices que van a abrir cada uno de los bloques y de donde derivarán los diferentes tipos de problemas que constituyen el correspondiente campo de problemas.

5.1 Conversión de productos en sumas

La conversión de un producto de factores en una suma de términos es una técnica general, *una herramienta*, que como tal no tiene una aplicación única. Es la técnica que permite, por ejemplo, aprovechar la teoría de la regresión lineal cuando los factores a ajustar aparecen en forma multiplicativa. Además, de forma previa a la proliferación de los sistemas electrónicos de cálculo, se utilizaron durante 450 años como un formidable recurso para la aceleración de los cálculos aritméticos.

Las dos aplicaciones podrían constituir una razón de ser. La primera, sin embargo, requiere una mayor formación previa del estudiante so pena de hacer una introducción demasiado artificiosa. La segunda, pese a su importancia histórica, está obsoleta.

Ante esta disyuntiva se ha optado por elegir la segunda: entronca fácilmente con conocimientos previos de los estudiantes, permite acompañarla de notas históricas que le den un trasfondo[16]. Su aplicación real actual es escasa o inexistente, pero eso no debería anular su enseñanza como procedimiento de asimilación de un conjunto de propiedades o se corre el riesgo de tener que revisar con la misma perspectiva la mayoría de los procedimientos matemáticos que se enseñan actualmente y que en la práctica son ejecutados rutinariamente por ordenadores.

La razón de ser por tanto podría enunciarse de esta forma:

De todos es sabido que el algoritmo de la multiplicación es mas largo, complejo, tedioso y propenso a errores que el de la suma. Esto puede comprobarse tratando de resolver con lápiz y papel estas dos operaciones:

$$\begin{array}{r} 73845 \\ +\quad 32847 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 73845 \\ \times\quad 32847 \\ \hline \end{array}$$

Durante mucho tiempo, la humanidad no tuvo más remedio que hacer los cálculos a mano, de forma que se buscaron métodos para poder agilizar las multiplicaciones. Tras ciertos esfuerzos se consiguió construir tablas de números de dos columnas de forma que a un número de la columna de la izquierda, que llamaremos a, le asociaban un número en la columna de la derecha, que llamaremos $\mathfrak{L}$a. Esta tabla de números cumple la siguiente propiedad. Dados dos números a y b:

$$\mathfrak{L}(a \cdot b) = \mathfrak{L}a + \mathfrak{L}b$$

¿De qué manera se puede emplear esta propiedad para resolver de forma más rápida la anterior multiplicación?

Éste es el problema que dio origen a los logaritmos y que responde a una necesidad específica concreta y no a un estudio matemático por el contenido matemático en sí. No se tenía interés en el estudio de los logaritmos, o de la función logarítmica[17], si no en agilizar los cálculos. Los logaritmos tampoco fueron la primera respuesta a este problema; de forma previa se utilizó la técnica denominada *prostaféresis*, basada en las relaciones trigonométricas de conversión de sumas en productos, como por ejemplo:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{4}\left[\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

Existe también la técnica denominada *Quarter squares* para la que también se han publicado tablas (McFarland, 2007). En este caso se utiliza la relación:

$$x\,y = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right]$$

[16]Inclusive con una presentación sin demasiada profundización de lo que fueron las reglas de cálculo (Wolbert, 2012) hasta fechas muy recientes. Aparecen, por ejemplo, en la película La Gran Familia (Fernando Palacios, Rafael J. Salvia, 1962) https://youtu.be/lM7zuIr3zUM?list=PLKQbK-vMDW1c6UWqSfgduKD1KrtzovfKk&t=490.

[17]De hecho, en 1590 la noción de función matemática todavía no estaba establecida.

Sin embargo fue la técnica desarrollada y difundida por John Napier y perfeccionada por Briggs, la que se consolidó como solución definitiva.

5.2 Resolución de ecuaciones logarítmicas

De forma previa a la presentación de las ecuaciones logarítmicas se requiere establecer el concepto (euleriano) de logaritmo y relacionarlo con la tabla de datos presentada anteriormente. Esta definición y conexión puede desarrollarse en una serie de actividades que se encuadran en la siguiente razón de ser:

> Sería interesante encontrar un método de construir una tabla de valores del tipo a las que utilizamos para acelerar los cálculos aritméticos. Sabemos, a partir de las propiedades de la exponenciación que:
>
> $$a^{p+q} = a^p \cdot a^q$$
>
> ¿Podríamos construir una tabla de ese tipo utilizando esta propiedad? ¿Cómo se haría?

Esta aproximación puede generar la definición de logaritmo y establecer un puente entre el bloque anterior y este.

Como se ha apuntado en la sección 3.3, históricamente la génesis de los logaritmos se estableció, al menos en principio, mediante la asociación de series aritméticas y geométricas. Sin embargo esa idea de partida condujo a un tortuoso camino para resolver cómo llenar los huecos de las tablas así generadas. Ese problema ya no existe actualmente, gracias a las calculadoras electrónicas y su capacidad de determinar la exponenciación de un número a cualquier número racional, por lo que se ha desestimado esa vía. No hay que perder de vista que el problema al que queremos enfrentarnos es el de identificación del logaritmo como inversa de la exponenciación a través de sus propiedades, pero no pretendemos desarrollar técnicas de construcción de las tablas de logaritmos.

Tras la definición se abre un nuevo campo de problemas precedido por su propia razón de ser. Las ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita se encuentra bajo la forma de un logaritmo (o dentro de una exponencial) y se desea obtener la incógnita. Para poder resolverlas hay que desarrollar un conjunto de heurísticas que mayormente se basan en la definición y propiedades de los logaritmos, por lo que constituyen un medio[18] excelente para su estudio. Así, podemos introducir la razón de ser de la siguiente manera:

> Hasta ahora hemos sido capaces de resolver diversos tipos de ecuaciones, o sistemas de ecuaciones en los que la incógnita (o incógnitas) aparecían tal cual o bien elevadas al cuadrado (ecuaciones cuadráticas), al cubo (ecuaciones cúbicas),

[18] En el sentido de la TAD (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997).

etc...
Hemos visto que dado un número a, podemos obtener su logaritmo $\log_b a$, así que es posible que a partir de ahora nos encontremos ecuaciones en las que la incógnita se encuentra bajo un logaritmo. Por ejemplo:

$$\log(5x-8)-\log(6+3x)=0$$

¿Cómo vamos a manejar estas situaciones?

La literatura revisada no incluye referencias explícitas a la historia de las ecuaciones logarítmicas, de forma que su origen debería rastrearse directamente de las fuentes, lo que queda fuera del propósito de este trabajo. Sin embargo, esta ausencia pone en evidencia el hecho de que las ecuaciones logarítmicas no nacieron como un problema con interés *per se*, sino como un subproducto de la funciones logarítmicas y exponenciales. Un breve análisis de su presencia en los currículos de matemáticas refuerza esta impresión. Así, en el libro de 1866 de Cortázar (1866), en cuya portada se indica *obra señalada en primer lugar para texto en universidades, institutos y escuelas profesionales* y que tuvo un amplio uso en España hasta principios del siglo XIX (León & Maz, s.f.), hace un tratamiento marginal de las ecuaciones exponenciales, que resuelve mediante logaritmos[19]. Dentro de la Ley General de Educación (LGE) el equivalente a los contenidos curriculares correspondientes al bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU)[20] no incorporan referencias explícitas a las ecuaciones logarítmicas[21], si bien la descripción de contenidos en ambas normativas es sucinta. Todo lo anterior tiende a reforzar la idea de que las ecuaciones logarítmicas no constituyen un elemento que demandase interés por si mismas, sino como instrumento de puesta en práctica de las propiedades de los logaritmos. Añadir una complejidad excesiva a estas ecuaciones parece, por tanto, difícilmente justificable.

5.3 Función exponencial y logarítmica

Tras la presentación del número e y las funciones exponencial y logarítmica naturales se pretende abordar el uso de esas funciones como modelos de fenómenos de crecimiento y su representación algebraica a partir de un ajuste de datos gráfico. La razón de ser podría introducirse de la siguiente manera:

Se dispone de un tubo de ensayo en el que hay un cultivo que inicialmente tiene $N=8$ bacterias. Se mantiene en unas condiciones ambientales que retardan su reproducción, de forma que se sabe que incrementan su número en un 15% cada

[19] Considera únicamente las ecuaciones $a^x=b$, $ma^{x^2}=nb^x$ y $a^{b^x}=c$.

[20] Recogidos en la Orden de 22 de marzo de 1975 y en la Resolución de 1 de marzo de 1978.

[21] Para segundo curso de bachillerato se indica *Funciones exponencial y logarítmica. Representación gráfica y propiedades.*, lo que luego se matiza con *En el estudio de las funciones exponencial y logarítmica se darán sus propiedades fundamentales.*

día.
Disponer de una expresión algebraica que nos represente el número de bacterias en función de los días que han pasado $N(t)$ resulta muy ventajoso porque permite manejar este fenómeno con comodidad en estudios más amplios. A esta expresión, $N(t)$, se le denominaría un *modelo* del fenómeno. Los modelos a veces son bastante exactos y a veces son simplemente aproximados, pero en general, resultan muy útiles.
¿Cómo podemos determinar el modelo de crecimiento de esta población de bacterias?

5.4 Escalas logarítmicas

El problema central al que se quiere enfrentar a los estudiantes en este caso es el de la representación gráfica de valores cuyo forma de variación hace que no encajen en una escala lineal. Se considera que ya están habituados a las escalas lineales y su utilización e interpretación no les supone mayores problemas.

Como razón de ser se va a utilizar un problema directamente extraído de (Confrey, 2002) que estudia la respuesta de los estudiantes a las escalas logarítmicas dentro de la corriente constructivista.

El mundo es muy antiguo y los seres humanos son muy jóvenes. Los sucesos importantes en nuestras vidas se miden en periodos de años o menores; nuestras vidas, en décadas; nuestras genealogías familiares en siglos; y toda nuestra historia conocida, en milenios. Pero hemos sido precedidos por una asombrosa cantidad de tiempo, que se ha extendido por periodos prodigiosos de nuestro pasado de los que conocemos muy poco debido tanto a que ni tenemos registros escritos de esa épocas como a que tenemos auténticas dificultades en asimilar la inmensidad de los intervalos temporales envueltos.

Carl Sagan. Dragons of Eden

Enunciado del problema: Representa las fechas siguientes en una línea temporal.

Periodo o época	Años de antigüedad	Desarrollo de vida en La Tierra
Época actual		Desarrollo de la ciencia y la tecnología.
Renacimiento	500	Viajes de descubrimiento desde Europa. China, dinastía Ming.
	1000	Civilización Maya. Cruzadas. China, dinastía Sung.
	1800	Invención del cero y de los decimales en la aritmética india. Caída de Roma.
	2000	Geometría de Euclides. Física de Arquímedes. Imperio Romano. Nacimiento de Cristo.
Holoceno	10000	Desarrollo de la agricultura.
	500000	Domesticación del fuego por el hombre de Pekín.
Pleistoceno	2×10^6	Desarrollo del hombre moderno. Aparición de mamuts y rinocerontes lanudos.
Mioceno	2.4×10^7	Simios, murciélagos, monos, ballenas.
Oligoceno	3.7×10^7	Roedores, gatos, perros, elefantes, primeros caballos.
Eoceno	5.8×10^7	Pájaros, anfibios, pequeños reptiles, peces.
Paleoceno	6.6×10^7	Plantas con flores, pequeños mamíferos.
Cretácico	1.44×10^8	Dinosaurios con cuernos y armadura.
Jurásico	2.08×10^8	Los dinosaurios alcanzan su mayor tamaño.
Triásico	2.45×10^8	Abundancia de coníferas, insectos, aparición de tortugas, cocodrilos, dinosaurios.
Devónico	4.08×10^8	Primeros bosques, aparición de peces y anfibios.
Ordovícico	5.05×10^8	Trilobites, corales, animales de concha.
Cámbrico	5.7×10^8	Gran abundancia de fósiles por primera vez.
Precámbrico	1.1×10^9	Corales, medusas y gusanos.
	3.5×10^9	Bacterias.
	4.5×10^9	No hay vida conocida.
Big Bang	1.5×10^{10}	

6 Campo de problemas y técnicas

La diferencia entre problema y ejercicio es sutil: un problema requiere la creación (y justificación en su caso) de unas técnicas que resuelvan la tarea planteada mientras que un ejercicio únicamente requiere utilizar técnicas ya conocidas. Como consecuencia, lo que en un cierto momento puede ser un problema para un estudiante pasará con el tiempo a convertirse en un ejercicio. Por otra parte, tampoco es fácil establecer un criterio nítido que indique cuando la variación de una técnica es lo suficientemente severa como para constituirse en un nuevo tipo de problema o queda relegada a un mero ejercicio aún cuando no mimetice problemas previos. Establecer este límite quizá resulte más académico y artificial que útil.

En lo que sigue se introducirán los distintos campos de problemas que se van a presentar, especificados por focos de interés, junto con una descripción general de la técnicas que se emplearán en su resolución. A partir de ellos y sus variaciones menores, se pueden generar las series de ejercicios que se emplearán en los *momentos de trabajo de la técnica.*

En la especificación de cada tipo de problema se muestran hasta tres bloques identificados con letras: (P) corresponde al enunciado del problema, (T) a la aplicación de la técnica —o una de las posibles— necesaria para resolverlo y (O) contiene observaciones sobre el problema

6.1 Conversión de productos en sumas

Este campo se problemas abarca el uso del logaritmo como herramienta aritmética en base a las propiedades que presentan. La técnica que va a dar origen a todo viene asociada a la propiedad de los logaritmos de convertir productos en sumas. Que el alumno llegue por sí mismo a esa propiedad en base al análisis de series aritméticas y geométricas puede ser un proceso excesivamente largo. Para evitarlo, esta propiedad se hará manifiesta a través de una tabla de parejas de números $(a, \mathfrak{L}a)$ que se pondrá a su disposición[22] (ver D.1). Aunque en este momento del curso todavía no se hará explícita la identificación de $\mathfrak{L}a$ con el logaritmo, en lo que sigue le denominaremos *logaritmo* para no sobrecargar la redacción del texto.

La técnicas que se emplearán corresponderán, por tanto, al uso de esas propiedades: conversión de productos en sumas, de cocientes en diferencias, etc..., junto con la toma de logaritmos y antilogaritmos. Todas ellas son una consecuencia de la propiedad básica de conversión de productos en sumas y por tanto, se tratará que las técnicas surjan de forma espontánea o guiada.

CP1 | Conversión de productos en sumas

P	Determinar el valor de 12345×34567
T	1. Consulta del logaritmo de los factores. 2. Suma (manual) de los logaritmos. 3. Consulta del antilogaritmo del resultado.
O	Es la técnica básica, aunque incorpora la dificultad para el estudiante de la traducción de descripción de la tecnología ($\mathfrak{L}(a\,b) = \mathfrak{L}a + \mathfrak{L}b$) a una técnica concreta. Además tendrá que asumir que, contrariamente a lo que acostumbra con los algoritmos del producto, la respuesta obtenida por este método será aproximada.

CP2 | Demostración de $\mathfrak{L}1 = 0$

[22]En formato tabla o bien mediante ordenador (script de GeoGebra).

P	Determinar el valor de $\mathfrak{L}1$ a partir de la propiedad del logaritmo del producto.
O	Estrictamente, esto corresponde a una nueva tecnología que se puede derivar de la propiedad anterior. Con este ejercicio se pretende trabajar la capacidad de razonamiento abstracto, que no es fácil de inicio. Obviamente, los estudiantes consultarán de forma previa el valor en la tabla. Se trata de que lo justifiquen a partir de la propiedad del producto. En caso de que no sean capaces, se les dará la indicación de que $a = 1\,a$ y que analicen sus consecuencias.

CP3 | Calcular el inverso de un número

P	Determinar el valor de 1/34567
T	1. Consulta del logaritmo del número. 2. Cambiarlo de signo. 3. Consulta del antilogaritmo del resultado.
O	El problema requiere una nueva tecnología, para lo que se invitará a los estudiantes a analizar las consecuencias de que $a/a = 1$.

CP4 | Calcular el cociente de dos números

P	Determinar el valor de 32645/34567
T	1. Consulta del logaritmo de dividendo y divisor. 2. Resta de ambos. 3. Consulta del antilogaritmo del resultado.
O	La ampliación de la técnica es directa a partir de los anteriores ejemplos.

CP5 | Exponenciación de números de hasta tres cifras

P	Determinar el valor de 345^3
T	1. Consulta del logaritmo de la base. 2. Producto por el exponente. 3. Consulta del antilogaritmo del resultado.

O	La ampliación de la técnica debería ser sencilla en este momento, si bien, en caso de necesitarlo se puede hacer notar que $a^2 = a{\cdot}a$. La generalización rigurosa requeriría un procedimiento de inducción, pero no se pretende abordarlo.

CP6 | Raíz cuadrada de números de hasta cinco cifras

P	Determinar el valor de $\sqrt{74653}$
T	1. Consulta del logaritmo del radicando. 2. División por dos. 3. Consulta del antilogaritmo del resultado.
O	Basta darse cuenta que $\sqrt{a} = a^{1/2}$, por lo que basta con aplicar la regla de la exponenciación. Se aceptará este resultado como tal aunque realmente debería demostrarse la regla de la exponenciación al caso de exponentes racionales

CP7 | Raíz de orden q de números de hasta tres cifras elevados a p

P	Determinar el valor de $\sqrt[3]{274^4}$
T	1. Consulta del logaritmo del radicando. 2. Multiplicación por el exponente racional 4/3. 3. Consulta del antilogaritmo del resultado.
O	Corresponde al caso general.

6.2 Resolución de ecuaciones logarítmicas

Este campo de problemas corresponde a la resolución de ecuaciones en las que aparece la incógnita bajo un logaritmo. Además de la aplicación directa de la definición de logaritmo, existen dos técnicas básicas asociadas a la resolución de ecuaciones logarítmicas:

- Llegar a una igualdad entre dos logaritmos de la misma base para, a partir de ahí, igualar los términos que están bajo la función logaritmo.
- Realizar un cambio de variable del tipo $t = \log(x)$, para obtener una ecuación en la que el logaritmo no sea explícito. Resolverla para t y luego resolver el valor de x a partir de la relación del cambio.

Junto a estas dos técnicas, se emplearán técnicas vistas en el apartado anterior, pero en este caso aplicadas en un entorno algebráico en vez de aritmético. Asimismo se empleará cuando se requiera la expresión de cambio de base. Finalmente se emplearán técnicas de manipulación algebráica que deberían ser ya conocidas.

RE1 | Igualdad de elementos bajo el operador logaritmo

P — Resolver

$$\log(5x-8)-\log(6+3x)=0$$

T —

1. Convertir la igualdad entre dos logaritmos de la misma base.

$$\log(5x-8)=log(6+3x)$$

2. Igualar los elementos bajo el operador logaritmo.

$$5x-8=6+3x$$

3. Resolver.

$$x=7$$

O — Es la técnica específica de resolución de ecuaciones logarítmicas. Los estudiantes pueden llegar a ella por intuición o bien, exponenciando la base a cada lado de la ecuación. La justificación basada en la biyección que establecen los logaritmos entre $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}$ se presentará cuando se estudien los logaritmos y exponenciales como funciones.
La resolución podría plantearse de forma equivalente como

$$\log\frac{5x-8}{6+3x}=\log 1$$

pero se pretende presentar los problemas de forma que puedan resolverse con técnicas que vayan a una complejidad progresiva y que se vayan combinando con las practicadas previamente.

RE2 | Conversión de sumas y restas en productos y cocientes

P — Resolver:

$$\log x+\log(x+3)=\log(x+4)$$

$$\log 4x-\log(5x+3)=\log(2x+3)$$

T

Ilustramos la técnica con el primer caso

- Aplicamos la regla de suma o resta de logaritmos para conseguir la igualdad de logaritmos.

$$\log x(x+3) = \log(x+4)$$

- Igualamos elementos y resolvemos.

RE3 | Conversión de exponentes en factores

P

Resolver:

$$\log x = 2\log(x+3) - \log(x+4)$$

T

- Aplicamos la regla de conversión de productos en exponentes.

$$\log x = \log \frac{(x+3)^2}{x+4}$$

- Igualamos elementos y resolvemos.

RE4 | Convertir números en logaritmos

P

Resolver:

$$2\log x = 3 + \log \frac{x}{10}$$

T

- Dado que buscamos una igualdad entre logaritmos de la misma base, necesitamos transformar el número 3 en algo que se pueda fusionar en un logaritmo. Para ello, aplicando la definición, tenemos que $3 = \log 10^3 = \log 1000$
- Compactamos, igualamos y resolvemos:

$$\log x^2 = \log 1000\frac{x}{10}$$

RE5 | Problema sin solución

P

Resolver:

$$\log x - \log(x+1) = 0$$

T

En el proceso de obtener solución llegamos a que $x = x+1$, por lo que el problema no tiene solución

O A nivel de bachillerato conviene romper la asunción, muchas veces implícita en el contrato didáctico de la ESO, mediante la cual todos los problemas tienen solución, cuando en la práctica suele suceder al contrario. Por ello conviene enfrentar al estudiante de vez en cuando a situaciones sin solución para las que él tenga que decidir críticamente este hecho.

La técnica que se muestra a continuación es habitual encontrarla en la literatura pero puede ser problemática o sujeta a interpretación

RE6 | Soluciones sin sentido

P Resolver:

$$\log(x-1) - \log(2x-1) = \sqrt[3]{100}$$

T

- Convertimos la expresión a una igualdad de logaritmos

$$\log \frac{x-1}{2x-1} = \log \frac{2}{3}$$

- Resolvemos y llegamos a $x = -1$.
- Comprobamos la viabilidad de las soluciones. Para $x = -1$, el primer término de la izquierda conduce a $\log(-2)$ que no está definido, por lo que la solución no es posible (o no tiene sentido). Por tanto, la ecuación no tiene solución.

O En general, conviene comprobar la solución en la ecuación original. Sin embargo ¿qué sentido tiene descartar la solución por el hecho de que el primer término conduzca a un logaritmo de un valor negativo? Implícitamente estamos dotando de un sentido *real e interpretable* a ese primer término, cuando es posible que no lo tenga. El enunciado de la ecuación no ofrece información al respecto.
Supongamos que la ecuación se plantea como:

$$\log \frac{x-1}{2x-1} = \sqrt[3]{100}$$

en este caso, podríamos pensar que $x = -1$ es una solución aceptable, dado que el numero dentro del logaritmo es positivo. Ambas ecuaciones adolecen de la misma falta de interpretación con respecto a un contexto real, por lo que descartar la solución en un caso y en otro no se antoja arbitrario.

RE7 | Técnica de cambio de variable

P	Resolver: $$\log x = \frac{2 - \log x}{\log x}$$
T	• Realizamos el cambio de variable $z = \log x$ • Reescribimos la ecuación, que queda reducida a una ecuación de segundo grado: $$z^2 + z - 2 = 0$$ con soluciones $z = 1$ y $z = -2$ • Deshacemos el cambio de variable y resolvemos para cada x. $$1 = \log x \Rightarrow x = 10 \quad ; \quad -2 = \log x \Rightarrow x = 0.01$$
O	Dadas las técnicas anteriores, lo esperable es que el estudiante intente obtener una igualdad entre logaritmos. La manipulación de la ecuación conduce a: $$(\log x)^2 = \log \frac{100}{x}$$ que no conduce a nada pero puede inducir al estudiante a realizar el siguiente paso erróneo: $$(\log x)^2 = 2 \log x$$

RE8 | Cambio de base para igualar los logaritmos

P	Resolver: $$\log_5(x - 4) - \log_7 2x$$
T	• Cambiamos de base uno de los logaritmos: $$\log_7 x = (\log_5 2x)(\log_5 7)$$ • Reescribimos la ecuación con logaritmos de la misma base en cada lado: $$\log_5(x - 4) = \log_5(2x)^{\log_5 7}$$ • Igualamos términos y resolvemos (en este caso, numéricamente) $$x - 4 = (2x)^{\log_5 7}$$
O	En la misma línea que comentarios anteriores, conviene que algunos problemas tengan soluciones que no se puedan obtener de forma analítica, para evitar en el estudiante la falsa concepción de que todos los problemas la tienen.

6.3 Función exponencial y logarítmica

Las técnicas aplicadas a las ecuaciones logarítmicas pueden ser utilizadas subsidiariamente con estas funciones y no se insistirá en ello. Lo que se busca es la familiarización del estudiante con funciones exponenciales del tipo:

$$y = Ae^{\alpha}(x - x_o)$$

que, por otra parte, conllevarán el uso de las funciones logarítmicas.

FE1 | Efecto de parámetros

P

El crecimiento de dos poblaciones de bacterias N_A y N_B viene representado por las siguientes expresiones:

$$N_A = Ae\alpha(t + t_0)$$
$$N_B = Be^{\beta}t$$

DATOS: $A = 10$, $B = 2$, $t_0 = 3$, $\alpha = 0.15$, $\beta = 0.25$

1) ¿Qué población es más numerosa al inicio del experimento?

2) Calcula dos o tres puntos de cada curva y haz una representación gráfica aproximada de ambas. ¿Que población crece con mayor rapidez?

3) ¿Qué tamaño tienen las poblaciones en $t = 5$?

4) ¿En que momento la población de N_B supera a la N_A

5) ¿Qué valor tienen las poblaciones en ese momento?

T

1), 3) y 5) Evaluación de las poblaciones en un instante concreto: Cálculo del valor numérico de N_A y N_B y comparación de resultados. Adicionalmente, requiere interpretar *inicio del experimento* con $t = 0$

2) Requiere tres acciones: Cálculo de puntos y representación gráfica. Interpolación aproximada. Interpretación del ritmo de crecimiento como pendiente de la gráfica.

4) Igualación de expresiones y resolución de la ecuación resultante.

O

El objeto de este tipo de problemas es la conexión de las expresiones algebraicas con la representación gráfica y la asociación/comprensión del efecto de los parámetros con el comportamiento de la función.

FE2 | Aproximaciones numéricas

P

Resolver:

$$3x - 12 = 5e^{0.3x}$$

T	• Tantear la ecuación hasta comprender que no es soluble analíticamente. • Identificar los tipos de funciones de los términos de la izquierda y derecha. • Resolverla numéricamente dando valores a x y comprobando la igualdad.
O	El objeto de este problema es la identificación de situaciones no solubles analíticamente e inducir en el estudiante la percepción de que aún en ese caso, el problema es tratable.

6.4 Escalas logarítmicas

Este campo de problemas abarca las situaciones en las que se requiere comprimir información numérica a fin de que pueda representarse eun una gráfica sin errores de representación. Sólo se considerará el uso de una escala logarítmica para un sólo eje. Lo que buscamos es que el estudiante se sienta cómodo con la representación de datos en escalas logarítmicas. Esto implica que debe ser capaz de reconocer las situaciones en que se necesitan y aplicar dos técnicas básicas: saber representar datos en esas escalas y saber leerlos. Adicionalmente, el estudiante tiene que reconocer la transformación de una función exponencial en una lineal bajo escalas de ese tipo.

EL1 | Representación de datos

P: A continuación se muestran los datos de infectados detectados por COVID-19 en la provincia de Zaragoza en diferentes fechas. Realizar la representación gráfica de los mismos.

2020-02-24	11	2020-03-20	1247	2020-06-03	4332
2020-03-11	241	2020-03-31	2661	2020-07-11	4900
2020-03-16	693	2020-04-20	3890	2020-07-19	6031

T:
- Decidir que los datos no encajan en una escala lineal.
- Calcular los logaritmos decimales de los datos de infectados.
- Preparar la cuadrícula.
- Representar los datos.

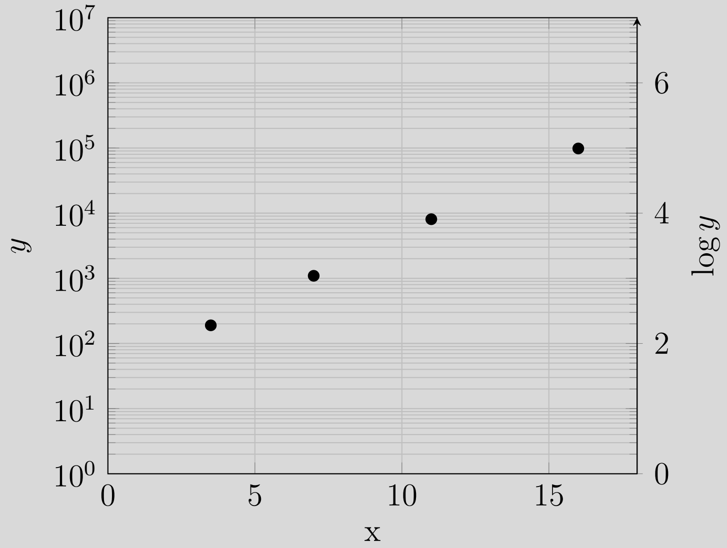
EL2 | Determinación de parámetros

P

En la siguiente figura se muestran una serie de puntos representados en una escala logarítmica. Corresponden a una función del tipo

$$y = Ae^{\alpha\, x}$$

Determinar el valor de los parámetros A y α



T

- Determinar pendiente y corte con eje Y de la recta mostrada.
- Identificar esos valores con $\log A$ y α

7 Tecnologías

Las *tecnologías* constituyen los elementos matemáticos que justifican la técnicas que se utilizan para la resolución de los problemas. Una técnica puede usar el hecho de que el logaritmo del cociente de dos números es igual a la diferencia de logaritmos del dividendo y divisor. La tecnología, en este caso la función logarítmica y sus propiedades, es lo que nos asegura (demuestra) que esto es así. Varias (sub)tecnologías pueden quedar interrelacionadas por una tecnología más amplia y de orden mayor, que denominaremos *teoría*[23]. Aplicado a nuestro caso la teoría podría ser la teoría de funciones matemática. En definitiva, en el tratamiento de una situación problemática por parte de un estudiante se puede establecer una gradación que va desde los aspectos prácticos (*praxis*), representados por la finalidad de la tarea y las técnicas que conducen a sus solución, hasta la conceptualización teórica (*logos*) de ambas mediante las tecnologías y teorías que las sustienden. A todo ese arco se le denomina una *praxeología* (Cheva-

[23] Por supuesto, esto puede conducir a un proceso recursivo: teorías de teorías, etc.... Sin embargo, a efectos de la TAD, esta categorización se corta en estos dos niveles: tecnologías y teorías.

llard et al. 1997). En esta sección vamos a revisar las principales tecnologías que se van a emplear.

En la sección 1 se presentó una definición formal del logaritmo. Sin embargo, para poder utilizarla nos encontramos que vamos a requerir el uso de técnicas de análisis de cierta complejidad. Como ya se indicó la definición ni resulta intuitiva de entrada ni se obtiene como respuesta directa de los motivos que dieron origen a los logaritmos ni es adecuada para un primer tratamiento del tema y, además, requiere de una gran cantidad de conocimientos matemáticos previos. Es por ello que la definición logaritmo va a ser sometida a un proceso que la va a trasladar desde los repositorios del *saber sabio* a lo que consideramos *saber enseñado*. A este proceso se le denomina *transposición didáctica*. En lo que sigue se revisarán las tecnologías que se van a utilizar en los distintos focos de actividad.

Dentro de los bloques del curso, los logaritmos aparecen en primer lugar en el correspondiente a números y álgebra. Tradicionalmente, este bloque se presenta antes que el correspondiente al análisis dado que este último necesita de resultados del primero[24].

Por otra parte, en este curso y cursos previos se introducen los números reales, pero no se hace una justificación rigurosa de los mismos. Para evitar esta dificultad, la introducción de las diferentes tecnologías asociadas al logaritmo se va a hacer en base a los números racionales y se asumirá implícitamente su extensión a los reales.

7.1 Conversión de productos en sumas

Como ya se ha expuesto en apartados anteriores, inicialmente se presentará al estudiante una tabla de valores $(a, \mathfrak{L}a)$ que verifica:

$$\mathfrak{L}(a\,b) = \mathfrak{L}a + \mathfrak{L}b$$

esta propiedad se asumirá mediante comprobación de un cierto número de casos particulares. A partir de aquí se pueden hacer las siguientes deducciones[25].

Teorema 1. $\mathfrak{L}1 = 0$

Demostración. $\mathfrak{L}a = \mathfrak{L}(1 \cdot a) = \mathfrak{L}1 + \mathfrak{L}a$, luego $\mathfrak{L}1 = 0$ □

Teorema 2. $\mathfrak{L}\frac{1}{b} = -\mathfrak{L}b$

Demostración. $\mathfrak{L}1 = 0 = \mathfrak{L}(b \cdot \frac{1}{b}) = \mathfrak{L}b + \mathfrak{L}(\frac{1}{b})$ □

Teorema 3. $\mathfrak{L}a^2 = 2\mathfrak{L}a$

Demostración. $\mathfrak{L}a^2 = \mathfrak{L}(a \cdot a) = \mathfrak{L}a + \mathfrak{L}a = 2\mathfrak{L}a$ □

[24] Una alternativa podría ser ir saltando de un bloque a otro según se necesitase, pero esto requeriría una reestructuración completa del curso y, quizá, un alumnado con una cierta madurez matemática.

[25] El desarrollo que se va a presentar aparece igualmente en (Seebeck & Hummel, 1959).

Esta demostración puede generalizarse por inducción para cualquier $n \in \mathbb{N}$

Teorema 4. $\mathfrak{L}(\frac{a}{b})^n$ *= n($\mathfrak{L}a$ - $\mathfrak{L}b$)*

Demostración. Por inducción. El caso $n = 1$ ya se ha demostrado. Supongamos que se verifica $\mathfrak{L}\left(\frac{a}{b}\right)^n = n(\mathfrak{L}a - \mathfrak{L}b)$. Entonces

$$\mathfrak{L}\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} = \mathfrak{L}\left[\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^n\right] = \mathfrak{L}\frac{a}{b}+\mathfrak{L}\left(\frac{a}{b}\right)^n = (\mathfrak{L}a-\mathfrak{L}b)+n(\mathfrak{L}a-\mathfrak{L}b) = (n+1)(\mathfrak{L}a-\mathfrak{L}b)$$

□

Teorema 5. $\mathfrak{L}a^{1/q} = \frac{1}{q}\mathfrak{L}a$

Demostración.

$$\mathfrak{L}a = \mathfrak{L}\underbrace{a^{1/p}\cdot\cdots\cdot a^{1/p}}_{p \text{ veces}} = p\mathfrak{L}a^{1/p} \Rightarrow \mathfrak{L}a^{1/q} = \frac{1}{q}\mathfrak{L}a$$

□

Teorema 6. $\mathfrak{L}a^{p/q} = \frac{p}{q}\mathfrak{L}a$

Demostración.

$$\mathfrak{L}a^{p/q} = \mathfrak{L}(a^{1/q})^p = p\mathfrak{L}a^{1/q} = \frac{p}{q}\mathfrak{L}a$$

□

7.2 Resolución de ecuaciones logarítmicas

El bloque de resolución de ecuaciones logarítmicas requiere la definición de logaritmo y, con ello, la introducción de la base del logaritmo. Se realizará mediante la concepción euleriana:

$$\log_s A = a \quad \Leftrightarrow \quad s^a = A$$

A partir de la definición se puede demostrar:

Teorema 7.

$$\log_s(A\,B) = \log_s A + \log_s B$$

Demostración. Sea $A = s^a$ y $B = s^b$, entonces $A\,B = s^a\,s^b = s^{a+b}$. Luego, de la definición, $\log_s(A\,B) = a + b = \log_s A + \log_s B$ □

Este teorema permite conectar la definición formal de logaritmos con la tabla, un tanto misteriosa, presentada en el bloque anterior. Se pueden extraer dos consecuencias:

- La tabla no es única. Existen tablas diferentes para diferentes bases.
- Una vez demostrada la propiedad de la conversión del producto en suma, ya podemos dar por válidas todas propiedades que se deducen a partir de ésta.

7.3 Función exponencial y logarítmica

En esta sección nos centramos en las funciones exponencial y logarítmica de base *natural*. Para ello, hay que definir el número e, para lo que se empleará la expresión clásica:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Las otras alternativas son:

$$1 = \int_1^e \frac{1}{x}dx \qquad ; \qquad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\dots$$

Para la primera de ellas se requiere la definición previa de la integral, pero el numero e aparece de forma anterior en el programa. Para la segunda se requiere una serie infinita que directamente no forma parte del programa del curso. Por otra parte la definición de número e por la que se opta resultará crucial para la resolución de cierto tipo de límites.

7.4 Escalas logarítmicas

No hay tecnologías nuevas.

7.5 Proceso de institucionalización

Todos los elementos expuestos son susceptibles de ser gestionados en el aula atendiendo a los contenidos del bloque 1 referentes al trabajo de las técnicas de demostración matemática. Este proceso se puede plantear de forma autónoma para el estudiante o semiguiada, en función de la capacidad detectada. Las principales excepciones van a ser el tratamiento del número e y la definición (euleriana) de logaritmo, que se introducirán tal cual.

En cualquier caso, una vez alcanzado un resultado concreto, se requiere un proceso de *institucionalización* del mismo.

> Los alumnos que han aprendido un conocimiento matemático son capaces de plantear adecuadamente y de responder a cuestiones que antes ni siquiera podían enunciar pero, dado que no tienen medios para contextualizar dichas cuestiones, no pueden adjudicar a los nuevos conocimientos un estatuto adecuado. Es preciso, pues, que alguien del exterior venga a dilucidar cuáles de entre sus actividades tienen un interés científico "objetivo", un estatuto cultural. (Chevallard et al. 1997, Anexo D, sección 4)

Este mismo autor apunta al profesor como el principal responsable de esta institucionalización.

8 Secuencia didáctica

En esta sección se va a apuntar una cierta secuencia didáctica mediante la que se puede materializar todo lo expuesto hasta ahora. Una secuencia didáctica puede considerar gran cantidad de aspectos: de contenido, organizativos, de desarrollo de materiales asociados a actividades concretas, adaptación de actividades a las distintas necesidades el alumnado y variaciones de todo lo anterior a fin de disponer de una herramienta flexible y acomodable a las circunstancias que se den. Todo ello implicaría un desarrollo que prolongaría este documento muy por encima de la extensión deseada. Por ello, lo que se va a presentar corresponde a una secuencia didáctica básica en la que se apuntan la secuenciación y organización de cada sesión.

Dada la presencia de cuatro focos de contenido con entidad propia y el hecho de que quedan encuadrados en diferentes bloques dentro de la asignatura, no se pretende organizar su presentación en una secuencia didáctica continua en el tiempo. Por ello, las sesiones que se muestran a continuación deberían ir intercaladas en diferentes lugares dentro de la programación general del curso.

Esencialmente cada uno de los focos de atención en que se ha organizado el estudio de los logaritmos se asienta en al menos un Recorrido de Enseñanza e Investigación (REI) (García, Barquero, Florensa & Bosch, 2019) que abarca varias sesiones. Un REI parte de una cuestión problemática[26] con la que arranca el proceso de indagación por parte del estudiante. En este proceso se generarán nuevas cuestiones problemáticas que, dado el caso, concluirán con la obtención de una respuesta a la razón de ser. Todo este proceso se desarrolla en un *medio* (Brosseau, 1997) constituido por los elementos (problemas, tareas, organización...) generalmente —aunque no únicamente— establecidos por el docente.

Cada sesión se articula en una serie de bloques cada uno de los cuales está centrado en una actividad atómica y van progresando a lo largo de los diferentes momentos que atravesará el estudiante: momento del primer encuentro, momento exploratorio, momento de constitución del entorno tecnológico teórico, momento de trabajo de la técnica y momento de institucionalización y evaluación (Cid & Muñoz-Escolano, 2019).

Salvo que se especifique lo contrario, el trabajo de cada bloque se realizará por parejas y concluirá con una pequeña discusión sobre los progresos hechos. No se ha realizado una temporización explícita de cada bloque puesto que su duración debería adaptarse a las circunstancias de cada sesión.

Sesión 1 Operaciones I

En esta sesión se iniciará la introducción de las propiedades de los logaritmos, utilizándolas como método de acelerar las operaciones aritméticas

[26] En ocasiones esta cuestión se identifica con la razón de ser.

1	Introducción histórica sobre el problema de las operaciones en el siglo XVI y establecimiento de la razón de ser. Presentación de la tabla $(a, \mathfrak{L}a)$ y su propiedad fundamental. Cuestión a resolver: *¿Cómo emplear la tabla para la agilizar el cálculo de las multiplicaciones?*. Para evitar el uso de una tabla de papel, puede emplearse el script de GeoGebra que se muestra en el anexo D.1.
2	Determinar el valor de $\mathfrak{L}1$. Cuestión a resolver: *¿Como demostrar este valor a partir de la propiedad básica?*. En caso necesario se ofrecerá la pista de que $1 = a \cdot (1/a)$
3	Cuestión a resolver: *Dado un número a, ¿cómo utilizar la tabla para determinar $1/a$?*
4	Cuestión a resolver: *Dados dos números a y b, ¿cómo utilizar la tabla para determinar a/b.*
5	Resumen e institucionalización de las técnicas anteriores.

Sesión 2 Operaciones II

Continuación de la sesión anterior

1	Revisión de lo visto.
2	Cuestión a resolver: *Dados dos números a y p, ¿cómo utilizar la tabla para determinar el valor de a^p*
3	Cuestión a resolver: *Dados dos números a y q, ¿cómo utilizar la tabla para determinar $\sqrt[q]{a}$*
4	Cuestión a resolver: *Dados tres números, a, p, y q, ¿cómo utilizar la tabla para determinar $\sqrt[q]{a^p}$?*
5	Resumen e institucionalización de las técnicas anteriores.
6	Ejercicios de consolidación. Momento de práctica de las técnicas.

Sesión 3 Definición de logaritmo

1	Repaso y evaluación diagnóstica de las propiedades de exponenciales.
2	Definición de logaritmo como inverso de la exponencial a través de una construcción de una tabla de valores. Se solicitará que construyan una tabla de la forma (p, a^p) y luego que la reescriban con la columnas invertidas $[A(= a^p), p]$. Cuestión a resolver: *¿Como describirías con palabras la relación con la que se obtiene el número p a partir del dato A?*
3	Institucionalización de la definición de logaritmo.
4	Ejercicios básicos de aplicación directa de la definición.
5	Cambio de base. Deducción de la expresión.

Sesión 4 y 5 Ecuaciones logarítmicas

Aunque esta sesión se plantea en forma de bloques, en realidad tendrá un desarrollo más o menos continuo. Se ofrecerá a los estudiantes una lista larga de problemas para ir resolviéndolos (Chevallard et al. 1997). Entre ellos irán apareciendo problemas que hagan emerger nuevas técnicas, que son las que se indican en los bloques. Se programan dos sesiones puesto que el tema puede ser amplio.

1	Resolución de ecuación sencilla para hacer emerger la técnica de igualación de operandos del operador logaritmo.
2	Problema hacer emerger la técnica de conversión de productos y cocientes en sumas y restas.
3	Problema para hacer emerger la técnica de conversión de exponentes por productos.
4	Problema para hacer emerger la técnica de conversión de conversión de números en su expresión como logaritmo.
5	Problema que requiera la comprobación de soluciones y problemas sin solución.
6	Problema que requiera el cambio de variable $z = \log_b x$
7	Sistema de ecuaciones logarítmicas.

9	Resumen e institucionalización de técnicas.

Sesión 6 Número e

Esta sesión es corta, por lo que se propone un pequeño trabajo para realizar in situ por grupos.

1	Números importantes en matemáticas. Cuestión a resolver: *¿Qué hace que un número sea importante en matemáticas?* Consulta a la página de wikipedia sobre constantes matemáticas. Por grupos, elección de uno de esos números y descripción del mismo a la clase. Debate final sobre la importancia de los números. (Nota: Tampoco se busca dar o llega a conclusiones definidas, sino abrir un periodo de reflexión sobre los números en matemáticas)
2	Definición del número e. Cálculo aproximado. Motivos por el que ese número es importante.
3	Definición de exponencial con base e y de logaritmo neperiano. Ejercicios de ecuaciones logarítmicas.

Sesión 7 Funciones exponencial y logarítmica.

1	Revisión de la exponenciación con base e y de su expresión algebraica. Repaso de propiedades ($e^1 = e$, $e^0 = 1$, $e{-}1 = 1/e$). Construcción de la representación gráfica. Para este bloque puede utilizarse de apoyo el script de Geogebra que se muestra en el anexo D.2.
2	Problema de crecimiento de población. Ajuste manual a una función $N = Ae^{\alpha t}$. Ajuste gráfico y manual de parámetros.
4	Mismo proceso del bloque 1 pero para la función logarítmica
5	Comprobación de que una es la inversa de la otra.
6	Determinación analítica de los parámetros del problema 1.

Sesión 8 Escalas logarítmicas

1	Representación de datos temporales en línea de tiempo (ver sección 5.4) por grupos. Análisis y discusión de los problemas encontrados.
2	Representación de datos de una función exponencial en una escala logarítmica. Extensión de lo anterior a una gráfica $x - y$, por los mismos grupos. Análisis y discusión.
3	Conclusiones e institucionalización.

Sesión 9 y 10 Evaluación y actividades de aprovechamiento

Para estas sesiones nos remitimos a la sección 10
.

9 Análisis de libros de texto

Debido a la influencia que tienen en el día a día, a los libros de texto se les considera frecuentemente el currículo *de facto* por encima del presentado por la legislación. Para evitar este efecto, en este trabajo se ha construido una didáctica del logaritmo de forma previa, y posteriormente se ha analizado algunos de los libros de texto disponibles a fin de ver su grado de adecuación o el posible apoyo documental que ofrecen. Los libros que se han considerado son los correspondiente al grupo ANAYA (Colera, Oliveira, Colera & Santaella, 2015), el de la editorial SM (Alcaide, Hernández, Moreno, Serrano & Sanz, s.f.) y finalmente, el propuesto por el Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia (CIDEAD) del Ministerio de Educación y Ciencia (Rodriguez del Río, s.f.). Por brevedad, nos referiremos a ellos como SM, ANAYA y CIDEAD

Los tres libros definen el logaritmo a partir de la concepción euleriana. Únicamente SM apunta una mínima justificación de su necesidad (*Para poder despejar el exponente es necesario definir una nueva operación...*). Tras esto, los tres prosiguen con la presentación de las propiedades y la regla del cambio de base. SM incorpora demostraciones[27] y CIDEAD una justificación basada en casos concretos. Tanto SM como ANAYA introducen el número e como un número arbitrario ($e = 2.71828\ldots$) sin mayor justificación y luego definen los logaritmos neperianos como los logaritmos con esa base. CIDEAD desarrolla todo el bloque de sucesiones de forma previa al logaritmo lo que le permite definir el número e y los logaritmos neperianos desde una mayor justificación. SM concluye el tema con un apartado dedicado a las aplicaciones de los logaritmos dedicando una breve reseña a cada una: Crecimiento exponencial, interés compuesto, desintegración radiactiva y pH. En los tres primeros casos las expresiones

[27] ANAYA propone algún problema en el que se pide demostrar alguna propiedad.

usadas son, fundamentalmente, exponenciales.

Para resolver las ecuaciones logarítmicas, SM indica las dos metodologías ($\log_b R = \log_b S \Leftrightarrow R = S$ y cambios de variable), junto con la necesidad de comprobar las soluciones. ANAYA solo indica ésto último. CIDEAD indica la primera metodología a través de un ejemplo y de forma un tanto confusa, como se muestra en este extracto:

> Para resolverlas hay que transformarlas, aplicando las propiedades de los logaritmos en ecuaciones que no contengan logaritmos.
>
> Por ejemplo, para resolver la ecuación anterior vamos a hacer que ambos miembros de la ecuación queden como un único logaritmo, para después eliminarlos.
>
> $$\log_{10}(x(x-2)) = \log_{10} 3$$
>
> Por tanto, eliminando los logaritmos
>
> $$x(x-2) = 3$$

ANAYA presenta el número e con más propiedad en la parte de sucesiones, con las definiciones clásicas de límite de una sucesión y serie infinita. Las funciones logarítmicas y exponenciales se presentan al inicio del bloque dedicado al análisis. SM, en cambio, tiene una estructuración más sorprendente. Introduce primero el límite de una función, luego la derivada y luego utiliza esta última para el estudio (gráfico) de la función logarítmica[28]. Finalmente termina con el estudio de las sucesiones y del número e. CIDEAD introduce las funciones logarítmicas antes que la derivada y hace un estudio gráfico a partir de los valores obtenidos mediante la calculadora. Finalmente, en ninguno de los tres libros hay referencias a escalas logarítmicas.

Se ha hecho un análisis del número y distribución de ejercicios/problemas en función del tipo para los libros de SM y ANAYA[29]. Los tipos en que se han clasificado los problemas son los siguientes: (DL) Aplicación más o menos directa de la definición de logaritmo, (AL) Aritmética con logaritmos, (GL) Álgebra con logaritmos, (EL) Ecuaciones logarítmicas, (SE) Sistemas de ecuaciones logarítmicas, (FL) Funciones logarítmicas (representación gráfica), (ML) Modelos de sistemas reales basados en logaritmos y/o exponenciales, (SL) Escalas logarítmicas, (UC) Uso de la calculadora, (DP) Demostración de propiedades y (OT) Otro tipo. La clasificación no resulta sencilla dado que las categorías no tienen demarcaciones nítidas. Por otra parte, no resulta comparable un ejercicio con un problema. Asimismo, es difícil establecer si un conjunto de ejercicios agrupados deben considerarse uno o varios. Por todo eso la tabla que sigue debe considerarse únicamente a modo orientativo.

	DL	AL	GL	EL	SE	FL	ML	SL	UC	DP	OT
SM	4	5	3	13	2	0	20	1	1	1	1
ANAYA	6	6	5	15	3	3	10	0	3	1	0

[28] De hecho, indica que e es la base de las funciones exponenciales para las que la función coincide con su derivada.

[29] El libro de CIDEAD casi no presenta problemas.

En definitiva, los libros de texto presenta una exposición de la teoría muy enfocada presentar un contenido ya construido y acabado, lo que por otra parte, es lo que se espera de un libro en general. Los libros de SM y ANAYA vienen acompañados de abundante y variado material para poder trabajar esos contenidos, por lo que se pueden considerar un buen recurso. Sin embargo, tal cantidad de información corre el peligro de enclaustrar al docente en el material ofrecido. El libro de CIDEAD, al ser más escaso en material de ejercicios invita más al docente a salirse del marco expositivo.

10 Evaluación

El último bloque de la secuencia didáctica está dedicada a la evaluación. En esta sección se va construir una posible actividad de evaluación sumativa que se ejecutaría en las últimas sesiones. En el anexo C se recogen referencias normativas relevantes al respecto.

Dado que ya se ha indicado que no se considera que la secuencia didáctica tenga que tener un desarrollo continuo en el tiempo, los diferentes ejercicios de esta evaluación podría igualmente fraccionarse e incluirse en otras actividades .

10.1 Diseño y análisis de una prueba de evaluación

La prueba se ha estructurado en cinco problemas con varios apartados cada uno. Dependiendo del plazo temporal destinado al examen se indicarán los apartados que podrían eliminarse. Los tres primeros problemas están pensados para ser resueltos sin apoyo de calculadora, mientras que para los dos últimos ésta resulta imprescindible.

En las próximas secciones se va presentar individualmente cada problema en una caja sombreada. Para cada apartado, se expondrán las posibles formas alternativas de resolución y los principales errores esperables. También se establecerán guías de corrección en base a la regla de los tercios propuesta por Gairín, Muñoz y Oller (2012). Estos autores propugnan clasificar todas las acciones que un estudiante debe llevar a cabo para la resolución de un problema en tres grupos:

TAreas Principales (TAP) Aquellas tareas que son objeto específico de evaluación en el apartado.

Tareas Auxiliares Específicas (TAE) Aquellas tareas, que sin ser objeto específico de evaluación, presentan una fuerte conexión con ellas o forman parte de la secuencia didáctica en la que se engloba la prueba.

Tareas Auxiliares Generales (TAG) Todo el resto de tareas necesarias para la resolución en las que se supone, a priori, que el estudiante ya es competente.

En base a la anterior clasificación, estos autores proponen un modelo de corrección en base a la penalización de errores, con las siguientes reglas: El conjunto de errores detectados de tipo TAG no pueden penalizar más allá de un tercio del valor total del apartado. Las penalizaciones asociadas a los errores detectados de TAE pueden penalizarse hasta los dos tercios del valor de la prueba. En cualquier caso, estos penalizaciones sumadas a los de las TAG, no pueden alcanzar los dos tercios del valor total del apartado. El proceso de corrección continua independientemente el número de errores de ambos tipos. Finalmente, los penalizaciones asociadas a los TAP pueden llegar a penalizar el total de la cuestión y suponer la detención de la corrección.

Así, se han clasificado los errores esperables de cada cuestión y se les ha asignado una penalización[30]. Inevitablemente, es posible que la lista no sea exhaustiva, de forma que queda a criterio del corrector detectar posibles omisiones y clasificarlas y valorarlas de acuerdo a este modelo de corrección. Para facilitar el tratamiento, todas las cuestiones se han valorado sobre un punto, de forma que, tras la corrección, se llevarán a cabo los procesos de normalización pertinentes.

10.2 Problema A

Para este problema no puedes disponer de la calculadora.

A.1 Define qué es el logaritmo de un número.

Para este problema no puedes emplear números ni expresiones matemáticas. Tampoco puedes poner ejemplos. Solo puedes emplear palabras. Imagina que vas andando por la calle con un amigo y le estás contando qué son los logaritmos. **La utilización de números, expresiones matemáticas o ejemplos penalizará la nota.**

A.2 Determina el valor de A que cumple que $\log A = 5$

A.3 Determina el valor numérico de $x = \log_2 1024$

Este problema se realizará sin calculadora. Esencialmente, se está preguntando la definición de logaritmo, de diferentes formas.

El primer apartado, con el que se abre el examen, tiene un triple objetivo dentro del mismo.

- Detectar el nivel de comprensión del concepto de logaritmo mediante la reelaboración del concepto en una forma de expresión que no es la habitual. Se quiere detectar quién comprende realmente el concepto frente a quién simplemente ha memorizado la fórmula.
- Evaluar la capacidad de expresión escrita del estudiante en un contexto técnico.
- Servir de precalentamiento al examen. De esta forma el estudiante fija claramente la idea de logaritmo en la cabeza, lo que le ayudará a afrontar el resto de tareas que siguen.

La prohibición de poner ejemplos es severa. Es muy habitual a la hora de explicar un concepto emplear ejemplos para ilustrarlo. Sin embargo se introduce aquí para evitar

[30]En ocasiones ha sido un rango, de forma que es el corrector el que debe decidir el valor final en función de la gravedad del error.

Tareas principales		
Cuestión	Penalización	Descripción
A.1	1	Definición globalmente incorrecta.
A.1	0.5	No indicar en la definición la base.
A.2	1	Error en el resultado.
A.3	1	Error en el resultado (salvo factorización del número 1024).
–	1	No contestar.
Tareas auxiliares específicas		
A.1	0.5	Empleo de números, expresiones matemáticas o ejemplos.
A.3	0.25	Factorización del número 1024.
–	0.4	Errores en el lenguaje matemático que dificultan la lectura.
Tareas auxiliares generales		
–	0.1-0.2	Errores en el lenguaje matemático que no dificultan la lectura.
–	0.1-0.2	Incorrección gramatical.
–	0.1-0.2	Faltas de ortografía.
–	0.1-0.2	Ilegibilidad. Desorden.

Cuadro 3: Criterios de regla de tercios para el problema A.

el error común de definir algo únicamente con casos particulares con la esperanza de que el oyente induzca la definición completa. Se trata de evitar expresiones del tipo "logaritmo es cuando por ejemplo ...."

Los otros dos apartados insisten en la definición, entendida como inverso de la exponenciación, pero se permite un lenguaje puramente algebraico. Durante el desarrollo de la unidad didáctica se ha tratado de evitar el uso de logaritmos en bases distintas a la natural y la decimal por ser de muy raro uso. En este caso se emplea la base dos, que pese a todo tiene un campo de aplicación en informática, porque conduce a un probleman numéricamente sencillo pero que no resulta trivial.

Atendiendo estrictamente a los contenidos curriculares, este problema tiene mejor encuadre en el nivel previo (4 ESO). Por ello los apartados A.2 y A.3 serían descartables en caso de querer reducir la prueba. El primer apartado se mantiene por el ejercicio adicional de expresión escrita.

10.2.1 Posibles soluciones y errores

Apartado A.1

Resoluciones posibles

Respuestas en base a la inversa de la exponenciación. Esta es la aproximación más clásica de la definición, de forma que es la más esperable

Respuestas en base a la conversión de productos en sumas. Esta aproximación es menos clásica, de forma que su incidencia puede revelar el efecto de la sesión introductoria a los logaritmos, que se basa en esta propiedad.

Resoluciones erróneas

Respuestas incompletas o imprecisas. Del tipo "El logaritmo es el exponente”

Respuestas basadas en ejemplos concretos. Del tipo “Es por ejemplo si tienes ocho y como ocho es dos por dos por dos, pues el logaritmo es tres”

Apartado A.2

Resoluciones posibles. El problema es una aplicación directa de la definición que debería conducir a la solución correcta de 100000.

Resoluciones erróneas

- El número 5 no parece un número especial, por lo no parece que vayan a proponerse valores de $0, \pm 1, \pm\infty$.
- En el enunciado hay dos número concretos: 10 y 5. La intuición dice que la solución estará en relación con esos dos, de forma que también es esperable cualquier combinación que relacione ambos.
- En un caso de mayor desconocimiento o despiste, puede aparecer en la solución el número e. También dependerá de lo claro que haya quedado la notación. En el ámbito anglosajón log es equivalente a nuestro ln, mientras que log10 es equivalente a nuestro log.

Apartado A.3

Resoluciones posibles. Nueva aplicación casi directa de la definición, por lo que si se ha contestado adecuadamente el apartado A.1, también se espera aquí la respuesta correcta

Resoluciones erróneas. Potenciales errores de mala factorización de 1024

La valoración de los errores para este problema según la regla de tercios viene dado en el cuadro 3.

10.3 Problema B

Para este problema no puedes disponer de la calculadora

B.1 Sabiendo que $\log 4869 = 3.6874$, calcula el valor de $\log 48.69$

B.2 Trata de dar una *estimación* del logaritmo decimal del siguiente número: 0.5117×10^{-6}. No se busca un valor exacto, simplemente una estimación del valor que puede tener. Pero debe hacerse indicando por escrito los motivos que te han llevado a optar por ese valor.

B.3 Determina **razonadamente** el resultado de esta operación con la mayor exactitud de que seas capaz:

$$\sqrt[3]{0.7874 \times 0.6752}$$

Quizá pueda serte de ayuda la siguiente tabla de valores (ver anexo). Corresponden a una tabla de logaritmos para una cierta base desconocida.

Este problema pretende determinar el conocimiento que tienen los estudiantes sobre

Tareas principales		
Cuestión	Penalización	Descripción
–	0.7	Aplicación incorrecta de las propiedades de los logaritmos.
–	1	No contestar.
Tareas auxiliares específicas		
B.2	0.3	Estimación irrazonable.
B.1 B.2	0.3	Error en la transformación de números.
–	0.4	Errores en el lenguaje matemático que dificultan la lectura.
Tareas auxiliares generales		
B.3	0.2	Error en la lectura de datos en la tabla.
–	0.1-0.2	Errores en el lenguaje matemático que no dificultan la lectura.
–	0.1-0.2	Errores de lenguaje (ortográficos, gramaticales).
–	0.1-0.2	Ilegibilidad.
–	0.1-0.2	Desorden.

Cuadro 4: Criterios de regla de tercios para el problema B.

algunas propiedades básicas de los logaritmos.

El primer apartado parte del conocimiento de un logaritmo y tienen que generar un procedimiento para extender este valor a otros rangos numéricos. Fuera de esto, es una cuestión con un fuerte componente procedimental.

El segundo apartado es similar al anterior, pero requiere un mayor nivel de generalización. Por un lado, se cambia el tipo de notación numérica sobre la tienen que reflexionar. Por otra parte, se advierte que el problema es abierto, sin solución única, con objeto de evitar que lo afronten de forma puramente procedimental y traten de abrirse a un razonamiento más creativo. La mantisa se ha elegido de forma que sea próxima, pero no de una forma evidente, al valor del apartado anterior.

Finalmente, en el tercer apartado se les vuelve a preguntar sobre las propiedades básicas, pero en este caso deben realizar el cálculo apoyándose en consultas sobre tablas para evitar que usen la calculadora y para forzarles a un proceso más lento y manipulativo de los logaritmos que les haga reflexionar sobre lo que llevan a cabo

En caso de necesitar reducir la extensión de la prueba, el apartado B.3 sería descartable dado que ya se comprueba el conocimiento de las propiedades de los logaritmos en los dos anteriores y de paso se evita el uso de una hoja adicional con la tabla de datos.

10.3.1 Posibles soluciones y errores

Apartado B.1

Resoluciones posibles

Números racionales. Relacionando el número a calcular y el número conocido mediante una fracción:

$$\log 48.69 = \log \frac{4869}{100} = \log 4869 - \log 100 = 3.6874 - 2 = 1.6874$$

Notación científica. Expresando el número en notación científica:

$$\log 48.69 = \log 4869 \cdot 10^{-2} = \log 4869 + (-2 \log 10) = 3.6874 - 2 = 1.6874$$

Resoluciones erróneas. Parece previsible que el estudiante encontrará la relación entre 48.69 y 4869 a través del factor 100. Las soluciones erróneas provendrán de aplicar inadecuadamente las propiedades de los logaritmos.

Apartado B.2

Resoluciones posibles

El valor exacto (-6.291) se puede estimar a partir de:

$$\log 0.5117 \cdot 10^{-6} = \log 5117 \cdot 10^{-10} = -10 + \log 5117$$

el problema es estimar $\log 5117$:

Dato conocido. Podemos asumir $\log 5117 \approx \log 4869 = 3.6874$

Interpolacion. Como $\log 1000 = 3$ y $\log 10000 = 4$ se podría suponer que $\log 5117 \approx 3.5$

Resoluciones erróneas. Este apartado requiere unas transformaciones previas, similares a las del apartado anterior, antes de tener que realizar una estimación de un valor en sí. Al margen del mayor o menor tino en la estimación, los errores irán en la misma línea del apartado anterior.

Apartado B.3

Resoluciones posibles

Mediante logaritmos. Aplicando las propiedades de los logaritmos y consultando las tablas:

$$\log_X R = \frac{log_X 0.7874 + log_X 0.6752}{3} = \frac{-0.1231 - 0.2020}{3}$$

Esta última operación se puede hacer fácilmente de forma manual, obteniendo $\log_X R = -0.1083$. Una nueva consulta arroja el valor de $R \approx 0.810$.

Producto y estimación de la raíz. Alternativamente, también se podría calcular previamente el producto

$$R = \sqrt[3]{0.5317}$$

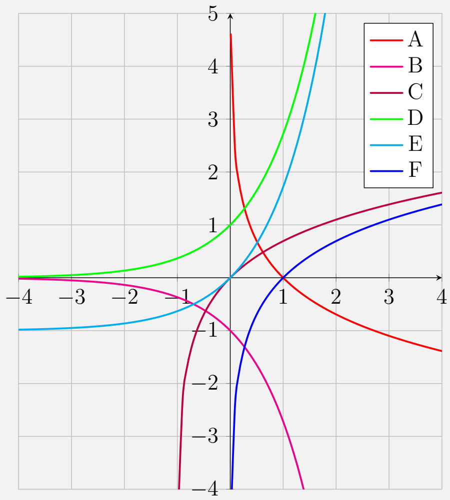
El valor del integrando no se encuentra en tablas, de forma que hay que calcular o estimar la raíz cúbica

$$R = \sqrt[3]{\frac{531}{1000}} \approx \frac{8}{10} = 0.8$$

Resoluciones erróneas. Este apartado es similar a los anteriores, pero aporta la consulta en tablas. Aparte de errores en la consulta de tablas, los errores esperados serán similares a los indicados para la primera cuestión.

La valoración de los errores para este problema según la regla de tercios viene dado en el cuadro 4.

10.4 Problema C



Para este problema no puedes disponer de la calculadora.
En el gráfico se representan las siguientes funciones:

$$y = \ln(x) \quad y = e^x \quad y = -\ln(x)$$
$$y = e^x - 1 \quad y = \ln(x+1) \quad y = -e^x$$

C.1 Indica cuál corresponde a la función $y = e^x$ y cuál a la función $y = \ln x$. Indica claramente cuáles han sido los motivos que te han llevado a elegir una y no otra.

C.2 Elige una cualquiera de las restantes, **pero sólo una**, e indica cuál podría ser su expresión algebraica. Justifica brevemente tu respuesta.

Es un problema de reconocimiento de gráficas de funciones que además requiere poner en juego los conocimientos que se tiene de propiedades de las funciones (crecimiento, decrecimiento, cortes con ejes...) para poder discriminar las correctas.

Las gráficas que se emplean de distractores en la primera cuestión, se aprovechan en la segunda para comprobar la capacidad de los estudiantes para modificar una función dada de forma que se le añada un desplazamiento, positivo o negativo, en el eje de ordenadas o de abcisas. Esta cuestión, en cualquier caso, no es específica del tema de logaritmos.

En caso de querer reducir el problema podría eliminarse el apartado C.2. Sin embargo ésto reduciría el problema a un único apartado que además podría ser puramente memorístico, por lo que no se aconseja.

10.4.1 Posibles soluciones y errores

Apartado C.1

Tareas principales		
Cuestión	Penalización	Descripción
C.1	0.6	No identificar $\ln x$.
C.1	0.6	No identificar e^x.
C.2	0.6	No indicar los motivos de la elección de una función.
C.2	0.6	Elección basada en propiedades incorrectas de $\ln x$ o e^x.
C.2	0.8	Elección de más de una función y alguna ser errónea.
–	1	No contestar.
Tareas auxiliares específicas		
C.1	0.4	No indicar los motivos de la elección de una función.
C.2	0.4	Elección incorrecta.
–	0.4	Errores en el lenguaje matemático que dificultan la lectura.
Tareas auxiliares generales		
–	0.1-0.2	Errores en el lenguaje matemático que no dificultan la lectura.
–	0.1-0.2	Errores de lenguaje (ortográficos, gramaticales).
–	0.1-0.2	Ilegibilidad.
–	0.1-0.2	Desorden.

Cuadro 5: Criterios de regla de tercios para el problema C.

Resoluciones posibles

- **Memorización.** Para este apartado, no se considera un mal método. Sin embargo la justificación posterior que se solicita implicará identificar algunas propiedades clave de las funciones en su expresión gráfica.
- **A partir de sus propiedades:**
  - **Función exponencial.** La función exponencial tiene un dominio en todo $\mathbb{R}$, es positiva y tiene que cortar el eje de abcisas en $y = 1$. La primera propiedad es más complicada de asegurar por la gráfica, pero cualquiera de las dos restantes sirven, por ellas mismas, para identificar a la gráfica D.
  - **Función logarítmica.** Su dominio corresponde a los valores positivos de $\mathbb{R}$, tiene un cero en $x = 1$, tiende a $-\infty$ para $x \to 0$ y a $+\infty$ para $x \to \infty$. Las dos primeras propiedades discriminan todas menos las gráficas A y F. La tercera propiedad, por ella misma, identifica a la gráfica F.
- **Mediante la calculadora.** Es un método que no requiere interiorizar ni gráficas ni propiedades, pero que pese a todo puede tener su interés, puesto que requiere conectar información numérica aislada con representaciones gráficas. En cualquier caso, dependerá de si se permite para este problema usar o no calculadora.

Resoluciones erróneas. Dada la naturaleza del problema, las resoluciones erróneas irán de la mano de un desconocimiento o conocimiento impreciso de las propiedades de las funciones. Por ello, cualquier gráfica puede ser potencialmente elegible para representar cualquiera de las dos funciones solicitadas.

Apartado C.2

Resoluciones posibles

Aplicando transformaciones de funciones. Se presupone un conocimiento de las funciones exponencial y logarítmica.

- La transformación $g(x) = -f(x)$, hace que la función $g(x)$ sea el reflejo especular por el eje X de la función $f(x)$. Esto permite identificar la gráfica B como $-e^x$ y la gráfica A como $-\ln(x)$.
- La tranformación $g(x) = y_0 + f(x)$ implica un desplazamiento en el eje Y de la función $f(x)$, positivo o negativo dependiendo del signo de y_0. Esto permite identificar la gráfica E como $-1 + e^x$.
- La transformación $g(x) = f(x+x_0)$ implica un desplazamiento de la función $f(x)$ hacia la izquierda o la derecha del eje X en función del signo positivo o negativo de x_0. Esto permite identificar la gráfica C como $\ln(x+1)$

Una vez que se tiene una hipótesis sobre una gráfica, puede comprobarse utilizando uno o dos puntos de control.

Mediante la calculadora. Pueden hacerse los mismos comentarios que en el apartado anterior, si bien en este caso esté método de resolución tiene menor interés.

Resoluciones erróneas. Las resoluciones erróneas pueden pasar por conocer de memoria algunas de las transformaciones indicadas anteriormente, pero sin haberlas interiorizado. Esto puede traducirse en no saber asociar adecuadamente los signos de las constantes x_0 e y_0 con la dirección del desplazamiento. O interpretar lo que debería ser un desplazamiento en Y como un desplazamiento en X

La valoración de los errores para este problema según la regla de tercios viene dado en el cuadro 5.

10.5 Problema D

Para forjar una pieza de acero el herrero la calienta en la fragua hasta una cierta temperatura que suele estimar por el color rojo más o menos intenso del acero. En el momento en que la pone en el yunque y empieza a darle martillazos, la pieza va perdiendo temperatura progresivamente. Cada pieza lo hace a una velocidad diferente, pero la función que indica el descenso de temperatura es la siguiente:

$$T(t) = A\,e^{-\frac{t}{\tau}} + 25$$

La temperatura está expresada en grados centígrados (°) y el tiempo en segundos (s). Cada pieza tiene unos valores distintos de los parámetros A y τ.

- Para una cierta pieza se sabe que $A = 975$ y $\tau = 60$.

  D.1 Determina la temperatura a la que se encontrará el acero a 50 s de salir de la fragua.

  D.2 Determina en qué instante el acero se encontrará a 370°.

- Para otra pieza se desconoce los valores de A y de τ, pero el herrero, a la vista del color de la barra, estima que justo al salir de la fragua estaba a una temperatura de 1100°. Despues de 45 segundos ve que el color es mucho mas apagado y estima que la temperatura ha bajado a 250°.

  D.3 Determina **razonadamente** los valores de A y τ en este caso.

Este problema pretende testear la capacidad de los estudiantes para manejar una curva exponencial básica. Este tipo de ecuaciones se las van a encontrar recurrentemente si siguen estudios técnicos como modelización de multitud de procesos. Se les va a solicitar tres tareas básicas: a) Emplear la función de forma directa b) Emplear la función en forma inversa (función inversa) y c) Determinación de parámetros.

En definitiva, implica un uso de las propiedades de exponenciales/logaritmos en un entorno algebráico dentro de un problema contextualizado de forma que puedan interpretar las soluciones para detectar resultados incongruentes. Existe un riesgo de que el alumno identifique el problema con un problema de Física, lo que podría condicionarlo emocionalmente hacia él. Por eso se ha huido de un excesivo rigor físico eliminando la expresión de unidades en las constantes A y τ.

Hay otra posible vía de ofuscación para los estudiantes. La función se expresa como $T(t)$ frente a la notación genérica a la que están acostumbrados $y = f(x)$, lo que también podría condicionarlos. Es un problema similar al que se presenta en geometría cuando se representan siempre los triángulos con la base en posición horizontal, de forma que el estudiante se confunde cuando ve el triángulo girado, o no lo identifica claramente. En ese sentido, convendría huir de vez en cuando de la notación

Tareas principales		
Cuestión	Penalización	Descripción
D.1 D.2	0.7	Error algebraico con logaritmos.
–	1	No contestar.
Tareas auxiliares específicas		
D.3	0.3	Falta de explicación textual.
–	0.3	Error nuerico incongruente sin análisis crítico.
–	0.4	Errores en el lenguaje matemático que dificultan la lectura.
Tareas auxiliares generales		
D.3	0.2	Error en la resolución del sistema.
–	0.2	Error nuerico incongruente detectado.
–	0.2	Error numérico menor.
–	0.1-0.2	Errores en el lenguaje matemático que no dificultan la lectura.
–	0.1-0.2	Errores de lenguaje (ortográficos, gramaticales).
–	0.1-0.2	Ilegibilidad.
–	0.1-0.2	Desorden.

Cuadro 6: Criterios de regla de tercios para el problema D.

convencional en las sesiones de problemas.

En caso de necesitar reducir la prueba, se propone eliminar el apartado D.1, dado que consiste en un simple cálculo numérico de una expresión algebraica con ayuda de la calculadora. La parte asociada a comprensión del enunciado ya queda cubierta en los siguientes apartados.

10.5.1 Posibles soluciones y errores

Apartado D.1

Resoluciones posibles. Es una simple sustitución directa. El único error posible es el de interpretación del problema. $T(t = 50) = 448.7°$.

Resoluciones erróneas –

Apartado D.2

Resoluciones posibles. Este apartado implica la obtención de la función inversa para despejar la variable temporal t. Eso puede hacerse de varias formas:

Analíticamente. y tras ello sustituir valores:

$$t = \tau \ln(\frac{A}{T - 25})$$

con lo que $t \approx 88\,\mathrm{s}$. La presencia de datos numéricos junto con la aparente mayor dificultad de operar algebraicamente hace que esta vía sea raramente seguida, salvo que explicitamente se le indique.

Analíticamente con sustitución previa de valores. Sustituir valores en los valores conocidos y operar con el resto. Mientras las expresiones algebraicas no sean excesivamente grandes, esta vía es peor dado que la sustitución numérica no va a evitar que las expresiones intermedias pierdan significado -no hay quehacer aritmético- mientras que también se pierde la posibilidad de control algebraico (control dimensional de expresiones, principalmente).

Por tanteo. No es una solución despreciable puesto que requiere una cierta interiorización del concepto de función, la elaboración de una estrategia que en un futuro le servirá de introducción a algoritmos mas complejos (bisección, Newton -Raphson...)

Utilizando los recursos de la calculadora. Tampoco es despreciable. Las calculadoras con funciones sofisticadas también van acompañadas de manuales que distan de ser triviales. El alumno promedio no suele pasar del uso directo de su calculadora: aprieta la tecla y obtiene el resultado. El alumno que es capaz de aprender las funciones avanzadas de su calculadora para resolver un problema, ya demuestra bastante suficiencia matemática.

Resoluciones erróneas

Errores algebraicos I. Al despejar la ecuación, tratar de reproducir procedimientos vistos en clase pero no interiorizados. El recuerdo de que hay que tomar logaritmos puede conducir a situaciones del tipo:

$$\ln(T) = \ln(Ae^{-\frac{t}{\tau}} + 25)$$

A partir de aquí el alumno puede optar por escapar de esta situación con alguna vía poco ortodoxa:

$$\ln(T) = \ln(Ae^{-\frac{t}{\tau}}) + \ln(25)$$

Errores algebraicos II. el paso

$$\ln e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{t}{\tau}$$

también puede crear problemas, especialmente con el signo menos

Base errónea de logaritmos. Tomar logaritmos decimales en vez de neperianos.

Apartado D.3

Resoluciones posibles

Analíticamente. En este caso se trata de resolver el sistema:

$$T_1 = A\,e^{-\frac{t_1}{\tau}} + 25$$
$$T_2 = A\,e^{-\frac{t_2}{\tau}} + 25$$

El sistema es soluble de esa forma. Sin embargo hay que interpretar que “justo al salir de la fragua” implica que $t_1 = 0$, lo que conduce a:

$$T_1 = A + 25$$
$$T_2 = A\, e^{-\frac{t_2}{\tau}} + 25$$

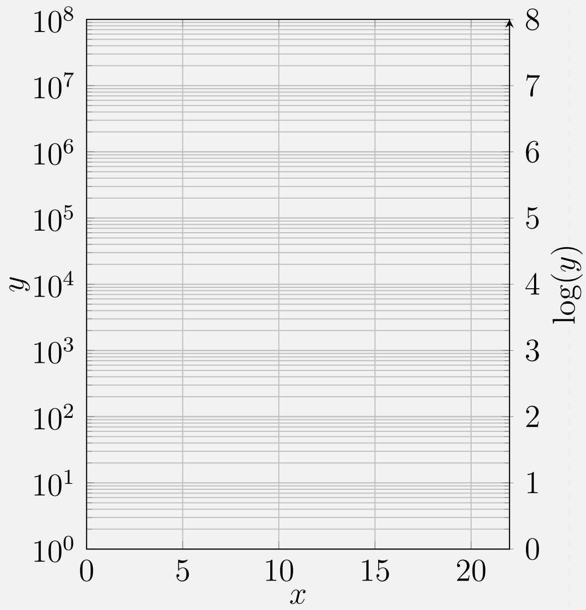
y la dinámica de la solución es similar a la del apartado D.2 obteniéndose $A = 1075°$ y $\tau = 28.8\,\mathrm{s}$

Por tanteo numérico. Alternativamente, puede que haya estudiantes que lo intenten nuevamente por tanteo, pero al tratarse de dos variables el proceso se complica mucho salvo que se tenga una buena interpretación de los resultados obtenidos en cada iteracción.

Resoluciones erróneas. La dificultad añadida de este apartado es intuir la necesidad de imponer a la expresión de partida las dos condiciones (los dos puntos (T, t)). Los errores algebráicos pueden seguir la línea de los ya expuestos.

La valoración de los errores para este problema según la regla de tercios viene dado en el cuadro 6.

10.6 Problema E



En un experimento de biología se ha colocado un cierto número de bacterias en una placa de cultivo. Conforme van pasando los días, las bacterias han ido reproduciendose. Los investigadores han contado las bacterias cada día. En la siguiente tabla hay algunos valores:

Día	Número de bacterias
3	149
9	32945
11	199304
12	490208

E.1 Representa estos datos en una escala normal para el eje de abcisas y logarítmica para el eje de ordenadas.

E.2 ¿Cuantas bacterias podemos esperar que haya el día 7?

E.3 A la vista de la gráfica ¿puedes determinar en que punto del eje de ordenadas se producirá el corte de la gráfica? ¿Qué interpretación le darías a ese punto?

E.4 ¿En qué día se superarán los 10 millones de bacterias?

Este problema fundamentalmente pretende determinar la capacidad de construcción e interpretación de escalas logarítmicas aplicadas a un conjunto de datos.

A la hora de elección de escalas, la lineal es la primera preferencia dado que es la de más fácil interpretación. Sin embargo, la naturaleza de los datos ya apunta a la imposibilidad de utilizar una lineal para el número de bacterias. El problema podría dejar a criterio de los estudiantes la elección de la forma de representación, sin embargo se les ha cerrado este camino para no abrir en exceso el abanico de posibilidades de solución y enfocarlos hacia el empleo de escalas logarítmicas, que es lo que se pretende.

Los datos corresponden *exactamente* a una función exponencial, que se traducirá en una línea recta en las escalas solicitadas. Se ha descartado la posibilidad de añadir algo de ruido a los datos, dado que se trata de un examen que ya tiene complejidad suficiente y es posible que no se les haya mencionado todavía el concepto de regresión o ajuste.

Tareas principales		
Cuestión	Penalización	Descripción
E.1	0.7	Error de representación en más de un punto.
E.2	0.6	Error de posicionamiento del punto y lectura de ordenada.
E.3 E.4	0.5	Extrapolación irrazonable.
E.3	0.5	Falta de interpretación del corte con eje de ordenadas.
–	1	No contestar.
Tareas auxiliares específicas		
E.3 E.4	0.3	Extrapolación errónea pero no incongruente.
–	0.4	Errores en el lenguaje matemático que dificultan la lectura.
Tareas auxiliares generales		
–	0.1-0.2	Errores en el lenguaje matemático que no dificultan la lectura.
–	0.1-0.2	Errores de lenguaje (ortográficos, gramaticales).
–	0.1-0.2	Ilegibilidad.
–	0.1-0.2	Desorden.

Cuadro 7: Criterios de regla de tercios para el problema E.

Las siguientes preguntas implican interpolaciones y extrapolaciones. Dado que la gráfica bajo la escala logarítmica es lineal, ambas acciones tienen la misma dificultad.

La segunda pregunta implica una interpolación y permitirá dilucidar si los alumnos interpolan sobre la gráfica (los datos logarímicos) o bien interpolan directamente sobre los datos sin transformar, lo que revelaría un desconocimiento del sentido de la transformación logaritmica.

Las dos últimas preguntas tratan de evaluar la capacidad de interpretación por parte de los alumnos de su propia gráfica.

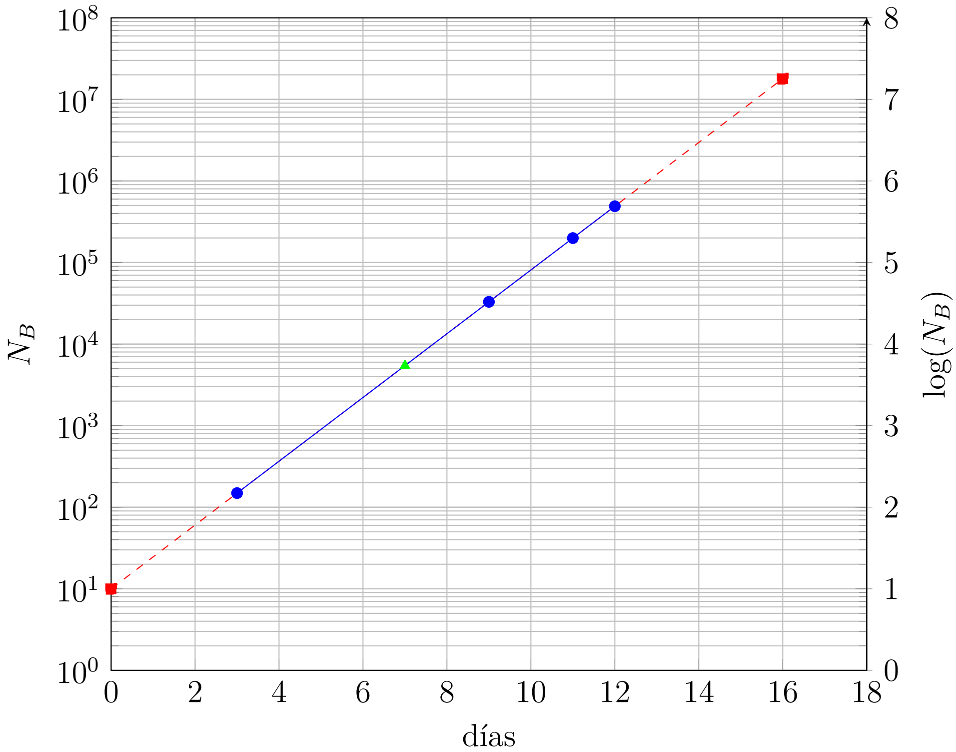
Para la realización del problema se ofrecerá papel pautado a los estudiantes, para tratar de minimizar el efecto de la mayor o menor habilidad artística del estudiante. Se busca capacidad de interpretar un gráfico logarítmico, no realizar una prueba de dibujo lineal.

En caso de querer reducir la extensión del examen, podría eliminarse el apartado E.4. Se trata de una extrapolación sobre los datos y también debe hacerse en el apartado E.3.

10.6.1 Posibles soluciones y errores

Apartado E.1

Resoluciones posibles. El primer apartado requiere llegar a algo parecido a la gráfica siguiente:

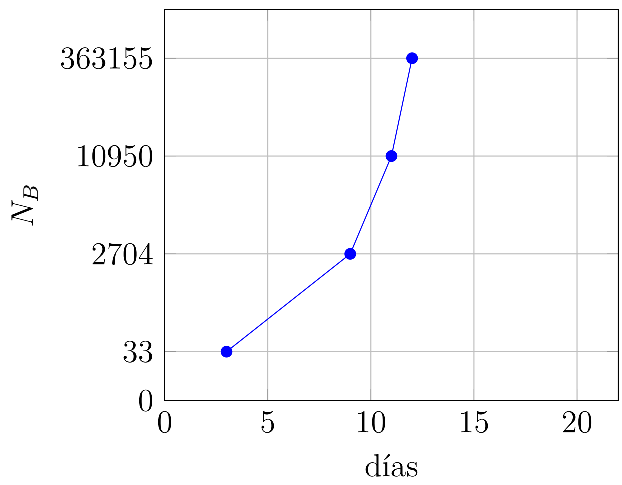


El enunciado fuerza a una representación gráfica, de forma que no hay muchas más opciones correctas de resolver el apartado: contruimos una nueva tabla con los datos de los ejes logarítmicos adecuadamente transformados:

Día	N_B =Número de bacterias	$\log(N_B)$
3	149	2.173
9	32945	4.518
11	199304	5.300
12	490208	5.690

A partir de aquí es cuestión de hacer la representación de los puntos en la gráfica (línea y puntos de trazo azul).

Resoluciones erróneas. Las resoluciones erróneas pasarán por realizar la representión en una escala lineal para el eje de ordenadas. El alumno se dará cuenta de que no le entra razonablemente en el papel y falseará mejor o peor la proporcionalidad. Como resultado no obtendrá una línea recta. Es interesante notar que en este caso, el estudiante llega por si mismo a la necesidad de hacer una compresión de datos, sin embargo le falta la herramienta para ello.



Apartado E.2

Los siguientes apartados conllevan hacer interpolaciones y extrapolaciones. Pueden resolverse de dos formas: gráfica y analítica. El método gráfico será el más probable puesto que se acercará más a lo expuesto en clase. El segundo método es más complejo dado que requiere, a partir de un conjunto de datos desnudos, *hacer una hipótesis sobre la forma funcional* y luego calcular los parámetros. Sin mayor indicación previa, aunque el problema de herrero en este mismo examen les puede dar una pista, esto posiblemente resulte excesivo para este curso.

Resoluciones posibles

Gráfica. Basta buscar el punto del día 7 en la gráfica. En nuestro caso se ha representado con un triángulo verde. El valor del número de bacterias es de 5446, aunque las soluciones fluctuarán en torno es este número por la imprecisión de la lectura de la gráfica[31].

Analítica. Se trata de buscar una relación funcional para los datos. El tipo de fenómeno de que se trata apunta a un comportamiento exponencial. Cualquier función exponencial puede servir pero las bases 10 y e parecen las más habituales:

Tomando como unidad para el tiempo el día, se podría conjeturar una de las dos siguientes:

$$N_B(t) = N_0 + A\,e^{\alpha t}$$
$$N_B(t) = M_0 + B\,10^{\beta t}$$

El siguiente paso es determinar los coeficientes a partir de los valores de los puntos. Se obtiene $N_0 = 0$, $A = 10$, $\alpha = 0.9$ y $M_0 = 0$, $B = 10.02$, $\beta = 0.3908$. Con estos valores, el resto del problema puede resolverse (e interpretarse) algebraicamente.

[31] Tomando como "regla gruesa" una incertidumbre de 1/4 de intervalo, se podría considerar una variación en el resultado de ± 125, lo que corresponde al intervalo $(5321, 5571)$.

Analítica con interpolación logarítmica. Correspondería a una aproximación intermedia de las dos anteriores. Tras la representación gráfica, el estudiante puede optar por calcular la ecuación de la recta que está viendo representada:

$$\log(N_B = t) = m\,t + b$$

y tomar dos valores para hacer el ajuste. El valor de m y b corresponde al valor de β calculado antes y $b = \log(B) \approx 1$. A partir de aquí, sustituyendo $\log\left(N_B(t = 7)\right) \approx 3.736$ y por tanto $N_B(t = 7) \approx 5451$. El mismo proceso se seguiría en caso de tomar logaritmos naturales.

Resoluciones erróneas. Obviaremos en este apartado las resoluciones erróneas que se derivan de una inadecuada representación gráfica.

- Mala localización del punto que se solicita en la gráfica.
- Adecuada ubicación del punto, pero mala lectura de la escala logarítmica.
- Ignorar la gráfica y hacer interpolaciones lineales entre los valores de 3 y 9 días. Podría ser una interpolación grosera al punto medio.

$$N_B(t = 7) = \frac{N_B(t = 3) + N_B(t = 9)}{2} = 16547$$

o algo más refinadas, teniendo en cuenta que no se trata del punto medio:

$$N_B(t = 7) = N_B(t = 3) + \left[N_B(t = 9) - N_B(t = 3)\right] \frac{7 - 3}{9 - 3} = 22013$$

- Usar modelos funcionales sin mayor justificación. Por ejemplo, considerar que el número de bacterias se duplica cada día y aplicarlo. Partiendo del valor conocido del día 3 esto conduciría a $N_B(t = 7) = N_B(t = 3) \cdot 2^4 = 5103$

Apartado E.3

Resoluciones posibles

Gráfica. Una vez obtenida la línea recta azul, el corte con el eje se puede hacer a mano alzada o con regla. La lectura directa de la gráfica indicará que el punto de corte con el eje de ordenadas es $10^1 = 10$ (o 1 en la escala de la derecha, con los valores directamente expresados como logaritmos). Ese valor se interpreta como el número de bacterias en el día 0, es decir, al inicio del experimento.

Algebraica. El corte con la gráfica, por otra parte, corresponde a $t = 0$, luego en este caso, tendríamos que $N_B(t = 0) = B \approx 10$.

Resoluciones erróneas. Asumiendo que se ha representando correctamente la gráfica de los puntos conocidos, el principal error en este apartado será no interpretar correctamente la expresión “en qué punto del eje de ordenadas se producirá el corte” y buscar un corte con el eje de abcisas. Esto conduciría a un valor negativo para el día, de difícil interpretación y un número de bacterias tendiendo a $-\infty$, de más difícil interpretación.

El mismo problema puede ocurrir en caso de que no se haya representado correctamente la expresión, pero en este caso los resultados previsibles son más inciertos.

Apartado E.4

Resoluciones posibles

Gráfica. Este apartado requiere una extrapolación en sentido contrario al anterior. A la vista de la gráfica queda patente que para el día 16 ya se habrán superado los 10 millones de bacterias, pero que el día 15 se inicia con un número menor. Luego la respuesta es el día 15. Debido a la imprecisión del método gráfico también podría considerarse como correcto el día 14.

Algebraica. Pasaría por invertir cualquiera de las expresiones anteriores para determinar el instante en que se cruza el umbral de los 10 millones de bacterias. Tomando la expresión con base 10, tendríamos:

$$t = \frac{1}{\beta} \log \left(\frac{y}{B} \right)$$

que para $y = 10^7$ arroja un valor de $t = 15.35$. A este mismo resultado se podría haber llegado sin invertir la expresión, mediante tanteo numérico.

Resoluciones erróneas. Esta cuestión es de un corte similar a la D.2 por lo que el análisis hecho para aquella es extrapolable a ésta. De manera mas específica, aparecen aquí dos dificultades añadidas que pueden llevar a error:

- No saber trasladar el valor de 10 millones (de bacterias) a un valor en el eje de ordenadas.
- Confusión semántica: ¿el enunciado se refiere al inicio del día? ¿durante el día? ¿al final del día?

La valoración de los errores para este problema según la regla de tercios viene dado en el cuadro 7.

10.7 Cobertura curricular y cognitiva. Puntuación de la prueba

Los problemas del examen contemplan los diversos bloques en que se ha dividido la aplicación de los logaritmos. El primero conecta mayormente con los contenidos de cuarto de la ESO. El segundo con el uso de los logaritmos como herramienta aritmética. El tercero y el cuarto, con las funciones logarítmicas, incluyendo este último también a las ecuaciones logarítmicas. Finalmente, el quinto problema hace referencia a las escalas logarítmicas.

A su vez, cada una de las cuestiones atiende a uno o varios estándares de aprendizaje, con la excepción de algunas del primer problema que, como ya se ha mencionado, se enmarcan más adecuadamente en el currículo de cuarto de la ESO. Por otra parte, dichos estándares, y los criterios de evaluación de los que se desglosan, vienen asociados a un conjunto de competencias clave. En la tabla 10.7 se lista para cada cuestión el conjunto de estos estándares y las competencias clave que se les asocia. Por brevedad se ha omitido la competencia en Matemáticas y Ciencia y Tecnología, pues es aplicable a todas.

Con objeto de tener una visión global del nivel de exigencia de la prueba se ha clasificado el nivel cognitivo requerido para cada cuestión en base a la clasificación del marco teórico del TIMSS Advanced 2015 (Mullis, 2014). Según este marco, los niveles cognitivos de desempeño se organizan en tres niveles:

Conocer. Capacidad de recordar definiciones, terminología, procedimientos propiedades. Se subclasifica en *recordar, reconocer, calcular y recuperar información*

Aplicar. Capacidad de aplicar lo conocido para la resolución de problemas. En este grupo se encuentran la mayor parte de los problemas convencionales que se desarrollan en el aula. Subdivisiones de este grupo son *Determinar, Representar/Modelar e implementar*

Razonar. Implica afrontar un problema formulando conjeturas, haciendo deducciones lógicas en base a hipótesis específicas y justificar los resultados. Se divide en *analizar, sintetizar/integrar, evaluar, extraer conclusiones, generalizar y justificar*

En cualquier caso esta clasificación tiene un carácter orientativo, dado que el nivel cognitivo va a depender del nivel de formación previa del estudiante y de la forma en que se ha desarrollado la unidad didáctica.

Para dar una valoración adecuada a cada apartado, vamos a seguir las indicaciones del TIMMS, que considera que para el último año de secundaria debe considerar un 35% del nivel de *conocer*, un 35% del nivel de *aplicar* y un 30% del de *razonar*. Sin embargo, atendiendo a que no se trata del último año de secundaria, que las actividades de razonamiento llevan más tiempo y el tiempo del examen es limitado, se han ajustado estos niveles a un 40%, 40% y 20%, respectivamente. De forma adicional, el primer problema se ha valorado menos que el resto por encontrarse (estrictamente) fuera del currículo. Con todo esto se propone la valoración de cada apartado que figura en en la tabla 10.7.

10.8 Corrección y actividades de aprovechamiento

Un elemento de evaluación puede tener la finalidad de generar una nota para un informe de evaluación y/o puede formar parte de un proceso de evaluación formativa. Sadler (1989) indica que es conveniente aportar información al estudiante de forma que pueda ser progresivamente más capaz de monitorizar sus propias producciones y autoregular de esa forma su aprendizaje. Por su parte Mauri y Barberà (2007) dividen las *situaciones de evaluación* en cinco actividades: preparación, evaluación, corrección, comunicación y aprovechamiento, siendo estas dos últimas las que concentran el

Cuestión	TIMSS	Puntuación	Estándares	C.C.
A.1	Con.Recordar	0.5	(Est.MA.1.7.2.)	CCL
A.2	Con.Calcular	0.25		
A.3	Con.Calcular	0.25		
B.1	Apl.Determinar	0.5	(Est.MA.2.3.1.)	
B.2	Raz.Integrar	0.5	(Est.MA.1.2.3.) (Est.MA.1.7.3.) (Est.MA.2.3.1.)	CCL CAA
B.3	Apl.Determinar	0.5	(Est.MA.1.2.3.) (Est.MA.1.7.3.) (Est.MA.2.3.1.)	CAA
C.1	Con.Reconocer	1	(Est.MA.3.1.1.)	
C.2	Raz.Integrar	0.5	(Est.MA.1.2.4.) (Est.MA.1.7.3.) (Est.MA.1.2.2.) (Est.MA.3.1.1.)	CAA
D.1	Con.Calcular	1	(Est.MA.2.3.2.) (Est.MA.1.8.4.)	
D.2	Apl.Determinar	1	(Est.MA.1.2.1.) (Est.MA.1.8.4.) (Est.MA.2.3.2.)	
D.3	Apl.Determinar	1	(Est.MA.1.2.4.) (Est.MA.1.2.1.) (Est.MA.1.2.1.) (Est.MA.1.7.3.) (Est.MA.2.3.2.)	CCL CAA
E.1	Apl.Representar	1	(Est.MA.1.7.2.) (Est.MA.2.3.2.)	
E.2	Raz.Analizar	0.5	(Est.MA.1.2.3.) (Est.MA.1.8.4.) (Est.MA.1.2.1.) (Est.MA.2.3.2.)	CAA
E.3	Con.Recuperar	1	(Est.MA.1.2.1.) (Est.MA.1.7.3.) (Est.MA.1.8.4.) (Est.MA.2.3.2.)	CAA
E.4	Raz.Analizar	0.5	(Est.MA.1.2.3.) (Est.MA.1.8.4.) (Est.MA.2.3.2.)	

Cuadro 8: Clasificación cognitiva, estándares de aprendizaje, competencias clave, valoración de las cuestiones del examen y relación con praxeologías.

suministro de realimentación a los estudiantes.

Habiendo cubierto en las secciones anteriores la parte destinada a la preparación, se propone implementar las restantes del siguiente modo:

Evaluación En vista de la orientación no presencial que parece que se va a imponer en el futuro inmediato, la prueba se podría ejecutar poniéndola a disposición de los estudiantes a una hora determinada a través de correo electrónico y emplazándoles a que la resuelvan y reenvíen en un plazo determinado. No se llevarían a cabo controles vía cámaras o micrófonos dado que son ineficientes y fácilmente engañables. Para evitar actividades fraudulentas se confiaría en asignar datos diferentes a cada examen, hacer hincapié en las respuestas textuales (más complicadas de copiar), simultaneidad de ejecución y una duración temporal razonable pero limitada.

Corrección Se llevará a cabo por parte del profesor, utilizando la regla de tercios y en el plazo más razonablemente breve posible. Hay que notar que la regla de tercios aboga por una consideración atomística del examen y se pueden perder matices más holísticos, que aunque no se han contemplado de alguna manera deberían incorporarse.

En el caso de que el examen realmente se haya hecho a distancia, podría considerarse emplazar a algunos de los alumnos (o todos) una entrevista para que expusieran parte del examen y respondan a preguntas.

Comunicación Se publicarían las calificaciones obtenidas junto con la resolución del examen. Se indicaría que no se trata de la única solución posible.

Actividad de aprovechamiento Cualquier actividad de aprovechamiento inevitablemente va a ser interpretada por los estudiantes como un trabajo o *carga* adicional. Por ello, esta actividad no se llevará a cabo con los estudiantes que hayan obtenido una nota superior a 6.5, para los que, en cualquier caso, se presupone que dominan lo suficiente la materia para no necesitarlas. Aunque no es lo que se busca, de forma lateral esta medida puede suponer un aliciente adicional para todos los estudiantes para obtener un buen resultado en la prueba.

Para el resto, se abrirá una sesión de para que hagan comentarios y/o expresen dudas sobre la realización de los problemas. Tras esto se les asignará uno de los exámenes, adecuadamente anonimizado y tendrán que corregirlo, siguiendo la regla de los tercios y presentar un pequeño informe de corrección. Con esta actividad se pretende, entre otros objetivos, que el estudiante progrese en su capacidad de autoevaluarse conforme progresa en el estudio (Sadler, 1989). El informe será revisado por el profesor y enviado al autor del examen. Si se sospecha que la corrección entre pares puede tener riesgos de crear tensiones en la clase, cada estudiante se corregirá su propio examen.

11 Referencias bibliográficas

Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E. & Sanz, L. (s.f.). *Matemáticas I*. SM.

Ayoub, R. (1993). What is a napierian logarithm? *The American Mathematical Monthly*, *100*(4), 351-364. doi:10.1080/00029890.1993.11990412

Aziz, T. A., Pramudiani, P. & Purnomo, Y. W. (2017). How do college students solve logarithm questions? *International Journal on Emerging Mathematics Education (IJEME)*, *1*(1), 25-40. doi:10.12928/ijeme.v1i1.5736

Berezovski, T. (2008). *An inquiry into high school students' understanding of logarithms* (Tesis de maestría, Simon Fraser University).

Brosseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics* (Kluwer, Ed.).

Brousseau, G. (1989). Utilidad e interés de la didáctica para un profesor I. *Revista Suma*, (4), 5-12.

Bruce, I. (2002). The agony and the ecstasy: the development of logarithms by Henry Briggs. *The Mathematical Gazette*, *86*(506), 216-227.

Cajori, F. (1913). History of the exponential and logarithmic concepts. *The American Mathematical Monthly*, *20*(1-7).

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *19*(2), 221-266. Recuperado desde https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 161-182. doi:10.4471/redimat.2013.26

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Cuadernos de educación. I.C.E., Universitat de Barcelona.

Chua, B. & Wood, E. (2005). Working with logarithms: Student's misconceptions and errors. *The Mathematics Educator*, *2*(8).

Cid, E. & Muñoz-Escolano, J. M. (2019). *Apuntes de diseño instruccional de matemáticas. Una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico*. Departamento de Matemáticas. Area de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Colera, J., Oliveira, R., Colera, R. & Santaella, E. (2015). *Matemáticas I* (G. Anaya, Ed.).

Confrey, J. (2002). Learning to listen: A student's understanding of powers of ten. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 111-138). doi:10.1007/0-306-47201-5_6

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66-86.

Cortázar, J. (1866). *Tratado de Algebra Elemental* (16ª ed.).

Dorce, C. (2014a, julio). El impacto de la invención de los logaritmos en el siglo XVII. *Revista Suma*, (76), 17-25.

Dorce, C. (2014b, marzo). Un paseo histórico por la invención de los logaritmos. *Revista Suma*, (75), 33-42.

Ferrari-Escolá, M., Martínez-Sierra, G. & Méndez-Guevara, M. E. M. (2016). "Multiply by adding": Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *42*, 92-108. doi:10.1016/j.jmathb.2016.03.003

Gairín, J., Muñoz, J. & Oller, A. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En SEIEM (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261-274). Jaén.

Ganesan, R. & Dindyal, J. (2014). An investigation of students' errors in logarithms. En J. Anderson, M. Cavanagh & A. Prescott (Eds.), *Curriculum in focus: Research guided practice (Proceedings of the 37 th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 231-238).

García, F., Barquero, B., Florensa, I. & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, *15*, 75-94. doi:10.35763/aiem.v0i15.267

Hammack, R. & Lyons, D. (1995). A simple way to teach logarithms. *The Mathematics Teacher*, *88*(5), 374-375.

Higuera de Frutos, S. (2016). Reglas de cálculo. *Pensamiento Matemático*, *6*(2), 149-164.

Hurwitz, M. (1999). We have liftoff! Introducing the logarithmic function. *The Mathematics Teacher*, *92*(4), 344-345.

Kuper, E. & Carlson, M. (2020). Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithm. *The Journal of Mathematical Behavior*, *57*, 100740. doi:10.1016/j.jmathb.2019.100740

León, C. & Maz, A. (s.f.). Juan Cortázar y sus aportaciones a la educación matemática española del siglo XIX. *ENSAYOS. Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, *30*(1), 55-62. Recuperado desde https://revista.uclm.es/index.php/ensayos/article/view/733

Mauri, T. & Barberà, E. (2007). Regulacion de la construcción del conocimiento en el aula mediante la comunicación de los resultados de aprendizaje a los alumnos Regulating knowledge building in the classroom through the communication of learning results to pupils. *Infancia y Aprendizaje*, *30*, 483-497. doi:10.1174/021037007782334364

McFarland, D. D. (2007). Quarter-squares revisited: earlier tables, division of labor in table construction, and later implementations in analog computers. *CCPR Population Working Papers*.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(1), 3-14.

Mullis, M., I.V.S. & Martin. (2014). *TIMSS Advanced 2015 Assessment Frameworks*. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center. Recuperado desde http://timssandpirls.bc.edu/timss2015-advanced/frameworks.html

Otero, M., Fanaro, M., Corica, A., Llanos, V., Sureda, P. & Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de matemática* (Dunken, Ed.). doi:10.13140/2.1.2103.0722

Panagiotou, E. N. (2011). Using history to teach mathematics: the case of logarithms. *Science & Education*, *20*(1), 1-35. doi:10.1007/s11191-010-9276-5

Rafi, I. & Retnawati, H. (2018). What are the common errors made by students in solving logarithm problems? *Journal of Physics: Conference Series*, *1097*, 012157. doi:10.1088/1742-6596/1097/1/012157

Rico, L. (2016). Matemáticas escolares: fines educativos y estructura curricular. En *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 31-44). Madrid: Pirámide.

Rodriguez del Río, R. (s.f.). *Matemáticas I* (Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia. Ministerio de Educación y Ciencia (CIDEAD), Ed.).

Roegel, D. (2010). *Napier's ideal construction of the logarithms*. HAL. Archives-ouvertes.fr. Recuperado desde https://hal.inria.fr/inria-00543934

Roldán de Montaud, I. & Sampayo Yáñez, M. (2015). Historia de los logaritmos y de su difusión en España por Vicente Vázquez Queipo. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *18*(2), 353-374.

Sadler, D. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional Science*, *18*(2), 119-144. doi:10.1007/BF00117714

Seebeck, C. L. & Hummel, P. M. (1959). Logarithmic and exponential functions—a direct approach. *The Mathematics Teacher*, *52*(6), 439-443.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9-15.

Spivak, M. (2012). *Calculus* (Reverte, Ed.).

Toumasis, C. (1993). Teaching logarithms via their history. *School Science and Mathematics*, *93*(8), 428-434. doi:10.1111/j.1949-8594.1993.tb12274.x

Vargas, J., Cortés, M. & Olaya, J. (2014). Caracterizando con la noción conocimiento didáctico del contenido. *Interacción*, *13*, 57-67. doi:10.18041/1657-7531/interaccion.0.2273

Vargas, J., Pérez, E. & González, M. T. (2011). El Logaritmo ¿Cómo animar un punto que relacione un progresión geométrica y una aritmética? En *Memorias del 20o Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 129-138).

Watters, D. J. & Watters, J. J. (2006). Student understanding of pH: "I don't know what the log actually is, I only know where the button is on my calculator". *Biochemistry and Molecular Biology Education*, *34*(4), 278-284. doi:10.1002/bmb.2006.494034042628. eprint: https://iubmb.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/bmb.2006.494034042628

Wolbert, W. J. (2012). Sliding through logarithms. *The Mathematics Teacher*, *106*(4), 320-320.

Anexos

A Extractos Curriculares

La evaluación de las competencias clave y su relación con los estándares de aprendizaje queda recogido en Orden ECD/65/2015, de 21 de enero.

A.1 Logaritmos en el currículo de ESO

En los tres primeros cursos de la ESO no se introduce el concepto de logaritmo y únicamente aparecen referencias a potencias con exponente natural.

En el cuarto curso y dentro de la opción de enseñanzas aplicadas no hay salto de los potencias de exponente natural a exponente racional. Sin embargo hay una mención lateral a la función exponencial en el bloque de funciones que resulta un poco sorprendente, o que implica implícitamente el exponente racional.

> ※ Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.
> ※ Estudios de otros modelos funcionales y descripción de sus características, usando el lenguaje matemático apropiado. Aplicación en contextos reales.
>
> Crit.MAAP.4.1. [CMCT-CSC] Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas. Aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.
>
> Est.MAAP.4.1.1. Est.MAAP.4.1.2 Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional (lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa y exponencial), asociando las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas.

Para la opción de enseñanzas académicas, se introducen los exponentes racionales y se inicia el estudio de funciones elementales en las que se incluye la exponencial y la logarítmica.

> ※ Potencias de exponente racional. Operaciones y propiedades.
> ※ Logaritmos. Definición y propiedades.
>
> Crit.MAAC.2.2. [CMCT] Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico.
>
> Est.MAAC.2.2.3. Establece las relaciones entre radicales y potencias, opera aplicando las propiedades necesarias y resuelve problemas contextualizados.

> ※ Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.
> ※ Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.
>
> Crit.MAAC.4.1. [CMCT] Identificar relaciones cuantitativas en una situación,

determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.

Est.MAAC.4.1.1. Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas
Est.MAAC.4.1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica, empleando medios tecnológicos, si es preciso.
Est.MAAC.4.1.3. Identifica, estima o calcula parámetros característicos de funciones elementales.
Est.MAAC.4.1.6. Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, definidas a trozos y exponenciales y logarítmicas.

A.2 Logaritmos en el currículo de Bachiller

En el primer curso de bachiller, para la asignatura de matemáticas I, dentro de la opción de Ciencias, se entra ya completamente en el tema:

※ Sucesiones numéricas: término general, monotonía y acotación. El número e.
※ Logaritmos decimales y neperianos. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Crit.MA.2.3. [CMCT] Valorar las aplicaciones del número "e" y de los logaritmos utilizando sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.

(Est.MA.2.3.1.) Aplica correctamente las propiedades para calcular logaritmos sencillos en función de otros conocidos.
(Est.MA.2.3.2.) Resuelve problemas asociados a fenómenos físicos, biológicos o económicos mediante el uso de logaritmos y sus propiedades.

※ Funciones básicas: polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, raíz, trigonométricas y sus inversas, exponenciales, logarítmicas y funciones definidas a trozos.

Crit.MA.3.1. [CMCT-CD] Identificar funciones elementales, dadas a través de enunciados, tablas o expresiones algebraicas, que describan una situación real, y analizar, cualitativa y cuantitativamente, sus propiedades, para representarlas gráficamente y extraer información práctica que ayude a interpretar el fenómeno del que se derivan.

(Est.MA.3.1.1.) Reconoce analítica y gráficamente las funciones reales de variable real elementales.

Dado que la prueba de evaluación que se propone está orientado para este nivel, se incluyen además los elementos de bloque 1 que son relevantes:

※ Planificación del proceso de resolución de problemas.
※ Estrategias y procedimientos puestos en práctica: relación con otros problemas conocidos, modificación de variables, suponer el problema resuelto.
※ Soluciones y/o resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación,

revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos, generalizaciones y particularizaciones interesantes.

※ Iniciación a la demostración en matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc.

※ Métodos de demostración: reducción al absurdo, método de inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc.

※ Razonamiento deductivo e inductivo.

※ Lenguaje gráfico, algebraico, otras formas de representación de argumentos; Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema o en la demostración de un resultado matemático.

※ Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

※ Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:

b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.

c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.

d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.

f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.

Crit.MA.1.2. [CCL-CMCT-CAA] Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.

(Est.MA.1.2.1.) Analiza y comprende el enunciado a resolver o demostrar (datos, relaciones entre los datos, condiciones, hipótesis, conocimientos matemáticos necesarios, etc.).

(Est.MA.1.2.2.) Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.

(Est.MA.1.2.3.) Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.

(Est.MA.1.2.4.) Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas.

Crit.MA.1.3. [CCL-CMCT-CAA] Realizar demostraciones sencillas de propiedades o teoremas relativos a contenidos algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.

(Est.MA.1.3.1.) Utiliza diferentes métodos de demostración en función del contexto matemático.

Crit.MA.1.4. [CCL-CMCT-CD-CIEE] Elaborar un informe científico escrito que sirva para comunicar las ideas matemáticas surgidas en la resolución de un problema o en una demostración con el rigor y la precisión adecuados.

(Est.MA.1.7.2.) Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto del problema de investigación.

(Est.MA.1.7.3.) Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes.

Crit.MA.1.8. [CMCT-CIEE-CSC] Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad.

(Est.MA.1.8.4.) Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.

Crit.MA.1.10.[CMCT-CAA-CIEE] Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.

(Est.MA.1.10.1.) Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad para la aceptación de la crítica razonada, convivencia con la incertidumbre, tolerancia de la frustración, autoanálisis continuo, autocrítica constante, etc

B Referencias Legislativas

Orden de 22 de marzo de 1975, por la que se desarrolla el Decreto 160/1975, de 23 de enero, que aprueba el Plan de Estudios de Bachillerato y regula el Curso de Orientación Universitaria.

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato..

Real Decreto 562/2017, de 2 de junio, por el que se regulan las condiciones para la obtención de los títulos de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria y de Bachiller, de acuerdo con lo dispuesto en el Real Decreto-ley 5/2016, de 9 de diciembre, de medidas urgentes para la ampliación del calendario de implantación de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.

Resolución de 1 de marzo de 1978, de las Direcciones Generales de Enseñanzas Medias y de Universidades por la que se establecen los contenidos y orientaciones metodológicas del Curso de Orientación Universitaria y se dictan instrucciones sobre el mismo.

C Normativa referente a la evaluación

El art. 19 de la Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo establece una serie de indicaciones sobre la evaluación. Por su relevancia con respecto a este trabajo, destacamos las siguientes:

- *Los referentes para la comprobación del grado de adquisición de las competencias clave y el logro de los objetivos de la etapa (...) serán los criterios de evaluación y* *los estándares de aprendizaje evaluables*

- *La evaluación del aprendizaje del alumnado será continua (...) tendrá un carácter formativo*

Por su parte, la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, indica que:

- (Art. 5.5) *Los criterios de evaluación deben servir de referencia para valorar lo que el alumnado sabe y sabe hacer en cada área o materia. Estos criterios de evaluación se desglosan en estándares de aprendizaje evaluables. Para valorar el desarrollo competencial del alumnado, serán estos estándares de aprendizaje evaluables, como elementos de mayor concreción, observables y medibles, los que, al ponerse en relación con las competencias clave, permitirán graduar el rendimiento o desempeño alcanzado en cada una de ellas.*
- (Art. 7.3) *La evaluación del grado de adquisición de las competencias debe estar integrada con la evaluación de los contenidos, en la medida en que ser competente supone movilizar los conocimientos, destrezas, actitudes y valores para dar respuesta a las situaciones planteadas, dotar de funcionalidad a los aprendizajes y aplicar lo que se aprende desde un planteamiento integrador.*

Siglas

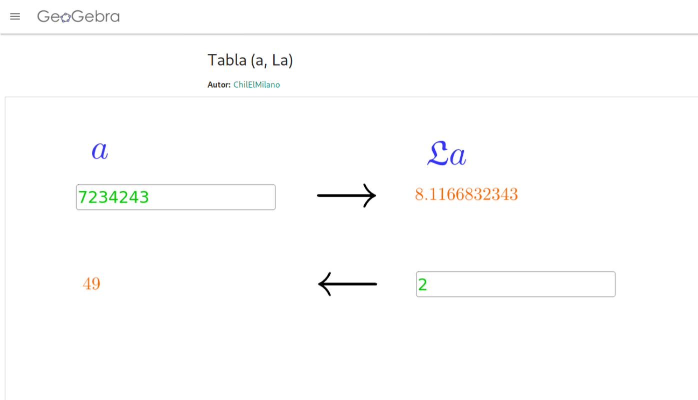
CIDEAD Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia.
COU Curso de Orientación Universitaria.
ESO Educación Secundaria Obligatoria.
LGE Ley General de Educación.
LOMCE Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa.
MER Modelo Epistemológico de Referencia.
REI Recorrido de Enseñanza e Investigación.
TAD Teoría Antropológica de lo Didáctico.
TFM Trabajo Fin de Máster.

D Scripts de GeoGebra

En este anexo se muestran algunos scripts de Geogebra que pueden servir de apoyo a alguna de las actividades.

D.1 Tabla $(a, \mathfrak{L}a)$

Para evitar la molestia que supone la utilización de tablas, este script permite realizar consultas de la tabla $(a, \mathfrak{L}a)$ en ambas direcciones. Aunque no se indica explícitamente, corresponde a la tabla de logaritmos de base 7. El script está disponible aquí.



D.2 Ajuste de función exponencial

Con esta actividad se pretende que los estudiantes analicen el comportamiento de una curva del tipo:

$$y = Ae^{k(x-x_0)}$$

según se varía el valor de sus parámetros A, k, x_0. Además incorpora 10 puntos libres a fin de que se puedan utilizar para marcar las coordenadas de puntos concreto y usar los deslizadores que controlan los parámetros para tratar de realizar un ajuste gráfico de la curva. El script está disponible aquí.

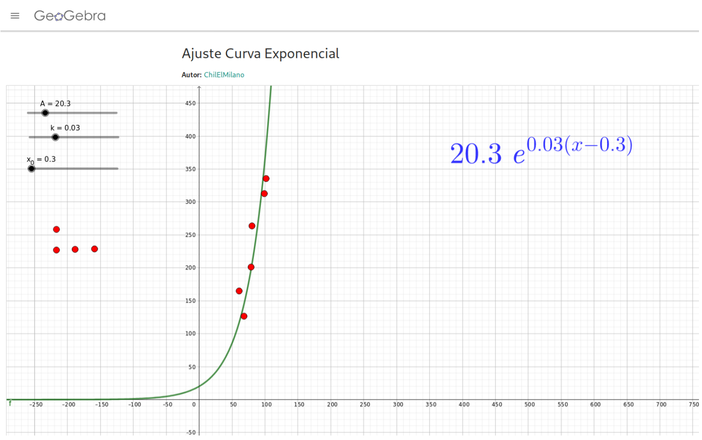


TABLA DE VALORES $(a, \mathfrak{L}a)$

a	$\mathfrak{L}a$	a	$\mathfrak{L}a$	a	$\mathfrak{L}a$	a	$\mathfrak{L}a$	a	$\mathfrak{L}a$	a	$\mathfrak{L}a$
0.610	-0.2540	0.675	-0.2020	0.740	-0.1547	0.805	-0.1115	0.870	-0.0716	0.935	-0.0345
0.611	-0.2532	0.676	-0.2012	0.741	-0.1540	0.806	-0.1108	0.871	-0.0710	0.936	-0.0340
0.612	-0.2523	0.677	-0.2005	0.742	-0.1534	0.807	-0.1102	0.872	-0.0704	0.937	-0.0334
0.613	-0.2515	0.678	-0.1997	0.743	-0.1527	0.808	-0.1096	0.873	-0.0698	0.938	-0.0329
0.614	-0.2507	0.679	-0.1989	0.744	-0.1520	0.809	-0.1089	0.874	-0.0692	0.939	-0.0323
0.615	-0.2498	0.680	-0.1982	0.745	-0.1513	0.810	-0.1083	0.875	-0.0686	0.940	-0.0318
0.616	-0.2490	0.681	-0.1974	0.746	-0.1506	0.811	-0.1077	0.876	-0.0680	0.941	-0.0313
0.617	-0.2482	0.682	-0.1967	0.747	-0.1499	0.812	-0.1070	0.877	-0.0674	0.942	-0.0307
0.618	-0.2473	0.683	-0.1959	0.748	-0.1492	0.813	-0.1064	0.878	-0.0669	0.943	-0.0302
0.619	-0.2465	0.684	-0.1952	0.749	-0.1485	0.814	-0.1058	0.879	-0.0663	0.944	-0.0296
0.620	-0.2457	0.685	-0.1944	0.750	-0.1478	0.815	-0.1051	0.880	-0.0657	0.945	-0.0291
0.621	-0.2448	0.686	-0.1937	0.751	-0.1472	0.816	-0.1045	0.881	-0.0651	0.946	-0.0285
0.622	-0.2440	0.687	-0.1929	0.752	-0.1465	0.817	-0.1039	0.882	-0.0645	0.947	-0.0280
0.623	-0.2432	0.688	-0.1922	0.753	-0.1458	0.818	-0.1032	0.883	-0.0639	0.948	-0.0274
0.624	-0.2424	0.689	-0.1914	0.754	-0.1451	0.819	-0.1026	0.884	-0.0634	0.949	-0.0269
0.625	-0.2415	0.690	-0.1907	0.755	-0.1444	0.820	-0.1020	0.885	-0.0628	0.950	-0.0264
0.626	-0.2407	0.691	-0.1899	0.756	-0.1437	0.821	-0.1014	0.886	-0.0622	0.951	-0.0258
0.627	-0.2399	0.692	-0.1892	0.757	-0.1431	0.822	-0.1007	0.887	-0.0616	0.952	-0.0253
0.628	-0.2391	0.693	-0.1885	0.758	-0.1424	0.823	-0.1001	0.888	-0.0610	0.953	-0.0247
0.629	-0.2383	0.694	-0.1877	0.759	-0.1417	0.824	-0.0995	0.889	-0.0605	0.954	-0.0242
0.630	-0.2374	0.695	-0.1870	0.760	-0.1410	0.825	-0.0989	0.890	-0.0599	0.955	-0.0237
0.631	-0.2366	0.696	-0.1862	0.761	-0.1404	0.826	-0.0982	0.891	-0.0593	0.956	-0.0231
0.632	-0.2358	0.697	-0.1855	0.762	-0.1397	0.827	-0.0976	0.892	-0.0587	0.957	-0.0226
0.633	-0.2350	0.698	-0.1848	0.763	-0.1390	0.828	-0.0970	0.893	-0.0582	0.958	-0.0221
0.634	-0.2342	0.699	-0.1840	0.764	-0.1383	0.829	-0.0964	0.894	-0.0576	0.959	-0.0215
0.635	-0.2334	0.700	-0.1833	0.765	-0.1377	0.830	-0.0958	0.895	-0.0570	0.960	-0.0210
0.636	-0.2326	0.701	-0.1826	0.766	-0.1370	0.831	-0.0951	0.896	-0.0564	0.961	-0.0204
0.637	-0.2318	0.702	-0.1818	0.767	-0.1363	0.832	-0.0945	0.897	-0.0559	0.962	-0.0199
0.638	-0.2310	0.703	-0.1811	0.768	-0.1357	0.833	-0.0939	0.898	-0.0553	0.963	-0.0194
0.639	-0.2301	0.704	-0.1804	0.769	-0.1350	0.834	-0.0933	0.899	-0.0547	0.964	-0.0188
0.640	-0.2293	0.705	-0.1796	0.770	-0.1343	0.835	-0.0927	0.900	-0.0541	0.965	-0.0183
0.641	-0.2285	0.706	-0.1789	0.771	-0.1336	0.836	-0.0921	0.901	-0.0536	0.966	-0.0178
0.642	-0.2277	0.707	-0.1782	0.772	-0.1330	0.837	-0.0914	0.902	-0.0530	0.967	-0.0172
0.643	-0.2269	0.708	-0.1775	0.773	-0.1323	0.838	-0.0908	0.903	-0.0524	0.968	-0.0167
0.644	-0.2261	0.709	-0.1767	0.774	-0.1317	0.839	-0.0902	0.904	-0.0519	0.969	-0.0162
0.645	-0.2253	0.710	-0.1760	0.775	-0.1310	0.840	-0.0896	0.905	-0.0513	0.970	-0.0157
0.646	-0.2246	0.711	-0.1753	0.776	-0.1303	0.841	-0.0890	0.906	-0.0507	0.971	-0.0151
0.647	-0.2238	0.712	-0.1746	0.777	-0.1297	0.842	-0.0884	0.907	-0.0502	0.972	-0.0146
0.648	-0.2230	0.713	-0.1738	0.778	-0.1290	0.843	-0.0878	0.908	-0.0496	0.973	-0.0141
0.649	-0.2222	0.714	-0.1731	0.779	-0.1283	0.844	-0.0872	0.909	-0.0490	0.974	-0.0135
0.650	-0.2214	0.715	-0.1724	0.780	-0.1277	0.845	-0.0866	0.910	-0.0485	0.975	-0.0130
0.651	-0.2206	0.716	-0.1717	0.781	-0.1270	0.846	-0.0859	0.911	-0.0479	0.976	-0.0125
0.652	-0.2198	0.717	-0.1710	0.782	-0.1264	0.847	-0.0853	0.912	-0.0473	0.977	-0.0120
0.653	-0.2190	0.718	-0.1702	0.783	-0.1257	0.848	-0.0847	0.913	-0.0468	0.978	-0.0114
0.654	-0.2182	0.719	-0.1695	0.784	-0.1251	0.849	-0.0841	0.914	-0.0462	0.979	-0.0109
0.655	-0.2174	0.720	-0.1688	0.785	-0.1244	0.850	-0.0835	0.915	-0.0457	0.980	-0.0104
0.656	-0.2167	0.721	-0.1681	0.786	-0.1237	0.851	-0.0829	0.916	-0.0451	0.981	-0.0099
0.657	-0.2159	0.722	-0.1674	0.787	-0.1231	0.852	-0.0823	0.917	-0.0445	0.982	-0.0093
0.658	-0.2151	0.723	-0.1667	0.788	-0.1224	0.853	-0.0817	0.918	-0.0440	0.983	-0.0088
0.659	-0.2143	0.724	-0.1660	0.789	-0.1218	0.854	-0.0811	0.919	-0.0434	0.984	-0.0083
0.660	-0.2135	0.725	-0.1653	0.790	-0.1211	0.855	-0.0805	0.920	-0.0428	0.985	-0.0078
0.661	-0.2128	0.726	-0.1646	0.791	-0.1205	0.856	-0.0799	0.921	-0.0423	0.986	-0.0072
0.662	-0.2120	0.727	-0.1638	0.792	-0.1198	0.857	-0.0793	0.922	-0.0417	0.987	-0.0067
0.663	-0.2112	0.728	-0.1631	0.793	-0.1192	0.858	-0.0787	0.923	-0.0412	0.988	-0.0062
0.664	-0.2104	0.729	-0.1624	0.794	-0.1185	0.859	-0.0781	0.924	-0.0406	0.989	-0.0057
0.665	-0.2097	0.730	-0.1617	0.795	-0.1179	0.860	-0.0775	0.925	-0.0401	0.990	-0.0052
0.666	-0.2089	0.731	-0.1610	0.796	-0.1172	0.861	-0.0769	0.926	-0.0395	0.991	-0.0046
0.667	-0.2081	0.732	-0.1603	0.797	-0.1166	0.862	-0.0763	0.927	-0.0390	0.992	-0.0041
0.668	-0.2073	0.733	-0.1596	0.798	-0.1160	0.863	-0.0757	0.928	-0.0384	0.993	-0.0036
0.669	-0.2066	0.734	-0.1589	0.799	-0.1153	0.864	-0.0751	0.929	-0.0378	0.994	-0.0031
0.670	-0.2058	0.735	-0.1582	0.800	-0.1147	0.865	-0.0745	0.930	-0.0373	0.995	-0.0026
0.671	-0.2050	0.736	-0.1575	0.801	-0.1140	0.866	-0.0739	0.931	-0.0367	0.996	-0.0021
0.672	-0.2043	0.737	-0.1568	0.802	-0.1134	0.867	-0.0733	0.932	-0.0362	0.997	-0.0015
0.673	-0.2035	0.738	-0.1561	0.803	-0.1127	0.868	-0.0727	0.933	-0.0356	0.998	-0.0010
0.674	-0.2027	0.739	-0.1554	0.804	-0.1121	0.869	-0.0722	0.934	-0.0351	0.999	-0.0005