Ceros y factorización de funciones holomorfas

Javier Martín Goñi

Trabajo de fin de grado en Matemáticas

Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: David Alonso Gutiérrez

11 de junio de 2020

Prólogo

A lo largo de la historia, la localización de los ceros de funciones ha sido objeto de un gran número de estudios matemáticos. El Teorema Fundamental del Álgebra afirma que todo polinomio se puede factorizar en $\mathbb{C}$ como producto de funciones lineales de la forma $(x - x_i)$, con x_i los ceros del polinomio. Sin embargo, si el número de ceros fuera infinito, el producto no convergería en general. El Teorema de factorización de Weierstrass generaliza el Teorema Fundamental del Álgebra a funciones enteras en $\mathbb{C}$ con finitos o infinitos ceros. En este trabajo veremos que cualquier función holomorfa se puede factorizar como un producto infinito de funciones holomorfas que involucran a los ceros de la función. Y también el recíproco, definiendo un producto infinito que cumpla una serie de condiciones, se puede definir una función holomorfa que tenga los ceros que queramos con las multiplicidades que queramos.

Para ello vamos a estudiar propiedades de los productos infinitos, en concreto su convergencia. Veremos bajo qué condiciones podemos definir una función holomorfa mediante productos infinitos, y cuándo estos convergen. Todo este estudio está fuertemente ligado con la convergencia de series.

Mediante la Fórmula de Jensen estudiaremos cómo varía la densidad de ceros de funciones acotadas y holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$, según aumentemos el radio. Y con los Productos de Blashcke veremos las condiciones que tienen que cumplir los ceros de funciones holomorfas y acotadas localizados en el disco unidad.

Por último, todo este estudio tiene una relación directa en las conocidas funciones Gamma de Euler y Zeta de Riemann. La función Gamma se puede definir como un producto infinito, aplicando de forma directa el terorema de factorización de Weierstrass. En cuanto a la función Zeta, es evidente la importancia de la localizacion de sus ceros, ya que la Hipótesis de Riemann es uno de los problemas abiertos más importantes de la actualidad. Además, está relacionada con la teoría de números, ya que la Fórmula de Euler expresa la función Zeta como un producto infinito cuyo factor n-ésimo está definido a partir del n-ésimo primo.

Abstract

The main goal of this work is the study of zeros of holomorphic functions. The location and the growth of the number of zeros are some of the main objectives of this work. This study can be applied in order to factorize functions using Weierstrass' factorization Theorem. As we are able to develop analytic functions in power series, with Weierstrass factorization Theorem we are able to express holomorphic functions as infinite products of holomorphic functions. Another goal of the work is to see the direct consequences, and the importance of the study of zeros of holomorphic functions. The examples that we use are the Euler Gamma function, which is defined as an infinite product, and the Riemann Zeta function, which has one of the most important open problems in mathematics: Riemann Hypothesis.

Throughout first chapter, we work with infinite products. In this chapter we obtain the basics in order to develop next chapters. An infinte product is an expression of the form $\prod_n (a_n)$. First of all we state the definition of convergence, and we see the sufficient and neccesary conditions for an infinity product of complex numbers to converge. This conditions are related with the absolute convergence of the series $\sum_n (1-a_n)$, as we may expect. This results allow us to determine the conditions of convergence of infinite products of holomorphic functions. This chapter ends with a result of the conditions to determine when an infinite product of holomorphic functions defines a holomorphic function.

In the second chapter, we define the elementary factors: entire functions with an only zero in the point $z = 1$. This functions have the quality to be very similar to 1 on the unity disc $\mathbb{D}$. With a change of variable in the elementary factors, we obtain functions with a zero in a chosen point. We can define then a product of elementary factors, which remains an entire functions with a prescribed sequence of zeros. Applying the theory studied in the previous chapter, with some hypothesis, the infinite product of elementary factors converge, and then we can define an entire function with infinite zeros at the points that we have chosen, and only this zeros. The converse result of this theorem is Weierstrass factorization Theorem. It states that given an entire function, we can express it as a product of one entire function with no zeros and an infinite product of elementary factors. One of the main consequences of Weierstrass factorization Theorem, is the fact that every meromorphic function is a quotient of holomorphic functions.

Throughout next section, we study the location of zeros of holomorphic functions which are bounded in the unity disc $\mathbb{D}$. In order to develop this section, we define Jensen's Formula. Jensen's Formula establishes a connection between the modulus of the zeros of a function f inside a disc of radius r, and the average of $\log|f(z)|$ on the boundary circle $|z| = r$. This formula can be seen as a generalisation of the mean value property of harmonic functions. Jensen's formula allows us to see the relation between the growth of the function and the number of zeroes inside a disc. In particular, we show that there is a bound of the number of zeros of a function inside a disc, related to the maximum modulus of the function in the boundary of the disc of double radius.

In the third section we study Blashcke products. A Blashcke product is a bounded holomorphic function in the unity disc $\mathbb{D}$ constructed to have zeros at a finite or infinte sequence of prescribed complex numbers. We can represent it as a finite of infinite product of holomorphic functions, each one with a zero in a chosen point. In order to define Blashcke products, the chosen points for the zeros $a_1, a_2, \dots$

have to satisty blashcke condition: $\sum_n (1+|a_n|) < \infty$. This condition turns out to be sufficient in order to define a Blashcke product. We also define Nevanlinna class, a set of functions which includes bounded holomorphic functions. We see that the Blashcke condition is not only sufficient, but necessary in order to define a function of Nevanlinne class that has infinite zeros in the unity disc $\mathbb{D}$. We conclude this section with a theorem that describes the behavour of Blashcke products near the boundary of $\mathbb{D}$.

Third chapter is dedicated to study Euler Gamma function and Riemann Zeta function. Euler Gamma function can be defined as an infinite product. In order to do it, we use Weierstrass factorization Theorem. We define an entire function with the points $0,-1,-2,...$ as zeros, and then we take the inverse, which turns out to be a meromorphic function with zeros at the points $0,-1,-2,...$. With Bohr-Mollerup theorem, we can characterize the Gamma function as the unique extension of the factorial to $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,...\}$ satisfying a log-convexity property on the positive real axis. Another way to express Gamma function is through Gauss's Formula, which we use to get the Gamma functional equation. Finally, we define Gamma function integral form in order to relate it with Riemann Zeta function.

Throughout last section we work with Riemann Zeta function. Riemann Zeta function is defined as a meromorphic function in $\mathbb{C}$ with a pole in $z=1$. We can relate it with Euler Gamma function in a way that Gamma function appears in the expression of Zeta function. It satisfies a functional equation that is used to find the trivial zeros, that are the points $z=-2,-4,-6,...$. Riemann functional equation is also used to determine that all the zeros of Zeta satisfy that $Re(z)\in[0,1]$. The problem of classifying the zeros of the Zeta function is a formidable (and unsolved) task. Riemann Hypothesis states that all the non-trivial zeros of Zeta function satisfy that $Re(z)=1/2$. In order to note the relation between Riemann Hypothesis and number theory, we finish the work with Euler's Formula, which express Zeta function as an infinite product whose n-th factor is defined from the n-th prime number.

Índice general

Capítulo 1

Productos Infinitos

Comenzaremos este capítulo definiento los productos infinitos, y mostrando que su convergencia es bastante similar a las de las sumas infinitas o series. Al igual que utilizamos series para expresar funciones analíticas en series de potencias, en este capítulo veremos que podemos factorizar funciones analíticas en productos infinitos. Además, veremos una serie de resultados teóricos sobre convergencia de productos infinitos que nos servirán más adelante.

1.1. Productos infinitos

Un producto infinito es una expresión de la forma $u_1u_2u_3...$, que denotamos como $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$, donde los u_n son números complejos. De forma análoga a las series, se podría estar tentado a decir que un producto infinito *converge*, si $\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N} u_n$ existe. Sin embargo, esta definición estaría incompleta, ya que si uno de los u_n fuera 0, el producto infinito convergería independientemente del comportamiento del resto de términos; lo cual se alejaría del "espíritu" de la definición de límite. Al contrario que con los productos finitos, un producto infinito puede ser cero sin que ninguno de sus términos sean cero: por ejemplo $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1/k) = 0$. Por ello, debemos imponer alguna otra condición para la convergencia.

Decimos que un producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge*, si existe N tal que $u_n \neq 0$, $\forall n \geq N$, y además $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=N}^{n} u_k$ existe y es es diferente a 0. Cuando un producto infinito no converge, decimos que diverge. Por tanto, aplicando la definición, si un numero finito de u_k son 0 y el producto infinito converge, entonces es evidente que el producto converge a cero. Al contrario de lo que nos diría nuestra intuición, si hay infinitos $u_k = 0$ (por lo tanto no se cumple la definición de convergencia) el producto infinito diverge, a pesar de que para todo $N \in \mathbb{N}$ se tenga que $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=N}^{n} u_k = 0$.

En una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a la hora de estudiar la convergencia, se debe ver que los a_n tienden a 0. En el caso de los productos infinitos, el interés reside en ver que los terminos del producto se van acercando a 1, por ello vamos a considerar productos infinitos con factores escritos de la forma $(1+u_n)$.

Definición. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de numeros complejos. Definimos:

$$p_N = (1+u_1)(1+u_2)...(1+u_N). \tag{1.1}$$

Si $\lim_{N\to\infty} p_N$ existe, definimos

$$p = \prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n). \tag{1.2}$$

Llamamos a p_N *productos parciales* de (1.2). Decimos que el producto infinito (1.2) converge, si la sucesión $\{p_N\}$ converge.

Lema 1.1. *Sean $u_1,...,u_N \in \mathbb{C}$. Definimos*

$$p_N = \prod_{n=1}^{N}(1+u_n), \quad p_N^* = \prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|).$$

Entonces, se tiene que

$$p_N^* \leq \exp\left(|u_1| + ... + |u_N|\right) \tag{1.3}$$

y además,

$$|p_N - 1| \leq p_N^* - 1. \tag{1.4}$$

Demostración. Podemos representar $\exp x$ en serie de Taylor centrada en 0, y tenemos que, si $x \geq 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \geq 1 + x.$$

Sustituyendo x por cada uno de los $|u_i|$, obtenemos que para todo i,

$$e^{|u_i|} \geq 1 + |u_i|.$$

Multiplicando todas las desigualdades, obtenemos que

$$p_N^* = \prod_{n=1}^{N}(1 + |u_n|) \leq \exp\left(|u_1| + ... + |u_N|\right)$$

de donde deducimos (1.3). Demostraremos (1.4) por induccion. Es evidente que con $N = 1$,

$$|p_1 - 1| = |1 + u_1 - 1| = |u_1| = 1 + |u_1| - 1 = p_1^* - 1.$$

Supongamos cierto (1.4) para $k = 1, ..., N$. Tenemos que para todo $k = 1, ..., N$

$$p_{k+1} - 1 = p_k(1 + u_{k+1}) - 1 = p_k + p_k u_{k+1} - 1 + (u_{k+1} - u_{k+1}) = (p_k - 1)(1 + u_{k+1}) + u_{k+1} \tag{1.5}$$

$$p_{k+1}^* - 1 = p_k^*(1 + |u_{k+1}|) - 1 = p_k^* + p_k^*|u_{k+1}| - 1 + (|u_{k+1}| - |u_{k+1}|) = (p_k^* - 1)(1 + |u_{k+1}|) + |u_{k+1}|. \tag{1.6}$$

En particular, tomando $k = N$ en (1.5) y tomando módulos, tenemos que

$$|p_{N+1} - 1| = |(p_N - 1)(1 + u_{N+1}) + u_{N+1}| \leq |p_N - 1|(1 + |u_{N+1}|) + |u_{N+1}|.$$

Aplicando la hipótesis de inducción, y utilizando (1.6) tenemos la desigualdad

$$|p_{N+1} - 1| \leq (p_N^* - 1)(1 + |u_{N+1}|) + |u_{N+1}| = p_{N+1}^* - 1.$$

□

Teorema 1.1. *Sea u_n una sucesión de funciones holomorfas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $S \subset \Omega$ un compacto, tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ converge uniformemente en S. Entonces, el producto*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n(z))$$

converge uniformemente en S. Además, se tiene que $f(z_0) = 0$ si y solo si $u_n(z_0) = -1$ para algun n.

Por último, para cualquier permutación $\{n_1, n_2, n_3, ...\}$ de $\{1, 2, 3, ...\}$, tenemos que

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_{n_k}(z)).$$

Demostración. Por hipótesis, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ converge uniformemente en S, es decir, existe una f_1 en S tal que $sup_{z \in S}|\sum_{n=1}^{N} |u_n(z)| - f_1(z)| \to 0$ cuando $N \to \infty$. Además, el supremo en el anterior límite es un máximo ya que S es compacto y f_1 es contínua en S por ser límite uniforme de funciones continuas. Esta hipótesis implica que $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ está acotado en S, y que existe $C > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in S$, $\sum_{n=1}^{N} |u_n(z)| < C$. Denotando p_N como el N-ésimo producto parcial, aplicamos el lema 1,1,

$$|p_N(z) - 1| \leq p_N^*(z) - 1 \leq \exp\left(\sum_{n=1}^{N} |u_n(z)|\right).$$

Como $\exists C > 0$ tal que $\forall N \in \mathbb{N}$ y $\forall z \in S$, $\sum_{n=1}^{N} |u_n(z)| < C$, $\exists Q = e^C$, tal que $\forall N \in \mathbb{N}$ y $\forall z \in S$, $\exp(\sum_{n=1}^{N} |u_n(z)|) \leq Q$.

Sea $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)| \leq Q \in \mathbb{R}$, sabemos que $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |u_n(z)| \leq \varepsilon.$$

Sea $\{n_1, n_2, n_3, ...\}$ una permutación de $\{1, 2, 3, ...\}$. Para cualquier $N \geq N_0$, podemos tomar un M suficientemente grande, para que

$$\{1, 2, ..., N\} \subset \{n_1, n_2, ..., n_M\}.$$

Consideramos $q_M(z) = \prod_{k=1}^{M} (1 + u_{n_k}(z))$. Denotando $A = \{1 \leq k \leq M \ : \ n_k > N\}$, tenemos que $\forall z \in S$

$$q_M(z) - p_N(z) = \prod_{n=1}^{N} (1 + u_n(z)) \left(\prod_{k \in A} (1 + u_{n_k}(z)) - 1\right) = p_N(z) \left(\prod_{k \in A} (1 + u_{n_k}(z)) - 1\right).$$

Tomamos módulos, y aplicando (1.4) tenemos que $\forall z \in S$

$$|q_M(z) - p_N(z)| = |p_N(z)| |\prod_{k \in A} (1 + u_{n_k}(z)) - 1| \leq |p_N(z)| (\prod_{k \in A} (1 + |u_{n_k}(z)|) - 1).$$

Aplicamos el Lema 1,1, y tenemos que

$$\prod_{k \in A} (1 + |u_{n_k}(z)|) - 1 \leq e^{\sum_{k \in A} (1 + u_{n_k}(z))} - 1, \quad \forall z \in S. \tag{1.7}$$

Por tanto, aplicando que, $\sum_{N_0}^{\infty} |u_n(z)| \leq \varepsilon$, tenemos que $\forall N \geq N_0$ y $\forall z \in S$

$$|q_M(z) - p_N(z)| \leq |p_N(z)| (e^{\varepsilon} - 1) \leq 2 |p_N(z)| \varepsilon \leq 2C\varepsilon. \tag{1.8}$$

Hemos utilizado que si $x \in (0, 1)$, $e^x - 1 \leq 2x$.

Si tomamos $n_k = k$, $k = 1, 2, 3, ...$, tenemos que $q_M = p_M, \forall M$, luego mediante la ecuación (1.8) vemos que $\{p_N\}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy en S, luego es convergente uniformemente, y tiende a una función f. Además, $\forall z \in S$ y $\forall M > N_0$

$$|p_M(z)| - |p_{N_0}(z)| \leq |p_M(z) - p_{N_0}(z)| \leq 2 |p_{N_0}(z)| \varepsilon.$$

Luego, $\forall z \in S$, $|p_M(z)| \geq (1 - 2\varepsilon) |p_{N_0}(z)|$. Tomando límites

$$|\lim_{M \to \infty} p_M(z)| = |f(z)| \geq (1 - 2\varepsilon) |p_{N_0}(z)|.$$

Así pues, deducimos que si $f(z_0) = 0$ para algún $z_0 \in S$, entonces $p_{N_0}(z_0) = 0$, lo que implica que algún factor $1 + u_n(z_0) = 0$. Recíprocamente, si un factor $1 + u_n(z_0) = 0$ es claro que $f(z_0) = 0$.

Por último, utilizando la fórmula (1.8), $\{q_M(z)\}$ converge hacia el mismo limite que $\{p_N(z)\}$, independientemente de la permutación de los n_k. $\square$

Acabamos de probar que para la convergencia de productos infinitos, una hipótesis suficiente es ver que los términos del producto, $(1 + u_n)$, se aproximan lo suficientemente rápido a 1, como para que la suma de los valores absolutos $|u_n|$ converja.

El siguiente resultado es consecuencia del Lema 1,1, y nos da las hipótesis bajo las cuales un productos infinitos de términos entre 0 y 1 es 0.

Teorema 1.2. *Sean $u_n \in [0,1)$. Entonces,*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) > 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty.$$

Demostración. Consideramos a las u_n funciones definidas únicamente en un punto. Definimos $p_N = (1-u_1)(1-u_2)...(1-u_N)$. Cada $(1-u_i)$ del producto es menor o igual que 1, luego $p_1 \geq p_2, ... \geq p_N > 0$. Por tanto, es una sucesión monótona, en un compacto $[0,1]$, así que $p = lim\, p_N$ existe.

Suponemos que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$. Aplicamos el teorema 1,1 a la sucesión $-u_n$, ya que $\sum |-u_n| < \infty$, y por tanto converge uniformemente, y tenemos que $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) = 0$ si y solo si algún $(1-u_n) = 0$, lo cual no es posible, ya que $u_n < 1$.

Para la otra implicación: supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$. Utilizando que $(1-u_i) \leq e^{-u_i}$, si $u_i \in [0,1)$. Multiplicando las desigualdades con todos los u_i,

$$p \leq p_N = \prod_{n=1}^{N}(1-u_n) \leq e^{-u_1-u_2-...-u_N}.$$

Por hipótesis, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$, luego tomando límites, el término de la derecha tiende a 0 cuando $N \to \infty$, luego $p = 0$. $\square$

Teorema 1.3. *Sean $\{f_n\}$, con cada f_i holomorfa en Ω, y no idénticamente 0. Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

converge uniformemente en compactos de Ω, entonces se tiene que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente en compactos de Ω. Además f es holomorfa en Ω.

Si $z \in Z(f)$, llamando $m(f,z)$ a la multiplicidad del 0 de f en z, además tenemos

$$m(f,z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, z).$$

Demostración. La primera parte del teorema es una consecuencia directa del Teorema 1,1: como $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$ converge uniformemente en compactos, tomando $u_n = f_n(z) - 1$, que por hipótesis converge uniformemente en compactos, obtenemos que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(z)) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en compactos a una función f, que es holomorfa en Ω.

La segunda parte requiere una demostración más técnica. Podemos observar que para cada $z \in \Omega$ hay un compacto $V \subset \Omega$ conteniendo a z, en el cual hay un número finito de f_n que tienen un cero: en caso contrario, si infinitas f_n tuvieran un cero en un z fijo, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$ tendría infinitos sumandos 1, luego llegamos a contradicción con la primera hipótesis. Ahora, fijamos un $z_1 \in \Omega$. Si tomamos V compacto tal que $z_1 \in V \subset \Omega$, procediendo como en la demostración del Teorema 1,1, con $u_n(z) = f_n(z) - 1$ tenemos que, fijado un $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $z \in V$

$$|f(z)| \geq (1-2\varepsilon) \prod_{n=1}^{N_0} |f_n(z)|.$$

Como cada f_n se anula únicamente en una cantidad finita de puntos de V y N_0 es finito, f se anula en una cantidad finita de puntos de V, luego no es idénticamente nula.

Por el Teorema 1,1, podemos hacer una permutación de los términos del producto infinito sin alterar la convergencia. Ponemos en primer lugar aquellos que tienen un cero en V (suponemos que son N):

$$f(z) = \prod_{n=1}^{N} f_n(z) \prod_{n=N+1}^{\infty} f_n(z).$$

Aplicando otra vez el Lema 1,1, sabemos que $\prod_{n=N+1}^{\infty} f_n(z)$ no tiene ceros en V, ya que ese producto será 0 si y solo si alguno de los términos es 0, y aquellos que son 0 están en $\prod_{n=1}^{N} f_n(z)$. Por tanto, es evidente que la multiplicidad de cero de f en z, será la suma de multiplicades del cero en cada factor del producto. $\square$

Capítulo 2

Teorema de Weierstrass y ceros de funciones holomorfas

Sea f una función holomorfa en una region Ω, definimos $Z(f)$ como el conjunto de ceros de f en Ω. Si f no es idénticamente nula, mediante el *Principio de prolongación analítica*, podemos deducir que $Z(f)$ no tiene puntos de acumulación. Mediante el Teorema de Weierstrass, veremos que para todo conjunto $A \subset \Omega$, sin puntos de acumulación, existe alguna funcion f holomorfa tal que A es $Z(f)$. En segunda sección veremos cómo es el crecimiento del número de ceros de funciones holomorfas acotadas en discos centrados en el origen, y una fórmula para acotarlos. Finalmente, veremos los *productos de Blaschke*, los cuales nos unas condiciones suficientes y necesarias que tienen que cumplir los ceros en el disco unidad $\mathbb{D}$.

2.1. Teorema de Factorización de Weierstrass

En esta sección vamos a ver como resultado final el *Teorema de Weierstrass*, el cual nos dice que cualquier función f holomorfa en un abierto Ω, se puede expresar como producto infinito de unas funciones llamadas *factores elementales de f*, dependientes de los ceros de f en Ω; y de una función también holomorfa en Ω que no se anula. Además, veremos que para todo conjunto A sin puntos de acumulación, podemos definir una función g holomorfa en un abierto que contenga a A, tal que el conjunto de ceros de g sea A.

La manera natural de definir g, seria eligiendo funciones f_n holomorfas, tales que cada f_n tuviera un único cero en cada $\alpha_n \in A$, y considerar el producto

$$p_n = f_1 f_2 f_3 ... f_n \quad ,n \to \infty.$$

Para estudiar la convergencia de p_n, utilizaremos los resultados del capítulo precedente sobre convergencia de productos infinitos.

Empezaremos por definir los factores elementales.

Definición. Sea $z \in \mathbb{C}$. Definimos $E_0(z) = (1-z)$, y para $p > 0$

$$E_p(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + ... + \frac{z^p}{p}\right). \tag{2.1}$$

Estas funciones se llaman *factores elementales*. Cumplen que su único cero está en $z = 1$.

Como hemos comentado al principio de esta sección, mediante el Teorema de Weierstrass, vamos a poder expresar una función f holomorfa como un producto infinito de funciones holomorfas. Para que ese producto infinito converja, como hemos estudiado en el capítulo anterior, es necesario que los términos del producto se aproximen a 1. Es por ello, por lo que utilizaremos los factores elementales a la hora de factorizar f: si $|z| < 1$ y p es grande, $E_p(z) \approxeq 1$.

Lema 2.1. *Sea* $|z| \leq 1$ *y* $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *. Tenemos que*

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}.$$

Demostración. Para $p = 0$ es evidente:

$$|1 - E_0(z)| = |1 - (1 - z)| = |z|$$

Sea $p > 0$. $E_p(z)$ es una función entera que cumple que $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$E_p'(z) = -\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right) + (1 - z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right)(1 + z + z^2 + \ldots + z^{p-1}).$$

Operando y cancelando términos, tenemos que

$$-E_p'(z) = z^p \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right), \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2.2}$$

Como la exponencial de (2.2) no tiene ningún cero, sabemos que $-E_p'(z)$ tiene un único cero de orden p en $z = 0$. El desarrollo de la exponencial en series de potencias, es:

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!},$$

cuyos coeficientes de cada w^n son $\frac{1}{n!}$, todos positivos. Tomando $w = z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}$ y desarrollando las potencias de w, tenemos que el desarrollo en serie de potencias de $-E_p'(z)$ es

$$-E_p'(z) = z^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+p}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{2.3}$$

con $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $a_0 \neq 0$.

Integrando $-E_p'(w)$ entre 0 y z, por la *Regla de Barrow*, tenemos que

$$\int_{[0,z]} -E_p'(w) = 1 - E_p(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Integrando la serie de potencias de (2.3), podemos ver que $1 - E_p(z)$ tiene un cero de orden $p + 1$ en $z = 0$:

$$1 - E_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n + p + 1} z^{n+p+1} = z^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n + p + 1} z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Finalmente, definimos $\phi(z) = (1 - E_p(z))z^{-(p+1)}$, la cual podemos representar como

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n + p + 1} z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Con $a_n \geq 0$, como hemos visto antes. Así pues, $|\phi(z)| \leq |\phi(1)| = 1$, si $|z| \leq 1$. Luego, finalmente, $|1 - E_p(z)| = |\phi(z)||z|^{p+1} \leq |z|^{p+1}$. □

Vamos a utilizar este resultado, para ver bajo qué hipótesis el producto infinito de los factores elementales converge.

Teorema 2.1. *Sea* $\{z_n\}$*, con* $z_n \in \mathbb{C}$*, tal que* $z_n \neq 0, \forall n$*, y* $lim_{n\to\infty}|z_n| = \infty$*. Si* p_n *es una sucesión de enteros no negativos, tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{(p_n+1)} < \infty \tag{2.4}$$

para todo r positivo, entonces el producto infinito

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \tag{2.5}$$

define una función entera P, que tiene un cero en cada z_n, y ninguno más.

Si un valor α aparece k veces en la sucesión, es decir, $\alpha = z_{n_1} = z_{n_2} = \ldots = z_{n_k}$, con todos los n_j diferentes, entonces P tiene un cero de multiplicidad k en α.

Demostración. Sea $r \in \mathbb{R}$ fija. Si $|z| < r$, aplicando el Lema 2,1, tenemos que

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{|z_n|}\right)\right| \le \left|\frac{z}{|z_n|}\right|^{1+p_n} \le \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{1+p_n}$$

para todos los $|z_n|$ que cumplen que $|z_n| \ge r$, que son todos menos un numero finito, ya que $\{|z_n|\}$ diverge. Aplicamos la hipótesis (2.4), y tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{|z_n|}\right)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{1+p_n} < \infty$$

para todo z que cumple que $|z| < r$. Podemos aplicar este razonamiento para cualquier r, luego la serie converge uniformemente en compactos (por el criterio M de Weierstrass), y por tanto aplicando el teorema 1,3, tenemos (2.5):

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

es una función holomorfa, y además tiene un cero en cada z_n y ninguno más. $\square$

La condición (2.4) se satisface, con $p_n = n-1$: para todo $r > 0$, como $|z_n|$ es divergente, sabemos que existe un N, tal que si $n > N$, entonces $|z_n| > 2r$. Así pues, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\frac{r}{|z_n|} < 1 - \varepsilon, \forall n > N$. Por tanto, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{|z_n|}\right)^n = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{r}{|z_n|}\right)^n + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{r}{|z_n|}\right)^n. \tag{2.6}$$

El primer sumando en (2.6) es una suma finita, luego está acotado por una constante C. Para el segundo sumando:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{r}{|z_n|}\right)^n \le \sum_{n=N+1}^{\infty}(1-\varepsilon)^n \le \frac{1}{1-(1-\varepsilon)} < \infty. \tag{2.7}$$

Luego, tenemos que la serie converge.

Con este teorema hemos demostrado que: eligiendo un conjunto infinito $\{z_n\}$, tal que $|z_n|$ tienda a infinito, si encontramos una sucesión $\{p_n\}$, con $p_n \ge 0$, tal que la serie (2.4) converja para cualquier r, entonces tenemos una función entera con un cero en cada z_n (cero múltiple si un valor z_n se repite). Como siempre podemos elegir $p_n = n-1$ para que la serie converja, en general, tenemos que para cualquier conjunto S numerable no acotado sin puntos de acumulación, podemos encontrar una función entera f tal que $Z(f) = S$.

A la hora de elegir la sucesión $\{p_n\}$, de entre todos los valores posibles con los que la serie converge, es interesante elegir los valores de p_n más pequeños. En ciertas sucesiones $|z_n|$, basta con elegir $p_n = k$, con k constante. Si esto ocurre, llamamos a la expresión (2.5) *producto canónico* correspondiente a $\{z_n\}$.

Por ejemplo, si $\sum \frac{1}{|z_n|} < \infty$, basta con elegir $p_n = 0, \forall n$, con lo que el producto quedaría

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

En el caso de que $\sum \frac{1}{|z_n|}$ divergiera, pero $\sum \frac{1}{|z_n|^2} < \infty$, utilizaríamos $p_n = 1$, y el producto quedaría

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}}.$$

Veamos ahora el recíproco del Teorema 2,1. Conociendo los ceros de una función entera, podemos representarla como el producto de una función entera, con el producto infinito de sus factores elementales. Este teorema se conoce como el *Teorema de Weierstrass*, y es el objeto fundamental de estudio de este capítulo.

Teorema 2.2. *Sea f una función entera tal que $f(0) \neq 0$, sean $z_1, z_2, z_3, ...$ los ceros de f repetidos tantas veces como su multiplicidad. Entonces, existe una función g entera y una sucesión $\{p_n\}$ de enteros no negativos, tales que*

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right). \tag{2.8}$$

En el caso de que f tenga un cero de multiplicidad k en 0, podemos aplicar el teorema a $h(z) = \frac{f(z)}{z^k}$, ya que h es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y tiene una singularidad evitable en 0, luego $h(z)$ se puede extender a una función entera que no se anula en 0.

Demostración. Sabemos, por el Teorema 2,1 y los comentarios subsiguientes, que existe una sucesión $\{p_n\} \subset \mathbb{N}$ tal que $P(z)$ definido como

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

con z_n los ceros de f, es una función entera cuyos ceros son los ceros de f con la misma multiplicidad. Entonces, tenemos que $\frac{f}{P}$ tiene singularidades evitables en cada z_n, con $\lim_{z \to z_n} \frac{f(z)}{P(z)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Procediendo como antes, se puede extender a una funcion entera. Además, por hipótesis, $\frac{f}{P}$ no tiene ningún otro cero en $\mathbb{C}$. Por último, como el plano complejo es *simplemente conexo*, tenemos que $\frac{f}{P} = e^g$ para alguna función entera g. □

Supongamos que dos funciones enteras tienen el mismo conjunto de ceros, con las mismas multiplicidades. Veamos la relación que hay entre ellas

Teorema 2.3. *Sean f, g funciones enteras tales que sus ceros coinciden tanto en localización como en multiplicidad. Entonces, existe una función Φ tal que $f(z) = e^{\Phi(z)} g(z)$.*

Demostración. Definimos $h(z) = f(z)/g(z)$. La función h tiene singularidades evitables en cada uno de los ceros de f, y además $\lim_{z \to z_n} \frac{f(z)}{P(z)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, luego podemos extender la función h de forma holomorfa en todo $\mathbb{C}$ a una función que no se anula. Como $\mathbb{C}$ es simplemente conexo y h una función entera, existe Φ entera, tal que $h = e^{\Phi}$. Por tanto, tenemos el enunciado, $f(z) = e^{\Phi(z)} g(z)$. □

Vamos a adaptar el Teorema 2,1 a cualquier abierto Ω, es decir, vamos a exigir que los ceros que queramos que tenga nuestra función f estén en un abierto cualquiera; y por tanto, la factorización de f en productos infinitos de factores elementales, sea holomorfa en Ω. Recordemos que S^2 es la esfera de Riemann, en la cual representamos ∞ como el polo norte de la esfera.

Teorema 2.4. *Sea Ω un abierto en S^2, distinto de S^2. Sea $A \subset \Omega$ sin puntos de acumulación en Ω, tal que a cada $\alpha \in \Omega$, le asociamos un entero positivo $m(\alpha)$. Entonces, existe una función f holomorfa en Ω, tal que sus únicos ceros son los $\alpha \in A$, cada uno con multiplicidad $m(\alpha)$.*

Demostración. Supondremos que $\infty \in \Omega$, pero $\infty \notin A$. En caso contrario, utilizamos una transormación de Möbius. Por tanto, en este caso, tenemos que $S^2 \setminus \Omega$ es un compacto. Además, consideramos $\{\alpha_n\}$ la lista de los $\alpha \in A$, listados tantas veces como su multiplicidad $m(\alpha)$

Si A es finito, sea M su cardinal, tomamos la función

$$f(z) = \prod_{n=1}^{M} (z - \alpha_n).$$

Si A es infinito, A es contable: en caso contrario, A tendría algún punto de acumulación. Para cada α_n, definimos $\beta_n \in S^2 \setminus \Omega$, tal que $|\beta_n - \alpha_n| \leq |\beta - \alpha_n|$ para todo $\beta \in S^2 \setminus \Omega$. Siempre podemos elegir ese β_n, ya que $S^2 \setminus \Omega$ es compacto.

$\{|\alpha_n - \beta_n|\} \subset [0, \infty)$ es una sucesión de reales positivos. Si esta sucesión no estuviera acotada, entonces tendría una subsucesión que converge a ∞, por lo que ∞ sería punto de acumulación de los α_n, y esto contradice las hipótesis. Así pues, $\exists K > 0$, tal que $\{|\alpha_n - \beta_n|\} \subset [0, K]$, compacto, luego existe alguna subsuceción convergente.

Vamos a suponer que el límite de dicha subsucesión no es 0, es decir, existe alguna subsucesión tal que $\lim_{n\to\infty} |\alpha_{g(n)} - \beta_{g(n)}| = q \neq 0$. Como los β_n están en un compacto, también tienen una subsucesión convergente: $\lim_{n\to\infty} \beta_{h(n)} = s$, con $s \in S^2 \setminus \Omega$. Componiendo ambas subsucesiones, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha_{g(h(n))} - \beta_{g(h(n))}| = q \in [0, K] \tag{2.9}$$

y además

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{g(h(n))} = s \in S^2 \setminus \Omega. \tag{2.10}$$

El conjunto de puntos tales que su distancia a $s \in S^2 \setminus \Omega$ es menor que $2q$ es un compacto, luego existe una subsucesión de $\alpha_{g \circ h(n)}$ convergente en este compacto. Como esa subsucesión no puede converger en Ω, ya que entonces tendríamos un punto de acumulación en Ω y llegaríamos a contradicción, lo tiene que hacer en la frontera de Ω. Y por tanto, denotando l la aplicación de esta nueva subsucesión, tendríamos que

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha_{g(h(l(n)))} - \beta_{g(h(l(n)))}| = 0,$$

lo cual contradice (2.9), y por tanto contradice nuestra hipótesis inicial de que $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n - \beta_n| = 0$. Así pues, $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n - \beta_n| = 0$.

Definimos

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right).$$

Veamos que f cumple las hipótesis.

Sea $r_n = 2|\alpha_n - \beta_n|$. Sea K un compacto de Ω. Como $r_n \to 0$, si $n \to \infty$, existe N, tal que $|z - \beta_n| > r_n$ para todo $z \in K$, y todo $n \geq N$. Por tanto

$$\left|\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right| \leq \left|\frac{\alpha_n - \beta_n}{r_n}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Aplicando el Lema 2,1 tenemos que

$$\left|1 - E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)\right| \leq \left|\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right|^{(n+1)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)}.$$

Finalmente, aplicamos el Teorema 1,3, y tenemos que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)$$

es una función holomorfa en Ω, con un cero en cada α_n de multiplicidad igual a las veces que se repite en la lista $\{\alpha_n\}$. $\square$

Como consecuencia, vamos a caracterizar las funciones *meromorfas*

Teorema 2.5. *Toda función meromorfa en un abierto Ω, es cociente de funciones holomorfas en Ω*

El recíproco es evidente: Sean g,h holomorfas en Ω, h no idénticamente 0 en ninguna componente de Ω, entones g/h es meromorfa en Ω.

Demostración. Sea f meromorfa en Ω. Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\} \subset \Omega$ el conjunto de polos de f. Asociamos a cada a_i, un entero $m(i)$, el orden del polo de f en a_i. Por el Teorema 2,4, podemos definir una función h holomorfa en Ω, con un cero de multiplicidad $m(a_i)$ en cada a_i, y ningún otro cero. Definimos $g = fh$. Es evidente que g tendrá singularidades evitables en cada uno de los a_i, luego podemos extender g a todo Ω de forma holomorfa. Por último, es evidente que $f = g/h$ es holomorfa en $\Omega \setminus A$, y tiene polos de orden $m(a_i)$ en cada a_i. □

2.2. Fórmula de Jensen

Por ahora, tal como hemos visto en el capítulo anterior, la localización de los ceros de una función holomorfa no tiene ninguna restricción, salvo el hecho de que $Z(f)$ no tenga puntos de acumulación (excepto el caso en que la función sea idénticamente cero). En este capítulo, vamos a estudiar la localización de los ceros de funciones de la clase $H^\infty(\mathbb{D})$, es decir, funciones holomorfas acotadas en el disco unidad $\mathbb{D}$. La base fundamental de esta sección es la *Fórmula de Jensen*.

Para demostrar el siguiente lema, utilizaremos el *Teorema de Cauchy*, el cual damos por conocido.

Lema 2.2. *La siguiente integral es 0*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|d\theta.$$

Demostración. Sea $\Omega = \{z \mid Re(z) < 1\}$. Es evidente que Ω es simplemente conexo, ya que es un semiplano. Además, en Ω se tiene que $(1-z) \neq 0$, luego por definición de *simplemente conexo*, existe $h \in H(\Omega)$ tal que

$$e^{h(z)} = (1-z), \quad \forall z \in \Omega.$$

Imponemos que $h(0) = 0$, y $h(z) = Log(1-z), \forall z \in \Omega$, con $Log(z) = log|z| + iArg_{(-\pi,\pi]}(z)$. $Re(1-z) > 0$ en Ω y el argumento de $(1-z)$ en Ω está entre $\frac{-\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, luego

$$Re(h(z)) = log|1-z|, \ \ |Im(h(z))| < \frac{\pi}{2}, \ \ (z \in \Omega). \tag{2.11}$$

Sea $\delta > 0$, definimos el camino Γ_δ:

$$\Gamma_\delta(t) = e^{it},\ t \in [\delta, 2\pi - \delta]. \tag{2.12}$$

Definimos γ_δ como el arco de la circunferencia centrada en 1, que va de $e^{-i\delta}$ a $e^{i\delta}$ por el interior del disco unidad. Recordamos la fórmula de integración de una función f por un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Aplicando la fórmula de integración sobre el camino Γ_δ, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\delta} h(z)\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} h(e^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} \log|1-e^{it}|dt + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} iArg(1-e^{it})dt \tag{2.13}$$

y entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} \log|1-e^{it}|dt = Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\delta} h(z)\frac{dz}{z}\right). \tag{2.14}$$

Por lo tanto, como $h(0) = 0$, utilizando la *Fórmula de Cauchy*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta\cup\gamma_\delta} h(z)\frac{dz}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} h(z)\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma_\delta} h(z)\frac{dz}{z}$$

y así

$$Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} h(z)\frac{dz}{z}\right) = Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma_\delta} h(z)\frac{dz}{z}\right).$$

La longitud de γ_δ es menor que $\pi\delta$, luego podemos acotar la última integral de (2.14) como

$$Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma_\delta} h(z)\frac{dz}{z}\right] \leq \frac{\pi\delta}{2\pi} sup_{z\in-\gamma_\delta}\left\{\left|\frac{\log|1-z|}{z}\right|\right\} = \frac{\delta}{2} sup_{z\in-\gamma_\delta}\left\{\left|\frac{\log|1-z|}{z}\right|\right\} \leq \frac{\delta}{2}\frac{-\log(\delta)}{1-\delta}.$$

Por último, si hacemos que $\delta \to 0$, obtenemos que

$$\lim_{\delta\to 0} Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} h(z)\frac{dz}{z}\right\} \to 0$$

Y tenemos el resultado deseado. □

Para demostrar la Fórmula de Jensen, necesitaremos el *Teorema del Valor Medio* de funciones harmónicas.

Teorema 2.6. *Sea $u(z)$ una función harmónica en un dominio abierto que contenga a $\overline{D(z_0,R)}$. Entonces*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{i\theta})d\theta.$$

Demostración. Sea $f(z)$ una función analítica en $E = D(z_0, R+\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$, cuya parte real es $u(z)$. Sea C una circunferencia parametrizada por $C : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $C(\theta) = z_0 + e^{i\theta}$. Aplicando la Fórmula de integración de Cauchy, tenemos que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+e^{i\theta})}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+e^{i\theta})d\theta. \tag{2.15}$$

Tomamos las partes reales en ambos miembros de (2.15)

$$u(z_0) = Re[f(z_0)] = Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+e^{i\theta})d\theta\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+Re^{i\theta})d\theta$$

tenemos la conclusión deseada. La fórmula (2.15) se llama *Teorema del Valor Medio de Gauss*. □

Teorema 2.7. *Sea $\Omega = D(0,R)$, sea f holomorfa en Ω, $f(0) \neq 0$. $0 < r < R$, y sean $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ los ceros de f en $\overline{D(0,r)}$, listados según su multiplicidad. Entonces,*

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta\right\}. \tag{2.16}$$

Esta fórmula se llama *Fórmua de Jensen*. Más adelante nos va a servir para acotar el crecimiento del número de ceros de una función holomorfa acotada en el disco unidad $\mathbb{D}$. Si f tiene un 0 de multiplicidad k en 0, podemos aplicar este teorema a $f(z)/z^k$.

Demostración. Ordenamos los puntos α_i, de forma que $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ estén en $D(0,r)$, y $\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_N$ tengan módulo $|r|$. Naturalmente, puede ocurrir que $m = 0$, es decir, todos los puntos estén en la frontera de $D(0,r)$; o que $m = N$, y todos los α_i estén en $D(0,r)$. Definimos

$$g(z) = f(z)\prod_{n=1}^{m}\frac{r^2-\overline{\alpha_n}z}{r(\alpha_n-z)}\prod_{n=m+1}^{N}\frac{\alpha_n}{\alpha_n-z}. \tag{2.17}$$

Notemos que en el primer productorio están sólo los α_i del interior de $D(0,r)$, y en el segundo sólo aquellos con módulo r. Veamos que g es holomorfa y no se anula en $E = D(0,r+\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$. g es un producto de 3 funciones holomorfas, excepto en los α_n. Luego, g es holomorfa en $\Omega \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_N\}$.

En el caso en que, $z = \alpha_i$ para algún $\alpha_i \in D(0,r)$, el denominador tendrá un cero de multiplicidad tantas veces como se repita ese α_i en la lista. f tendrá ese mismo cero en α_i con la misma multiplicidad (por definición de f), luego la singularidad es evitable y podemos extender g de forma holomorfa a los α_i que estén en $D(0,r)$.

Análogamente al caso anterior, cuando $z = \alpha_i$ para algún i del segundo productorio, el denominador tendrá un cero de multiplicidad tantas veces como se repita α_i en la lista, la misma que tendría ese cero de f. Así pues, podemos extender g de forma holomorfa a todo E.

¿Tiene g algún cero en E? en el numerador del primer productorio tenemos

$$|r^2 - \overline{\alpha_n} z| > |r^2| - |\overline{\alpha_n}||z| > r^2 - (r - \delta_n)(r + \varepsilon)$$

para algún δ_n, ya que α_n no está en la frontera de $D(0,r)$. Luego, eligiendo un ε suficientemente pequeño para que $r^2 - (r - \delta_n)(r + \varepsilon) > 0$ para todos los δ_n, el numerador no se anula.

El segundo productorio es evidente que nunca se anula. Luego, tenemos que g no se anula en E. Por tanto, sabemos que $\log|g|$ es armónica en E, y por tanto aplicando la *Propiedad del valor medio* de funciones armónicas, tenemos que

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|g(re^{i\theta})|d\theta. \tag{2.18}$$

Evaluando (2.17) en 0 y tomando módulos, tenemos que

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{r}{|\alpha_n|}. \tag{2.19}$$

En la ecuación (2.17), si $|z| = r$, los factores del primer productorio tienen módulo 1:

$$\left|\frac{r^2 - \overline{\alpha_n} z}{r(\alpha_n - z)}\right| = \frac{|z\bar{z} - \overline{\alpha_n} z|}{r|\alpha_n - z|} = \frac{|z||\bar{z} - \overline{\alpha_n}|}{r|\alpha_n - z|} = \frac{r|z - \alpha_n|}{r|\alpha_n - z|} = 1.$$

Sean $\alpha_n = re^{i\theta_n}$ los términos del segundo productorio de (2.17). Tomamos módulos y logaritmos a (2.17), y aplicamos que el módulo de los términos del primer productorio es 1, luego su logaritmo es 0, y tenemos que

$$\log|g(re^{i\theta_n})| = \log|f(re^{i\theta_n})| - \sum_{n=m+1}^{N} \log|1 - e^{i(\theta - \theta_n)}|.$$

Aplicamos esta última igualdad a (2.18),

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|g(re^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\log|f(re^{i\theta})| - \sum_{n=m+1}^{N} \log|1 - e^{i(\theta-\theta_n)}|\right) d\theta. \tag{2.20}$$

Como la integral es lineal, tenemos que

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - \sum_{n=m+1}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|1 - e^{i(\theta-\theta_n)}|d\theta. \tag{2.21}$$

Aplicamos el Lema 2,2, por tanto todas las integrales del sumatorio se anulan y nos queda la igualdad

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta.$$

Con esta última fórmula y la igualdad de (2.19), obtenemos el resultado deseado

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{r}{|\alpha_n|} = |g(0)| = \exp(\log|g(0)|) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta\right).$$

$\square$

Mediante la Fórmula de Jensen, obtenemos la siguiente desigualdad para funciones en $H^\infty(\mathbb{D})$:

Teorema 2.8. *Sea $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ tal que $f(0) \neq 0$ y f no idénticamente nula. Definimos*

$$\mu_r(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta, \quad (0 < r < 1) \tag{2.22}$$

y

$$\mu^*(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f^*(re^{i\theta})|d\theta, \tag{2.23}$$

dónde $f^*(e^{i\theta}) = \text{lím}_{r\to 1} f(re^{i\theta})$. Entonces, se tiene que

$$\mu_r(f) \leq \mu_s(f), \quad 0 < r < s < 1, \tag{2.24}$$

$$\mu_r(f) \to \log|f(0)|, \quad r \to 0, \tag{2.25}$$

y

$$\mu_r(f) \leq \mu^*(f), \quad 0 < r < 1. \tag{2.26}$$

El hecho de que f^* esté bien definida no es objeto de estudio de este trabajo. La demostración detallada se encuentra en el Teorema 11.32 del libro *Real and Complex Analysis* de *Rudin*.

Demostración. Como tenemos que $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ y $f(0) \neq 0$, podemos aplicar a f la Fórmula de Jensen 2,7:

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta\right\} \tag{2.27}$$

siendo los α_n los ceros de f en $\overline{D(0,r)}$. Sea $0 < r < s < 1$. Evidentemente, el número de ceros en el disco $\overline{D(0,s)}$ es mayor o igual que en $\overline{D(0,r)}$, luego

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|\alpha_n|} \leq |f(0)|\prod_{n=1}^{M}\frac{r}{|\alpha_n|}$$

con $\alpha_{N+1},...,\alpha_M$ los ceros de f en $\overline{D(0,s)} \setminus \overline{D(0,r)}$. Así pues,

$$\exp(\mu_r(f)) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta\right\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(se^{i\theta})|d\theta\right\} = \exp(\mu_s(f)).$$

Por tanto, $\mu_r(f) \leq \mu_s(f)$, y queda probado (2.24).

Supongamos sin pérdida de generalidad que $|f| < 1$ en $D(0,1)$. Denotamos $f_r(e^{i\theta})$ en vez de $f(re^{i\theta})$. $\text{lím}_{r\to 0} f_r(e^{i\theta}) = f(0)$, $\forall\theta$; y $\text{lím}_{r\to 1} f_r(e^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta})$, $\forall\theta$. Para demostrar (2.26), aplicaremos el *Lema de Fatou*. En primer lugar,

$$\mu_r(f) \leq \limsup_{s\to 1^-}\mu_s(f) = -\liminf_{s\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -\log|f(se^{i\theta})|d\theta. \tag{2.28}$$

Ya hemos probado antes que esta última integral es finita. Luego, aplicando el Lema de Fatou, tenemos que

$$-\liminf_{s\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -\log|f(se^{i\theta})|d\theta \leq -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\liminf_{s\to 1^-} -\log|f(se^{i\theta})|d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\limsup_{s\to 1^-}\log|f(se^{i\theta})|d\theta = \mu^*(f).$$

Así pues, tenemos (2.26).

Sea $\{\log|f((1/n)e^{i\theta})|\}_{n=N_0}^{\infty}$ una sucesión de funciones, con $N_0 > 0$ lo suficientemente grande para que en $\overline{D(0,1/N_0)}$ no haya ningún cero (sabemos que ese N_0 existe, ya que $f(0) \neq 0$, y ningún cero tiene puntos de acumulación). Ya hemos visto que son integrables en $[-\pi,\pi]$. Tomando límites,

$$\lim_{n\to\infty} \log|f((1/n)e^{i\theta})| = \log|f(0)|. \tag{2.29}$$

Además, sea $x_0 = \text{máx}_x\{|\log|f(x)|| \ : \ x \in \overline{D(0,1/N_0)}\}$, tenemos que $|\log|f((1/n)e^{i\theta})| \leq \log|f(x_0)|$, $\forall n > N_0$ y $\forall\theta$. Por tanto, aplicando el *Teorema de Convergencia Dominada*, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{1/n}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f((1/n)e^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty} \log|f((1/n)e^{i\theta})|d\theta = \log|f(0)|$$

y queda probado (2.25).

□

Teorema 2.9. *Sea f una función entera. Definimos*

$$M(r) = sup_{\theta}|f(re^{i\theta})|, \ \ (0 < r < \infty).$$

Sea f una función entera tal que $f(0) = 1$. Sea $n(r)$ el número de ceros de f en $\overline{D(0,r)}$. Entonces,

$$M(2r) \geq 2^{n(r)}.$$

La demostración se obtiene aplicando los resultados obtenidos previamente.

Demostración. Supongamos que $\{\alpha_n\}$ es la secuencia de ceros de f ordenada de forma que $|\alpha_i| \leq |\alpha_{i+1}|$. En primer lugar, acotando tenemos que

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(2re^{i\theta})|d\theta\right\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log M(2r)d\theta\right\} = M(2r). \tag{2.30}$$

Mediante la *Fórmula de Jensen* (teorema 2,7), tenemos que

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(2re^{i\theta})|d\theta\right\} = |f(0)|\prod_{n=1}^{n(2r)} \frac{2r}{|\alpha_n|} \geq \prod_{n=1}^{n(r)} \frac{2r}{|\alpha_n|} \geq \prod_{n=1}^{n(r)} 2 = 2^{n(r)}. \tag{2.31}$$

Combinando (2.30) con (2.31) tenemos la desigualdad deseada:

$$M(2r) \geq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(2re^{i\theta})|d\theta\right\} \geq 2^{n(r)}.$$

□

Tomando logaritmos, obtenemos una desigualdad equivalente

$$n(r)\log 2 \leq \log M(2r). \tag{2.32}$$

Esta fórmula nos da una cota superior del número de ceros que puede tener una función holomorfa en un disco centrado en 0 según el valor de f en la frontera del disco de radio doble y mismo centro. Por tanto, la rapidez con la que $n(r)$ aumenta, es decir, la densidad de ceros de f en el disco de radio r, está controlada por la cota de crecimiento de $M(2r)$.

2.3. Productos de Blaschke

Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad, definimos $H^\infty(\mathbb{D})$ como el conjunto de funciones holomorfas y acotadas en $\mathbb{D}$. En esta sección veremos las condiciones que tienen que satisfacer los ceros de funciones $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ utilizando la *Fórmula de Jensen* que hemos visto en la sección previa.

Teorema 2.10. *Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión en $\mathbb{D}$, tal que $\alpha_n \neq 0, \forall n$, y*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) < \infty \tag{2.33}$$

sea k un entero no negativo. Definimos la función

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}. \tag{2.34}$$

Entonces $B \in H^\infty(\mathbb{D})$, y sus únicos ceros son los α_n. (Si $k > 0$, también el 0).

Llamamos a esta función B *Producto de Blaschke*. Notar que si algún α_n está repetido l veces, B tendrá un cero de multiplicidad l en ese punto. El término “Producto de Blaschke” se mantiene incluso si hay finitos factores; en el caso en que no haya ninguno, $B(z) = 1$. Podemos ver además que si $|z| = 1$, todos los factores de B tienen módulo 1.

$$|z^k| \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n - z|}{|1-\overline{\alpha_n}z|}\frac{|\alpha_n|}{|\alpha_n|} = |z|^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n - z|}{|1-\overline{\alpha_n}z|} = |z|^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|\alpha_n|^2+|z|^2-\overline{\alpha_n}z-\bar{z}\alpha_n}}{\sqrt{1+|\alpha_n|^2|z|^2-\overline{\alpha_n}z-\bar{z}\alpha_n}}. \tag{2.35}$$

Si $|z| = 1$, simplificando, tenemos que cada factor tiene módulo 1.

Veamos la demostración del teorema

Demostración. Definimos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|1 - \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\right|. \tag{2.36}$$

Podemos acotar su n-ésimo término por

$$\left|1 - \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\right| = \left|\frac{\alpha_n + |\alpha_n|z}{1-\overline{\alpha_n}z\alpha_n}\right|(1-|\alpha_n|) \leq \frac{1+r}{1-r}(1-|\alpha_n|) \tag{2.37}$$

si $|z| < r$, con r el radio de un compacto contenido en $\mathbb{D}$. Aplicamos la hipótesis (2.33) y tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+r}{1-r}(1-|\alpha_n|) = \frac{1+r}{1-r}\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) < \infty.$$

Luego, utilizando la desigualdad de (2.37), tenemos que (2.36) converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$. Así pues, aplicamos el Teorema 1,3, y tenemos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_m}.$$

es holomorfa en $\mathbb{D}$ y sus únicos ceros son los α_n. Lo mismo ocurre con $B(z)$ en $\mathbb{D}$, añadiendo los posibles ceros en $z = 0$. Además, teniendo en cuenta la forma que tienen los automorfismos de $\mathbb{D}$ en sí mismos, cada factor del productorio de (2.34) tiene módulo menor que 1 en $\mathbb{D}$, luego $|B(z)| < 1$. $\square$

El teorema anterior muestra que una condición suficiente para que dado un conjunto numerable $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ exista una función $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ cuyos ceros sean los α_n. Sin embargo, esta condición resulta ser necesaria: Si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ y f no es idénticamente cero, los ceros de f tienen que satisfacer (2.33) (consecuencia del teorema que veremos a continuación). Además, es una condición necesaria no sólo para $H^\infty(\mathbb{D})$, sino también para una clase de funciones mucho mayor que ahora describiremos.

Definición. Sea $\log^+(t) = \log(t)$, si $t \geq 1$ y $\log^+(t) = 0$ si $t < 1$. Definimos la *Clase de Nevalinna* (la denotamos N), como el conjunto de f holomorfas en $\mathbb{D}$, tales que

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty. \tag{2.38}$$

Teorema 2.11. *Sea $f \in N$, f no idénticamente nula en $\mathbb{D}$, y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3...$ los ceros de f listados tantas veces como su multiplicidad. Entonces,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty. \tag{2.39}$$

Suponemos que f tiene infinitos ceros en U. Si tuviera finitos, (2.39) se cumple trivialmente.

Demostración. Suponemos sin pérdida de generalidad que $|\alpha_n| \leq |\alpha_{n+1}|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además, supondremos que $f(0) \neq 0$, ya que en caso contrario, si f tiene un cero de multiplicidad k en el origen, la función $g(z) = z^{-k} f(z)$ tiene los mismos que f excepto en el origen. Sea $n(r)$ el número de ceros de f en $\overline{D(0,r)}$. Fijamos un $k \in \mathbb{N}$. Sea $r > 0$ tal que $n(r) > k$, aplicando la Fórmula de Jensen tenemos que

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{n(r)} \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \right\}$$

implica que

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{k} \frac{r}{|\alpha_n|} \leq \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \right\}. \tag{2.40}$$

Como $f \in N$, por definición, $\exists C \in \mathbb{R}$, $C < \infty$ tal que

$$\exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \right\} < e^C = Q \quad \forall r \in (0,1). \tag{2.41}$$

Por tanto, aplicandolo a la fórmula (2.40), tenemos que

$$|f(0)| r^k Q^{-1} \leq \prod_{n=1}^{k} |\alpha_n|. \tag{2.42}$$

Esta inecuación se mantiene para todo k, si r tiende a 1. Luego,

$$\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \geq |f(0)| Q^{-1} > 0. \tag{2.43}$$

Y por tanto, aplicando el Teorema 1,2, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty.$$

□

Corolario 2.1. *Sea $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ (también funciona con $f \in N(\mathbb{D})$), si $\alpha_1, \alpha_2, ...$ los ceros de f en $\mathbb{D}$ y si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) = \infty,$$

entonces $f(z) = 0$, para todo $z \in \mathbb{D}$.

Una consecuencia de este corolario es que ninguna función f acotada en $\mathbb{D}$ puede tener un cero en cada punto $(n-1)/n$, con $n = 1,2,3,\dots$. La demostración es una aplicación inmediata del corolario anterior. Teniendo en cuenta que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left|\frac{n-1}{n}\right|\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = \infty,$$

tenemos que f es idénticamente 0.

Finalizamos esta sección con un resultado que nos ayuda a describir el comportamiento de los Productos de Blaschke cerca de la frontera del disco unidad $\mathbb{D}$. Remarcamos que, como hemos visto que B está acotada, $B \in H^{\infty}(\mathbb{D})$, y por tanto podemos definir $B^*(e^{i\theta}) = \text{lím}_{r\to 1}(re^{i\theta})$, para casi todo θ (ver Teorema 11,32 del Rudin).

Teorema 2.12. *Sea B un Producto de Blaschke. Entonces, $|B^*(e^{i\theta})| = 1$, para casi todo θ, y*

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{i\theta})|d\theta = 0. \tag{2.44}$$

Demostración. Aplicando 2,8, la integral (2.44) es una función monótona creciente de r, luego el límite existe. Sea

$$B(z) = z^k\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}. \tag{2.45}$$

Definimos

$$B_N(z) = \prod_{n=N}^{\infty}\frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}, \quad N > 0. \tag{2.46}$$

Como $\log|B/B_N|$ es continuo en algún abierto que contiene a $\partial\mathbb{D}$, el límite (2.44) no cambia si sustituímos B por B_N. Aplicamos el Teorema 2,8 a B_N, y tenemos que

$$\log|B_N(0)| \le \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B_N(re^{i\theta})|d\theta = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{i\theta})|d\theta. \tag{2.47}$$

Además,

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{i\theta})|d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B^*(re^{i\theta})|d\theta \le 0. \tag{2.48}$$

Si $N \to \infty$, tenemos que

$$\lim_{N\to\infty}\log|B_N(0)| = \lim_{N\to\infty}\log\left|\prod_{n=N}^{\infty}\frac{\alpha_n}{1}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\right| = \lim_{N\to\infty}\log\left(\prod_{n=N}^{\infty}|\alpha_n|\right).$$

Éste último límite es 0, ya que $\text{lím}_{n\to\infty}|\alpha_n| = 1$, por la hipótesis (2.33) de definición de B. Por tanto, tenemos que

$$0 \le \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{i\theta})|d\theta \le 0.$$

Esto demuestra (2.44), y implica que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B^*(re^{i\theta})|d\theta = 0.$$

Como $\log|B^*(e^{i\theta})| \le 0$, para casi todo θ, tenemos que $-\log|B^*(e^{i\theta})| = 0$, para casi todo θ; luego $|B^*(e^{i\theta})| = 1$, para casi todo θ.

□

Capítulo 3

La función Gamma de Euler y la función Zeta de Riemann

En este capítulo vamos a definir la función Gamma de Euler como un producto infinito, con las propiedades que hemos estudiado de ellos en capítulos anteriores. Veremos la fórmula de Gauss, el Teorema de Bohr-Mollerup para caracterizarla, y por último la representación en forma de integral de la Gamma, que nos servirá para relacionarla con la función Zeta de Riemann, de la cual veremos una serie de propiedades junto con la Fórmula de Euler. Por último, nos centraremos en la localización de los ceros de la función, además de la famosa Hipótesis de Riemann.

3.1. La función Gamma de Euler

Aplicando el Teorema 2,1 con $z_n = -n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $p_n = 1$ constante, claramente para cada $r > 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{1+p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^2}{n^2} \tag{3.1}$$

converge. Y por tanto, el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ y define una función entera cuyos ceros son los enteros negativos, todos ellos simples. Por tanto, el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} \tag{3.2}$$

converge en compactos de $\mathbb{C} \setminus \{-1, -2, -3, ...\}$ a una función holomorfa, y además tiene polos simples en los enteros negativos.

Definición. La función gamma, $\Gamma(z)$, es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples en $z = 0, -1, -2, ...$ definida como

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} \tag{3.3}$$

con γ una constante tal que $\Gamma(1) = 1$.

Veamos que la constante γ existe. Sustituyendo $z = 1$ en (3.2), obtenemos una constante

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} e^{1/n} = c \tag{3.4}$$

con c positiva. Definimos $\gamma = \log(c)$. Con esta elección de γ tenemos que

$$\Gamma(1) = \frac{e^{-\log(c)}}{1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} e^{1/n} = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} e^{1/n}}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} e^{1/n}} = 1. \tag{3.5}$$

Llamamos a γ *constante de Euler*, la cual, por definición, satisface la siguiente ecuación

$$e^{\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} e^{1/n}.$$

Como ambos miembros de esta ecuación son reales y positivos, ya que el logaritmo real es una función contínua en $(0,\infty)$, podemos aplicar logaritmos a ambos miembros y obtenemos

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_{k=1}^{\infty} \log\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-1} e^{1/k}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log(k)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log(k)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) - \log(n+1)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) - \log\left(\frac{n+1}{n}\right) - \log(n)\right].
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0,$$

podemos concluír que

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) - \log(n)\right]. \tag{3.6}$$

Vamos a utilizar esta última fórmula para obtener otra expresión de $\Gamma(z)$. De la definición de $\Gamma(z)$ se sigue que

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k} = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{k e^{z/k}}{z+k} \tag{3.7}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\gamma z} n!}{z(z+1)\ldots(z+n)} \exp\left(z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right). \tag{3.8}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
e^{-\gamma z} \exp\left[z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right] &= \exp\left[z\left(-\gamma+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) - z\log(n) + z\log(n)\right] \\
&= \exp\left[z\left(-\gamma+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \log(n)\right)\right] e^{z\log(n)} \\
&= \exp\left[z\left(-\gamma+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \log(n)\right)\right] n^{z},
\end{aligned}$$

Aplicando esta última fórmula a la última igualdad de (3.7), junto con la caracterización de γ (3.6), tenemos que

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{z}}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}. \tag{3.9}$$

Esta fórmula se llama *Fórmula de Gauss*.

Teorema 3.1. ***Ecuación Funcional.*** *Para $z \neq 0,-1,-2,\ldots$ se tiene que*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{3.10}$$

Demostración. Para obtener esta ecuación, basta con sustituir $z+1$ por z en la Fórmula de Gauss (3.9):

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)...(z+n+1)} \\ &= z \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)...(z+n)}\right)\left(\frac{n}{z+n+1}\right) = z\Gamma(z).\end{aligned}$$

Para la última igualad, utilizamos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+z+1}\right) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

□

Aplicando la ecuación funcional a $\Gamma(z+2)$, tenemos que $\Gamma(z+2) = \Gamma((z+1)+1) = (z+1)\Gamma(z+1)$. Si volvemos a aplicarla, tenemos que $\Gamma(z+2) = z(z+1)\Gamma(z)$. Repitiendo este proceso, obtenemos que

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)...(z+n-1)\Gamma(z)$$

para n entero no negativo, y $z \neq 0,-1,-2,\ldots$. En particular, fijando $z=1$, tenemos que

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Por tanto, podemos considerar la función Γ como la extensión del factorial al plano complejo, salvo algunos puntos. Veamos ahora que este hecho, junto con la *log-convexidad* en $(0,\infty)$, caracterizan la función Γ.

Teorema 3.2. *Sea f una función definida en el intervalo $(0,\infty)$ tal que $f(x) > 0$, $\forall x > 0$. Si f satisface las siguientes propiedades:*

a) $\log f(x)$ *es una función convexa*

b) $f(x+1) = xf(x)$*, para todo* $x > 0$

c) $f(1) = 1$

entonces $f(x) = \Gamma(x)$ *para todo* $x > 0$.

Demostración. De b) y c) se deduce que $f(n+1) = n!$, para $n = 0,1,2,\ldots$.

La propiedad a) tenemos que $\forall x_1, x_2 \in (0,\infty)$ y $t \in [0,1]$

$$\log f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t \log f(x_1) + (1-t)\log f(x_2).$$

Componiendo ambos miembros con la exponencial, que es contínua y convexa en $\mathbb{R}$, tenemos que

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq f(x_1)^t f(x_2)^{1-t}.$$

Dado $x \in (0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, por la desigualdad anterior, tenemos que

$$f(n+x+1) = f((1-x)(n+1) + x(n+2)) \leq f^{1-x}(n+1)f^x(n+2) \tag{3.11}$$

$$= f^{1-x}(n+1)((n+1)f(n+1))^x = (n+1)^x f(n+1) = (n+1)^x n!. \tag{3.12}$$

Con el mismo razonamiento tenemos que

$$n! = f(n+1) = f(x(n+x) + (1-x)(n+1+x)) \leq (n+x)^{-x} f(n+1+x). \tag{3.13}$$

Por tanto, de (3.13) deducimos que

$$\frac{f(n+1+x)}{n!n^x} \geq \frac{f(n+1+x)}{f(n+x+1)(n+x)^{-x}n^x} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^x. \tag{3.14}$$

De (3.11) deducimos que

$$\frac{f(n+1+x)}{n!n^x} \leq \frac{(n+1)^x n!}{n!n^x} = \frac{(n+1)^x}{n^x} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^x. \tag{3.15}$$

Como por $b)$ y $c)$ tenemos que $f(n+1+x) = (n+x)(n+x-1)...xf(x)$, mediante (3.14) y (3.15) deducimos que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^x \leq \frac{(n+x)(n-1+x)...xf(x)}{n!n^x} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^x. \tag{3.16}$$

Cuando n tiende a infinito y $x \in (0,1]$, en primer y último miembro de esta última desigualdad tienden a 1, luego es claro que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(n+x)(n-1+x)...x} = \Gamma(x), \tag{3.17}$$

por la fórmula de Gauss.

Sea $x > 1$, sea m el entero tal que $m < x \leq m+1$. Entonces, $0 < x-m \leq 1$, y por tanto podemos aplicar a $f(x-m)$ el mismo razonamiento que en el apartado anterior:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)...(x-m)f(x-m) = (x-1)...(x-m)\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{x-m}}{(n+x-m)(n-1+x-m)...(x-m)} \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(n+x)(n-1+x)...x} \frac{(n+x)(n+x-1)...(n+x-(m-1))}{n^m}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(n+x)(n-1+x)...x}. \end{aligned}$$

Por tanto, para todo $x > 0$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(n+x)(n-1+x)...x}$$

lo cual prueba que f está unívocamente determinada por las condiciones $a)$, $b)$ y $c)$. Notar que esta última ecuación es la Fórmula de Gauss (3.6), la cual define a la Γ, y por tanto tenemos que $f(x) = \Gamma(x)$, $\forall x > 0$. $\square$

Por último, vamos a ver la definición de la función Gamma en forma integral, lo cual nos va a servir en la proxima sección para relacionarla con la función Zeta de Riemann.

Teorema 3.3. *Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $Re(z) > 0$, tenemos que*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{3.18}$$

La falta de espacio nos lleva a que la demostración de este teorema no sea objeto de estudio en este trabajo. Sin embargo, se puede encontrar en el libro *Functions of One Complex Variable* de John B. Conway, a partir del teorema 7.15.

3.2. La función Zeta de Riemann

Sea $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, $|n^z| = |\exp(z\log(n))| = \exp(Re(z)\log(n))$. Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} |k^{-z}| = \sum_{k=1}^{n} \exp(-Re(z)\log(k)) = \sum_{k=1}^{n} k^{-Re(z)}.$$

Por tanto, si $Re(z) \geq 1+\varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} |k^{-z}| \leq \sum_{k=1}^{n} k^{-(1+\varepsilon)}. \tag{3.19}$$

Por tanto, si hacemos tender n a infinito, aplicando el *Criterio M de Weierstrass*, tenemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \tag{3.20}$$

converge uniformemente y absolutamente en $\{z \mid Re(z) > 1+\varepsilon\}$ para algún $\varepsilon > 0$. Por tanto, esta seria converge uniformemente y absolutamente sobre compactos en $\{z \mid Re(z) > 1\}$ y, así, define función analítica en $\{z \mid Re(z) > 1\}$.

Definición. Para todo $z \in \mathbb{C}$ con $Re(z) > 1$, la *función Zeta de Riemann*, $\zeta(z)$, se define como

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}. \tag{3.21}$$

La función Zeta, al igual que la Gamma, ha sido sujeto de análisis en una gran cantidad de estudios matemáticos; de hecho, uno de los problemas sin resolver más famosos es la localización de los ceros de la función Zeta.

En primer lugar, vamos a ver la relación que hay entre la Zeta y la Gamma. Recordamos la representación en forma de integral de la función Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

para z con $Re(z) > 0$. Haciendo el cambio de variable $x = nt$, obtenemos

$$\Gamma(z) = n^z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-nt} dt$$

que es equivalente a

$$\frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-nt} dt. \tag{3.22}$$

Aplicamos la identidad

$$\sum_{n=1}^{k} e^{-nt} = e^{-t} \left(\frac{1-e^{-kt}}{1-e^{-t}} \right) = \frac{1-e^{-kt}}{e^t - 1}$$

a (3.22) y sumamos los k primeros términos de cada miembro, y obtenemos

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-kt}}{e^t-1} t^{z-1} dt.$$

Por tanto, para los z tales que $Re(z) > 1$, y los enteros positivos k, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t-1} dt - \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-kt}}{e^t-1} t^{z-1} dt \tag{3.23}$$

ya que ambas integrales convergen. Vamos a ver que la última integral de (3.23) tiende a 0 cuando $k \to \infty$.

Sea $z = x+iy$. $|t^{z-1}| = t^{x-1}$, y por tanto

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{e^{-kt}}{e^t-1} t^{z-1} dt \right| \leq \int_0^{\infty} \frac{e^{-kt}}{e^t-1} t^{x-1} dt. \tag{3.24}$$

Sea $\varepsilon > 0$, elegimos un δ suficientemente pequeño para que

$$\int_0^{\delta} \frac{e^{-kt}}{e^t-1} t^{x-1} dt \leq \int_0^{\delta} \frac{t^{x-1}}{e^t-1} dt < \varepsilon \tag{3.25}$$

para todo k. Elegimos un k suficientemente grande para que

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-kt}}{e^t - 1} t^{x-1} dt \leq e^{-k\delta} \int_{\delta}^{\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt < \varepsilon. \tag{3.26}$$

Por tanto, combinando (3.25) con (3.26), es claro que dado cualquier $\varepsilon > 0$, podemos tomar un δ y k adecuados para que la integral de (3.24) sea menor que 2ε, y por tanto podemos hacer que el valor de esta integral sea tan pequeño como queramos tomando k suficientemente grandes. Así pues, haciendo que k tienda a infinito, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.4. *Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $Re(z) > 1$, entonces*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt. \tag{3.27}$$

Vamos a dar una serie de resultados acerca de la función Zeta, los cuales nos servirán para ver la importancia de esta función y su relación con la teoría de números. Utilizando el principio de prolongación analítica se puede extender la función Zeta a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Lo enunciaremos en el siguiente teorema:

Teorema 3.5. *La función Zeta se puede definir como una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un único polo simple en $z = 1$. Además, para todo $z \neq 1$, ζ satisface la ecuación funcional de Riemann:*

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\sin(\frac{1}{2}\pi z). \tag{3.28}$$

Como $\Gamma(1-z)$ tiene polos simples en $z = 1, 2, ...$, y $\zeta(z)$ es analítica en esos puntos, de la ecuación funcional de Riemann (3.28) deducimos que

$$\zeta(1-z)\sin(\frac{1}{2}\pi z) = 0 \tag{3.29}$$

para $z = 2, 3, ...$ Como $\Gamma(1-z)$ tiene polos simples en $z = 2, 3, ...$, cada uno de los ceros de (3.29) tiene que ser simple. Teniendo en cuenta que $\sin(\frac{1}{2}\pi z) = 0$ para cualquier z entero par, (3.29) implica que $\zeta(1-z) = 0$ para $z = 3, 5, 7, ...$. Por tanto, mediante la ecuación funcional tenemos que $\zeta(z) = 0$ para $z = -2, -4, -6, ...$. Los puntos $z = -2, -4, -6, ...$ se conocen como *ceros triviales de ζ*. El conjunto $\{z \mid 0 \leq Re(z) \leq 1\}$ se conoce como *rango crítico*.

Un razonamiento similar con la ecuación funcional de Riemann, lleva a deducir que todos los ceros no triviales de ζ están en el rango crítico. Vamos a enunciar uno de los problemas abiertos más importantes en las matemáticas

Hipótesis de Riemann 3.1. *Si z es un cero no trivial de ζ, entonces $Re(z) = \frac{1}{2}$.*

Es bien sabido que ζ no tiene ceros en $Re(z) = 1$ (y por la ecuación funcional, tampoco en $Re(z) = 0$), y que hay infinitos ceros en $Re(z) = \frac{1}{2}$. Sin embargo, aun no se ha probado que exista algún cero fuera de la recta $Re(z) = \frac{1}{2}$ o que todos estén en ella.

La verificación de la Hipotésis de Riemann implicaría una gran cantidad de resultados en matemáticas, especialmente en teoría de números. Para ver la conexión de la función ζ con la teoría de números, vamos a ver como teorema final la *Fórmula de Euler*.

Teorema 3.6. *Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $Re(z) > 1$. Entonces, se tiene que*

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_n^{-z}} \right) \tag{3.30}$$

dónde $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de números primos ordenados de menor a mayor.

Demostración. Es claro que $|p_n^{-z}| = p_n^{-Re(z)} \leq p_n^{-1} < 1$ para todo n. Luego, mediante la serie geométrica vemos que

$$\frac{1}{1-p_n^{-z}} = \sum_{m=1}^{\infty} p_n^{-mz}$$

para todo $n \geq 1$. El sumatorio de esta última ecuación contiene todas las potencias de p_n^{-1}, elevado a z

Primero veamos el caso $n = 2$. Fijamos $p_1 = 2$. Por tanto,

$$\frac{1}{1-2^{-z}} = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-mz} = 1 + 2^{-z} + (2^2)^{-z} + (2^3)^{-z} + \dots, \tag{3.31}$$

es decir, econtraríamos en la suma una única vez repetida cada potencia de 2 elevada a $(-z)$. Fijamos ahora $p_2 = 3$. De forma análoga al caso anterior, tenemos que

$$\frac{1}{1-3^{-z}} = \sum_{m=1}^{\infty} 3^{-mz} = 1 + 3^{-z} + (3^2)^{-z} + (3^3)^{-z} + \dots. \tag{3.32}$$

Por tanto, tendríamos que

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{2}\left(\frac{1}{1-p_n^{-z}}\right) &= \left(\frac{1}{1-2^{-z}}\right)\left(\frac{1}{1-3^{-z}}\right) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-mz}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} 3^{-mz}\right)\\ &= \left(1+2^{-z}+(2^2)^{-z}+(2^3)^{-z}+\dots\right)\left(1+3^{-z}+(3^2)^{-z}+(3^3)^{-z}+\dots\right).\end{aligned}$$

En esta última igualdad, por la propiedad distributiva del producto, estarían todos los posibles números que se factoricen de la forma 2^i3^k (con i,k enteros ≥ 0), elevados cada uno de ellos a $(-z)$. Como la factorización de los enteros es única, cada uno de estos números aparecería una única vez en la suma.

En general, si fijamos un N, procediendo como antes, tenemos que

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{1-p_n^{-z}}\right) &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-mz}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} 3^{-mz}\right)\dots\left(\sum_{m=1}^{\infty} p_N^{-mz}\right)\\ &= \left(1+2^{-z}+(2^2)^{-z}\dots\right)\left(1+3^{-z}+(3^2)^{-z}+\dots\right)\dots\left(1+p_N^{-z}+(p_N^2)^{-z}+\dots\right).\end{aligned}$$

Y, al igual que antes, por la propiedad distributiva del producto en está última igualdad encontaríamos la suma de todos los enteros de la forma $2^{i_1}3^{i_2}\dots p_N^{i_N}$ (con $i_1,\dots,1_N$ enteros no negativos) elevados cada uno de ellos a $(-z)$ sin repetir, ya que la factorización de enteros en potencias de primos es única. Por tanto, la anterior ecuación equivale a

$$\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{1-p_n^{-z}}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j^{-z}$$

dónde los enteros de la sucesión $\{w_j\}_{n=1}^{\infty}$ son todos aquellos que se pueden factorizar con sólo potencias de $2,3,\dots,p_N$.

Por tanto, cuando N tiende a infinito, en la sucesión de los w_j estarán todos los enteros. Así pues, se tiene que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p_n^{-z}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} = \zeta(z).$$

□

Bibliografía

[1] WALTER RUDIN, *Real and Complex Analysis* (third edition). International Edition 1987.

[2] S. PONNUSAMY Y HERB SILVERMAN, *Complex Variable with Applications*, Birkhäuser, Boston, 2006.

[3] JOHN B. CONWAY, *Functions of One Complex Variable* (second edition). Springer, New York, 1987

[4] R. WEBSTER, *Convexity*, Oxford University Press, Oxford, 1994.

[5] NIELS GLEINIG Y FRANCESC BARS, *On the critical strip of the Riemann zeta-function*, disponible en `http://mat.uab.es/~francesc/mates/NielsTFG.pdf`.

[6] J. M. PATIN, A very short proof of Stirling's formula, *Amer. Math. Monthly* **96** (1) (1989), 41–42.