TRABAJO FIN DE MASTER

ÁLGEBRA LINEAL

PROGRAMACIÓN LINEAL

2º BACHILLERATO CIENCIAS SOCIALES

Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas

ESPECIALIDAD MATEMÁTICAS

Autora: Leticia Madoz Balaguer

Tutor: José Mª Muñoz Escolano

Índice

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1. Nombra el objeto matemático a enseñar

El objeto matemático a enseñar va a ser la “Programación lineal”, cuya definición es la siguiente:

“La programación lineal es un procedimiento o algoritmo matemático mediante el cual se resuelve un problema indeterminado, formulado a través de un sistema de inecuaciones lineales, optimizando la función objetivo, también lineal.

Consiste en optimizar (minimizar o maximizar) una función lineal, denominada función objetivo, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones que expresamos mediante un sistema de inecuaciones lineales”

Este objeto matemático es tratado únicamente en el curso de 2º de bachillerato, concretamente según el Currículo Aragonés de Bachillerato, “los alumnos deben afrontar problemas de optimización, en contextos económicos y sociales, en los que las relaciones entre variables se enuncian con sistemas sencillos de inecuaciones. En estos casos, las representaciones gráficas son esenciales para que el alumno delimite la región factible y para que encuentre la solución óptima, que habrá de trasladar al contexto del problema”

2. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático

El objeto se sitúa en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, que se imparte en el 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales .

3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

Los contenidos que nos exige el Currículo Aragonés de Bachillerato son los siguientes:

- Introducción a la programación lineal
- Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas.
- Sistemas de inecuaciones lineales de dos incógnitas: interpretación y resolución gráfica
- Programación lineal bidimensional: región factible, función objetivo y solución óptima.
- Resolución gráfica de problemas sencillos de programación lineal bidimensional e interpretación de las soluciones.
- Planteamiento y resolución de situaciones reales de optimización de recursos que den lugar a un problema de programación lineal”

Es por ello que, el campo de problemas que se pretende enseñar se tratará de problemas contextualizados y no contextualizados cuya resolución pase por solucionar un sistema de inecuaciones formado por las restricciones a la optimización de la función objetivo. Esta resolución será gráfica mediante la determinación en unos ejes coordenados de la región factible que delimitan las restricciones, y el cálculo de la solución que pide el enunciado.

El campo de problemas, como se detallará en el punto D de este Trabajo, se puede clasificar atendiendo a distintos criterios, según el esquema que expone a continuación:

- Según el enunciado, los problemas se clasifican en:
    - Problemas contextualizados
    - Problemas sin contextualizar
- Según la forma de aparición de los datos del problema, los problemas se clasifican en:
    - Problemas tipo tabla
    - Problemas tipo texto
- Según el numero de restricciones, los problemas se clasifican en:
    - Problemas con una única restricción
    - Problemas con dos restricciones
    - Problemas con tres o más restricciones
- Según el tipo de optimización que se requiera, los problemas se clasifican en:
    - Problemas de maximización
    - Problemas de minimización
- Según el numero de soluciones, los problemas se clasifican en:

- Problemas de una única solución
- Problemas de múltiples soluciones

Se tratará toda esta tipología de problemas de manera combinada en las distintas sesiones, diferenciando en cada uno de ellos las características que presenta atendiendo a esta clasificación.

En cuanto a las técnicas, serán tres las técnicas utilizadas a lo largo de la unidad, serán explicadas detalladamente en el punto E de este Trabajo, y a continuación se muestra un esquema de las mismas según el orden de su aparición en la unidad:

1. Técnica de Ensayo – Error
2. Técnica de algoritmo gráfico de resolución mediante lápiz y papel
3. Técnica de resolución mediante programas informáticos

    a. Hoja de cálculo Excel
    b. Programa Geogebra

Estas técnicas representan la evolución lógica del pensamiento del alumno respecto a la programación lineal, desde que comienza la unidad con un desconocimiento total de la misma, y teniendo por tanto como única técnica de resolución el Ensayo – Error, seguido del conocimiento del algoritmo de resolución gráfico característico de estos problemas, y terminando con el uso de software informático que nos ayuda y facilita las dos técnicas anteriores.

En el caso de la Hoja de Cálculo nos permitirá agilizar la técnica de Ensayo – Error, mientras que el Geogebra facilitará la resolución mediante el método del algoritmo de resolución gráfica gracias a la representación de funciones.

Por último, como justificación de las técnicas explicadas, se presentará a los alumnos dos tecnologías, si bien la primera de ellas es la más relevante y de más fácil comprensión para los alumnos. La segunda sólo se explicará en caso de tener tiempo una vez finalizada la unidad, y solo a modo de ampliación para los alumnos que posean un talento matemático especial, ya que el nivel de la misma se escapa de lo esperado en los alumnos de este curso:

- Curvas de nivel de la función objetivo (Rectas paralelas)
- Proyección gráfica en 3 dimensiones del problema

Se justificará con ellas el algoritmo de resolución usado en los problemas, ya que intentaremos que los alumnos no vean dicho algoritmo como una “receta” que aprenderse de memoria para el examen, si no que intentaremos que comprendan el porqué de cada uno de los pasos que se llevan a cabo, y su relación con el problema a resolver.

B. Sobre los conocimientos previos del alumno

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

- *Modelización algebraica de situaciones*, es decir, transposición del texto del enunciado de un problema del lenguaje cotidiano a lenguaje matemático (ecuaciones, inecuaciones, funciones, etc.), contenido impartido en las programaciones didácticas de las asignaturas de Matemáticas desde 1º de la E.S.O.

- *Representación gráfica de rectas* en los ejes cartesianos, contenido previo perteneciente a los cursos de 3º y 4º de la E.S.O.

- *Resolución de sistemas de ecuaciones lineales*, estudiado en 3º y 4º de E.S.O., los procedimientos elementales, y en el tema anterior de este mismo curso, otros procedimientos para sistemas con mayor número de ecuaciones y de incógnitas.

- *Resolución gráfica de una inecuación lineal con dos incógnitas y sistemas* de inecuaciones lineales con dos incógnitas, contenidos impartidos en los cursos de 1º y 2º de bachillerato, y en particular en una unidad que será implementada anteriormente a la programación lineal.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

En principio, es de esperar que los contenidos de 3º y 4º de la E.S.O. hayan sido adquiridos correctamente en el momento de empezar esta unidad.

Los contenidos previos ubicados en los cursos de 1º y 2º de Bachillerato sin embargo, prevemos que pueden implicar una mayor dificultad de manejo por parte de los alumnos, por tratarse de contenidos adquiridos recientemente.

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Antes del comienzo de la impartición de la unidad didáctica, se realizará una prueba de conocimientos previos, que se llevará a cabo en una sesión de clase, tendrá una duración de 40 minutos, y en ella se propondrán entre 4 ejercicios de sistemas de ecuaciones e inecuaciones, así como de representación gráfica en los ejes cartesianos, para valorar la realidad de la clase respecto al conocimiento de los mismos.

Un modelo de dicha prueba de conocimientos previos se expone en el ANEXO I.

En función de los resultados obtenidos en la prueba se dedicarán entre 1 y 2 sesiones al trabajo de repaso de los conceptos peor asimilados.

C. Sobre las razones de ser del objeto matemático

1. Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático.

Siguiendo la razón de ser histórica del objeto matemático, se propone introducir a los alumnos este contenido como una herramienta necesaria para dar solución a problemas reales de distintas índoles, abarcando cualquier campo en el que exista una necesidad de organización de recursos, ya sean materiales, humanos o económicos. Es decir, se planteará a los alumnos una situación que no puedan resolver con lo conocido hasta ese momento, de manera que les resulte necesarias nuevas herramientas o técnicas para resolverlo, las técnicas de resolución de la programación lineal.

Para que sea más intuitivo, se planteará a los alumnos un problema cuya temática forme parte de su vida cotidiana, y que por tanto les resulte familiar y no suponga un problema añadido la comprensión del enunciado. Por ejemplo, utilizaremos un problema sobre el transporte de un grupo de alumnos a una excursión y las distintas opciones que existen para trasladarlos. Se trata de una temática conocida y familiar para los alumnos, lo que hace que puedan empezar a hacer conjeturas sobre las posibles soluciones con los conocimientos que poseen al comienzo de la explicación de la nueva unidad.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

En cierto modo sí, ya que las razones históricas que dan lugar a la programación lineal son también de optimización, si bien dicha optimización iba encaminada fundamentalmente a aspectos logísticos y militares.

El problema de la resolución de un sistema lineal de inecuaciones se remonta, al menos, a Fourier, después de quien nace el método de eliminación de Fourier-Motzkin. La programación lineal se plantea como un modelo matemático desarrollado durante la Segunda Guerra Mundial para planificar los gastos y los retornos, a fin de reducir los costos al ejército y aumentar las pérdidas del enemigo. Se mantuvo en secreto hasta 1947. En la posguerra, muchas industrias lo usaron en su planificación diaria.

A continuación se muestra la cronología de la evolución de la Programación Lineal:

Año	Acontecimiento
1826	Joseph Fourier anticipa la programación lineal. Carl Friedrich Gauss resuelve ecuaciones lineales por eliminación "*gaussiana*".
1902	Gyula Farkas concibe un método para resolver sistemas de inecuaciones.
1947	George Dantzig publica el algoritmo simplex y John von Neumann desarrolló la teoría de la dualidad. Se sabe que Leonid Kantoróvich también formuló la teoría en forma independiente.
1984	Narendra Karmarkar introduce el método del *punto interior* para resolver problemas de programación lineal.

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

Problema 1. *"Los 390 alumnos y alumnas de 1º de Bachillerato de un colegio quieren organizar una excursión a Madrid, para ello contactan con una empresa de transportes que dispone de 7 autobuses de 60 plazas y de 5 microbuses de 20 plazas. ¿Qué combinaciones de autobuses y microbuses son posibles para poder transportar a los alumnos y alumnas? Trata de organizar dichas combinaciones en una tabla."*

El problema tiene una segunda fase introducida a posteriori.

"Sabiendo que el precio del autobús es de 3€ por kilometro recorrido y el de cada microbús es de 1,5 € por kilometro recorrido. ¿Cuál es el coste de cada una de las combinaciones obtenidas? ¿Cuál de ellas es la más económica?"

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

Una vez corregida la prueba de los conocimientos previos se dedicará, si se considera necesario, una o dos sesiones al repaso de los mismos, y si no se comenzará con la unidad.

Plantearemos a los alumnos de comienzo la primera parte del problema expuesto anteriormente sobre los autobuses y microbuses, les propondremos esa situación didáctica, y les pediremos que por parejas o incluso pequeños grupos piensen las posibles combinaciones entre autobuses y microbuses que pueden trasladar a todos los alumnos del problema en su excursión a Madrid. Para ello se les dejará unos 15 - 20 minutos aproximadamente para que trabajen, mientras el profesor pasea por el aula resolviendo posibles dudas que les surjan a los alumnos.

Una vez transcurrido el tiempo estipulado para su resolución, se pondrán en común los resultados obtenidos por los distintos grupos. Se anotarán en la pizarra las distintas combinaciones de soluciones obtenidas, y se comprobarán una a una si cumplen los requisitos necesarios para ser una opción viable, es decir, si todos los alumnos tienen un asiento para viajar, y si no se han excedido las capacidades de la flota de vehículos de la empresa de transportes. Se aprovechará en ese momento para introducir el término *restricción*.

Una vez comprobadas las soluciones obtenidas y quedándonos sólo con las viables, se pedirá a los grupos que organicen todas las posibles combinaciones en una tabla, que posteriormente se escribirá en la pizarra.

Organizados ya los resultados, se procederá a la segunda fase del problema, que introduce un precio por kilometro para cada uno de los tipos de autobuses, y en la misma tabla, se les pedirá a los alumnos que añadiendo una nueva columna "*precio*", calculen el precio total por kilometro de cada una de las opciones.

Cuando hayan terminado los cálculos, con la tabla completa escrita en la pizarra se les preguntará en común a todos los alumnos de la clase cual es la mejor opción de las encontradas y por qué, esperando que la respuesta sea la opción más barata.

Es en ese momento cuando introducimos el concepto de *optimización*, a través de los conceptos "maximizar" y "minimizar" (hay que tener cuidado en esta explicación para que no se confundan con los concepto de máximo y mínimo de una función, visto por los alumnos en cursos anteriores y asociado a la derivada de la función en un punto). También hablaremos en este momento del término *Función Objetivo*, asociándola al coste total por kilometro del transporte y explicando a los alumnos cómo es dicha función la que marca el grado de "buena o mala" que es una solución respecto a otra (también se tendrá cuidado en este momento al introducir dicha función objetivo porque es la primera vez que los alumnos se enfrentan a una función de R^2 en R).

En este punto ya hemos introducido a partir de este problema inicial los conceptos clave de la unidad: *restricción*, *función objetivo* y *optimización de una función* (asociado a maximizar y minimizar una función), solo se han nombrado, sin profundizar en ellos aún, solo se nombran para que a los alumnos no les resulte del todo extraños en el momento de explicarlos en profundidad, que será durante la introducción del algoritmo de resolución gráfica.

Posteriormente se les planteará a los alumnos un segundo problema de mayor complejidad, de manera que creé en los alumnos la necesidad de una nueva herramienta de resolución, y ahí es donde se pasará de la primera técnica de resolución utilizada hasta este momento (Ensayo - Error) a la segunda y más importante de la unidad, el *algoritmo de resolución gráfica* de problemas de programación lineal.

Se justificará dicho algoritmo con la primera de las tecnologías, las curvas de nivel obtenidas dando valores a la función objetivo, para que comprendan el porqué de cada uno de los pasos del algoritmo, y sobre todo el motivo por el cual la solución o soluciones están siempre en un vértice o en un lado de la región factible.

A partir de ese momento, las sesiones se dedicarán a presentar y trabajar con los alumnos los distintos tipos de problemas mencionados anteriormente, aplicando el algoritmo de resolución así como los software de ayuda comentados (Excel y Geogebra).

D. Sobre el campo de problemas

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

El campo de problemas como se ha explicado anteriormente se puede clasificar atendiendo a diversos criterios, obviamente no se pueden tratar uno a uno cada tipo, por lo que se presentarán problemas que aúnen distintos criterios de los planteados.

En primer lugar, los problemas a tratar se dividen en:

- Problemas sin contexto
- Problemas con contexto

Los primeros consisten en problemas o ejercicios en los que no se cita un contexto concreto, si no que los datos aparecen explícitamente. En ellos no se necesita la modelización algebraica, ya que no hay texto que traducir a funciones o restricciones, el problema te indica las mismas explícitamente e indica lo que hay que calcular, sin asociarlo a ningún tipo de contexto.

Ejemplos de este tipo de problemas serían los siguientes:

❖ Problema 2. *Maximiza z= 2x + 3y sujeta a las siguientes condiciones:*

$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ x + 3y \leq 120 \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$$

- <u>Problema 3</u>. *Calcula los valores de x e y que hagan máximo el valor de la función B = 3x + 5y teniendo en cuenta que las condiciones a cumplir por las variables vienen expresadas por el sistema:*

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 5 \leq 30 \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$$

El segundo tipo de problemas, los problemas con contexto, sí que presentan una situación real o contexto al alumno, no solo hay que resolver el problema de programación lineal, si no que previamente hay que interpretar el enunciado y extraer del mismo la información acerca de la función objetivo y de las restricciones que presenta dicha situación.

Dentro de esta familia de problemas podemos realizar el resto de clasificaciones comentadas en el punto A.3.

Podemos clasificarlos en:

PROBLEMAS CON CONTEXTO	
CLASIFICACIÓN	**DESCRIPCIÓN**
• Problemas de maximización • Problemas de minimización	Esta clasificación divide a los problemas según el objetivo del mismo sea maximizar la Función Objetivo con las restricciones dadas (por ejemplo maximizar el beneficio obtenido por una venta de productos) o minimizar la misma (por ejemplo minimizar las pérdidas de un proceso de producción). Dentro de esta clasificación, veremos en clase tanto problemas de maximización como de minimización, ya que las técnicas de resolución a aplicar son las mismas, cambiando únicamente el resultado final escogido.
• Problemas tipo tabla • Problemas tipo texto	En esta clasificación se dividen a los problemas en los que exponen una tabla de datos explícitamente en el enunciado, presentando los datos clasificados y ordenados, y por tanto ahorrándole este trabajo de síntesis al alumno, y los que por el contrario solo presentan texto en el enunciado, y es el propio alumno el que debe extraer, analizar, sintetizar y clasificar lo datos contenidos implícitamente en el enunciado y elaborar su propia tabla.

	Ambos casos son frecuentes en los problemas asociados a esta asignatura, así que se verán ejemplos de ambos tipos, si bien se tratarán más ejemplos del segundo tipo, tipo texto, por implicar una mayor dificultad para el alumno al tener que realizar él la tabla de datos extrayendo la información del enunciado.
• Problemas con una única restricción • Problemas con dos restricciones • Problemas con tres o más restricciones	El número de restricciones también presenta una clasificación de los distintos problemas, ya que cuanto mayor es el número de restricciones que presenta un problema, mayor es el grado de complejidad de la resolución gráfica como posteriormente se explicará. Cada restricción representa una recta a representar en los ejes cartesianos, y cada dos rectas representadas existe una intersección que deberemos calcular mediante la resolución de un sistema de ecuaciones, y valorar dentro de la Función Objetivo, por lo que, aunque la técnica no cambie, si aumenta la dificultad para el alumno. Cuando decimos una, dos o más restricciones consideramos no incluidas las restricciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$, que en todos los problemas contextualizados van a aparecer en este nivel de programación lineal, y que son las que cierran la región factible en la representación grafica. Es por ello que debemos obligar a los alumnos a expresarlas por escrito en el conjunto de las restricciones para todos y cada uno de los problemas que se vean. Se presentará esta clasificación como una progresión en el número de restricciones en un mismo problema, como se explicará a continuación.
• Problemas de una única solución • Problemas de múltiples soluciones	Esta clasificación es la más compleja para la comprensión del alumno, y divide a los problemas en los que tienen una única solución óptima (que se encuentra en un vértice de la Región Factible) y los que por el contrario tienen infinitas soluciones (y que están incluidas en uno de los lados de la región factible). Se verán ejemplos de los dos tipos, si bien la inmensa mayoría serán con una única solución optima.

A continuación se muestran los problemas que aparecen a lo largo de este trabajo y su clasificación según los criterios mencionados.

<table>
<tr>
<td>Los 390 alumnos y alumnas de 1º de Bachillerato de un colegio quieren organizar una excursión a Madrid, para ello contactan con una empresa de transportes que dispone de 7 autobuses de 60 plazas y de 5 microbuses de 20 plazas. ¿Qué combinaciones de autobuses y microbuses son posibles para poder transportar a los alumnos y alumnas? Trata de organizar dichas combinaciones en una tabla.
Sabiendo que el precio del autobús es de 3€ por kilometro recorrido y el de cada microbús es de 1,5 € por kilometro recorrido. ¿Cuál es el coste de cada una de las combinaciones obtenidas? ¿Cuál de ellas es la más económica?</td>
<td>✓ Minimización
✓ Enunciado tipo texto
✓ 3 restricciones
✓ Única solución</td>
</tr>
<tr>
<td>Los alumnos y alumnas de 2º Bachillerato, con el objetivo de recaudar fondos para su viaje de estudios, deciden vender paquetes de dulces navideños facilitados por una empresa de su ciudad. Disponen de 10 kg de polvorones y 8 de mantecados. Acuerdan que van a hacer dos tipos de paquetes para la venta, unos costaran 3€ y estarán formados por 100 gr de polvorones y 150 gr de mantecados, los otros paquetes costaran 4€ y estarán formados por 200 gr de polvorones 100gr de mantecados. ¿Cuántos paquetes de cada tipo les conviene hacer con los dulces disponibles para obtener más recaudación?</td>
<td>✓ Maximización
✓ Enunciado tipo texto
✓ 2 restricciones
✓ Única solución</td>
</tr>
<tr>
<td>Una fábrica del sector textil ha sido encargada de la confección de pantalones y camisas para una cadena de tiendas. Los pantalones necesitan 4 horas de trabajo y las camisas 5 horas.
La fábrica dispone de 1920 horas de trabajo en total. ¿Qué posibles combinaciones en el número de pantalones y camisas podemos fabricar?
Si cada pantalón es pagado a 10€ y cada camisa a 15€, ¿Cuál será la mejor combinación de pantalones y camisas a fabricar?</td>
<td>✓ Maximización
✓ Enunciado tipo texto
✓ 1 restricción
✓ Única solución</td>
</tr>
<tr>
<td>Un pequeño taller se dedica a la fabricación de dos modelos de calzado de señora: botín todo terreno y sandalias dedos frescos. Cada par de botines fabricados genera unos ingresos de 100€, mientras que cada par de sandalias produce 90€ de ingresos. El taller está dividido en tres departamentos: cortado, cosido y acabado.
Así mismo, las horas de trabajo que requieren cada par de zapatos en los distintos departamentos vienen dadas en la tabla adjunta.
<table>
<tr><th></th><th>cortado</th><th>cosido</th><th>acabado</th></tr>
<tr><td>Botines</td><td>7/10</td><td>1</td><td>1/10</td></tr>
<tr><td>Sandalias</td><td>1</td><td>2/3</td><td>1/4</td></tr>
</table>
Si el número de horas semanales disponibles por la empresa</td>
<td>✓ Maximización
✓ Enunciado tipo tabla
✓ 3 restricciones
✓ Única solución</td>
</tr>
</table>

en cada uno de los departamentos es de 630, 708 y 135 respectivamente, determina: a) La región de factibilidad del problema (1 punto) b) ¿Es posible fabricar 454 zapatos y 336 sandalias en una semana en dicha fabrica? (0,5 puntos) c) El numero de pares de botines y de sandalias que se han de fabricar para maximizar la ganancia (1,5 puntos) d) Cual será dicha ganancia máxima (1 punto)	
Se dispone de 600 g de un determinado fármaco para elaborar pastillas grandes y pequeñas. Las grandes pesan 40 g y las pequeñas 30 g. Se necesitan al menos tres pastillas grandes, y al menos el doble de pequeñas que de las grandes. Cada pastilla grande proporciona un beneficio de 2 € y la pequeña de 1 €. Cada pastilla grande necesita 4 horas para su fabricación, mientras que cada pastilla pequeña necesita 3 horas. Si en total disponemos de 66 horas para fabricar pastillas a la semana. a) ¿Cuántas pastillas se han de elaborar de cada clase semanalmente para que el beneficio sea máximo? (3 puntos) b) ¿Cuál será dicho beneficio? (1 punto)	✓ Maximización ✓ Enunciado tipo texto ✓ 3 restricciones ✓ Solución múltiple

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

La técnica inicial es la de Ensayo - Error, es la que utilizarán los alumnos antes de explicar nada del tema, se les propondrá el problema que se ha presentado anteriormente y su único recurso en ese momento será el Ensayo - Error de distintos resultados, es decir, probar distintos valores para el par (x, y). En nuestro ejemplo, buscar pares de valores para el número de autobuses y microbuses que cumplan las restricciones, para posteriormente calcular el precio asociado a cada par de valores.

Una vez hayan obtenido resultados distintos, les propondremos la primera modificación de la técnica, que será seguir con el Ensayo - Error pero ayudándose de una hoja de cálculo, Microsoft Excel, ésta modificación les ayudará a poder conseguir muchos más resultados en menos tiempo.

La siguiente modificación de la técnica será la más importante, la introducción del Algoritmo de resolución gráfica, que nos permitirá resolver problemas más complejos.

Como ampliación de la segunda técnica se realizará una sesión con los alumnos en sala de ordenadores con el programa Geogebra, software libre que permite realizar gráficas de funciones y calcular puntos de intersección entre rectas, agilizando así la resolución tanto analítica (al ahorrarse los sistemas de ecuaciones) como la resolución grafica del problema.

Por último, existe una última modificación de la técnica, que sólo se da en el caso de que uno de los vértices de la región factible obtenidos, y por tanto, posible máximo o mínimo de la función objetivo, no tenga sentido. Se expondrá a los alumnos únicamente el caso en que esa carencia de sentido se produzca por ser alguna de las dos coordenadas del punto, o ambas, números no enteros, tratándose de un problema contextualizado de variables enteras.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Como se ha comentado, hay muchos tipos de problemas distintos atendiendo a las clasificaciones presentadas en puntos anteriores.

El primer problema que se plantea a los alumnos es el ya presentado de los autobuses y microbuses, es un problema contextualizado, de minimización (precio total por kilometro), enunciado tipo texto, solución única y con tres restricciones (número total de asientos mayor o igual al de alumnos, numero de autobuses no superior al de los disponibles y numero de microbuses no superior al de los disponibles) además de las siempre supuestas ($x,y \geq 0$).

Este problema se utilizará como razón de ser para que lo alumnos, sin haber empezado la unidad, piensen mediante el Ensayo - Error opciones posibles de combinaciones entre autobuses y microbuses que puedan dar solución al problema con la flota indicada. Después en la segunda parte, calcular los precios de las distintas opciones encontradas para discutir cual es el mejor para los alumnos.

Para evolucionar a la siguiente técnica, presentaremos un problema de mayor complejidad que haga que a los alumnos no les baste con la técnica del Ensayo - Error para resolverlo.

<u>*Ejemplo 4.*</u> *Los alumnos y alumnas de2º Bachillerato, con el objetivo de recaudar fondos para su viaje de estudios, deciden vender paquetes de dulces navideños facilitados por una empresa de su ciudad. Disponen de 10 kg de polvorones y 8 de mantecados. Acuerdan que van a hacer dos tipos de paquetes para la venta, unos costaran 3€ y estarán formados por 100 gr de polvorones y 150 gr de mantecados, los otros paquetes costaran 4€ y estarán formados por 200 gr de polvorones 100gr de mantecados. ¿Cuántos paquetes de cada tipo les conviene hacer con los dulces disponibles para obtener más recaudación?*

Nos encontramos ante un problema con contexto, de maximización, con una única solución y sujeto a 2 restricciones (que no se supere el número de mantecados disponibles ni el de polvorones).

Dejaremos que los alumnos traten de buscar soluciones con la única técnica que poseen hasta el momento, Ensayo - Error, para que sean ellos los que demanden la necesidad de una nueva técnica para resolverlo. Será en ese momento en el que se incorporará el algoritmo de resolución gráfica del problema de programación lineal mediante lápiz y papel, como veremos detalladamente en el punto siguiente.

A partir de este momento, introducido ya el algoritmo, trabajaremos problemas de los distintos tipos alternando siempre problemas con contexto y sin contexto.

La finalidad de esta unidad es que los alumnos sean capaces de reconocer un problema de optimización, en un determinado contexto, por lo que los problemas principales a trabajar serán los problemas con contexto. Los problemas sin contexto se realizarán con la finalidad de entrenar el uso del algoritmo, siempre explicando a los alumnos y subrayando que las condiciones fuera de contexto real que aparecen podrían estar asociadas a un problema con contexto para que los alumnos no pierdan en ningún momento la razón de ser del objeto matemático, ya que si separamos los problemas con de los problemas sin contexto podría ocurrir que los alumnos perdieran de vista la razón de ser al trabajar problemas sin contexto durante varias sesiones.

Así pues en clase se trabajarán principalmente los problemas con contexto, dejando los problemas sin contexto para el entrenamiento en casa de los alumnos con el algoritmo de resolución.

Dentro de los problemas con contexto se irán viendo en las distintas sesiones y progresivamente, de menor complejidad a mayor, las combinaciones de las clasificaciones vistas anteriormente más representativas para este curso, de manera que queden vistas todas la posibilidades a través de los problemas vistos en el aula, y se consideran las siguientes:

1. ***Problemas con enunciado tipo texto***

    a. <u>Maximizar ó minimizar con una restricción y solución única</u>

Una fábrica del sector textil ha sido encargada de la confección de pantalones y camisas para una cadena de tiendas. Los pantalones necesitan 4 horas de trabajo y las camisas 5 horas.
La fábrica dispone de 1920 horas de trabajo en total. ¿Qué posibles combinaciones en el número de pantalones y camisas podemos fabricar?
Si cada pantalón es pagado a 10€ y cada camisa a 15€, ¿Cuál será la mejor combinación de pantalones y camisas a fabricar.

    b. <u>Maximizar o minimizar con más de una restricción y solución única</u>

Los 390 alumnos y alumnas de 1º de Bachillerato de un colegio quieren organizar una excursión a Madrid, para ello contactan con una empresa de transportes que dispone de 7 autobuses de 60 plazas y de 5 microbuses de 20 plazas. ¿Qué combinaciones de autobuses y microbuses son posibles para poder transportar a los alumnos y alumnas? Trata de organizar dichas combinaciones en una tabla.
Sabiendo que el precio del autobús es de 3€ por kilometro recorrido y el de cada microbús es de 1,5 € por kilometro recorrido. ¿Cuál es el coste de cada una de las combinaciones obtenidas? ¿Cuál de ellas es la más económica?

    c. <u>Maximizar o minimizar con más de una restricción y solución múltiple</u>

Se dispone de 600 g de un determinado fármaco para elaborar pastillas grandes y pequeñas. Las grandes pesan 40 g y las pequeñas 20 g. Se necesitan al menos tres pastillas grandes, y al

menos el doble de pequeñas que de las grandes. Cada pastilla grande proporciona un beneficio de 2 € y la pequeña de 1 €.
Cada pastilla grande necesita 4 horas para su fabricación, mientras que cada pastilla pequeña necesita 3 horas. Si en total disponemos de 90 horas para fabricar pastillas a la semana.

- *¿Cuántas pastillas se han de elaborar de cada clase semanalmente para que el beneficio sea máximo?*
- *¿Cuál será dicho beneficio?*

2. Problemas con enunciado tipo tabla con más de una restricción y solución única.

Un pequeño taller se dedica a la fabricación de dos modelos de calzado de señora: botín todo terreno y sandalias dedos frescos. Cada par de botines fabricados genera unos ingresos de 100€, mientras que cada par de sandalias produce 90€ de ingresos. El taller está dividido en tres departamentos: cortado, cosido y acabado.
Así mismo, las horas de trabajo que requieren cada par de zapatos en los distintos departamentos vienen dadas en la tabla adjunta.

	cortado	*cosido*	*acabado*
Botines	*7/10*	*1*	*1/10*
Sandalias	*1*	*2/3*	*1/4*

Si el número de horas semanales disponibles por la empresa en cada uno de los departamentos es de 630, 708 y 135 respectivamente, determina:

- *La región de factibilidad del problema.*
- *¿Es posible fabricar 454 zapatos y 336 sandalias en una semana en dicha fabrica? El numero de pares de botines y de sandalias que se han de fabricar para maximizar la ganancia.*
- *Cual será dicha ganancia máxima.*

E. Sobre las técnicas

1. Diseña las distintas técnicas que se van a presentar en el aula.

Como se ha adelantado en los puntos anteriores las técnicas que se van a presentar en el aula en el transcurso de la unidad van a ser dos.

- Ensayo - Error

Esta técnica más que presentarla, vamos a animar a los alumnos a que la utilicen en un primer momento ya que es un recurso que ellos poseen, y al no tener otro deberán utilizarlo para intentar resolver el problema inicial con el que se introduce el tema.

El Ensayo - Error consiste en buscar soluciones al problema sin utilizar métodos matemáticos, sino utilizando solo la lógica frente a la situación propuesta en el problema. Probando diferentes resultados y viendo si cumplen las restricciones impuestas.

- Algoritmo gráfico de resolución mediante lápiz y papel

La segunda técnica y la más importante, puesto que es la que da sentido a la unidad, es el *algoritmo gráfico de resolución mediante lápiz y papel*.

Consiste en una sucesión de pasos a seguir para enfrentarnos a los problemas de programación lineal al nivel del curso en el que nos encontramos y ya descritos anteriormente, en función del tipo de problema que se nos presente.

El algoritmo nos lleva hacia una resolución final del problema de tipo gráfico, que detallaremos a continuación.

ALGORITMO

El algoritmo variará ligeramente según los tipos de problemas antes mencionados. Se describen detalladamente los pasos incluidos en el mismo en el caso más completo, el de los problemas con contexto, matizando seguidamente los casos particulares a éste.

1. Identificación de las variables de decisión (incógnitas)

En los problemas correspondientes a este curso siempre habrá dos variables de decisión, a las que llamaremos "x" e "y" respectivamente, se trata de dos valores desconocidos que nos pide calcular el enunciado, y de los cuales depende la Función Objetivo que tenemos que minimizar o maximizar.

El primer paso en la resolución de un problema de Programación Lineal es identificar dichas variables y escribirlo explícitamente en el papel, de la forma:

x – nº de autobuses

y – nº de microbuses

Se exigirá a los alumnos este paso dándole la importancia de que quede claro y explícito el significado cada una de las letras que aparecen en un problema.

2. Identificación de la Función Objetivo del problema

Una vez identificadas las variables de decisión, el siguiente paso es construir la Función Objetivo del problema, es decir, la función a optimizar (minimizar o maximizar) según pida el enunciado.

Esta función siempre depende de las variables de decisión anteriormente halladas, y la representaremos por F(x,y).

3. Identificar si el problema pide maximizar o minimizar dicha función

En el enunciado también hay que descifrar si el objetivo de la situación planteada en el problema es calcular un valor máximo, o por el contrario un valor mínimo, para la Función Objetivo que se ha construido en el apartado anterior.

Al lado de la Función Objetivo se escribirá el tipo de optimización que pide el problema con la nomenclatura "min." o "máx." según el problema pida minimizar o maximizar dicha función. Por ejemplo:

máx. $F(x,y) = 3x + 2y$

4. Representación (si el problema lo permite) de los datos del enunciado en una tabla según variables de decisión.

En este paso lo que se exige es una síntesis y ordenación de los datos proporcionados en el enunciado de manera que podamos ver la relación entre ellos, y su relación con las variables de decisión.

Generalmente se representarán en una tabla de datos (la que en el caso de los problemas con enunciado tipo tabla ya nos viene dada, y por lo tanto en ese tipo de problema no sería necesario este paso).

En caso de ser un problema demasiado sencillo para elaborar una tabla, se expresarán los datos de forma esquemática con el mismo objetivo de sintetizar y ordenar los datos extraídos del enunciado.

5. Identificación de las restricciones que plantea el enunciado y de las que exige la propia temática del problema

Con las variables de decisión, la Función Objetivo, y todos los datos extraídos del enunciado, se procederá a modelizar algebraicamente las restricciones del problema.

Las restricciones son las condiciones que impone el enunciado a las variables de decisión obtenidas y se trata de inecuaciones lineales con una o dos variables.

Se expresarán de la siguiente manera:

Restricciones

$$\begin{cases} 5x + 3y \geq 40 \\ x + y \leq 20 \\ x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \end{cases}$$

Se exigirá así mismo que se escriban las dos últimas restricciones, que se darán en la totalidad de los problemas con contexto vistos en la unidad, ya que siempre se van a tratar contextos reales con variables positivas, explicando a los alumnos la importancia de las mismas, ya que acotan la región factible de la misma manera que el resto de restricciones.

6. Representación de las restricciones en unos ejes coordenados

Tras escribir las restricciones procederemos a su representación gráfica en los ejes cartesianos. Representaremos la recta asociada a cada una de las inecuaciones, e indicaremos con una flecha pequeña el semiplano de los dos en los que la recta divide al plano, en el que se cumple la inecuación asociada a dicha recta.

7. Delimitación de la Región Factible del problema

Una vez representadas todas las restricciones en los ejes cartesianos, delimitaremos la región factible del problema, que el lugar geométrico de los puntos que cumplan todas las restricciones impuestas en el problema, y por tanto estará delimitada por las rectas asociadas a las inecuaciones y sus vértices serán las intersecciones entre las rectas.

Se marcará dicha región con trazo más grueso al resto del gráfico.

En este punto se explicará a los alumnos el significado de que un punto esté dentro, fuera, o en las rectas que limitan la región factible. Para ello, se calculará una solución perteneciente a cada zona, viendo como las de fuera no cumplen alguna o todas las restricciones, y las de dentro así como las de las rectas que limitan la región factible las cumplen todas.

8. Calculo de los vértices de la Región Factible a través de sistemas de ecuaciones

Con la Región Factible ya delimitada, se calcularán los vértices de la misma, que como se ha comentado anteriormente se trata de las intersecciones entre las rectas asociadas a las restricciones, así que para calcular sus coordenadas hay que resolver el sistema de las dos ecuaciones de las rectas que intersecan en cada uno de los vértices.

Hay que hacer hincapié a los alumnos en que cada par de coordenadas de los puntos del gráfico están asociadas a los valores de las variables de decisión obtenidas en el paso 1 del algoritmo, y que por tanto no son números sin significado, sino que cada punto del gráfico representa una posible solución al problema.

Como se explicará en el punto siguiente de este trabajo con las tecnologías, los puntos óptimos (tato máximos como mínimos) de la Función Objetivo en la región de factibilidad se encuentran en los vértices de la misma (en el caso de que la solución del problema sea única), o en uno de los lados (en caso de soluciones múltiples).

9. Valoración de la Función Objetivo en dichos vértices para determinar cuál de ellos es la solución al problema.

Para conocer en qué vértice está el máximo o el mínimo de la Función Objetivo, según nos pida el problema, se debe valorar dicha Función Objetivo en cada uno de los vértices (valores de la variables de decisión x e y), obteniendo así cuál de los vértices es el que maximiza la función o cuál el que la minimiza.

Si el valor de la Función Objetivo valorada en dos vértices contiguos es el mismo, esto indicará que el problema tiene múltiples soluciones (y dichas soluciones son cada uno de los puntos contenidos en el lado delimitado por ambos vértices dentro de la región factible).

10. Interpretar y escribir la respuesta a lo que pregunte el problema de manera clara y explícita, con las unidades correspondientes.

Por último, una vez obtenido el punto de la Región Factible que da solución al problema, hay que volver al contexto del problema y contestar a lo que se pregunta utilizando el lenguaje cotidiano.

Si por ejemplo el punto solución en el problema de los autobuses es el (7,0), la respuesta final al problema será:

"Se utilizarán 7 autobuses y ningún microbús, y el coste total por km será de 105 €"

En el algoritmo presentado hay que tener en cuenta las características propias de cada tipo de problema para la selección de los pasos a seguir.

En los problemas sin contexto solo se realizarían los pasos 6, 7, 8 y 9. En el punto 10 en vez de situar los valores solución obtenidos en el contexto del problema, se especificarían tal cual como:

$x=7; y=0$

En los problemas con enunciado tipo tabla, el paso 4 se omitiría por venir dada la ordenación de los datos en el propio enunciado.

2. ¿Qué modificaciones de las técnicas se presentan?

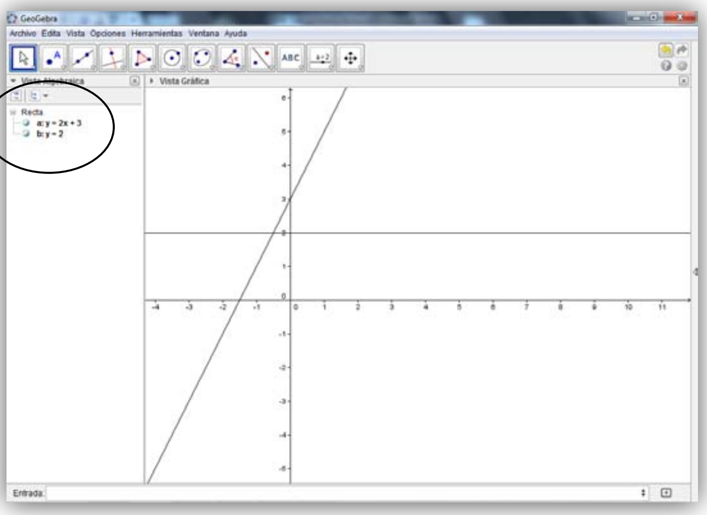
En primer lugar, respecto a la primera de las técnicas, el Ensayo - Error, se presentará una modificación de dicha técnica al presentar la hoja de cálculo Excel como ayuda a la hora de obtener soluciones por tanteo.

Para ello se llevará a los alumnos a una sala provista de ordenadores para que con la Excel puedan crear las columnas necesarias, y con ayuda de fórmulas introducidas sean capaces de obtener un mayor número de soluciones en menor tiempo.

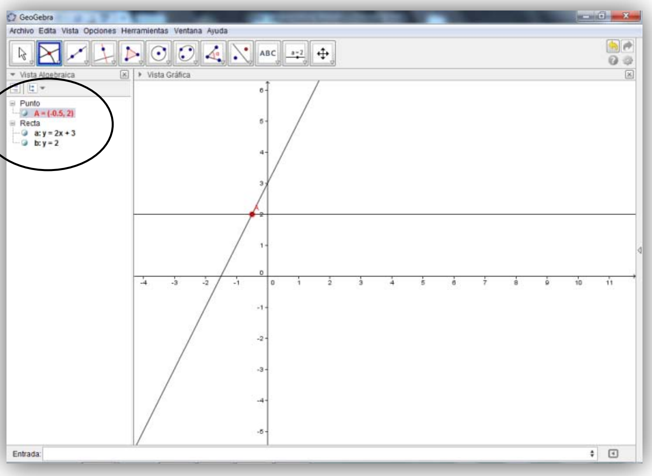
Por otro lado, respecto a la segunda técnica, el algoritmo de resolución gráfica del problema, la modificación que presentaremos será el software Geogebra.

Geogebra es un software de libre descarga que nos permite la representación gráfica de puntos y rectas en los ejes cartesianos de una manera muy rápida. De esta manera una vez obtenidos los parámetros básicos del problema (Función Objetivo y restricciones) podremos representar las rectas asociadas a cada una de las restricciones de una manera sencilla e inmediata, con solo escribir la función en el software.

A continuación se muestra una imagen del mismo, en la que se puede apreciar la representación de dos rectas cuyas expresiones aparecen a la izquierda, y=2x+3 ; y=2



Para calcular el vértice formado por la intersección de ambas rectas no habría más que clicar en con el ratón en el punto intersección y nos aparece nombrado como punto A y sus coordenadas aparecen de la misma forma a la izquierda de la pantalla A= (-0.5, 2)



Evitando por tanto la resolución del sistema de ecuaciones de las rectas asociadas a ambas restricciones.

Al ser un software de libre descarga desde la propia página de los creadores, www.geogebra.org, nos permite animar a los alumnos a su descarga en casa para poder así comprobar las soluciones de los problemas que realicen por su cuenta de una manera más rápida, si bien se advertirá que en el examen la resolución va a ser con lápiz y papel, y que por tanto es conveniente que usen el software únicamente como apoyo a la corrección de problemas realizados a mano previamente por ellos.

La última de las modificaciones de la técnica se produce en el caso de que uno de los vértices de la región de factibilidad tenga una o ambas coordenadas “no enteras”, esto ocurre solo en problemas con contexto de variables de decisión enteras (como lo son en casi la totalidad de los problemas vistos en este curso).

En este caso dicho vértice no sería una solución factible, al no tener sentido por ejemplo 5,3 autobuses. Así pues la modificación de la técnica que hay que llevar a cabo consiste en

1. Buscar los puntos de coordenadas enteras más próximos a dicho vértice.

2. Comprobar cuál o cuáles de ellos se encuentran dentro de la región de factibilidad del problema.

3. Evaluar la Función Objetivo en los que se encuentren dentro de la región de factibilidad y trabajar con ellos como si de vértices se tratase.

Los puntos más cercanos al vértice van a ser siempre, en el caso de que solo una de las coordenadas sea "no entera", los puntos que resultan de cambiar dicha coordenada por el entero anterior y posterior a la misma, dejando la otra coordenada igual. Por ejemplo:

(52'4, 8) → los puntos de coordenadas enteras más cercanos serán (52,8) y (53,8)

(7, 21`5) → los puntos de coordenadas enteras más cercanos serán (7,21) y (7,22)

En el caso de que ambas coordenadas sean no enteras, habrá cuatro puntos cercanos con coordenadas enteras que comprobar.

(3'4, 8'2) → los puntos de coordenadas enteras más cercanos serán: (3,8), (3,9), (4,8) y (4,9).

Ésta modificación de la técnica se razonará igualmente mediante las curvas de nivel de la Función Objetivo.

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Sí, la aplicación de dichas técnicas permite la resolución de todos los problemas de programación lineal asociados a esta unidad, ya que en ellas se han contemplado todos los posibles casos de problemas.

Cómo se ha especificado en el punto anterior, según el tipo de problema, el algoritmo se realizará completo o prescindiendo de algunos de los pasos indicados.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología de implantación consistirá en primer lugar, en presentar el problema comentado anteriormente de los autobuses y microbuses y pedirles que encuentran soluciones posibles al mismo, incitándoles así al uso de su única técnica conocida hasta el momento, el Ensayo - Error.

Una vez los alumnos hayan trabajado dicha técnica y hayamos comentado los resultados obtenidos en común, se les llevará al aula de ordenadores para presentarles la modificación de la técnica basada en la hoja de cálculo Excel, presentándoles el siguiente problema:

<u>Ejemplo 5.</u> *"Una fabrica del sector textil ha sido encargada de la confección de pantalones y camisas para una cadena de tiendas. Los pantalones necesitan 4 horas de trabajo y las camisas 5 horas.*

La fábrica dispone de 1920 horas de trabajo en total. ¿Qué posibles combinaciones en el número de pantalones y camisas podemos fabricar? "

Se les dejará trabajar en parejas para construir una tabla en la que reflejen ordenadamente los resultados posibles al problema. A continuación se les propondrá añadir una tercera columna de opciones sí o no, en la que se compruebe si esa solución cumple la restricción del número de horas máximo impuesto por el problema.

Una vez construida la tabla, se proseguirá con la segunda parte del problema:

"Si cada pantalón es pagado a 10€ y cada camisa a 15€, ¿Cuál será la mejor combinación de pantalones y camisas a fabricar?"

Esta parte añade una cuarta columna a la tabla Excel en la que se compruebe el beneficio obtenido en cada una de las opciones, para poder así compararlas y saber cuál es la mejor de las obtenidas.

Una vez vistos este problema por la técnica Ensayo - Error, se presentará a los alumnos un nuevo problema, en este caso de una mayor complejidad, que les haga necesitar una nueva técnica para su resolución, ya que el Ensayo - Error no será suficiente. Dicho problema será el ya mencionado Ejemplo 4.

<u>*Ejemplo 4.*</u> *Los alumnos y alumnas de2º Bachillerato, con el objetivo de recaudar fondos para su viaje de estudios, deciden vender paquetes de dulces navideños facilitados por una empresa de su ciudad. Disponen de 10 kg de polvorones y 8 de mantecados. Acuerdan que van a hacer dos tipos de paquetes para la venta, unos costaran 3€ y estarán formados por 100 gr de polvorones y 150 gr de mantecados, los otros paquetes costaran 4€ y estarán formados por 200 gr de polvorones 100gr de mantecados. ¿Cuántos paquetes de cada tipo les conviene hacer con los dulces disponibles para obtener más recaudación?*

Se les animará a resolverlo para que sean ellos los que demanden ayuda al no ser posible con la misma técnica que el anterior.

Y aprovecharemos dicha demanda para presentar el algoritmo de resolución gráfica.

En primer lugar se explicará paso a paso y sin nombrar la palabra algoritmo, las distintas partes del problema, nombrando así los conceptos propios de la Programación Lineal comentados anteriormente.

Se les preguntará qué valores desconocemos (en este caso el número de paquetes de cada tipo que vamos a hacer) e introduciremos así el concepto de *variables de decisión*, nombradas como *x* e *y* respectivamente al "tipo 1" y "tipo 2" de paquetes.

x – nº paquetes tipo 1

y – nº de paquetes tipo 2

A continuación se les preguntará cual es el "objetivo" que deben cumplir esas variables de decisión (en este caso es obtener una mayor recaudación) y se trabajará con ellos cuál es la relación entre las variables de decisión y el dinero a recaudar, llegando así a la *Función Objetivo*.

$F(x, y) = 3x + 4y$

A continuación se elaborará la tabla de datos del problema para poder ver más claramente el contexto del problema.

	Paquete Tipo 1	*Paquete Tipo 2*
Polvorones (gr)	*100*	*200*
Mantecados (gr)	*150*	*100*
Precio venta (€)	*3*	*4*

Total de polvorones = 10.000 gr

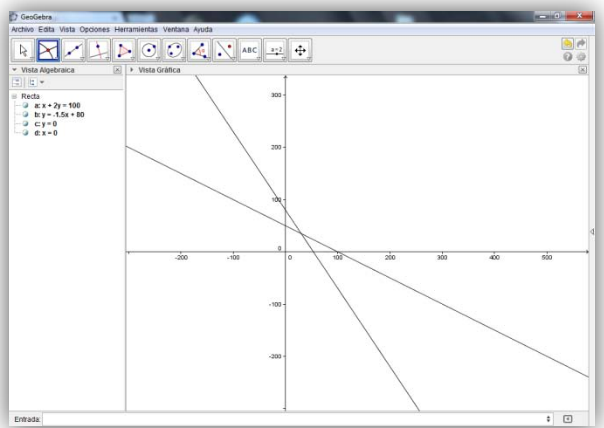
Total mantecados = 8.000 gr

Ahora es el turno de introducir las *restricciones*, por lo que se preguntará a los alumnos sobre las condiciones que han de cumplir esas variables de decisión, tomándonos tiempo en este paso por ser el más complicado para los alumnos.

Hasta finalmente llegar a la formulación de restricciones, que pasando los kilogramos a gramos, serán:

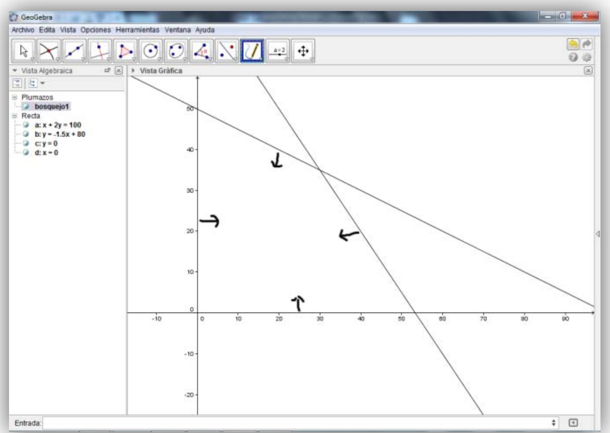
$$\begin{cases} 100x + 200y \leq 10.000 \\ 150x + 100y \leq 8.000 \\ x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \end{cases}$$

En este punto los alumnos ya están preparados para que se les introduzca el *método gráfico de resolución*, para lo que les indicamos que representen las rectas asociadas a cada restricción en unos ejes cartesianos



A continuación, marcaremos en cada una de las rectas representadas el semiplano que verifica la restricción.

Para ello comprobaremos si el origen de coordenadas (0,0) cumple la restricción. Si es así es su región de plano la que cumple, si por el contrario no es así, es la otra región la válida, ya que cada recta divide al plano en 2 regiones o semiplanos, uno de los cuales contendrá a los puntos que cumplen la restricción y el otro a los que no la cumplen.



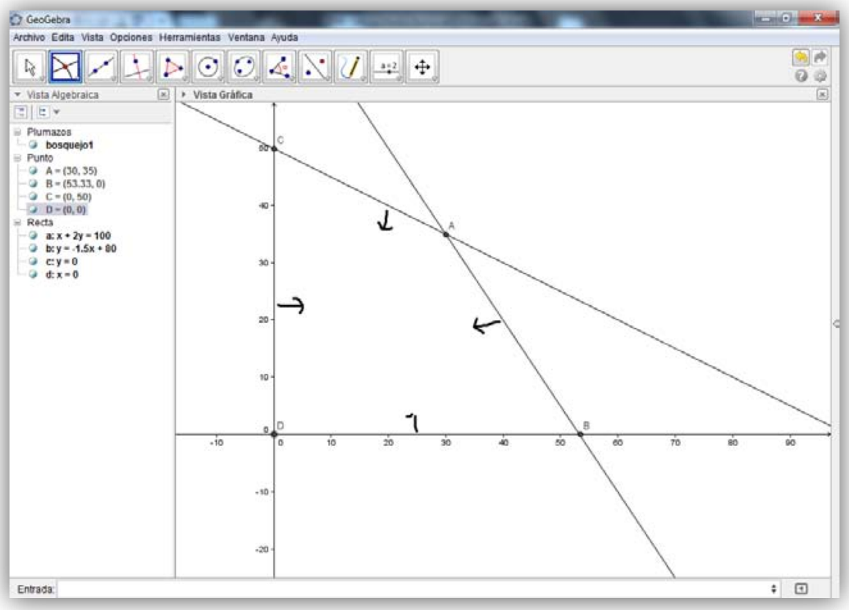
Estas flechas marcaran la región o porción del plano en la que se cumplen las cuatro restricciones impuestas por el problema, es decir, la “Región Factible” del problema.

Calcularemos ahora los puntos de intersección entre las rectas que forman los vértices de la Región Factible a través de la resolución de los siguientes cuatro sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 100x + 200y = 10.000 \\ 150x + 100y = 8.000 \end{cases} \qquad \begin{cases} 100x + 200y = 10.000 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 150x + 100y = 8.000 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Sol (30,35) Sol (0,50) Sol (53,33,0) -> (53,0) Sol (0,0)

En el tercer sistema, la no dar una solución entera tendremos que realizar la modificación de la técnica mencionada anteriormente al respecto, comprobar los puntos de coordenadas enteras más cercanos al vértice, en este caso (53,0) y (54,0). Como el segundo no está dentro de la región de factibilidad, solo evaluaremos el primero de ellos como posible solución al problema.



Una vez determinada la Región Factible se explicará a los alumnos que los puntos que hacen mínima y máxima la Función Objetivo se encuentran en los vértices de la región factible, y para justificarlo se utilizará la tecnología de las *curvas de nivel de la función objetivo* que explicará en el punto siguiente.

Así que el siguiente paso es valorar la Función Objetivo en cada uno de los vértices obtenidos.

F(30,35) = 3*30 + 4*35 = 230

F(0,50) = 3*0 + 4*50 = 200

F(53,0) = 3*53 + 4*0 = 159

F (0,0) = 3*0 + 4*0 = 0

A la vista de los resultados, se obtendrá una mayor recaudación si hacemos 30 paquetes del tipo 1 y 35 del tipo 2, y dicha recaudación será de 230€.

Por último, se presentará a los alumnos el software Geogebra como herramienta de ayuda al cálculo en problemas de programación lineal y se realizará una sesión en aula de ordenadores para enseñarles su funcionamiento, así como la realización de problemas con la nueva herramienta.

F. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

1. ¿Mediante que razonamientos se van a justificar las técnicas?

Se van a usar dos tecnologías como razonamiento de las técnicas.

- Curvas de nivel de la Función Objetivo
- Razonamiento geométrico en R^3 (solo al final de la unidad si el tiempo lo permite, y como ampliación para alumnos talentosos en matemáticas, ya que se escapa de los conocimientos mínimos de esta etapa)

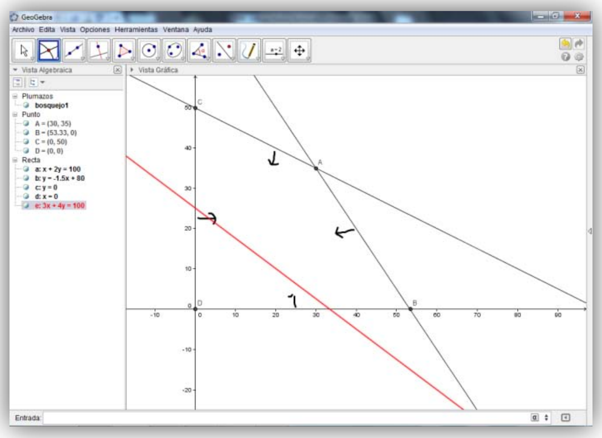
<u>Curvas de nivel de la Función Objetivo</u>

Para justificar que la solución óptima se encuentra siempre en un vértice o en un lado de la región factible usaremos el razonamiento a través de las curvas de nivel resultantes de dar valores a la función objetivo.

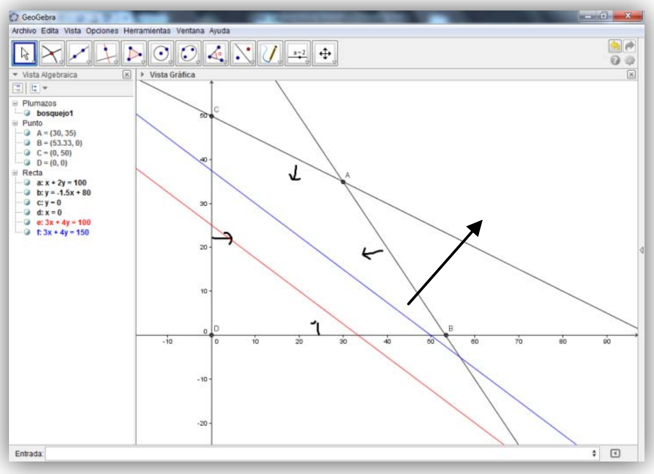
Al igualar la función objetivo a un valor cualquier, gráficamente resultará una recta que representaremos en los mismo ejes que las restricciones anteriormente. Para que los alumnos sean participes de dicho razonamiento se les propondrán puntos preparados de antemano por el profesor pertenecientes a un mismo valor de F(x,y), de manera que vean que todos ellos están alineados en el plano, y por tanto forman una recta. Repetiremos la operación con puntos pertenecientes a dos valores más, de manera que los alumnos observen como esas rectas que se van formando son paralelas entre sí y a su vez crece el valor común de F(x,y) en cada recta en una misma dirección.

Por ejemplo en el caso anterior, si le damos un valor por ejemplo de 100€:

F(x,y) = 3x + 4y → *F(x,y) = 100* → *3x + 4y = 100 (recta roja)*



Si trazamos la recta que iguala F(x,y) = 150, obtenemos una recta paralela a la anterior (recta azul)



Si seguimos aumentando el valor de F(x,y) observaremos que vamos obteniendo rectas paralelas en la dirección de la roja a la azul, mientras que si disminuimos el valor las paralelas aparecen hacia el otro lado.

Éstas rectas paralelas representan los valores (x,y) que hacen que F(x,y) tome un valor determinado, como se observa que dicho valor crece hacia la derecha, la última recta paralela con un punto perteneciente a la región factible es la que pasa por el vértice (30,35) y por tanto ése será el valor máximo, mientras que el valor mínimo estará en el vértice (0,0) con un valor de 0€ para F(x,y).

Por lo tanto, es por eso por lo que los valores extremos de una Función Objetivo están siempre en alguno de los vértices de la región factible, a no ser que las curvas de nivel (rectas paralelas) de la Función Objetivo sean a su vez paralelas a uno de los lados de la región factible, en cuyo caso ambas rectas se superpondrán y serán soluciones todos los puntos contenidos en dicho lado (caso de solución múltiple).

2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

La responsabilidad la ha de asumir el profesor, ya que los alumnos por si mismos no son capaces de justificar el algoritmo de resolución.

Es por ello por lo que será el profesor el que explique, con ayuda del Geogebra, la tecnología de las curvas de nivel de la Función Objetivo, si bien se animará a los alumnos durante la explicación a colaborar en la misma, de manera que sea una explicación lo mas interactiva posible.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Una vez explicado paso a paso la técnica del algoritmo de resolución grafica de problemas como se ha indicado en el punto anterior, se procederá a la justificación de la misma, usando como referencia el problema que se ha llevado a cabo para la explicación del algoritmo, el de los dulces navideños.

Como se ha explicado, la justificación se realizará gráficamente mediante el trazado de curvas de nivel de la Función Objetivo y explicando el significado de las mismas.

Tras la justificación de la técnica se realizarán uno o dos problemas para ponerlo en práctica, y serán los alumnos quienes deberán justificar gráficamente la resolución de los mismos.

Se llevará a cabo en la pizarra, ya sea digital o convencional, con los instrumentos que se precisen, tales como tizas de colores para una mejor visualización por parte del alumno en el caso de la pizarra tradicional.

Si el tiempo disponible para la unidad lo permite, cosa bastante inusual en este curso, se explicará al final de la unidad y como ampliación a los alumnos con especial talento matemático, la justificación geométrica en R^3 de la resolución gráfica de los problemas, como proyección en el R^2 de la Función Objetivo perteneciente a R^3.

G. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

Secuencia:

1. Prueba de evaluación de los conocimientos previos necesarios para la unidad. En caso de ser necesario, repaso de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas, sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas y representación gráfica en ejes cartesianos.

2. Presentación mediante un problema de la razón de ser del objeto matemático.

3. Presentación de los problemas de Programación Lineal, a través de las técnicas y tecnologías explicadas, en el orden establecido y mencionado anteriormente.

2. Establece una duración temporal aproximada.

La duración estimada para la impartición de la unidad será de entre 10 y 12 sesiones, distribuidas de acuerdo al siguiente "timing"

De 1 a 3 sesiones	Prueba de evaluación de los conocimientos previos necesarios para la unidad. En caso de ser necesario, repaso de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas, sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas y representación gráfica en ejes cartesianos.
1 sesión	• Problemas con enunciado tipo texto • Maximizar ó minimizar • una restricción • solución única

4 sesiones	• Problemas con enunciado tipo texto • Maximizar o minimizar • más de una restricción • solución única
1 sesión	• Problemas con enunciado tipo texto • Maximizar o minimizar • más de una restricción • solución múltiple
2 sesiones	• Problemas con enunciado tipo tabla • Maximizar o minimizar • más de una restricción • solución única.
1 sesión	Prueba de Evaluación

H. Sobre la evaluación

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

<u>PRUEBA DE EVALUACION</u>

Pregunta 1 (2 puntos)

Calcula aplicando el algoritmo de resolución gráfica los puntos del plano donde la función $F(x,y) = 3x + y$ alcanza sus valores:

a) *Máximo (1 punto)*

b) *Mínimo (1 punto)*

Cumpliendo las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} -x + y \le 1 \\ x + 2y \le 6 \\ x \ge 0 \ ; \ y \ge 0 \end{cases}$$

Pregunta 2 (4 puntos)

Un pequeño taller se dedica a la fabricación de dos modelos de calzado de señora: botín todo terreno y sandalias dedos frescos.

Cada par de botines fabricados genera unos ingresos de 100€, mientras que cada par de sandalias produce 90€ de ingresos. El taller está dividido en tres departamentos: cortado, cosido y acabado.

Así mismo, las horas de trabajo que requieren cada par de zapatos en los distintos departamentos vienen dadas en la tabla adjunta.

	cortado	cosido	acabado
Botines	7/10	1	1/10
Sandalias	1	2/3	1/4

Si el número de horas semanales disponibles por la empresa en cada uno de los departamentos es de 630, 708 y 135 respectivamente, determina:

a. La región de factibilidad del problema (1 punto)

b. ¿Es posible fabricar 454 zapatos y 336 sandalias en una semana en dicha fabrica? (0,5 puntos)

c. El numero de pares de botines y de sandalias que se han de fabricar para maximizar la ganancia (1,5 puntos)

d. Cual será dicha ganancia máxima (1 punto)

Pregunta 3 (4 puntos)

La empresa “SHAKE” se dedica a la venta de zumos de frutas envasados y ha decidido lanzar al mercado dos nuevos tipos de zumo mezclando dos o más frutas.

- <u>Frutitrío</u>: piña, naranja y plátano
- <u>Frutidúo</u>: naranja y plátano

Un Frutitrío está formado por 8 cl. de jugo de piña, 8 cl. de jugo de naranja y 6 cl. de pulpa de plátano.

Un Frutidúo está formado por 12 cl. de jugo de naranja y 4 cl. de pulpa de plátano.

La empresa cuenta con un máximo disponible de 24 000 cl. de jugo de naranja para la producción ya que no es temporada alta de la naranja, y se sabe que el abastecimiento de los demás concentrados se encuentra garantizado.

a. Si se fabrican 3.000 Frutitríos, ¿Cuántos Frutidúos como máximo se pueden fabricar? (0,75 punto)

Se sabe que la ganancia al vender un Frutitrío es de 1€ y la ganancia al vender un Frutidúo es de 0,8€.

b. Si no es indispensable fabricar ambos tipos de envases ¿Qué cantidad de cada producto le recomendarías al fabricante para obtener una ganancia máxima? ¿Cuál sería dicha ganancia? (1,25 puntos)

Ahora, además de los expuesto hasta ahora, por problemas de transporte se dispone de un máximo de 12.000 cl. de jugo de piña y 10.000 cl. de pulpa de plátano.

c. ¿qué cantidad de Frutitríos y Frutidúos tendrá que fabricar ahora para obtener una ganancia máxima? (2 puntos)

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

- La capacidad de análisis del enunciado de los problemas.

- Capacidad de síntesis de los datos en una tabla resumen.

- Aplicación del algoritmo gráfico de resolución.

- Destreza en el cálculo (sistemas de inecuaciones de primer grado con 2 incógnitas y de sistemas de ecuaciones lineales).

- Orden, coherencia y exactitud en la respuesta final al problema.

3. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

El examen consta de tres problemas de tres tipologías distintas de las vistas en clase, por lo tanto lo que espero en cada uno de ellos que apliquen correctamente el algoritmo gráfico de resolución propuesto, con todos y cada uno de los pasos necesarios en cada uno de los problemas, llegando así a la solución final.

Espero también orden y limpieza en la resolución y claridad en el resultado, escrito en las unidades correspondientes a cada uno de los contextos.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Para que los alumnos tengan claro cómo va a ser evaluada cada pregunta, se indica en cada apartado la puntuación del mismo. Con ello, los alumnos son conscientes de aproximadamente la calificación obtenida en función de cómo les haya salido cada apartado.

No será una calificación de todo o nada, se valorará el esfuerzo del alumno en cada apartado y se harán puntuaciones parciales si no se ha llegado al resultado exacto pero el desarrollo es correcto.

I. Sobre la bibliografía y páginas web

1. Indica los libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo.

<u>LIBROS</u>

- ✓ Labraña Barrero, A. (ed.) (1999). *Álgebra Lineal (Colección Educación Matemática en Secundaria)*. Madrid: Síntesis.

<u>OTRAS FUENTES DE INTERNET</u>

- ✓ Barreras, M. *Optimización con Excel*. Teruel (I.E.S. Matarraña). Recuperado el 29 de noviembre de 2012, de http://www.unizar.es/ttm/2009-10/optimizacion_con_excel.doc.

- ✓ Percier, C. (2010). *¿Cómo las matemáticas ayudan a tomar (buenas) decisiones?.* Zaragoza. Recuperado el 29 de noviembre de 2012, de http://unizar.es/ttm

<u>REVISTAS</u>

- ✓ Malaspina, U. (2009). ¿Programación lineal en primaria?. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 19, pp.157-161.

- ✓ Malaspina, U. (2011).El rincón de los problemas. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 27, pp.163-168.

- ✓ Malaspina, U. (2012).El rincón de los problemas. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 31, pp.131-137.

CONFERENCIAS

- ✓ Reaño, C. (2011). Introducción a la programación lineal. Una mirada desde la Teoría de Situaciones Didácticas. Perú.

PAGINAS WEB

- ✓ *Sociedad andaluza de educación matemática Thales*. http://thales.cica.es
- ✓ *Vitutor*. www.vitutor.com
- ✓ *Aula matemática digital*. http://www.aulamatematica.com
- ✓ *Página oficial del software Geogebra*: http://www.geogebra.org
- ✓ *Pagina web Universidad de Valencia*: http://www.uv.es
- ✓ *Pagina web del Taller de Talento Matemático de la Universidad de Zaragoza*. www.unizar.es/ttm
- ✓ *Wikipedia*. www.wikipedia.org
- ✓ *Pagina web del departamento de Educación, Universidad, cultura y deporte del Gobierno de Aragón*. www.educaragon.org

LIBROS DE TEXTO

- ✓ Soler, J., Nevot, A., Rodríguez, R. (2003). Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. Madrid: Mc. Graw Hill