Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Introducción al álgebra: una propuesta didáctica para 1º ESO

Introduction to algebra: a didactic proposal for 1º ESO

Autora

Alicia Sáenz de la Torre Larroy

Director

Sergio Martínez Juste

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2020

ÍNDICE

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1. Objeto matemático a enseñar, curso y asignatura

En este trabajo de fin de Máster se pretende hacer una propuesta didáctica sobre cómo introducir el álgebra en la asignatura de Matemáticas de 1º de Educación Secundaria Obligatoria. El alumnado, que mayoritariamente proviene del último curso de la Educación Primaria, no tiene apenas conocimientos sobre esta rama, por lo que es importante que se entienda correctamente para no tener problemas en el presente curso y en los siguientes, donde se va profundizando en álgebra.

Los contenidos y criterios de evaluación sobre el objeto matemático que se va a tratar vienen recogidos en la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Se encuentran en el bloque 2: *Números y Álgebra*, y son los siguientes:

Contenidos:

- ❖ Iniciación al lenguaje algebraico.
- ❖ Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.
- ❖ El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.
- ❖ Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias.

Criterios de evaluación:

- ❖ Crit.MA.2.6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.

2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático

Los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se emplearán en esta unidad didáctica se encuentran ejemplificados y explicados más adelante y quedan recogidos en la siguiente tabla:

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías
CP1. Identificación de regularidades	**T1**. Calcular el término general	-
CP2. Cambios entre los sistemas de representación	**T2**. Calcular el valor numérico	Definición de valor numérico
CP3. Equivalencia de expresiones algebraicas	**T3**. Operar con monomios	Propiedades de los números
	T4. Calcular el valor numérico de cada parte de la igualdad	Definición de identidad y ecuación

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

Como dicen Martínez y Rodríguez (2010), el libro de texto sigue siendo el principal dispositivo didáctico del desarrollo curricular en las aulas, tomándolo muchas veces como la única visión de los contenidos del propio currículo. Incluso Monterrubio y Ortega (2009, p. 38) afirman que, “en muchas ocasiones, es el propio manual el que determina el currículo real”.

Por tanto, para hablar sobre el estado de enseñanza-aprendizaje es conveniente analizar libros de texto, ya que pueden ofrecer información sobre ventajas e inconvenientes de algunas metodologías (González, 2009) o sobre aspectos pedagógicos, curriculares o sociales (Maz-Machado y Rico, 2015, p. 54).

En este capítulo se van a analizar tres libros de texto de editoriales diferentes, observando cómo justifican la introducción del objeto matemático, cuáles son los aspectos conceptuales y fenomenológicos que aparecen y, con ello, se comentará cómo afecta dicha enseñanza al aprendizaje del alumnado.

Los libros de texto de 1º de ESO que se van a analizar pertenecen a la etapa educativa anterior (LOE) y son de editoriales de reconocido prestigio en el territorio nacional:

- Editorial Anaya, de Colera y Gaztelu (2011)
- Editorial Edelvives. Proyecto aula 360º, de Carrasco, Martín, Ocaña y Sánchez (2010)
- Editorial Bruño. Proyecto contexto digital, de Arias y Maza (2010)

1. Justificación habitual de la introducción escolar del objeto matemático

El alumnado de 1º de ESO es la primera vez que se encuentra con el álgebra propiamente dicha en el currículo, por lo que suele ser un tema totalmente nuevo para ellos. Según Socas (2011), diversas investigaciones afirman que se debe incluir el pensamiento algebraico en los últimos años de la Educación Primaria a través de las corrientes *Early Álgebra* o Pre-Álgebra, evitando así parte de las dificultades que surgen al realizar la transición de la aritmética al álgebra.

En este primer apartado se va a ver cómo justifican estos tres libros de texto el lenguaje algebraico.

La editorial Anaya, empieza hablando sobre un problema algebraico egipcio del año 1650 a.C. Hace un breve repaso por la historia del álgebra, comentando las dificultades que tenían al no tener un método sistemático de resolución o un lenguaje algebraico. Además, aparecen unas primeras ecuaciones que piden ser resueltas por tanteo u observando dibujos, como en la imagen 1.

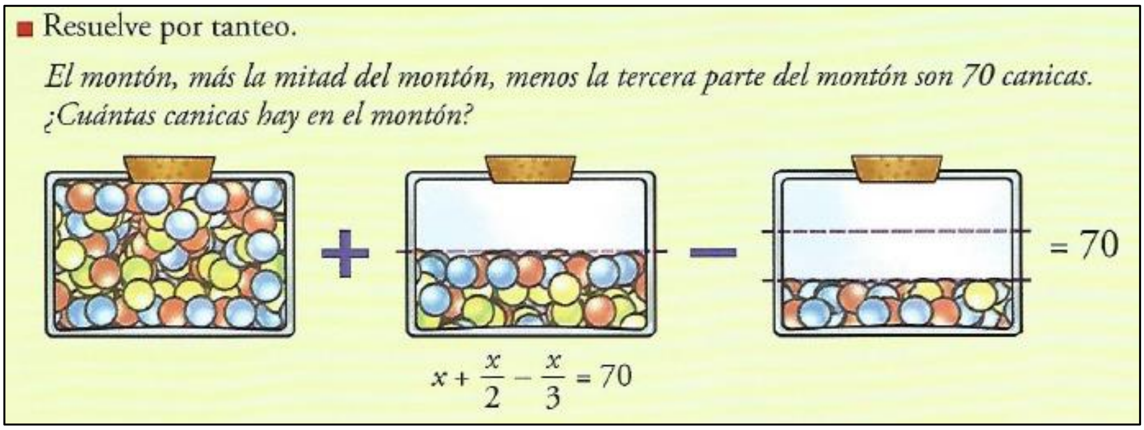
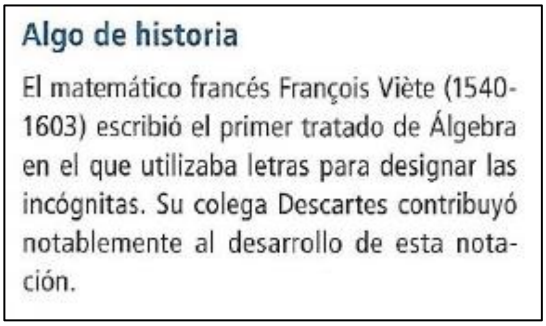


Imagen 1. Primeros problemas (Colera y Gaztelu, 2011)

Antes de introducir la teoría de las expresiones algebraicas, enuncia la necesidad de utilizar letras en vez de números en algunos casos concretos, como representar números en clave o generalizar relaciones.

En la editorial Edelvives, se comienza con un problema como si fuera "magia". Con un número en particular, hace ver que el problema se cumple con cualquiera, es decir, empieza como una aritmética generalizada. Después, ya comienza a hablar directamente del lenguaje algebraico, aunque en la parte de la izquierda, a modo de curiosidad, comenta en un pequeño párrafo algo sobre la historia del álgebra.


Algo de historia

El matemático francés François Viète (1540-1603) escribió el primer tratado de Álgebra en el que utilizaba letras para designar las incógnitas. Su colega Descartes contribuyó notablemente al desarrollo de esta notación.

Imagen 2. Referencia histórica (Carrasco, Martín, Ocaña y Sánchez, 2010)

Por último, en la editorial Bruño la justificación se basa en que el lenguaje algebraico es necesario para hacer relaciones y operaciones entre números donde se desconoce el valor de alguno de ellos, sustituyéndolo por una letra. Se trata, de nuevo, de una aritmética generalizada. La unidad didáctica empieza directamente con los tipos de lenguaje (numérico y algebraico) y los elementos y el valor numérico de una expresión algebraica, hablando en la segunda página ya sobre ecuaciones, objeto matemático en el que no entramos en este trabajo.

2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías

En el apartado A.1. hemos visto los contenidos que deberían aparecer en los libros de texto de 1 º de ESO. Ahora, vamos a analizar si aparecen y cómo aparecen todos ellos en los distintos materiales y cuáles son los aspectos conceptuales y fenomenológicos que se encuentran.

Primero vamos a analizar los **campos de problemas** que aparecen en cada editorial. Entre los de Anaya, se encuentran los siguientes:

◊ Generalización de patrones

Se trata de cuatro ejercicios de secuencias numéricas donde se debe calcular algún término más y el término n-ésimo. Además, como extra, aparecen dos problemas sobre generalizar secuencias geométricas.

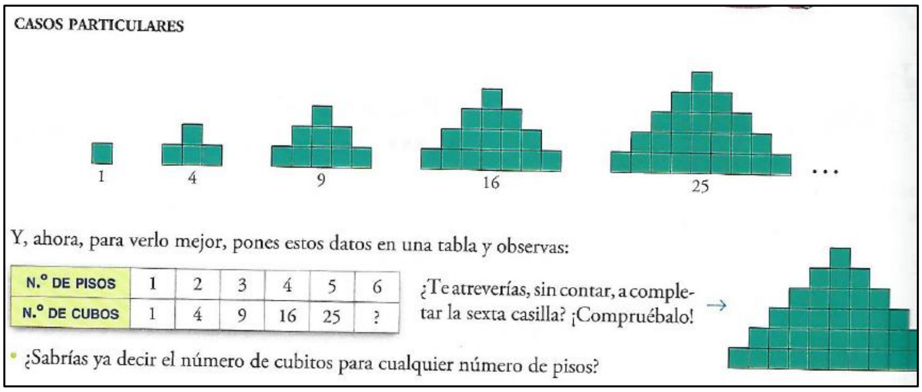


Imagen 3. Secuencia geométrica (Colera y Gaztelu, 2011)

◊ Calcular el valor numérico de una expresión algebraica

Son cuatro ejercicios en los cuales los estudiantes deben rellenar tablas calculando varios valores de una expresión algebraica.

◊ Traducir expresiones del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico

Sobre este campo de problemas hay varios tipos de ejercicios. Aparecen tres ejercicios donde se debe elegir la expresión adecuada entre cuatro para la situación descrita del enunciado, otros tres donde, en un contexto particular, a partir de la *x* se deben calcular el resto de las expresiones algebraicas y, por último, un ejercicio de unir cada situación con su expresión.

◊ Identificar monomios y deducir su grado

En este campo de problemas encontramos tres ejercicios. Uno en el que hay que indicar si las expresiones algebraicas son monomios, otro donde hay que especificar el grado de los monomios que aparecen y, el último, en el que hay que especificar el coeficiente, la parte literal y el grado de cada uno.

◊ Operar y simplificar expresiones algebraicas

Este, sin duda, es el campo de problemas más abundante. Aparecen 25 ejercicios donde se debe operar y simplificar expresiones algebraicas, otros tres de completar la igualdad y uno donde hay que unir cada expresión algebraica con su reducida.

En la editorial Edelvives hay 38 ejercicios y los campos de problemas son los siguientes:

◊ Traducir expresiones del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico y viceversa

Aparecen tres ejercicios de traducir distintas frases al lenguaje algebraico, un par en los que hay que relacionar los enunciados con su expresión algebraica y otros dos ejercicios donde se deben inventar un enunciado para cada expresión.

10. Escribe un enunciado para las siguientes expresiones:

a) $x = y + 40$

b) $3x + 5y$

c) $x - \frac{1}{4}x$

d) $x \cdot (x + 1) = 56$

Imagen 4. Traducir del lenguaje algebraico al cotidiano (Arias y Maza, 2010)

◊ Calcular el valor numérico de una expresión algebraica

Sobre este campo de problemas simplemente aparecen tres ejercicios en los que hay que sustituir las expresiones algebraicas por uno o dos valores.

◊ Identificar y escribir monomios, binomios y polinomios y deducir su grado

Son siete ejercicios en los que, en tres de ellos se pide clasificarlos o identificar monomios semejantes, y en los otros tres escribir monomios o polinomios con distintas características.

◊ Operar y simplificar expresiones algebraicas

De nuevo, es el campo de problemas más extenso con 15 ejercicios de realizar distintas operaciones.

◊ Identificar identidades o ecuaciones

Aparecen cuatro ejercicios sobre identificar si las igualdades son falsas, identidades o ecuaciones, uno en el que hay que rellenar las igualdades para que sean identidades y otro con el siguiente enunciado: "*Sustituye las letras por los números que quieras, excepto el cero, y opera en cada miembro de esta igualdad algebraica para comprobar si es cierta o falsa:* $a^2 + b^2 = (a + b)^2$". Es una identidad en la que suelen confundirse los alumnos, por lo que este ejercicio puede ayudar a comprenderla.

Por último, los de la editorial Bruño simplemente son 8 ejercicios, ya que el resto están relacionados con resolver ecuaciones:

◊ Traducir expresiones del lenguaje cotidiano al lenguaje numérico

Como previo al lenguaje algebraico, aparecen dos ejercicios para traducir al lenguaje numérico.

◊ Traducir expresiones del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico

Sobre traducir al lenguaje algebraico se encuentran otros dos ejercicios con algunas situaciones.

◊ Identificar elementos de una expresión algebraica

En otro par de ejercicios se debe identificar la variable, los términos literales e independientes y los coeficientes.

◊ Calcular el valor numérico de expresiones algebraicas

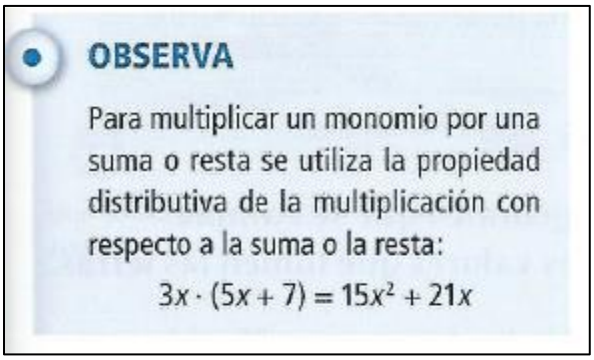
Por último, otros dos ejercicios donde los alumnos deben calcular el valor numérico de varias expresiones algebraicas sustituyendo por un único número.

En la siguiente tabla se resumen los campos de problemas que aparecen en la editorial y el número de ejercicios que se dedican a cada uno de ellos.

	ANAYA	EDELVIVES	BRUÑO
Traducir al lenguaje numérico	✗	✗	2
Generalización de patrones	6	✗	✗
Traducir al lenguaje algebraico	7	5	2
Traducir al lenguaje natural	✗	2	✗
Calcular el valor numérico	4	3	2
Identificar elementos de monomios	3	7	2
Diferenciar identidades y ecuaciones	✗	6	✗
Operar con expresiones algebraicas	29	15	✗
Total de ejercicios	**49**	**38**	**8**

Observamos que los únicos comunes en las tres editoriales son: calcular el valor numérico de una expresión algebraica, traducir del lenguaje cotidiano al algebraico e identificar elementos de monomios. Esto es debido a que en la editorial Bruño se introducen de forma rápida las ecuaciones y no trabaja apenas con expresiones algebraicas. Además, la única editorial que trabaja el contenido de obtener el término general es Anaya, siendo que aparece en el currículo.

En las editoriales Edelvives y Anaya, aparecen **técnicas** de cómo operar con monomios seguidas de ejemplificaciones. En las dos se señala cómo sumar, restar, multiplicar y dividir monomios, incluso multiplicar monomios por una suma (un binomio). Además, sobre todo en Edelvives, a los márgenes se añaden unos recordatorios y observaciones sobre cómo operar expresiones algebraicas. Cabe destacar que en esta editorial también da la opción de realizar las operaciones de adición y sustracción de monomios sacando factor común.


OBSERVA

Para multiplicar un monomio por una suma o resta se utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma o la resta:

$$3x \cdot (5x + 7) = 15x^2 + 21x$$

Imagen 5. Técnica (Carrasco, Martín, Ocaña y Sánchez, 2010)

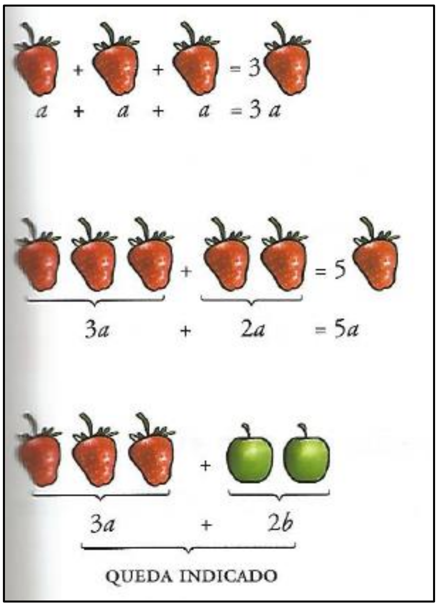
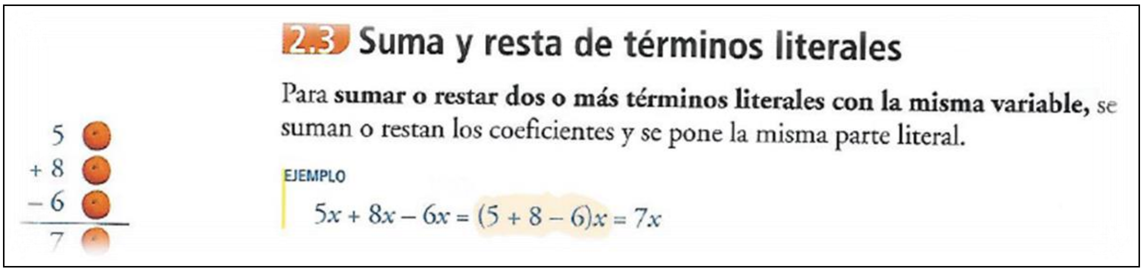


Imagen 6. Técnica (Colera y Gaztelu, 2011)

Bruño hace un breve comentario, aunque ya en la parte de ecuaciones, sobre sumar y restar términos literales, el resto de las técnicas que se encuentran en el tema se basan en resolver ecuaciones.



2.3 Suma y resta de términos literales

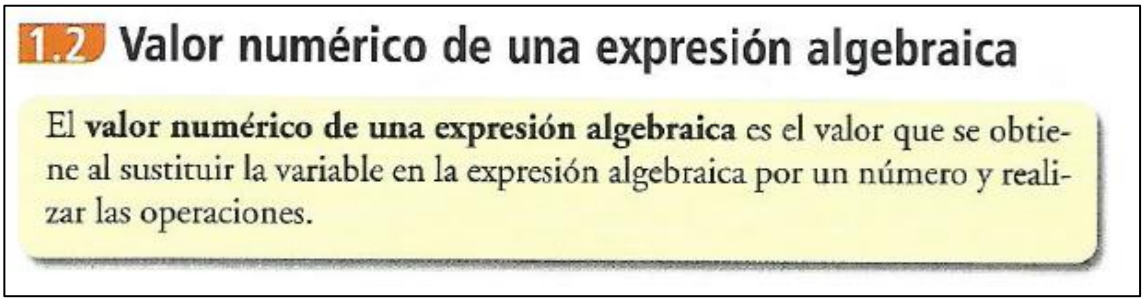
Para **sumar o restar dos o más términos literales con la misma variable,** se suman o restan los coeficientes y se pone la misma parte literal.

EJEMPLO

$5x + 8x - 6x = (5 + 8 - 6)x = 7x$

Imagen 7. Técnica (Arias y Maza, 2010)

Respecto a las **tecnologías**, las justificaciones de las técnicas básicamente son las definiciones que aparecen en el texto de cada editorial, como la definición de valor numérico, y las propiedades que se utilizan para operar con números.



1.2 Valor numérico de una expresión algebraica

El **valor numérico de una expresión algebraica** es el valor que se obtiene al sustituir la variable en la expresión algebraica por un número y realizar las operaciones.

Imagen 8. Tecnología (Arias y Maza, 2010)

En cuanto a los **aspectos fenomenológicos**, cabe destacar que la mayoría de los problemas y ejercicios no tienen contexto. Los que sí tienen, en la editorial Anaya tratan sobre edades, dinero (sueldos o costes), distancias y dimensiones, al igual que en la editorial Bruño, añadiendo cantidades de objetos. En la editorial Edelvives no hay prácticamente ejercicios o problemas con contexto. Sólo hay un par de ejercicios que hablan de edades, cantidades de objetos y precios.

Si hablamos de **representaciones**, la algebraica es la única que aparece en la editorial Edelvives. En Anaya, aunque esta sea la más habitual, también se encuentra representación tabular a la hora de realizar ejercicios de generalización o cálculo del valor numérico y pictórica, como en la imagen 6. En la editorial Bruño también aparece esta última representación (ver imagen 7), pero sigue predominando la algebraica.

	ANAYA	EDELVIVES	BRUÑO
Representación algebraica	✓	✓	✓
Representación tabular	✓	✗	✗
Representación pictórica	✓	✗	✓

3. Efectos que produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno

La introducción al álgebra es una de las partes de las matemáticas que más les cuesta comprender a los alumnos, y esto es algo en lo que están de acuerdo los grupos de investigadores en educación matemática (Castro, 2012). Como hemos visto, en los libros de texto no se hace demasiado hincapié en comprender y razonar lo que se está haciendo, siendo esto de vital importancia al comienzo de esta rama de las matemáticas.

La estrecha relación que se suele mantener entre la aritmética y el álgebra a la hora de introducir esta última puede justificar alguna de las dificultades que se encuentran los alumnos y alumnas, siendo "el propio conocimiento aritmético un obstáculo para el algebraico" (Castro, 2012).

En el libro de Azarquiel (1993), se muestran algunos de los efectos y dificultades que produce este tipo de enseñanza en el alumnado. Como, por ejemplo, que no se suele invertir el tiempo ni los recursos suficientes para la comprensión de la relación entre situaciones concretas y expresiones algebraicas. Además, empezar el uso del álgebra incluyendo ejercicios donde manejan expresiones algebraicas sin contexto puede llevar a interpretar las letras como objetos, es decir, que no representan un número. Esto también es debido al uso habitual de las letras como etiquetas (si ven escrito *5s* es probable que entiendan *5* segundos en vez de *5* veces *s*).

Otro posible inconveniente es introducir las letras mediante la generalización de relaciones. Esto puede traer dificultades en la mayoría de los alumnos, ya que no suelen haber manejado gran cantidad de relaciones y puede llevar a una comprensión errónea. Como señala Castro (2012), el hecho de abstraer estas relaciones es un proceso que requiere tiempo y esfuerzo.

También puede conducir a errores utilizar el concepto de variable como si fuera sencillo de entender y sin darle demasiada importancia, siendo este uno de los aspectos fundamentales en el aprendizaje del álgebra (Schoenfeld, 1988) (citado en Azarquiel, 1993).

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

1. Conocimientos previos que necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático

Para la realización de la secuencia didáctica es necesario que el alumnado conozca la jerarquía de operaciones, así como que sepan operar con distintos tipos de números: naturales, enteros y fraccionarios. Además, sería conveniente que los alumnos se hayan enfrentado a la resolución de problemas, en particular, sobre la generalización de patrones u observación de regularidades, iniciando de esta forma el pensamiento algebraico en los estudiantes de la Educación Primaria a través de las corrientes Pre-álgebra o *Early-Álgebra* (Zapatera, 2018). Incluso hay estudios (Alsina y Giralt, 2017) que señalan que se deberían empezar a enseñar en Educación Infantil conocimientos algebraicos mediante patrones para adquirir habilidades como predecir.

Si observamos el currículo del último curso de la Educación Primaria que se encuentra en la ORDEN ECD/850/2016, de 29 de julio, por la que se modifica la Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, aparecen los siguientes contenidos y criterios de evaluación en relación con los contenidos previos del objeto matemático:

En el bloque 1: *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*

Contenidos:

- Planificación del proceso de resolución de problemas: Análisis y comprensión del enunciado, Estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc. Resultados obtenidos.
- Planteamiento de pequeñas investigaciones en contextos numéricos, geométricos y funcionales Acercamiento al método de trabajo científico mediante el estudio de algunas de sus características y su práctica en situaciones sencillas.
- Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

Criterios de evaluación:

- Crit.MAT.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
- Crit.MAT.1.3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones.
- Crit.MAT.1.4. Profundizar en problemas resueltos, planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, etc.
- Crit.MAT.1.6. Planificar y controlar las fases de método de trabajo científico en situaciones adecuadas al nivel.
- Crit.MAT.1.7. Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados para la resolución de problemas.
- Crit.MAT.1.8. Conocer algunas características del método de trabajo científico en contextos de situaciones problemáticas a resolver.
- Crit.MAT.1.9./Crit.MAT.1.11 Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático: precisión, rigor, perseverancia, reflexión, automotivación y aprecio por la corrección. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.

En el bloque 2: *Números*

Contenidos:

- Números positivos y negativos.
- Operaciones con números naturales: adición, sustracción, multiplicación y división.
- Operaciones con números decimales.
- Operaciones con fracciones.
- Algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división.

Criterios de evaluación:

- Crit.MAT.2.3. Realizar operaciones y cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos, incluido el cálculo mental, haciendo referencia implícita a las propiedades de las operaciones, en situaciones de resolución de problemas.

- ❖ Crit.MAT.2.4./Crit.MAT.2.6. Operar con los números teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones, aplicando las propiedades de las mismas, las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (algoritmos escritos, cálculo mental, tanteo, estimación, calculadora), usando el más adecuado.
- ❖ Crt.MAT.2.8. Conocer, utilizar y automatizar algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en comprobación de resultados en contextos de resolución de problemas y en situaciones de la vida cotidiana.

Los criterios del bloque 1, en particular el Crit.MAT.1.3., nos indican que se puede introducir el pensamiento algebraico a través de las regularidades y los patrones en la Educación Primaria, aunque no sea lo habitual.

2. Actividades que aseguran esos conocimientos previos

Durante la parte del curso previa a esta unidad didáctica, como la forma de introducir el álgebra tal y como se explica en la siguiente sección es través de generalizar patrones, se van a ir trabajando con distintas secuencias numéricas y geométricas con las que los alumnos se irán familiarizando.

Simplemente se irán añadiendo problemas y ejercicios donde deberán sacar figuras y números que sigan la secuencia sin necesidad de llegar a generalizarlo. Se trata de un primer acercamiento a las configuraciones puntuales para que a la hora de empezar con el álgebra hayan trabajado algo con estas secuencias.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

1. Razones de ser del objeto matemático

Como hemos dicho, es la primera vez que los alumnos se encuentran con el álgebra, por lo que parece esencial que su primer contacto con ella sea a través de la necesidad, que sean los propios alumnos los que busquen el uso de las letras en un primer momento.

Para que surja esta necesidad se va a introducir el álgebra a través de la generalización de patrones en figuras geométricas. Se trabajarán situaciones y configuraciones puntuales donde el alumnado deberá detectar y expresar lo general, de manera que las letras puedan significar algo para ellos.

Esto puede ayudar a entender el sentido de las letras como variables, que como hemos nombrado es una de las dificultades que suelen tener al introducir este objeto matemático. Además, con esta razón de ser, se podrá trabajar de manera natural la equivalencia entre expresiones algebraicas, ya que con diferentes desarrollos aritméticos de las configuraciones puntuales pueden verse diferentes expresiones del término general que significan lo mismo (Castro, 2013).

Se ha elegido esta forma de introducir el álgebra, mediante **generalización de patrones y configuraciones puntuales**, ya que es una de las propuestas en la investigación de la didáctica de las matemáticas y, además, es la utilizada en el centro donde he realizado las prácticas del presente máster, lo que me ha permitido experimentar con ella. De todas formas, no hay que perder de vista otras formas diferentes de abordar el acercamiento al álgebra escolar que proponen otros autores.

Según Gascón, Bosch, y Ruiz-Munzón, (2017), el modelo epistemológico habitual del álgebra la introduce como una **aritmética generalizada**, sin diferenciar las dos ramas (aritmética y álgebra) y siendo el objetivo el mismo: encontrar las soluciones de los problemas. Las letras, de esta manera, son siempre incógnitas que están por determinar, dejando a un lado la visión de éstas como variables o parámetros.

En cambio, Cid y Bolea (2010) proponen introducir el álgebra mediante la **modelización algebraica**, enfatizando las diferencias entre las dos ramas (aritmética y álgebra) e introduciendo a su vez los números negativos y, así, el álgebra puede constituirse como razón de ser de éstos, superando los posibles obstáculos epistemológicos que se produzcan. De esta forma, se consideran también las letras que vayan apareciendo como variables o parámetros y no sólo como incógnitas a descubrir, como en el modelo anterior.

2. Coincidencia con las razones de ser históricas

La construcción del lenguaje algebraico a lo largo de la historia de las matemáticas ha sido muy lenta y con muchas dificultades, ya que no fue hasta mucho tiempo después, por primera vez con Diofanto (250 d. C.), cuando aparecieron las abreviaturas para indicar la incógnita y sus potencias, aunque seguían haciendo los cálculos en lenguaje natural. Casi todos los símbolos tal cual los conocemos hoy en día fueron conocidos entre los años 1500 y 1600 (Malisani, 1999).

En la antigüedad, tenían la necesidad de buscar un lenguaje que fuera más apropiado para resolver los problemas que se proponían, algo que les sirviera como instrumento para poder resolverlos sin tantas complicaciones. Como dicen Oller y Meavilla (2014), usaban el álgebra como un instrumento para resolver problemas.

Además del Modelo Epistemológico de Referencia habitual (el álgebra como aritmética generalizada que tiene origen en la obra de Diofanto), hay investigaciones (Jacob Klein (1934/1968) citado en Gascón, Bosch, y Ruiz-Munzón, (2017)) que proponen otro modelo como razón de ser histórica del álgebra. Este enfoque ligaría el álgebra a la aritmética y a la geometría, "haciendo un uso sistemático del cálculo simbólico, de los parámetros y de las fórmulas" (Gascón, Bosch, y Ruiz-Munzón, (2017)).

Por lo tanto, la razón de ser histórica no es en sí la misma que la propuesta de razón de ser a través de la generalización, aunque sí tendría que ver con la resolución de problemas, coincidiendo también en el sentido de que el lenguaje algebraico debe surgir de la necesidad, de buscar algo que nos ayude a comprender y expresar las situaciones que van apareciendo.

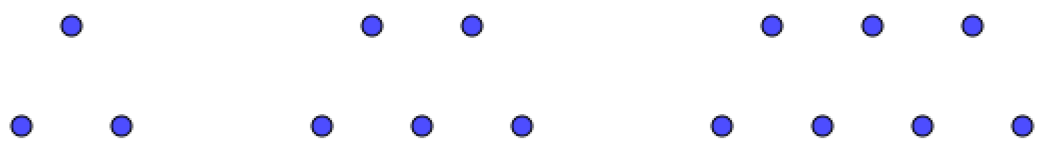
3. Diseño de los problemas que se constituyen en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar

Se van a presentar 3 problemas de razón de ser, uno para cada concepto que aparece. El primero, será la razón de ser principal que hemos comentado en los apartados anteriores, la generalización de patrones para empezar a ver las expresiones algebraicas. En el segundo se verá la necesidad de traducir al lenguaje algebraico. Por último, el tercero servirá para empezar con la equivalencia de expresiones algebraicas.

Según Azarquiel (1993) existen tres etapas en el proceso de generalización a las que se debe prestar atención: La visión de la regularidad, su descripción en lenguaje natural y su expresión algebraica. A través de este problema y de sus distintos apartados, se va a hacer hincapié en cada una de estas etapas.

Problema 1:

Observa la siguiente secuencia:



a) Están dibujadas la 1ª, 2ª y 3ª posición de la secuencia. Escribe cuántos circulitos hay en cada una y añade el dibujo de la 4ª posición.

b) ¿Cuántos círculos habrá en la 5ª posición? ¿Y en la 8ª?

c) ¿Qué relación encuentras entre la cantidad de círculos de todas estas formas?

d) ¿Podrías encontrar una fórmula general para calcular la cantidad de círculos que hay dependiendo de la posición?

Con el siguiente problema se pretende que los alumnos busquen la necesidad de utilizar letras o palabras que representen las edades desconocidas, fijándose en qué indican las operaciones que escribimos.

Problema 2:

Dentro de 8 años…

- ¿Cuántos años tendrás?
- ¿Qué operación has hecho para calcularla?
- Si no sabemos la edad de Pedro ahora, ¿cómo podemos expresar la edad que tendrá dentro de 8 años?

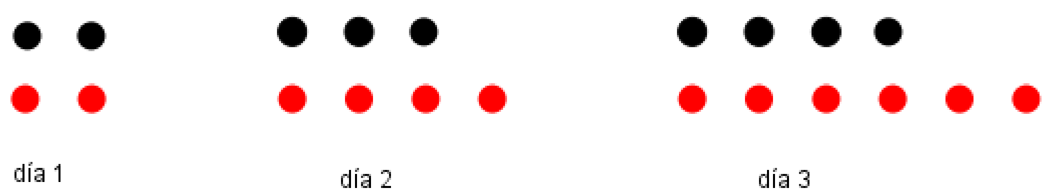
Cuando tengas el doble de años…

- ¿Cuántos años tendrás?
- ¿Qué operación has realizado para calcularla?
- ¿Cómo podemos expresar los años de Pedro en ese momento?

Con este último problema se tratará de introducir las igualdades viendo, además, si dos expresiones son equivalentes o no.

Problema 3:

Las canicas negras son las que tiene Pedro cada día, y las rojas son las de Sonia. Si todos los días consiguen el mismo número de canicas:



a) Escribe el número de canicas que tienen cada uno día por día hasta el día 5.

b) Da una expresión general para saber cuántas canicas tendrán entre los dos cualquier día, contando las canicas de las siguientes maneras:

- Las canicas que tendría cada uno por separado

- Formando rectángulos enteros de dos filas y viendo las canicas que quedan sueltas
- Formando rectángulos de dos filas y viendo las canicas que faltan para rellenarlo

c) Si igualamos las dos primeras expresiones, ¿son equivalentes?, es decir, ¿podemos decir que son iguales para todos los valores que pongamos?

d) Si igualamos las canicas que tiene Pedro con las que tiene Sonia, en este caso, ¿las expresiones son siempre iguales para todos los valores?

4. Metodología

Con el primer problema, como hemos nombrado, se pretende que los alumnos pasen por las tres etapas del proceso de generalización que señala Dreyfus (1991): darse cuenta de una regularidad, generalizarla para todos los términos de la secuencia y usar esa regularidad para intentar encontrar una fórmula general para cualquier término con el mismo patrón (citado en Zapatera, 2018).

Por ejemplo, no se pide estrictamente que encuentren una expresión algebraica, ya que siendo el primer problema con estas características es difícil que aparezca en un primer momento, lo importante es que sepan identificar la relación que hay, aunque sea utilizando palabras en vez de letras.

El profesor, antes de que los alumnos realicen los problemas, habrá previsto las posibles estrategias, correctas e incorrectas, que pueden utilizar los alumnos a la hora de resolverlos. En clase, los realizarán en grupos de 3 o 4 personas para que se puedan ayudar unos a otros y compartan sus propias ideas y explicaciones. A su vez, el docente se irá pasando por los distintos grupos fijándose en las estrategias utilizadas y, si lo cree conveniente, hará comentarios y preguntas para poder ayudar al entendimiento del problema y de lo que se busca.

Al final de los problemas, el profesor elegirá a varios grupos que hayan resuelto los problemas con diferentes estrategias para que expliquen cómo han hecho las tareas propuestas, dejando para el final las estrategias más elaboradas y que más se acerquen a los conceptos que se espera que surjan de estos problemas.

E. Sobre el campo de problemas

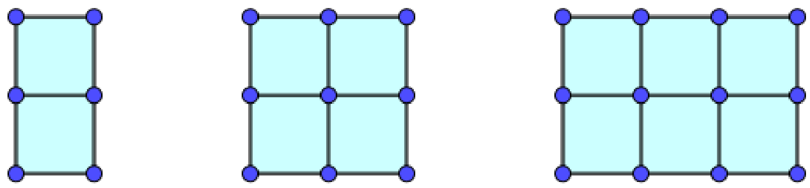
1. Problemas que se van a presentar en el aula

A continuación, se van a describir los campos de problemas propuestos y sus respectivos problemas.

CP1: Identificación de regularidades

En este campo de problemas se va a tratar con patrones y configuraciones numéricas y puntuales, teniendo que buscar la regularidad existente y generalizarla para encontrar una expresión algebraica que la defina. Los problemas serán del siguiente tipo:

P1.1. Observa la secuencia y contesta a las siguientes preguntas:



a) Dibuja la siguiente figura

b) Pon debajo de cada una los puntos y cuadrados que tienen. ¿Cuántos puntos tendrá la figura 10? ¿Y cuántos cuadrados?

c) Da una regla general para saber cuántos puntos tendrá cualquier figura

P1.2. Carla celebra su cumpleaños en una piscina, pero no sabe cuántos amigos van a ir. Le piden 10 euros por celebrarlo más 2 euros por cada amigo que vaya. Fíjate en la tabla y complétala.

nº de amigos	1	2	3	4	5	10	20	n	x
Euros	12	14	16	18					

CP2: Cambios entre sistemas de representación

Con estos problemas se trabajan los cambios entre diferentes sistemas de representación como el lenguaje natural, el lenguaje algebraico, las tablas o la representación pictórica:

P2.1. Escribe las expresiones algebraicas correspondientes a cada enunciado, teniendo en cuenta que no conocemos la edad que tiene Raquel.

a) La hermana de Raquel tiene 5 años más
b) Su mejor amiga tiene 4 meses menos
c) La madre de Raquel hace un año tenía el doble de años
d) Su padre tiene 3 años más que su madre
e) Raquel le dobla la edad a su primo

P2.2. Si "G" representa los gatos que tiene una protectora de animales, ¿qué pueden decir las siguientes expresiones? Escribe frases que al traducirlas se correspondan con estas expresiones.

a) G:2
b) G + 1
c) G + P

P2.3. Laura, que es electricista, cobra 20 € fijos cada vez que va a una casa más 10 € por cada hora que está en ella. Es decir, sus beneficios siguen la siguiente expresión:

$$20 + 10 \cdot h$$

Siendo h el número de horas. ¿Cuánto cobrará si en una casa está 2 horas? ¿Y si está 5 horas?

P2.4. Traduce las frases al lenguaje algebraico y calcula las edades con los valores que se piden:

a) Mario tiene x años
b) Su madre tiene el triple de años
c) Su padre tiene 5 años más que su madre
d) Su hermana tiene 3 años más que él
e) Su tío el doble de años que su hermana
f) Mario le dobla la edad a su perro Pluto

	Lenguaje algebraico	x = 12	x = 16
Mario			
Su madre			
Su padre			
Su hermana			
Su tío			
Pluto			

P2.5. Diseña una secuencia de puntos que siga la siguiente expresión:

$$3n - 2$$

CP3: Equivalencia de expresiones algebraicas

En este campo se estudia la equivalencia o no entre expresiones algebraicas, llegando a diferenciar si una igualdad es una identidad o una ecuación.

P3.1. Escribe la parte que falta para que se cumpla la igualdad:

a) $2 + a +$ ___ $= 2 + 3a$
b) $1 + 2(3x^2) = 1 +$ ___
c) $\frac{5n^2}{n} =$ ___
d) $2x($ ___ $) = 6x^3$

P3.2. Utiliza las propiedades que conoces y simplifica las siguientes expresiones algebraicas

a) $2x + 3(2x - 1)$
b) $(5a) \cdot (2a^2)$

c) $2(1-x)+3x$

d) $\frac{7n^3}{2n}$

P3.3. Completa las siguientes tablas. ¿Estas expresiones son iguales para todos los valores o para alguno en particular?

a)

$\boldsymbol{x}$	1	**2**	**3**	**4**	**6**	**10**
$\boldsymbol{x+2x}$						
$\boldsymbol{3x}$						

b)

$\boldsymbol{x}$	1	**2**	**3**	**4**	**6**	**10**
$\boldsymbol{x+2}$						
$\boldsymbol{4-x}$						

c)

$\boldsymbol{x}$	1	**2**	**3**	**4**	**6**	**10**
$\boldsymbol{2(x-2)}$						
$\boldsymbol{2x-4}$						

d)

$\boldsymbol{x}$	1	**2**	**3**	**4**	**6**	**10**
$\boldsymbol{2x+1}$						
$\boldsymbol{x+2}$						

2. Metodología

Los alumnos realizarán los problemas propuestos por parejas. Cada uno de ellos tendrá la hoja de problemas y deberá escribir en su cuaderno de clase los intentos y la resolución de cada problema para que el profesor pueda observar los errores y ayudarles a mejorar. El docente se irá paseando por el aula observando cómo trabajan los alumnos e intervendrá en el caso de que surjan dudas, sin llegar a dar la solución, realizando preguntas que hagan reflexionar y continuar con la búsqueda de la solución del problema.

Cuando hayan trabajado lo suficiente, se comentarán los resultados que han obtenido los grupos y las dificultades con las que se han encontrado y se explicarán de manera formal los conceptos que hayan aparecido, así como la forma de resolverlos correctamente en el caso de que no haya sido posible encontrar la solución, haciendo a su vez preguntas al alumnado para guiarle a la solución correcta.

F. Sobre las técnicas

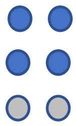
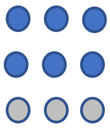
1. Ejercicios que se van a presentar en el aula

Los ejercicios que se realizarán en el aula serán muy parecidos a los presentados en el apartado anterior en los campos de problemas, pero una vez ya habiendo institucionalizado los conceptos. Servirán para profundizar y para practicar las técnicas aprendidas anteriormente.

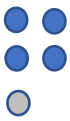
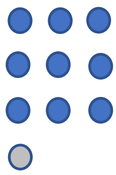
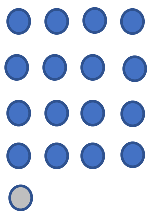
E1: Identificación de regularidades.

De nuevo, se trabaja la generalización de patrones y secuencias numéricas y puntuales.

E1.1. Rellena las siguientes tablas y contesta a las preguntas:

Paso	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**n**
Patrón						
Nº puntos						

¿Cuántos puntos habrá en el paso 100?

Paso	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**n**
Patrón						
Nº puntos						

¿Cuántos puntos habrá en el paso 25?

E1.2. Observa los números y completa la siguiente tabla hasta llegar a una expresión algebraica:

1	2	3	4	5	6	8	10	11	a	x
0	3	8	15							

E2. Cambios entre los sistemas de representación

Se trata de ejercicios similares a los del campo de problemas donde se practican los cambios entre los distintos sistemas de representación y el cálculo del valor numérico.

E2.1. Traduce al lenguaje algebraico las siguientes situaciones:

a) Marta tiene 5 años más que su hermano Marcos. ¿Cuántos años tiene Marta?
b) El doble de un número más tres
c) Quiero comprar unos cuantos kg de peras. ¿Cuánto dinero me gasto si el kg cuesta 1,2 €?
d) Si Miguel tiene la mitad de los cromos que tengo yo, ¿cuántos cromos tenemos entre los dos?
e) Mi madre dentro de 7 años tendrá el doble de edad que mi hermana.
f) Pablo gana el doble que Fernando, y María 100 € más que Pablo. ¿Cuánto dinero gana María?

E2.2. Describe una o varias situaciones en las que intervengan las siguientes expresiones. Puedes incluir varias en la misma situación, pero las cuatro expresiones deben estar en alguna de ellas.

$$x-5, \qquad 2x+y, \qquad \frac{x}{3}, \qquad 3x-1$$

E2.3. Las variables de todas las expresiones algebraicas se han sustituido por 4. Une cada una de ellas con el valor numérico correspondiente.

Expresión algebraica	**Valor numérico**
$2(3x-5)$	13
$15-2x$	2
$\frac{8-x}{2}$	14
x^2-x+1	**7**

E2.4. Completa la siguiente tabla:

n	1	2	3	5		8		x
3(n+2)	9				24		36	

E3. Equivalencia de expresiones algebraicas.

Se trabaja la equivalencia o no de expresiones algebraicas una vez recordadas las propiedades de los números y habiendo institucionalizado los conceptos de identidad y ecuación.

E3.1. Opera y simplifica las siguientes expresiones algebraicas

a) $x^2 + x(2x)$
b) $n-1+2n-3-n$
c) $2(x+1)-2x$
d) $\frac{6a(a-1)}{3}$

E3.2. Completa las tablas y di si son identidades o ecuaciones.

a) $2(1-x) = 2x-2$

x	1	2	3	4	5	**¿Identidad o ecuación?**
$2(1-x)$						
$2x-2$						

b) $3x+2 = 2+x+2x$

x	1	2	3	4	5	**¿Identidad o ecuación?**
$3x+2$						
$2+x+2x$						

c) $x(1+2x)=2x^2+x$

x	1	2	3	4	5	**¿Identidad o ecuación?**
$x(1+2x)$						
$2x^2+x$						

d) $3x^2-2=x(3x-2)$

x	1	2	3	4	5	**¿Identidad o ecuación?**
$3x^2-2$						
$x(3x-2)$						

E3.3. Identifica si las siguientes igualdades son identidades o ecuaciones.

a) $1+3(n-2)=3n-5$

b) $2(a-4)=2a+1$

c) $m-3=1+4(2m-3)$

d) $x-4(x+3)=-3-3(x+3)$

2. Técnicas que se ejercitan

Las técnicas que se van a trabajar en estos ejercicios están asociadas a los campos de problemas previamente indicados. En este apartado se van a explicar las técnicas que se ejercitan en cada uno de ellos.

Campo de problemas 1: Identificación de regularidades

Con los ejercicios de este campo de problemas**,** se trabaja la técnica de calcular el término general de una secuencia. Como se ha mencionado anteriormente, esta técnica se basa en darse cuenta de una regularidad, generalizarla y usarla para encontrar el término general.

Campo de problemas 2: Cambios entre sistemas de representación

En este campo, se ejercita la técnica de calcular el valor numérico de una expresión algebraica sustituyendo las variables por los valores que se indican en los ejercicios donde, por ejemplo, haya que pasar a un sistema de representación tabular.

Campo de problemas 3: Equivalencia de expresiones algebraicas

Las técnicas usadas en los ejercicios de expresiones equivalentes se basan en operar con monomios (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones), cuentas sencillas para empezar a familiarizarse con las expresiones algebraicas y sus simplificaciones.

Por último, para diferenciar si una igualdad es una identidad o una ecuación, la técnica que se trabaja primero es la de calcular varios valores numéricos de cada parte de la igualdad y ver si coinciden todos los valores o no. Después, se modifica dicha técnica para que observen mediante cuentas y simplificaciones si las dos partes de la igualdad son iguales, sin necesidad de calcular varios valores numéricos. De todas formas, seguirán teniendo la opción de realizarlos mediante la técnica anterior, calculando varios valores de las dos partes de la igualdad.

3. Metodología

Estos ejercicios serán realizados de forma individual para comprobar que todos los alumnos practican las técnicas y comprenden los nuevos conceptos que se introducen en el aula.

Se realizarán tanto en el aula como en casa mandados como deberes. Mientras los alumnos estén realizando los ejercicios en clase, el profesor, de nuevo, se irá pasando por sus mesas para ayudarles en caso de que lo necesiten. Cuando los hayan terminado, entre todos comentarán las soluciones y las dudas que hayan podido tener. Además, si quieren, los alumnos podrán salir a la pizarra a resolver algunos de los ejercicios.

G. Sobre las tecnologías

1. Razonamientos que justifican las técnicas

En esta sección se van a explicar las justificaciones de las técnicas mencionadas en la sección anterior. La mayoría de ellas quedan justificadas por las definiciones de los conceptos, aunque algunas no tienen tecnología asociada. Es importante que estas justificaciones queden claras para que el alumnado comprenda los conceptos lo mejor posible y no se trate simplemente de técnicas mecanizadas.

Campo de problemas 1: Identificación de regularidades

La técnica para la generalización de patrones no tiene una justificación asociada. Serán los propios alumnos los que, a través de realizar el problema 1 de razón de ser y los del campo de problemas 1 con ayuda, si es necesaria, del profesor, los resuelvan dándose cuenta de la regularidad e intentando llegar a una expresión a la que el profesor llamará "**expresión algebraica**". Como, seguramente, van a aparecer varias soluciones correctas distintas, el docente comentará que son **expresiones equivalentes**, ya que representan lo mismo.

Campo de problemas 2: Cambios entre sistemas de representación

La justificación que se le da a la técnica del cálculo del valor numérico es la siguiente definición:

"El **valor numérico** de una expresión algebraica es el resultado que nos da al sustituir las letras que aparecen por un número y realizar las operaciones que están indicadas".

Campo de problemas 3: Equivalencia entre expresiones algebraicas

La primera técnica de este campo está justificada por las reglas de operaciones con números: propiedad distributiva, operaciones con exponentes, ... Estas operaciones, aunque no con letras, ya las han visto en otro momento. Se hará un breve recordatorio a la vez que vayan resolviendo los problemas del campo y se explicará, sobre todo, cómo sumar y restar monomios, que es lo más nuevo para ellos.

La técnica de calcular el valor numérico de cada parte de la igualdad y ver si coinciden siempre o no queda justificada por la definición de identidad y ecuación, empezando a hablar de las soluciones de una ecuación.

- Definición de **identidad**: "Igualdad que se cumple siempre, para cualquier valor que tomen las letras".
- Definición de **ecuación**: "Igualdad que no se cumple siempre, sólo para algún valor. Los valores que hacen que sí se cumpla la igualdad, se llaman **soluciones** de la ecuación".

La modificación de la técnica comentada en la sección anterior queda justificada de la misma manera que la primera técnica de este campo de problemas. Simplificando cada parte de la igualdad mediante las operaciones que se puedan realizar, pueden llegar a ver si son expresiones equivalentes (identidad) o no (ecuación).

2. Responsabilidad de justificar las técnicas

Cuando el alumnado termine de realizar los problemas indicados, se producirá un debate entre el profesor y los alumnos mediante el cual se comentarán las dudas y soluciones obtenidas, las técnicas utilizadas (cómo los han realizado) y los nuevos conceptos que han aparecido. Será en ese momento cuando el docente institucionalice estos nuevos conceptos y justifique con rigor las técnicas, proporcionando las definiciones del apartado anterior.

3. Proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático

Al finalizar los problemas del primer campo, identificación de regularidades, se formará un debate donde los alumnos comentarán cómo los han realizado y las soluciones obtenidas. Después de estar observando si alguno llegaba a una expresión correcta, es entonces cuando el profesor institucionalizará el concepto explicando lo que es una expresión algebraica y, si hay varias correctas, comentará que son expresiones equivalentes ya que representan lo mismo. Si no se ha dado el caso, aunque es menos probable, les inducirá para llegar a una expresión equivalente y formalizar el término.

En el debate posterior a la realización de los problemas donde deben calcular el valor numérico de una expresión algebraica, los alumnos deberán contestar qué han hecho para calcular esos números y el profesor formalizará que a esos números se les llama valor numérico, dando la definición del apartado anterior.

Respecto al manejo de operaciones de expresiones algebraicas, mientras los alumnos estén realizando los problemas, el profesor observará las dificultades que les vayan surgiendo y las aclarará en la pizarra mediante recordatorios y ejemplos.

Por último, al finalizar las tablas del problema sobre identidades y ecuaciones, los alumnos comentarán, como pone en la pregunta, si los resultados de ambas expresiones salen siempre iguales o no. El profesor preguntará qué sucede si se igualan ambas partes y, con las definiciones del apartado anterior, institucionalizará el concepto de identidad y ecuación hablando también de las soluciones de una ecuación.

4. Metodología

Los alumnos trabajarán estos problemas en grupos sin haber dado una explicación de los conceptos. El profesor irá observando cómo se manejan e irá ayudándoles en caso necesario a acercarse a una solución mediante consejos o preguntas. Al final de cada problema, se formará un debate entre el profesor y los alumnos donde se comentarán los aspectos más importantes y se producirá la institucionalización de los nuevos conceptos y las justificaciones de las técnicas usadas tal y como se ha explicado en el apartado anterior.

Después, deberán realizar los ejercicios planteados para practicar las técnicas y afianzar los nuevos conceptos.

H. Secuencia didáctica y cronograma

1. Secuenciación de las actividades y duración temporal

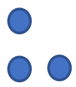
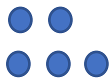
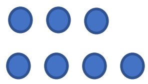
SESIÓN	CONTENIDOS	ACTIVIDADES
1	Introducción expresiones algebraicas	Problema razón de ser 1
2	Trabajo del campo de problemas 1	Problemas del CP1: P1.1 y P1.2
3	Introducción a los sistemas de representación	Problema razón de ser 2
4	Trabajo del campo de problemas 2	Problemas del CP2: P2.1, P2.2 y P2.3
5	Trabajo del campo de problemas 2	Problemas del CP2: P2.4 y P2.5
6	Introducción equivalencia de expresiones algebraicas	Problema razón de ser 3
7	Trabajo del campo de problemas 3	Problemas del CP3: P3.1, P3.2 y P3.3
8	Repaso	Resolución de dudas
9	Evaluación	Prueba escrita
10	Corrección de examen	Entrega de exámenes y corrección en la pizarra

I. Sobre la evaluación

1. Prueba escrita

A continuación, se presenta la prueba escrita para evaluar el aprendizaje realizado por los alumnos de la unidad didáctica. Se realizará en una sesión de 50 minutos y constará de 6 preguntas. Los enunciados son los siguientes:

[1] Rellena la tabla escribiendo el paso 5 y la fórmula para el paso n y, después, contesta a la pregunta. *(1,5 puntos)*

Paso	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**n**
Patrón						
Nº de puntos						

¿Cuántos puntos habrá en el paso 35?

[2] Fíjate en las situaciones y traduce al lenguaje algebraico rellenando la tabla. *(2 puntos)*

- Sandra tiene en su casa **x** libros
- Juan tiene un libro más que ella
- Su amigo Pablo tiene el doble de libros que Sandra
- Tomás tiene 2 libros menos que Sandra
- Ana tiene los mismos libros que Sandra y Pablo juntos
- Cristina tiene 1 libro más que Tomás

	CANTIDAD DE LIBROS
Sandra	
Juan	
Pablo	
Tomás	
Ana	

Cristina	

Calcula cuántos libros tendrá cada uno si Sandra tiene 5 libros (x = 5)

[3] Para patinar en una pista de hielo te cobran 3€ por entrar, y luego 2€ más por cada hora que estés dentro. Rellena la tabla. *(1,5 puntos)*

Tiempo (horas)	1	2	3	5	x
€					

Si en otra pista de hielo cobran 1€ por entrar, pero luego 3€ por cada hora que estés dentro…

Tiempo (horas)	1	2	3	5	x
€					

- ¿Cuál me sale mejor de precio si estoy una hora?
- ¿Y si estoy 3 horas?
- ¿Hay algún momento en el que sea indiferente acudir a una pista de hielo o a otra?

[4] Identifica en cada apartado si la igualdad es identidad o ecuación y explica por qué. *(2 puntos)*

- $2(x-2) = 2x - 4$
- $1 + 2x = 3x$
- $8 = 2x + 2$
- $x + 1 + 2x = 3x + 1$

[5] Simplifica las siguientes expresiones algebraicas. *(1,5 puntos)*

- $x + 2x + 1 - x + 3$
- $2 \cdot a \cdot (3a)$
- $\frac{4n}{2n}$

- $2(2x + 1 - x)$

[6] Si "F" representa los kg de fresas que he comprado en una frutería, ¿qué dicen las siguientes expresiones? Escribe frases que al traducirlas se correspondan con estas expresiones. *(1,5 puntos)*

a) 3F
b) F – 2
c) F + P

2. Aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático que se pretenden evaluar

En todos los ejercicios de la prueba se pretende evaluar el siguiente criterio de evaluación:

> "Crit.MA.2.6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas".

Los estándares de aprendizaje asociados al criterio anterior que aparecen en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato que se van a evaluar son:

- Est.MA.2.6.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas.
- Est.MA.2.6.2. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones.
- Est.MA.2.6.3. Utiliza las identidades algebraicas notables y las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas.

A continuación, vamos a ver qué estándar y campo de problemas se evalúa en cada uno de los ejercicios, ya que las técnicas y tecnologías asociadas a cada campo de problemas se han descrito anteriormente.

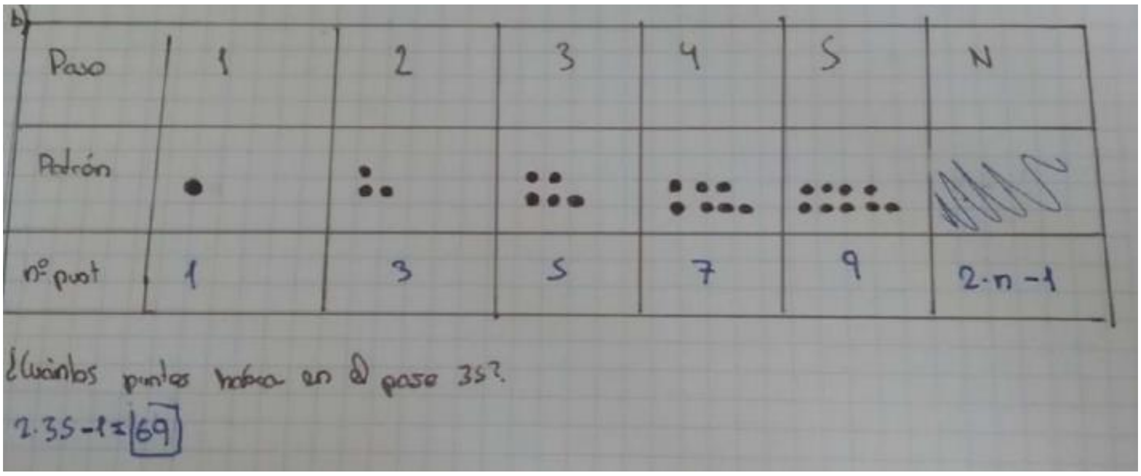
Ejercicio	**Estándares de aprendizaje**	**Campos de problemas**
1	Est.MA.2.6.1 Est.MA.2.6.2	CP1: Identificación de regularidades
2	Est.MA.2.6.1	CP2: Cambios entre los sistemas de representación
3	Est.MA.2.6.1 Est.MA.2.6.2	CP2: Cambios entre los sistemas de representación
4	Est.MA.2.6.3	CP3: Equivalencia de expresiones algebraicas
5	Est.MA.2.6.3	CP3: Equivalencia de expresiones algebraicas
6	Est.MA.2.6.1	CP2: Cambios entre los sistemas de representación

3. Respuestas esperadas

Algunos ejercicios de la prueba escrita han sido propuestos a los estudiantes de dos clases de 1º de ESO del instituto Pilar Lorengar en el periodo de prácticas del Máster, por lo que se han podido observar las respuestas y errores que se han producido. En este apartado se van a mostrar algunas respuestas obtenidas a estos ejercicios y las esperadas y posibles errores de las que no han sido resueltas por ellos.

<u>Ejercicio 1</u>

Una respuesta correcta es ver que siempre es el doble del número del paso menos 1 punto (2n – 1). Después, se sustituye en la fórmula y salen 69 puntos en el paso 35.



b)

Paso	1	2	3	4	5	N
Patrón						
nº punt	1	3	5	7	9	$2 \cdot n - 1$

¿Cuántos puntos habrá en el paso 35?

$2 \cdot 35 - 1 = \boxed{69}$

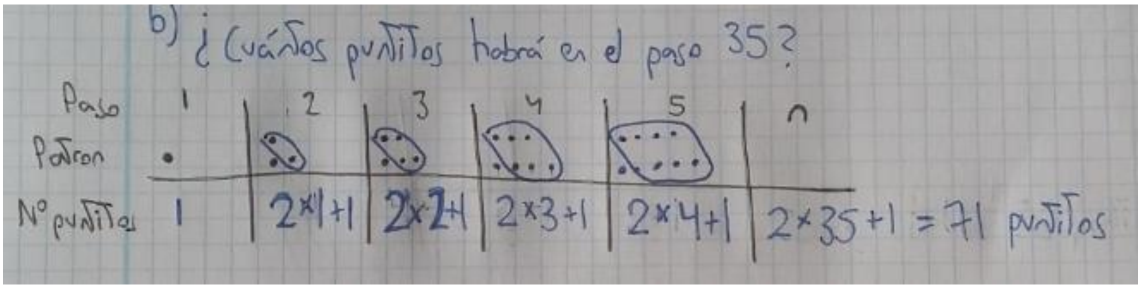
Otra forma de resolverlo correctamente es contando los puntos que hay en la fila de arriba y en la de abajo: n puntos abajo y n – 1 puntos arriba. Entonces, hay n + n – 1 puntos. De nuevo, sustituyendo salen 69 puntos en el paso 35.

Paso	1	2	3	4	5	n
Patrón						
Nº puntos	1	3	5	7	9	$n + (n-1)$

En el paso 35 habrá:

$35 + 34 = \boxed{69 \text{ puntos}}$

En la siguiente imagen se juntan dos posibles errores. El primero, que identifiquen el paso n como el paso que se pide posteriormente (paso 35), es decir, que no escriban la expresión algebraica. El segundo, que no se fijen y, al ver que hay un punto suelto, identifiquen el patrón como 2n + 1.



b) ¿Cuántos puntitos habrá en el paso 35?

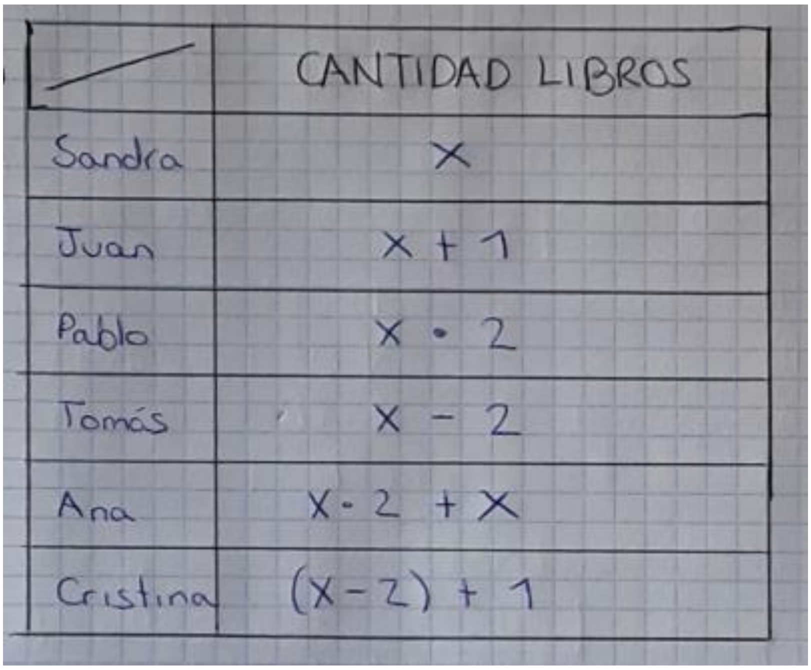
Paso	1	2	3	4	5	n
Patron						
Nº puntitos	1	$2 \times 1 + 1$	$2 \times 2 + 1$	$2 \times 3 + 1$	$2 \times 4 + 1$	$2 \times 35 + 1 = 71$ puntitos

Por último, aunque en menor medida, también se ha encontrado algún caso donde, en el paso n, escriben y dibujan como si fuera el paso 6 ya que el anterior era el 5.

Ejercicio 2

Este es otro de los ejercicios que se preguntó a los alumnos de 1º de ESO a excepción de la última pregunta. La respuesta correcta es la siguiente:

- Sandra → x libros
- Pablo → 2x libros
- Ana → 2x + x libros
- Juan → x + 1 libros
- Tomás → x – 2 libros
- Cristina → x – 2 + 1 = x – 1 libros



En la cantidad de libros de Cristina puede aparecer x – 2 + 1 o x – 1 si se dan cuenta de que restar dos y sumar uno es lo mismo que restar uno. Las dos opciones son válidas.

Si Sandra tiene 5 libros (x =5):

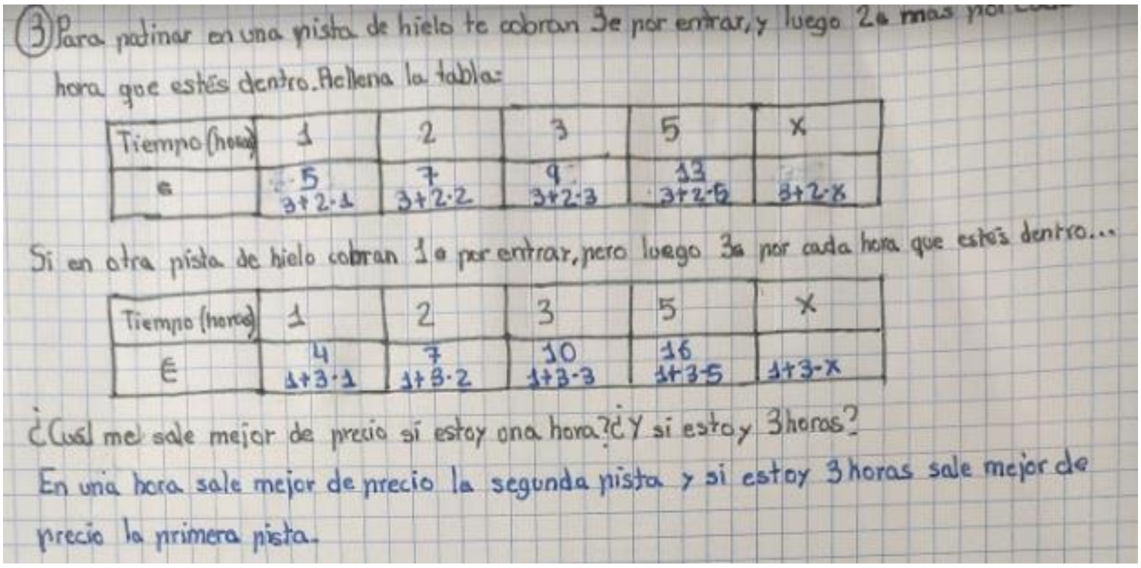
- Sandra → x = 5 libros
- Pablo → 2x = 2·5 = 10 libros
- Ana → 2x + x = 2·5 + 5 = 15 libros
- Juan → x + 1 = 5 + 1 = 6 libros
- Tomás → x – 2 = 5 – 2 = 3 libros
- Cristina → x – 1 = 5 – 1 = 4 libros

Los errores que se prevén en este ejercicio son en los libros de Cristina y Ana. Al no ser Sandra (la que tiene x libros) la persona de la que se habla en esa situación, los alumnos se pueden confundir (como se muestra en la imagen posterior). También posibles despistes a la hora de sustituir la x por 5.

Ejercicio 3

Este ejercicio también se les preguntó, excepto la última pregunta que ha sido añadida para este trabajo.

La solución correcta es la que se ve en la siguiente imagen. Para calcular el precio en función del número de horas deben multiplicar las horas que están por 2 y 3 respectivamente y sumarle el dinero que se paga sólo por entrar, llegando a las expresiones $3 + 2x$ y $1 + 3x$. También pueden ir sumando 2 y 3 euros a cada hora y luego tratar de generalizarlo.



③ Para patinar en una pista de hielo te cobran 3€ por entrar, y luego 2€ más por cada hora que estés dentro. Rellena la tabla:

Tiempo (horas)	1	2	3	5	x
€	5 $3+2\cdot1$	7 $3+2\cdot2$	9 $3+2\cdot3$	13 $3+2\cdot5$	$3+2\cdot x$

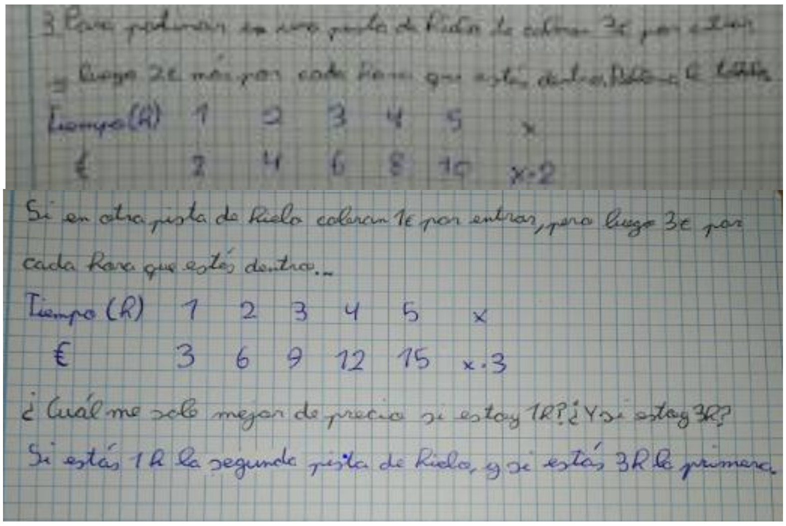
Si en otra pista de hielo cobran 1€ por entrar, pero luego 3€ por cada hora que estés dentro...

Tiempo (horas)	1	2	3	5	x
€	4 $1+3\cdot1$	7 $1+3\cdot2$	10 $1+3\cdot3$	16 $1+3\cdot5$	$1+3\cdot x$

¿Cuál me sale mejor de precio si estoy una hora? ¿Y si estoy 3 horas?

En una hora sale mejor de precio la segunda pista y si estoy 3 horas sale mejor de precio la primera pista.

Un posible error es, como se ve en la siguiente imagen, olvidarse del dinero que tienes que pagar sólo por entrar. Al ser un número fijo, pueden no tenerlo en cuenta. Llegarían, entonces, a las expresiones $2x$ y $3x$.



3 Para patinar en una pista de hielo te cobran 3€ por entrar y luego 2€ más por cada hora que estés dentro. Rellena la tabla

Tiempo (h)	1	2	3	4	5	x
€	2	4	6	8	10	$x\cdot2$

Si en otra pista de hielo cobran 1€ por entrar, pero luego 3€ por cada hora que estés dentro...

Tiempo (h)	1	2	3	4	5	x
€	3	6	9	12	15	$x\cdot3$

¿Cuál me sale mejor de precio si estoy 1h? ¿Y si estoy 3h?

Si estás 1h la segunda pista de hielo, y si estás 3h la primera.

En cuanto a la última pregunta *(¿Hay algún momento en el que sea indiferente acudir a una pista de hielo o a otra?)*, deben darse cuenta de que el precio de estar dos horas en las dos pistas de hielo coincide, cuestan lo mismo, por lo tanto, es indiferente ir a una o a otra.

<u>Ejercicio 4</u>

Este ejercicio puede realizarse mediante tablas, calculando el valor numérico de las dos partes de la igualdad para ver si dan siempre el mismo resultado o realizando cuentas para observar si las dos expresiones son equivalentes o no.

Si lo resuelven con una tabla la solución es la siguiente:

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\boldsymbol{2(x-2)}$	$2(1-2)=-2$	$2(2-2)=0$	$2(3-2)=2$	$2(4-2)=4$	$2(5-2)=6$
$\boldsymbol{2x-4}$	$2\cdot 1-4=-2$	$2\cdot 2-4=0$	$2\cdot 3-4=2$	$2\cdot 4-4=4$	$2\cdot 5-4=6$

Siempre dan los mismos resultados, $2(x-2)=2x-4$ es una identidad.

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\boldsymbol{1+2x}$	$1+2\cdot 1=3$	$1+2\cdot 2=5$	$1+2\cdot 3=7$	$1+2\cdot 4=9$	$1+2\cdot 5=11$
$\boldsymbol{3x}$	$3\cdot 1=3$	$3\cdot 2=6$	$3\cdot 3=9$	$3\cdot 4=12$	$3\cdot 5=15$

No dan siempre los mismos resultados, $1+2x=3x$ es una ecuación.

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\boldsymbol{8}$	8	8	8	8	8
$\boldsymbol{2x+2}$	$2\cdot 1+2=4$	$2\cdot 2+2=6$	$2\cdot 3+2=8$	$2\cdot 4+2=10$	$2\cdot 5+2=12$

No dan siempre los mismos resultados, $8=2x+2$ es una ecuación.

x	**1**	**2**	**3**	**4**
$\boldsymbol{x+1+2x}$	$1+1+2\cdot 1=4$	$2+1+2\cdot 2=7$	$3+1+2\cdot 3=10$	$4+1+2\cdot 4=13$
$\boldsymbol{3x+1}$	$3\cdot 1+1=4$	$3\cdot 2+1=7$	$3\cdot 3+1=10$	$3\cdot 4+1=13$

Siempre dan los mismos resultados, $x+1+2x=3x+1$ es una identidad.

Resolviéndolo de la segunda forma:

- $2(x-2)=2x-4 => 2x-4=2x-4$, son iguales, es una identidad.
- $1+2x=3x$, no se puede simplificar más, son dos expresiones distintas, así que es una ecuación.
- $8=2x+2$, no se puede simplificar más, son dos expresiones distintas, es una ecuación.
- $x+1+2x=3x+1 => 3x+1=3x+1$, son iguales, es una identidad.

Los errores que se pueden cometer al resolver este ejercicio son errores de cuentas por la jerarquía de operaciones o despistes y, al dar un resultado diferente, puede que cambie la solución final: decir si es identidad o ecuación.

Ejercicio 5

Se debe resolver usando las propiedades de los números con los pasos intermedios que sean necesarios llegando a las siguientes soluciones:

- $x + 2x + 1 - x + 3 = 2x + 4$
- $2 \cdot a \cdot (3a) = 6a^2$
- $\frac{4n}{2n} = 2$
- $2(2x + 1 - x) = 2x + 2$

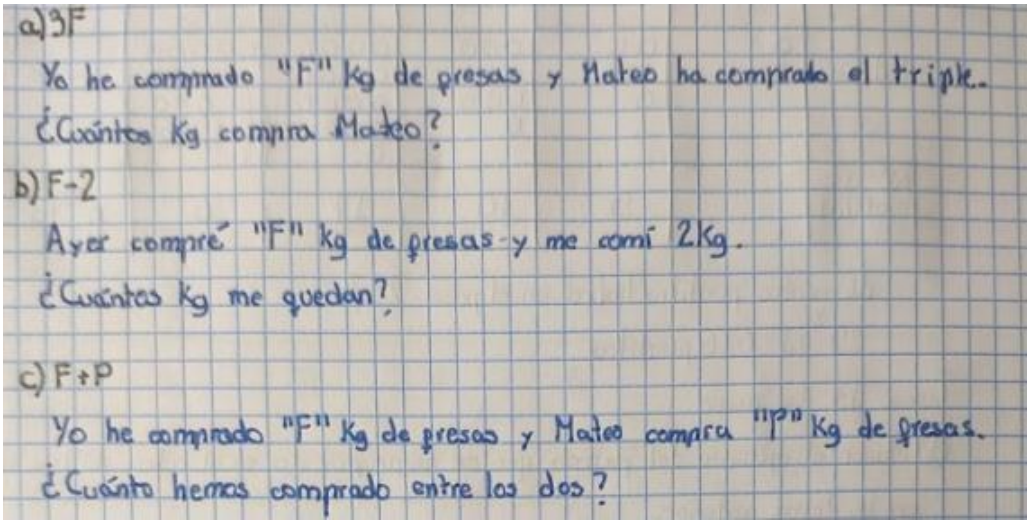
Los errores que pueden aparecer en este ejercicio pueden deberse a cuentas mal realizadas o conocimientos mal asentados sobre las operaciones.

Ejercicio 6

En este ejercicio puede haber varias respuestas correctas, ya que se trata de una pregunta más abierta. Lo que debe aparecer en la respuesta correcta, al menos, es lo siguiente:

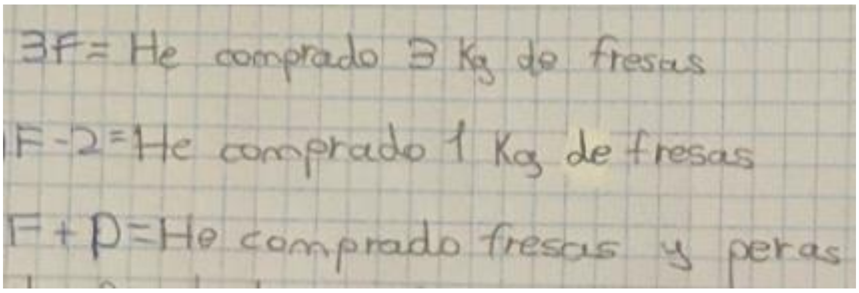
- 3F → El triple de los kg de fresas que tenía
- F – 2 → 2 kg de fresas menos de los que tenía
- F + P → Los kg de fresas más los kg de peras que he comprado

Una de las respuestas correctas encontradas es la de la imagen:

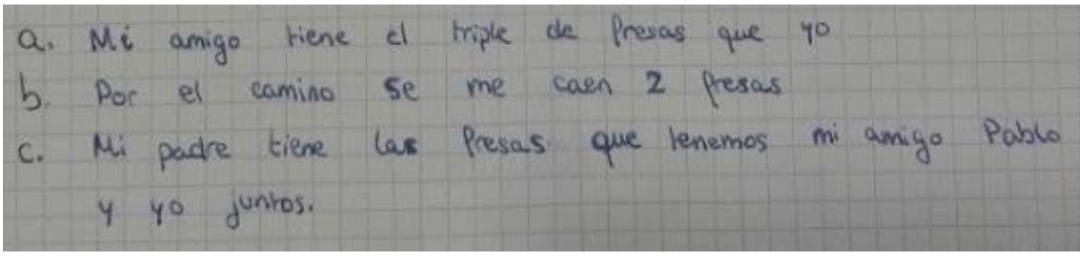


También se puede identificar 3F como el dinero que me han costado F kg de fresas (3 € cuesta cada kg).

En cuanto a los errores, uno de los más habituales encontrados en este ejercicio es identificar 3F como 3 kg de fresas, como si la F fuera una etiqueta:



Otro error es identificar la F como unidades de fresa y no como kg de fresas. Por ejemplo, como el de la imagen, que escribe que se le han caído 2 fresas:



4. Criterios de calificación

Para corregir esta prueba se propone el modelo de tercios de Gairín, Muñoz y Oller (2012). Para ello, es necesario diferenciar las tareas, separándolas en tareas principales y tareas auxiliares (específicas o generales). El modelo se basa en puntuar cada ejercicio sobre 10 y penalizar los fallos dependiendo de qué tipo de tarea sea:

- Por fallos en tareas principales se puede penalizar toda la pregunta y dejar de corregirla.
- Por fallos en tareas auxiliares se penalizaría hasta 2/3 de la pregunta (incluyendo los dos tipos de tareas auxiliares, la suma no podrá ser superior).
    - Por fallos en tareas auxiliares específicas se puede penalizar hasta 2/3 de la pregunta.

- Por fallos en tareas auxiliares generales se penalizaría hasta 1/3 de la pregunta.

Ahora, vamos a clasificar las tareas de los ejercicios para ver cómo se aplicaría en la prueba escrita el modelo de tercios.

Ejercicio 1

- Tareas principales: Identificar y generalizar la regularidad. Aplicarla a los pasos 5 y 35.
- Tareas auxiliares específicas: Ninguna
- Tareas auxiliares generales: Operar para calcular el paso 35 (2·35 – 1 o similar)

Ejercicio 2

- Tareas principales: Expresar correctamente los libros que tienen en función de los de Sandra. Sustituir la x por 5 para calcular cuántos libros tendrán si Sandra tiene 5.
- Tareas auxiliares específicas: Ninguna
- Tareas auxiliares generales: Operar las expresiones al sustituir la x por 5.

Ejercicio 3

- Tareas principales: Aplicar la regularidad en cada hora. Obtener la expresión general adecuadamente de cada una de las pistas de hielo. Observar las tablas y dar una contestación coherente a las preguntas.
- Tareas auxiliares específicas: Ninguna
- Tareas auxiliares generales: Operar (por ejemplo, 3 + 2·3 o similar)

Ejercicio 4

- Tareas principales: Responder coherentemente si se trata de una identidad o de una ecuación.
- Tareas auxiliares específicas: Operar las expresiones algebraicas (x + 2x = 3x o similar)
- Tareas auxiliares generales: Operar los números (1 + 2·1 o similar)

Ejercicio 5

- Tareas principales: Operar y simplificar las expresiones algebraicas

- Tareas auxiliares específicas: Ninguna
- Tareas auxiliares generales: Ninguna

Ejercicio 6

- Tareas principales: Identificar lo que dice cada expresión
- Tareas auxiliares específicas: Ninguna
- Tareas auxiliares generales: Ninguna

Referencias bibliográficas

Alsina, Á. y Giralt, I. (2017). Introducción al álgebra en educación infantil: un itinerario didáctico para la enseñanza de los patrones. *Revista de Didácticas Específicas*, *16*, 113-129.

Arias, J.M. y Maza, I. (2010). *Matemáticas ESO 1. Proyecto contexto digital*. Madrid: Bruño.

Carrasco, M. A., Martín, R., Ocaña, J. M. y Sánchez J. M. (2010). *Matemáticas 01. Proyecto aula 360º*. Madrid: Edelvives.

Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años).* Tesis doctoral. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*, 75 - 94. Jaén: SEIEM

Cid, E. y Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, 575-594. Montpellier: IUFM de Montpellier.

Colera, J y Gaztelu, I. (2011). *Matemáticas 1 Educación Secundaria*. Madrid: Anaya

Gairín, J.M., Muñoz, J.M. y Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*, 261 - 274. Jaén: SEIEM

Gascón, J., Bosch, M. y Ruiz-Munzón, N. (2017). El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI*, 25-47. Zaragoza: SEIEM.

González, M.T. (2009). La investigación en Historia de la Educación Matemática. *Educación y Ciencia, 1* (36), 37-58.

Grupo Azarquiel (1993). Ideas y Actividades para Enseñar Álgebra. *Madrid: Editorial Síntesis.*

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *Revista del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación (IRICE), 13*, 105-132.

Martínez, J. y Rodríguez, J. (2010). El currículum y el libro de texto. Una dialéctica siempre abierta. *Saberes e incertidumbres sobre el currículum, 246.*

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18 (1),* 49-76.

Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, 37-53. Santander: SEIEM.

Oller-Marcén, A. M. y Meavilla-Seguí, V. (2014). Entre la aritmética y el álgebra: Un análisis histórico de los "problemas de grifos". *Educación matemática*, *26*(1), 103-126.

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, *Boletín Oficial de Aragón*, 2 de junio de 2016, nº 105, 12640-13458.

Orden ECD/850/2016, de 29 de julio, por la que se modifica la Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, *Boletín Oficial de Aragón,* 12 de agosto de 2016, nº 156, 20713-20884.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, *Boletín Oficial del Estado,* Madrid, 3 de enero de 2015, nº 3, 169-546.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NUMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 5-34.

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *NUMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 97*, 51-67.