MÁSTER EN PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA PARA ESO Y BACHILLERATO. ESPECIALIDAD: MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

LA INTEGRAL DEFINIDA

I.Álvaro Gutiérrez

30 de enero de 2013

Índice

En este trabajo fin de máster se justifica y se esboza una propuesta de enseñanza de **la integral definida** en un segundo curso de bachillerato.
Corresponde al trabajo final del "máster de profesorado de enseñanza secundaria para ESO y bachillerato"de la especialidad de matemáticas; impartido por la facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza.
Vamos a hablar del curso y de la asignatura en la que se sitúa el estudio de la integral definida y de su problemática de enseñanza. A continuación, hablaremos de los conocimientos previos necesarios y se introducirá la razón de ser del objeto matemático. Veremos las concepciones históricas de la integral, se introducirán los campos de problemas que vamos a tratar, las técnicas y tecnologías asociadas a dichos campos, se comentará la metodología a utilizar y finalmente se realizará una propuesta de evaluación sobre los los resultados de aprendizajes de los alumnos.

A. Definición del objeto matemático

A.1. Curso y asignatura

El objeto matemático de este trabajo fin de máster es **la integral definida.** El propósito es tratar este tema en el segundo curso de un bachillerato científico, como está previsto en la ***ORDEN de 1 de julio de 2008,*** *del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón.*

Según dicha Orden, este objeto matemático pertenece al bloque de contenidos de análisis matemático.

A.2. Problemáticas de enseñanza. Propuesta alternativa

Diferentes estudios sobre la enseñanza del concepto de integral definida, han puesto de manifiesto limitaciones en la comprensión de los estudiantes referidos a éste objeto matemático.

Así, por ejemplo, del análisis de libros de texto se desprende que los conceptos teóricos resultan demasiado dificiles a la mayoría de los alumnos:

> *"...los aspectos teóricos relacionados con el concepto de integral, tal como aparece por ejemplo en la mayoría de los libros de texto, resultan demasiado complejos para muchos de nuestros alumnos, la mayoría de los cuales no entiende el porqué del enorme esfuerzo deductivo al que, de pronto se les somete"* Azcárate (1996)

Los problemas que surgen en los estudiantes se refieren principalmente a una inadecuada interpretación e interconexión entre las definiciones teóricas y las diferentes representaciones que de ellas se les presentan:

> *"El aprendizaje del concepto de Integral Definida,..., presenta dificultades para los estudiantes que se manifiestan mediante la utilización mecánica, algorítmica y memorística de su definición; no logran establecer una conexión entre el pensamiento numérico, algebraico, geométrico y analítico; tienen problemas para interpretar las gráficas de áreas bajo curvas ...; en otros casos piensan la integral sólo asociada al concepto de área pero aislada de otros contextos; y muestran dificultades para aplicar las propiedades de la Integral Definida."* Aldana(2001, p.20)

Siguiendo este autor, los problemas de aprendizaje de los estudiantes se sintetizan principalmente en:

§1.- **Los estudiantes identifican *integral* con *primitiva*.** El hecho de probar y utilizar el teorema fundamental del cálculo demasiado pronto, sin un adecuado asentamiento de los conceptos, conduce a esta simplificación.

"La integral para ellos no comporta ningún proceso de convergencia ni tampoco un aspecto geométrico. Es por tanto, un proceso puramente algebraico, más o menos complicado, de modo que un estudiante puede conocer diversas técnicas de integración e incluso saberlas aplicar, y al mismo tiempo, no ser capaz de aplicarlas al cálculo de un área o ignorar por completo qué son las sumas de Riemann. La primera imagen que evocan muchos estudiantes sobre Integral es la de hallar una función de la que se conoce la derivada". Aldana(2001, p.20)

§2.- **Los estudiantes identifican la *integral definida* con la *regla de Barrow*.** Tienden a pensar que la integral definida no es mas que una primitiva que se evalua en los extremos de integración. Es paradigmático los resultados encontrados por Mundy (1984), donde un alto porcentaje alto de estudiantes no supo responder a la cuestión: ¿Porqué

$$\int_{-1}^{1} x^{-2}dx = [\,-x^{-1}]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$$

es incorrecto?

§3.- **Falta de relación entre el concepto de *integral definida* y el concepto de *área.*** No asocian la integral definida con el área bajo la curva. Por no conocer los conceptos previos necesarios sobre represeentaciones gráficas de funciones. *"En este sentido, Mundy (1984) encontró también que un* 95 % *de los estudiantes respondieron incorrectamente a la cuestión: Calcula*

$$\int_{-3}^{3} |x+2|dx$$

en la que les planteó varias opciones de respuesta; porque no saben integrar la función valor absoluto y no han logrado establecer una relación entre la representación algebraica formal y la visualización gráfica de la función". Aldana(2001, p.21)

En nuestra propuesta didáctica, planteamos la introducción de la integral definida como una generalización del cálculo de áreas de figuras planas encerradas por una curva cualquiera; y en concreto como una herramienta para el cálculo del área bajo la gráfica de una función real de variable real $y = f(x)$ (representada en unos ejes cartesianos) y el eje OX, entre dos valores dados a y b del parámetro x.

Convenimos con Azcárate (1996 p.124) en que:

> *"Se pueden plantear problemas de cálculos de áreas más complejos, resolver algunos problemas físicos, o también, utilizar un proceso matemático tan fundamental como es el cálculo mediante aproximaciones sucesivas con series numéricas"*

En este sentido, nos ceñiremos al **cálculo de áreas limitadas por una curva** en unos ejes cartesianos y su aplicación a la resolución de diferentes problemas físicos. El objetivo es que los alumnos intuyan la necesidad de utilizar la integración en cualquier problema en el que una magnitud evoluciona en función de otra magnitud variable.

Esta forma de introducir la integral definida, permite asentar en el alumno la idea, que la integral no es mas que un forma de **asignar un número** o medir unos determinados recintos mas o menos irregulares, por aproximaciones sucesivas de unos recintos regulares facilmente medibles. Además en los distintos grados de aproximación hay un proceso de convergencia, de paso al límite, de manera que en determinadas condiciones , dicha asignación es independiente del proceso de aproximación seguido.

En resumen, con esta propuesta se presenta la integral mediante **métodos geométricos y aritméticos**, antes que analíticos.

Sólamente a posteriori y tras trabajar varios ejemplos, se introduce la función área, y surge que en determinadas condiciones, para funciones suficientemente regulares, la integral definida puede calcularse utilizando una función anti-derivada o función primitiva de la función dada, lo cual facilita enormemente los cálculos.

En palabras de Azcárate (1996, p.124):

> *"De esta manera, cuando estudien el teorema fundamental del cálculo, van a considerarlo como una relación inesperada y útil entre las estructuras matemáticas de integración y derivación, aparentemente independientes"*

De este modo, planteamos introducir la integral definida como el objeto matemático que resuelve la medida del cálculo de áreas y enseñar este significado antes del cálculo de primitivas.

Esta propuesta de enseñanza **se ajusta mas al proceso histórico** en el que surgieron los conceptos. El método de exhaución de Arquímedes para el cálculo del área bajo un segmento de parábola, es en esencia el mismo que se utilza hoy en día para aproximar la integral definida.

La construcción de tangentes y el concepto de derivada es muy posterior; y no fue hasta el siglo XVII (con Barrow, Newton y Leibniz) que se relacionan ambos conceptos

Por ello es conveniente **estudiar el concepto de integral definida independiente del concepto de derivada**, incluso puede hacerse antes (coincidiendo con el origen histórico), y evitar, de este modo, las dificultades de aprendizaje mencionadas anteriormente. Así, se rompe el orden de presentar este contenido curricular en los libros de texto de bachillerato.

También cabe reseñar que el cálculo exhaustivo de primitivas, usando los diferentes métodos de integración tradiconales, será cada vez menos necesaro en la medida que se generalice, el uso de **programas de software de cálculo simbólico**, que resuelven el problema de forma cada vez más avanzada.

Igualmente los programas de tipo gráfico cada vez más avanzados, permiten una mayor visualización geométrica de los problemas, y considerar justificaciones intuitivas con programas de geometría dinámica, como veremos a lo largo del presente trabajo. Ver Sada1, Sada2 (2007).

En este trabajo, nos proponemos introducir el concepto de integral definida y dejar fuera de este estudio, nociones que a nuestro juicio y según algunos investigadores: **Aranda (2011), Turégano (1998) o Porres (2011)**; deberían ser estudiados posteriormente; como son: el cálculo de primitivas o determinadas aplicaciones de la integral definida al cálculo de áreas y volúmenes de superficies de revolución.

B. Conocimientos previos

Suponemos que a estas alturas del currículum, durante la educación secundaria obligatoria y el bachillerato, los alumnos están ya suficientemente familiarizados con el cálculo de áreas de figuras planas, límites de sucesiones y de funciones, continuidad y derivabilidad.

Los estudiantes a lo largo de la enseñanza secundaria obligatoria han trabajado en diversas ocasiones sobre la idea intuitiva de área, han calculado áreas de diversas superficies poligonales con cierto grado de regularidad, e incluso han estudiado algunos tipos de teselaciones.

Pensamos en consecuencia, que los principales conocimientos previos necesarios para una exitosa introducción del objeto matemático *"integral definida"* pueden ser:

(a) Saber calcular el área de las principales regiones planas regulares.

(b) Conocer las propiedades de las funciones.

(c) Conocer el concepto de límite.

(d) Saber calcular los límites de funciones en casos elementales.

(e) Conocer el concepto de derivada primera de una función.

(f) Saber calcular las derivadas primeras de funciones en casos elementales.

Trataremos de asegurar que los alumnos posean estos conocimientos previos, mediante algunas actuaciones:

- ⋆ Convendría realizar algún tipo de **evaluación diagnóstica inicial** para "saber a priori el grado de conocimiento que los alumnos tienen de ellos". Azcárate (1996, p.127). Se pueden recordar áreas de figuras planas, o poner ejemplos de figuras isoperimétricas (igual perímetro) y diferente área, o al contrario, de igual área y diferente perímetro.

- ⋆ Se valorará desarrollar la actividad enunciada en el Anexo A, para trabajar una aproximación al problema del cálculo del área.

- ⋆ Igualmente se puede evaluar la idea que tienen de límite, de continuidad y derivabilidad, no sólo con ejemplos de cálculo de límites o derivadas sencillas, sino también con alguna aproximación y estimación de error, que asiente la idea de convergencia.

Estas evaluaciones iniciales pueden realizarse mediante tests sencillas, utilizando instrumentos del tipo *rúbrica*, o *reaction paper* durante las primeras sesiones de la unidad didáctica. Morales (2010)

C. Razón de ser del objeto matemático

Situamos el origen histórico de este objeto matemático en **"el problema del cálculo del área".**

El estudio fenomenológico de la integral definida, Turégano (1998), establece tres concepciones diferentes de este concepto a lo largo de la historia relacionados con el problema del cálculo del área:

§1.- **Antes del siglo XVIII** encontramos numerosos ejemplos de cálculos de áreas bajo curvas, que fueron realizados con independencia del trazado de tangentes. Éste es el primer concepto de integral definida: *"cuadratura con independencia de tangentes"*.

§2.- **A partir de la obra de Euler (1707-1783)**, aparecen las funciones en lugar de las curvas como objeto de estudio, lo que permitió la gradual aritmetización del análisis y su consecuente separación de la geometría. El problema de la integración era el de determinar una función primitiva $F(x)$ que tuviera como derivada $f(x)$. Durante el siglo XVIII y parte del XIX, el cálculo integral es definido como el inverso del diferencial.

§3.- **Durante el siglo XIX** se produce un cambio conceptual de lo que es una función: se acepta la definición de función de una variable real como correspondencia arbitraria entre números reales.

Cauchy (1789-1857) presenta una definición de integral *"como límite de una suma"*, y una formulación rigurosa del teorema fundamental del cálculo.

La definición de integral como límite de una suma nace en un contexto de fundamentación teórica pero, una vez definida, se prescinde de ella para abordar las aplicaciones.

Lebesgue, en los primeros años del siglo XX, precisa las indicaciones de Borel sobre la definición de Peano-Jordan y expone su teoría de la medida, que ha sido muy fecunda y ha servido de base para la teoría más general de integración. Regresamos a los métodos intuitivos anteriores a Cauchy, pero la definición de medida les da una fundamentación lógica sólida.

Una revisión histórica de la integral definida y su relación con el cálculo de áreas se detalla en el Anexo B.

Como hemos observado, **el cálculo de áreas** fue el problema que dió origen al objeto matemático Integral definida.

Las dos primera concepciones descritas en §1.- y §2.- son las que vamos a tratar en este trabajo. En principio, definiremos la integral definida como el área bajo una curva (en un proceso de paso al límite) siguiendo la primera de las concepciones. Posteriormente conectaremos la integración con la derivación, siguiendo la segunda concepción, al utilizar como nexo de unión la función área.

D. Campo de problemas

En este trabajo consideraremos dos campos de problemas:

D1.- ***La integral como el área encerrada bajo una curva.***

D2.- ***Conexión entre la integral y la derivada mediante la función área.***

D.1. Aproximación del área encerrada bajo una curva.

Nos planteamos un método de aproximación numérica del área encerrada por la gráfica de una función real de variable real $f(x)$ y el eje de abscisas entre dos valores cualesquiera del parámetro x. Se presentarán en los siguientes subpárrafos las situaciones para introducir el concepto de integral definida:

D.1.1. Función constante.

Nos planteamos el cálculo del área bajo la gráfica de una función constante. En este caso el problema es evidente, ya que el recinto considerado es un rectángulo, y por tanto el área del recinto es el área de dicho rectángulo que es la longitud del dominio multiplicado por la constante.

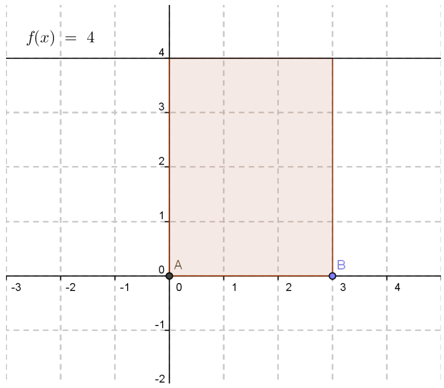

Figura 1: Función constante

Planteamos es siguiente problema:

Problema D.1 *Un móvil circula a una velocidad constante de $4Km/h$ durante 3 horas; esto es, el móvil se desplaza a una velocidad constante $v(t) = 4$ durante el inntervalo temporal $[0, 3]$. Se pide:*

(a) Representa la gráfica de la función $v(t)$ en unos ejes cartesianos.

(b) Dibuja el rectángulo formado por los puntos:

$$(0, v(0)), \quad (3, v(3)), \quad (0, 0) \text{ y } (3, 0)$$

Definición D.1 *Se define* ***área bajo la función*** *$f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ al área de la región plana comprendida entre la función $f(x)$, el eje de abscidas, y las rectas $x = a$ y $x = b$.*

(c) Calcula el área bajo la función $v(t)$ en el intervalo $[0, 3]$ por geometría elemental.

(d) ¿Qué representa el área bajo la gráfico velocidad-tiempo de la figura? ¿En qué unidades de medida se expresa?

En algunas ocasiones es interesante calcular el área de una función donde el valor de la constante toma diferentes valores en intervalos diferentes. Veamos un ejemplo:

Problema D.2 *Supón ahora que el móvil se desplaza a una velocidad de $v(t) = 60Km/h$ durante 3 horas y a $100Km/h$ las 2 horas siguientes.*

(a) Dibuja una gráfica velocidad-tiempo.

(b) Calcula el área bajo la función $v(t)$ a partir de la gráfica.

(c) ¿Cuál es la distancia recorrida por el móvil en el intervalo $[0, 3]$? ¿y en el intervalo $[3, 5]$? ¿en que intervalo de tiempo recorre mayor distancia?

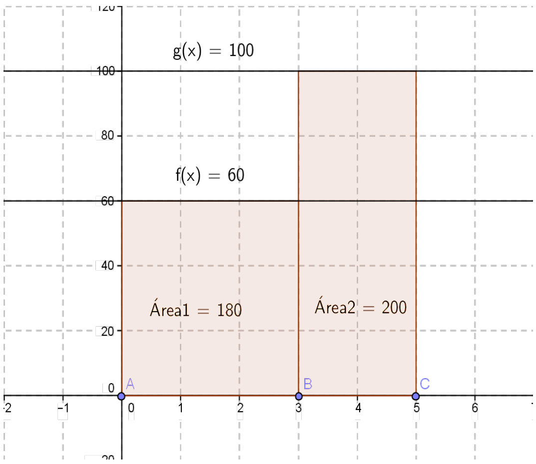

Figura 2: Función escalonada

Para cualquier función constante genérica, la situación es análoga. Proponemos por ejemplo:

Problema D.3 *Considera la función constante $f(x) = k$ definida en un intervalo $[a, b]$, cuya representación gráfica es la de la figura. Comprueba por un procedimiento gemétrico que el área bajo la curva viene dada por:*

$$\acute{A}rea = (b - a) \cdot k \tag{1}$$

En los problemas anteriores se constata que una función aparentemente trivial como el de la función constante, conlleva interesantes interpretaciones. Se pueden plantear ejemplos en los que la magnitud representada por el área sea más sencilla de interpretar.

Por ejemplo, la cantidad de tejido que produce una determinada empresa textil por unidad de tiempo, sabiendo que la produción es constante a $r\ m^2/minuto$.

El volumen de agua que obtenemos de un grifo abierto en un tiempo t, sabiendo que el agua fluye de forma constante a razón de 12 $m^3/minuto$.

La cantidad de luz que recibe una planta en un intervalo de tiempo t, suponiendo que la luz es recibida de forma constante a 1000 $lux/hora$; e infinidad de otros ejemplos que puedan plantearse, algunos de los cuales trataremos en esta memoria.

En todos los casos es conveniente realizar un análisis dimensional de las magnitudes bajo consideración, para conocer mejor la dimensión de la magnitud que representa el área bajo la curva.

Por ejemplo, en el problema de la velocidad y en el problema del grifo, se tiene:

$$\frac{kilometros}{horas} \times horas = kilometros \qquad \frac{litros}{horas} \times horas = litros$$

♠ **Institucionalización**. En definitiva, con estas situaciones ha aparcido la definición de área bajo una curva definida por una función en un intervalo, y se ha calculado el área en estos problemas elementales mediante el conocimiento geométrico del área de un rectángulo.

D.1.2. Función lineal y afín.

Nos planteamos a continuación el problema del cálculo del área bajo la gráfica de una función lineal $f(x) = m \cdot x$ en un intervalo $[a, b]$.

Proponemos como ejemplo el problema de la caida de un cuerpo por efecto de la gravedad:

Problema D.4 *Supongamos despreciable la resistencia del aire, y que la velocidad del cuerpo viene dada aproximadamente por $v(t) = 10 \cdot t$ metros/segundo, donde t es el tiempo expresdo en segundos. Deseamos aproximar la distancia recorrida entre $t = 0$ y $t = 4$ segundos. Se plantean las siguientes cuestiones:*

(a) Representa graficamente la función $v(t)$.

(b) Representa graficamente el área encerrada bajo la gráfica de la función $v(t)$ en el intervalo $[0, 4]$.

(c) Calcula el área bajo la gráfica de la función $v(t)$.

(d) Expresa el significado del área bajo la función e indica la magnitud de medida de dicha área bajo la gráfica de la función.

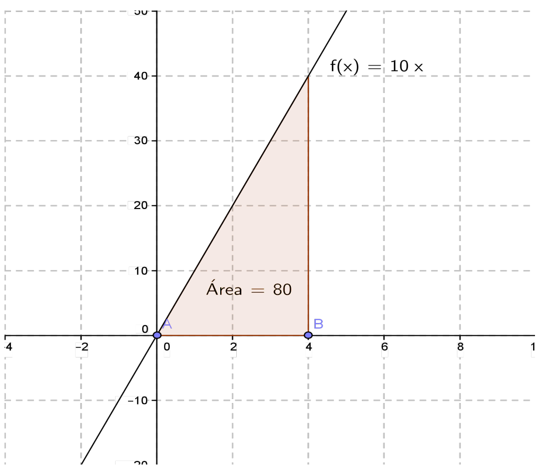

Figura 3: Función lineal

Se pueden plantear problemas similares en otros contextos. Por ejemplo, es conocido que la fuerza elástica ejercida por un muelle es proporcional al desplazamiento y viene dada por $F(x) = -k \cdot x$ donnde x es la distancia recorrida. En un gráfico fuerza-desplazamiento, el área encerrada por esta función lineal es justo **el trabajo realizado** para comprimir el muelle una determinada longitud.

Supongamos finalmente el caso de una función afín $f(x) = mx + n$ en un intervalo $[a, b]$. Podemos motivar esta situación con el siguiente problema:

Problema D.5 *Considera un tren que viaja a una velocidad constante* $80\ Kilómetros/hora$, *y en un determinado momento, justo cuando lleva una hora de trayecto, se ve obligado a frenar por una avería mecánica. Suponer que el tren tiene una velocidad de frenado muy lenta de* $v(t) = 100 - 20 \cdot t\ Km/h$, *se pide:*

(a) *Dibuja la gráfica velocidad-tiempo del tren durante* 3 *horas, desde el instante en que empieza a frenar. (Suponer la unidad de velocidad de* $20\ Km/h$*).*

(b) *Calcula el área del trapecio formado bajo la gráfica.*

(c) *¿Qué distancia ha recorrido el tren en esas dos horas?*

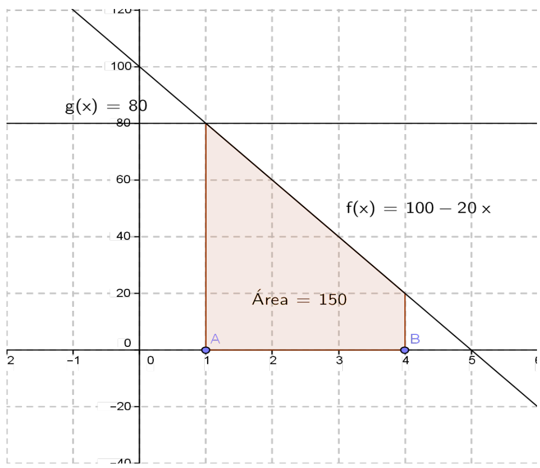

Figura 4: Función afín

También se puede generalizar el problema anterior a una función afín cualquiera:

Problema D.6 *Dada la función* $f(x) = m \cdot x + n$ *definida en un intervalo* $[a, b]$*. Comprueba que:*

(a) *El área de la función bajo la gráfica viene dada por:*

$$Área = \frac{1}{2}(mb + ma + 2n) \cdot (b - a) \tag{2}$$

(b) *En el caso de tratarse de un función lineal $f(x) = mx$ se obtiene:*

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2}(mb + ma) \cdot (b - a) \tag{3}$$

(c) *En el caso de tratarse de la función identidad $f(x) = x$ se obtiene:*

$$\acute{A}rea = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \tag{4}$$

♠ **Institucionalización**. Con estas situaciones se ha calculado el área bajo una función afín mediante los conocimientos geométrico elementales del cálculo área de un triángulo o de un trapecio.

D.1.3. Área bajo un arco de parábola

En la introducción histórica ya hemos explicado que en una carta a Doisteo, Arquímedes expone un método para calcular el área bajo un segmento de parábola. El método seguido por Arquímedes contiene los fundamentos básicos de lo que hoy conocemos como cálculo integral.

El procedimiento consiste en aproximar el valor del área mediante suma de rectángulos.

Problema D.7 *Considera la función $f(x) = x^2$ enel intervalo $[0, 4]$. Proponemos contestar a las siguientes cuestiones para calcular el área bajo esta función en el intervalo $[0, 4]$:*

(a) *Subdivide el intervalo $[0, 4]$ en 4 subintervalos de longitud 1 y calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x) = x^2$ en cada subintervalo.*

(b) *Dibuja los rectángulos que tienen por base la amplitud del subintervalo y por altura el máximo de la función en el subintervalo. Se denominaran* ***rectángulos superiores***

(c) *Dibuja los rectángulos que tienen por base la amplitud del subintervalo y por altura el mínimo de la función en el subintervalo. Se denominaran* ***rectángulos inferiores***

(d) *Calcula la suma de las áreas de los rectángulos superiores y la suma de las áreas de los rectángulos inferiores.*

(e) *El área bajo la gráfica de la función será un número comprendido entre la suma de los rectángulos inferiores y superiores. Calcula dicha aproximación.*

(f) *Considera ahora una subdivisión en 8 subintervalos de longitud $\frac{1}{2}$ y repite el proceso. (apartados (a), (b), (c), (d) y (e)).*

(g) *Considera ahora una subdivisión en 40 subintervalos de longitud $0,1$ y repite el proceso.*

(h) *¿Observas algún tipo de regularidad?*

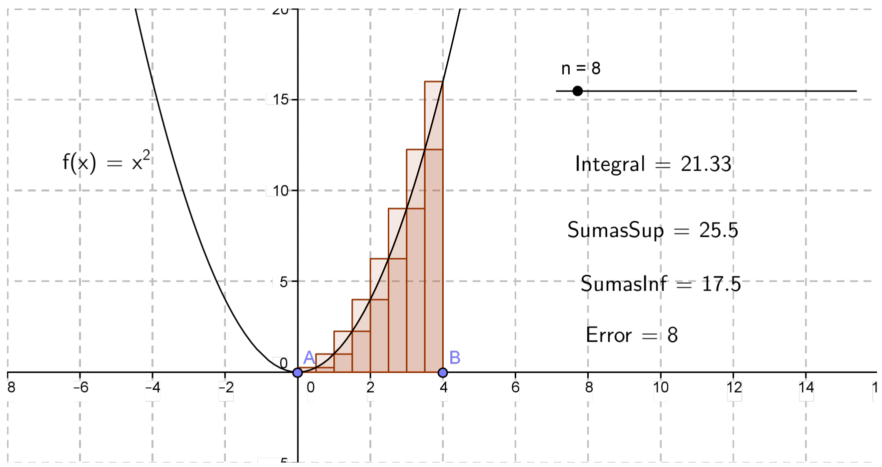

Figura 5: Arco de parábola

Este método muestra claramente una aproximación sucesiva del área de la parábola, por las áreas de los rectángulos inferiores y superiores.

A partir del problema anterior se observa inmediatamente que al aumentar progresivamente el tamaño de la subdivisión con mayor número de rectángulos de base progresivamente menor se consiguen sucesivamente aproximaciones del área cada vez más ajustadas.

Nos planteamos generalizar este proceso a una partición con un número genérico de subintervalos, y el comportamiento en un proceso de paso al límite:

Problema D.8 *Considera la función $f(x) = x^2$ del apartado anterior en el intervalo $[0, 4]$. Se pide:*

(a) Representa graficamente la función y el área bajo la gráfica en el intervalo considerado.

(b) Considera una subdivisión en $4n$ subintervalos de longitud $\frac{1}{n}$. Calcula el área de los rectángulos superiores e inferiores en función de n. ***Ayuda:*** *Se verifican las fórmulas:*

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{5}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \tag{6}$$

(c) Toma límites cuando $n \to \infty$ y comprueba que las sumas superiores e inferiores ambas convergen a $\frac{64}{3}$. Esto es:

$$\lim_{n\to\infty} S_{inf}(n) = \lim_{n\to\infty} S_{sup}(n) = \frac{64}{3}$$

Este procedimiento algebraico que realizan los estudiantes se puede visualizar rápidamente mediante el uso de applets elaborados con el software Geogebra. En la sección (E) se detalla el modo de construir uno de estos applets, o puede igualmente consultarse la referencia: Sada1 (2007).

Si el estudiante cambia el intrvalo de definición de la función, puede constatar probando con diferentes valores que en un intervalo $[a, b]$ se obitiene siempre:

$$\acute{A}rea = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \tag{7}$$

D.1.4. Función potencial genérica

El mismo proceso que el efectuado con la función $f(x) = x^2$, se puede realizar con una función potencial $f(x) = x^k$ cualquiera. Se plantea la siguiente actividad:

Problema D.9 *Utiliza el software Geogebra y el guión expuesto en la sección (E). Calcula el área bajo una función potencial $f(x) = x^k$ en el intervalo $[0, 1]$ para diferentes valores de k; siguiendo el proceso:*

(a) *Calcula el área bajo la función $f(x) = x^2$ y comprueba que se aproxima a $0,33$.*

(b) *Calcula el área bajo la función $f(x) = x^3$ y comprueba que se aproxima a $0,25$.*

(c) *Calcula el área bajo la función $f(x) = x^k$ para valores $k = 4, \ldots, 9$.*

(d) *Conjetura una fórmula para el área de la función $f(x) = x^k$ en el intervalo $[0, 1]$.*

El alumno puede observar e interpretar las variaciones del valor de las sumas inferiores y superiores respecto al valor real, para una partición en 10 subintervalos de longitud $\frac{1}{10}$, , según los distintos valores de k.

D.1.5. Área bajo otras funciones

La misma técnica puede aplicarse para calcular el área definida bajo la gráfica de una función $y = f(x)$ cualquiera. Planteamos a los alumnos el siguente problema:

Problema D.10 *Considera la función $f(x) = 1 + \cos(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$, donde suponemos que la magnitud de la variable x esta expresada en radianes. Se pide:*

(a) *Calcula los máximos y mínimos de la función $f(x) = 1 + \cos(x)$ en los intervalos $[0, \frac{\pi}{4}]$ y $[\frac{\pi}{4}, \pi]$.*

(b) *Calcula las áreas de los rectángulos de base los intervalos anteriores y altura los máximos y mínimos alcanzados. Deduce una aproximación del área encerrada bajo la curva.*

(c) *Realiza una tabla con los máximos y mínimos de la función en intervalos de longitud $\frac{\pi}{6}$.*

(d) *Calcula las áreas de los rectángulos de base $\frac{\pi}{6}$ y altura los máximos y mínimos alcanzados. Deduce una aproximación del área encerrada bajo la curva.*

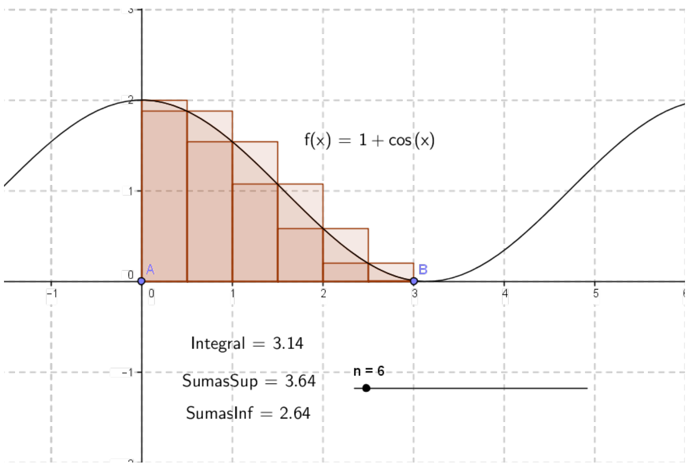

Figura 6: Función sinusoidal

(e) *Realiza el mismo proceso de (c) y (d) si se realiza una subdivisión en intervalos de longitud $\frac{\pi}{12}$. Utiliza Geogebra para comprobar las aproximaciones obtenidas. ¿Qué número es el área buscada?*

El mismo método se puede aplicar para calcular aproximaciones del **Área del círculo**, y en particular, tomando un círculo de radio 1, calcular **aproximaciones del número** π. Se plantea el siguiente problema:

Problema D.11 *Considera el primer cuadrante del círculo unidad, y realiza una subdivisión del intervalo* $[0,1]$ *en cinco subintervalos de longitud* $0,2$. *Se pide:*

(a) *Prueba que las ordenadas de las alturas de la partición vienen dadas por:*

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 1^2} \quad y_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 2^2} \quad y_3 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 3^2} \quad y_4 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 4^2}$$

(b) *Calcula las sumas superiores e inferiores de la partición. (**Nota:** Observa que en la suma inferior hay un rectángulo menos)*

(c) *Multiplica pr* 4 *para obtener una aproximación de* π *asociada a esta subdivisión y el error máximo cometido.*

(d) *Generaliza las sumas superiores e inferiores a una partición del intervalo* $[0,1]$ *en* n *partes para obtener:*

$$\frac{4}{n^2} \cdot \Sigma_{i=1}^{n} \sqrt{5^2 - i^2} < \pi < \frac{4}{n^2} \cdot \Sigma_{i=0}^{n} \sqrt{5^2 - i^2}$$

(e) *Utiliza Geogebra para dibujar la gráfica de la función* $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *en el intervlo* $[0,1]$ *y multiplica por* 4 *para obtener aproximaciones de* π *para* $n = 5, 10, 15, 100, 1{,}000$ *y* $10{,}000$.

(f) *Calcula el mínimo valor de* n *necesario para obtener una aproximación de* π *con un error menor que* $\frac{1}{10000}$.

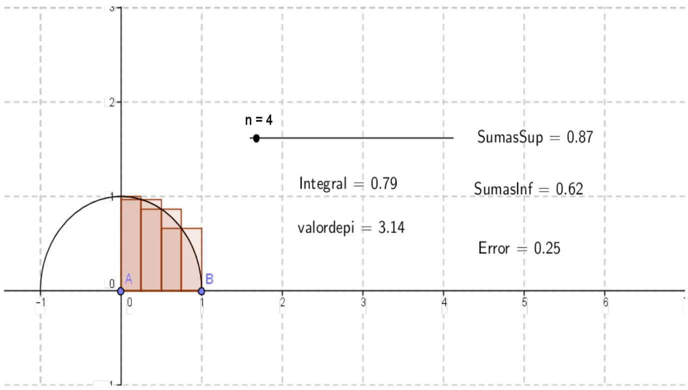

Figura 7: Área del círculo

Como curiosidad, el profesor puede señalar otro método muy conmunmente utilizado para calcular el area del círculo y aproximaciones del número π. Concretamente el método basado en usar polígonos regulares inscritos y circunscritos, con un número de lados creciente.

Arquímedes utilizó polígonos regulares de hasta 96 lados para obtener una aproximación de π de la forma: $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$. Históricamente sucesivas aproximaciones de π están basadas en este método. En el siglo VI los hindúes osbtuvierón el valor $3,1416018$ con polígonos de 768 lados; y en 1.953, Viète encontró un valor de π con once cifras decimales exactas: $3,14159265358$, utilizando el polígono de 393,216 lados. Ver Azcárate (1996)

D.1.6. Proceso de institucionalización.

El mismo proceso descrito en la sección anterior para la aproximación de las áreas encerradas bajo funciones afines o potenciales puede realizarse igualmente el cálculo del **área encerrada bajo una función continua** cualquiera $y = f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Se pueden realizar aproximaciones sucesivas con funciones escalonadas superiores e inferiores que aproximan progresivamente el área encerrada por la curva.

Todavía mas, se puede inferir un proceso de paso al límite de manera que cuando la partición es sucesivamente más fina, el área encerrada bajo las funciones escalonadas converge a un número real que es el que se considera como el valor del área encerrada bajo la curva.

Para facilitar la notación, dicho valor numérico lo denotaremos con la expresión usual:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{"}\textit{área bajo la la curva } y = f(x)\text{"} \tag{8}$$

o simplemente para simplificar: $\int_a^b f$.

Así por ejemplo, según lo expuesto en los apartados anteriores, con la función constante $y = k$ se obtiene:

$$\int_a^b kdx = k \cdot b - k \cdot a \tag{9}$$

Con la función lineal $y = x$ se obtiene (Ver (4))

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \tag{10}$$

Con la parábola $y = x^2$ en un intervalo $[a, b]$ se obtendría (Ver ecuación (7)):

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \tag{11}$$

y finalmente para una función potencial cualquiera, siguiendo el problema D.9, puede conjeturarse la fórmula:

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1} \tag{12}$$

El signo $\int$ significa la suma (una S degenerada) y significa en este caso, la suma de los infinitos rectángulos de altura $f(x)$ y base infinitesimal dx.

Veamos los conceptos que hemos definido con más detalle:

Definición D.2 *Una **partición** o **subdivisión** del intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito de números reales $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ que verifican la condición:*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Para mejor entender los conceptos, en muchas ocasiones es conveniente considerar una partición en la que todos los puntos sean equidistantes, de forma que el intervalo $[a, b]$ queda subdividido en n sub-intervalos de longitud constante $\frac{b-a}{n}$.

Definición D.3 *Dada una partición $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$, una **función escalonada** es una función $E \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ que es constante en cada subintervalo $(x_{i-1}, x_i]$; es decir:*

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & si\ a = x_0 \leq x \leq x_1 \\ e_2 & si\ x_1 < x \leq x_2 \\ \ldots & \\ e_i & si\ x_{i-1} < x \leq x_i \\ \ldots & \\ e_n & si\ x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases} \qquad e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{R} \tag{13}$$

Es claro que el área encerrada bajo una función escalonada es la suma del área de los n rectángulos que la forman; es decir:

$$\int_a^b E(x) dx = \sum_{i=1}^{n} e_i (x_i - x_{i-1}) \tag{14}$$

Se puede comprobar facilmente que el área de una función escalonada es independiente de la partición utilizada, y es aditiva; esto es el área de la suma bajo dos funciones escalonadas es la suma de las áreas bajo cada una de ellas.

Consideremos ahora $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Denotaremos M_i y m_i el mayor y el menor valor que toma la función $f(x)$ en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. su existencia esta garantizada dado que f es una función continua definida en un interval cerrado y acotado.

Los alumnos pueden poner ejemplos en los que comprueben que funciones continuas usuales siempre alcanzan máximos y mínimos en intervalos cerrados.

Definición D.4 *Dada una función continua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y una partición $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$, se define la* ***función escalonada superior*** *asociada a la partición, o simplemente* ***rectángulos superiores*** *a la función:*

$$S(x) = \begin{cases} M_1 & si\ a = x_0 \le x \le x_1 \\ M_2 & si\ x_1 < x \le x_2 \\ \ldots & \\ M_n & si\ x_{n-1} < x \le x_n \end{cases} \tag{15}$$

y la ***función escalonada inferior*** *o simplemente* ***rectángulos inferiores*** *a la función:*

$$s(x) = \begin{cases} m_1 & si\ a = x_0 \le x \le x_1 \\ m_2 & si\ x_1 < x \le x_2 \\ \ldots & \\ m_n & si\ x_{n-1} < x \le x_n \end{cases} \tag{16}$$

Definición D.5 *Las áreas bajo la función escalonada superior vienen dadas por:*

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \tag{17}$$

y se denominan ***Sumas Superiores***

Definición D.6 *Las áreas bajo la función escalonada inferior vienen dadas por:*

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \tag{18}$$

y se denominan ***Sumas Inferiores***

Se comprueba inmediatamente que dichas áreas suponen una aproximación del área bajo la función $f(x)$; es decir:

$$\int_a^b s(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b S(x)dx \tag{19}$$

Para fijar ideas, vamos a considerar particiones en los que los puntos son todos equidistantes a una distancia $\frac{b-a}{n}$ y veamos que ocurre cuando hacemos n tan grande como queramos; es decir la base de los rectangulos de las funciones escalonadas son cada vez más pequeños, y convergen a 0. La situación con una partición cualquiera sería análoga; pero la notación sería más engorrosa.

En definitiva, tenemos dos sucesiones de números reales $\{\int_a^b S_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\int_a^b s_n\}_{n=1}^{\infty}$ en las que se verifica la desigualdad $\int_a^b s_n \leq \int_a^b f \leq \int_a^b S_n \quad \forall\, n$.

Pueden comprobarse facilmente los siguiente lemas:

Lema D.1 *La sucesión de números reales $\{\int_a^b s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y acotado superiormente.*

En efecto al aumentar el tamaño de la partición se cumple $\int_a^b s_n \leq \int_a^b s_{n+1}$ y $\int_a^b f$ es una cota superior.

Lema D.2 *La sucesión de números reales $\{\int_a^b S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente.*

Igualmente, al aumentar n se verifica $\int_a^b S_n \geq \int_a^b S_{n+1}$ y $\int_a^b f$ es una cota inferior.

Lema D.3 *La sucesión de números reales $\{\int_a^b S_n dx - \int_a^b s_n dx\}_{n=1}^{\infty}$ converge a* 0.

Este lema se puede ejemplificar utilizando la definición de límite.

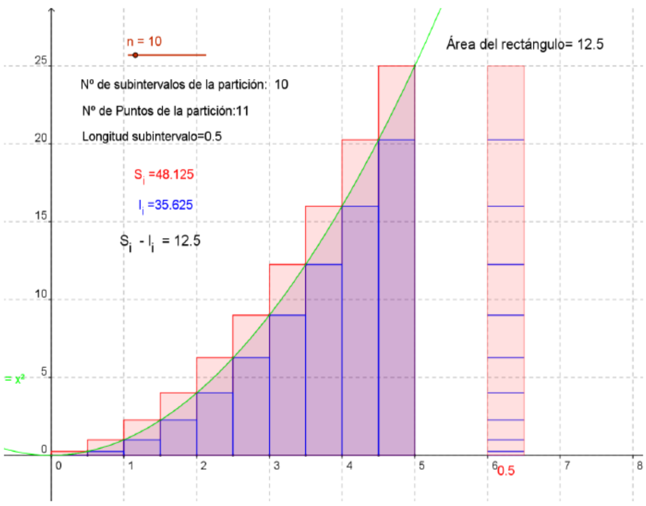

Figura 8: Parábola[0,5]

Se puede plantear de nuevo el problema del área bajo un arco de parábola a los alumnos para justificar el lema anterior con la ayuda de Geogebra:

Problema D.12 *Considera la parábola $y = x^2$, en un intervalo cualquiera, por ejemplo* $[0, 5]$. *Con la ayuda del programa de geogebra expuesto en la sección (E). Ver Sada1 (2007). Se pide:*

(a) Calcula las sumas superiores e inferiores, dando diversos valores de n con el deslizador.

(b) *Comprueba que las sucesiones formadas* $\{\int_a^b s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{\int_a^b S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *son monótonas creciente y decreciente respectivamente.*

(c) *Comprueba intuitivamente que el error máximo cometido, o diferencia entre ambas sumas es cada vez más pequeño, cuando* n *aumenta; es decir:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b S_n - \int_a^b s_n\right) = 0 \tag{20}$$

(d) *Comprueba que las sucesiones* $\{\int_a^b s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{\int_a^b S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *convergen al mismo valor, que es el área encerrada bajo la curva.*

De los lemas anteriores (e inspiradose en el problema anterior) se deduce que las sucesiones $\{\int_a^b s_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\int_a^b S_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen al mismo límite, que es el área bajo la curva de la función f. Todo ello motiva la definción:

Definición D.7 *Dada una función* $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *continua en un intervalo* $[a,b]$, *se denomina* ***integral definida*** *de la función* f, *o simplemente integral, y la representaremos por* $\int_a^b f(x)dx$ *o simplemente por* $\int_a^b f$, *al valor:*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b s_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b S_n\right) \tag{21}$$

Puede probarse que esta definición no depende de la partición considerada.

Se puede extender el ámbito de funciones a integrar a **funciones acotadas** con un número finito de discontinuidades, de manera que la integral definida puede descomponerse en una suma finita de integrales en los dominios en los que la función es continua. Dejamos fuera del ámbito de estudio la integral definida en dominios no acotados, en los que habría que hablar de integrales impropias y ciertos criterios de convergencia.

Convendrá familiarizar a los alumnos con la nueva notación escribiendo integrales como:

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3} \qquad \int_0^1 x^{1/2}dx = \frac{2}{3} \qquad \int_0^1 x^5dx = \frac{1}{6}$$

Igualmente, en el problema (D.9) hemos conjeturado que el área bajo una función potencial del tipo $y = x^k$ entre $x = 0$ y $x = 1$ viene dada por:

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1} \tag{22}$$

Planteamos a continuación otras situaciones de la vida real que constituyen ejemplos de aplicaciones de la integral definida.

Problema D.13 *La fotosíntesis es la transformación de la energía luminosa en energía química. Su importancia no es de índole menor, pues prácticamente toda la energía consumida por la vida de la biósfera terrestre procede de la fotosíntesis. La fotosíntesis consta de dos etapas o fases: la fase inicial o lumínica, y la fase secundaria u oscura.*

♣ ***Primera fase o lumínica:*** *En ella participa la luz solar. La clorofila - que es una sustancia orgánica - capta la energía solar (luz) y la luz provoca la ruptura de la molécula de agua y se rompe el enlace químico que une el hidrógeno con el oxígeno. Debido a esto, se libera oxígeno hacia el medio ambiente. La energía no ocupada se almacena en una molécula especial llamada ATP. El hidrógeno que se produce al romperse la molécula de agua se guarda, al igual que el ATP, para ser ocupado en la segunda etapa de la fotosíntesis.*

♣ ***Segunda fase u oscura:*** *en esta etapa no se ocupa la luz, a pesar de estar presente, dado que ocurre en los cloroplastos. El hidrógeno y el ATP, formados en la etapa lumínica, se unen con el CO2 (Anhídrido Carbónico) y comienza a ocurrir una serie de reacciones químicas, en las cuales se van formando compuestos hasta llegar a formar la glucosa. La glucosa participa en una serie de reacciones que llevan a la formación del almidón que también es un compuesto orgánico.*

La fotosíntesis es el proceso bioquímico más importante de la biósfera. Se puede decir que la diversidad de la vida existente en la Tierra depende principalmente de la fotosíntesis. Podemos concluir que ***la fotosíntesis*** *es* ***un proceso mediante el cual una planta convierte luz en alimento****. La producción de alimento por parte de una planta es una función de la cantidad de luz que recibe.*

La cantidad de luz recibida se mide en lux/hora. Si una planta está expuesta a 1000 *lux por el espacio de una hora recibe* 1000 *lux/hora, si está sujeta* 500 *lux durante dos horas también recibirá* $500 \times 2 = 1000 lux/h$.

Si se realizan mediciones de la intensidad de la luz a intervalos de 1 *hora,* 30 *minutos y* 15 *minutos se puede trazar una curva continua a través de los puntos que representan esos datos. Esa curva resulta una función de segundo grado de ecuación* $f(t) = 512t - 32t^2$ *cuya representación gráfica, como vemos es una parábola.*

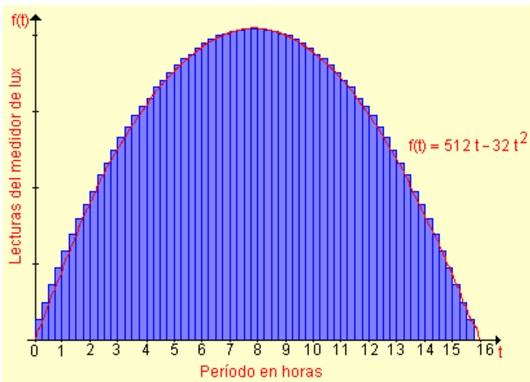

Figura 9: Intensidad de luz

*Plantamos la cuestión: ¿Cuál es la intensidad de luz acumulada durante el período de dieciséis horas? (****Ayuda:*** *Utiliza el método de aproximaciones sucesivas con rectángulos de base* $\frac{16}{n}$ *seguido en problemas anteriores)*

Problema D.14 *Un joven entrena para su competencia en los próximos juegos deportivos de la ciudad en una bicicleta fija durante una hora cada día de modo que en cualquier tiempo t, medido en horas, su velocidad es $v(t) = 36t^2 + 3$ kilómetros por hora. Si queremos hallar la distancia ficticia recorrida por el ciclista durante su hora de entrenamiento podemos subdividir la hora en minutos, segundos, fracciones de segundo e ir calculando la distancia recorrida en cada período. La suma de las distancias en cada intervalo de tiempo nos dará la distancia total que recorrería durante la hora completa. Dado que el momento inicial se considera en $t = 0$ trabajaremos en el intervalo $[0, 1]$.*

D.2. Conexión entre integral y derivada mediante la función área

D.2.1. La función área.

Vamos a estudiar en esta sección, el comportamiento del área bajo una curva de una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, en el caso de que hagamos variar el extremo derecho de integración; es decir estudiamos el área $\int_a^x f(x)dx$. Concretamente definimos:

Definición D.8 *Dada una función continua $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, se denomina **función integral** o **función área** asociada a f a la función:*

$$\begin{aligned} A_f\colon\ [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(x)dx \end{aligned} \tag{23}$$

Una primera observación que puede realizarse es que si la función de partida es positiva ($f(x) \geq 0$) entonces, por las propiedades de la integral, la función área es creciente. En efecto, si $x_1 \leq x_2$, por las propiedades del área (Ver Anexo A),se deduce inmediatamente que $A_f(x_1) \leq A_f(x_2)$.

Con la ayuda del software Geogebra puede visualizarse el comportamiento de la función $A_f(x)$; primeramente para funciones afines o cuadráticas y a continuación para funciones más complicadas.

Para ello planteamos el siguiente problema:

Problema D.15 *Considera la función $f(x) = \frac{x}{4} + 1$ cualquiera. Se pide:*

(a) Dibuja la función en un intervalo cualquiera, por ejemplo el $[0, 4]$.

*(b) Obtén una expresión de la función área $A_f(x)$ utilizando un procedimiento geométrico, en el intrvalo $[0, x]$. ¿Cuál es el valor $A_f(4)$? (**Ayuda:** Calcula el área del trapecio que forma la figura)*

(d) Representa graficamente la función área en el intervalo $[0, 4]$.

(d) Si derivas la función $A_f(x)$ obtenida en el apartado (b), ¿qué relación encuentras entre la derivada de la función área $A'_f(x)$ y la función de partida $f(x)$? ¿qué conclusión obtienes?

Los alumnos pueden utilizar el software Geogebra, (en concreto el applet de Sada2 (2007)) para dibujar una función cualquiera $f(x)$ y su función área, y además obtener la derivada de esta función para verificar e teorema fundamental del cálculo.

Se puede plantear mediante la siguiente secuencia de actividades:

Problema D.16 *Considera la funcion afín del problema anterior* $f(x) = \frac{x}{4} + 1$ *y utiliza el programa de Geogebra de Sada2 (2007). Se pide:*

(a) *¿Qué representa el área sombreada en el intervalo* $[0, 4]$*?*

(b) *Mueve el punto* B *para visualizar el valor de* $A_f(3) = \int_0^3 f(x)dx$ *y el valor de la función área* $A_f(x)$.

(c) *Compara los valores obtenidos del Area y de la función área con los resultados del problema anterior. ¿Qué ocurre si derivas la función área* $A_f(x)$ *bajo la curva de la función* $f(x)$*?*

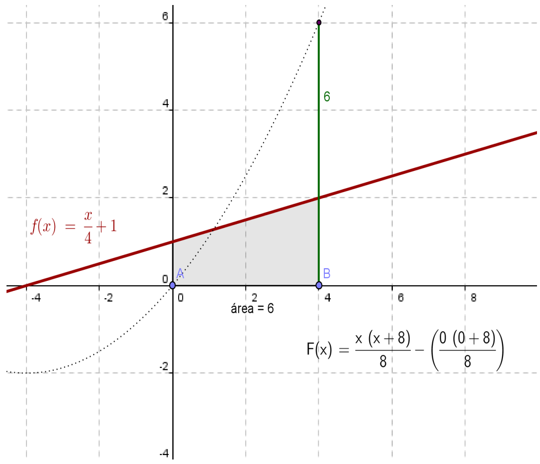

Figura 10: Función área bajo $f(x) = \frac{x}{4} + 1$

Hemos resuelto el mismo problema D.15 y D.16, utilizando procedimientos distintos: mediante lapiz y papel y con el uso de Geogebra.

Antes de presentar el teorema fundamental del cálculo integral, vamos a conjeturarlo con otros ejemplos de funciones; por ejemplo, el caso de la parábola que hemos trabajado ampliamente:

Problema D.17 *Un avión comienza a despegar en la pista de aterizaje con una aceleración de tipo lineal:* $a(t) = \frac{2}{500} \cdot t$ *metros/segundo*^{2}*. Se pide:*

(a) *Prueba con la ayuda de una figura que la función área de la aceleración es una función parabólica* $A_a(t) = \frac{1}{500}t^2$*. ¿Qué representa?*

(b) *¿Cuál es la velocidad* $v(t)$ *del avión? ¿Cuál es la velocidad del avión a los* 30 *segundos?*

(c) *Comprueba que la variación instantanea de la velocidad del avión en un instante t es justo la función aceleración de partida $a(t)$.*

(d) *Utiliza los resultados de la sección (D.1) para obtener que la función área de la funcíón $v(t) = \frac{1}{500}t^2$ viene dada por:*

$$A_v(t) = \frac{t^3}{1500}$$

(e) *¿Que representa la función área anterior? Si el avión consigue despegar trascurridos 3 minutos ¿Que distancia $s(t)$ habrá recorrido el avión desde el instante inicial? ¿Cuál es la velocidad de despegue del avión?*

(f) *Comprueba que la variación instantanea de la distancia recorrida es justo la función $v(t)$.*

(g) *Utiliza el programa de Geogebra de Sada2 (2007) con la función $f(x) = \frac{1}{500}x^2$ para visualizar graficamente el problema.*

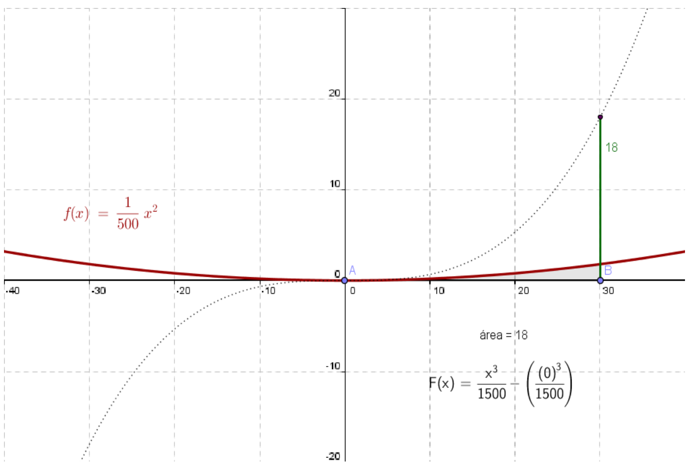

Figura 11: Gráfica velocidad-tiempo del avión

También se puede plantear algún problema en el que las funciones no sean de tipo potencial, o con alguna otra interpretación geométrica o física, por ejemplo:

Problema D.18 *Considera la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo genérico $[1, x]$. Se pide:*

(a) *Dibuja la función $f(x)$ con lapiz y papel.*

(b) *Utiliza Geogebra visualizar graficamente la función área $A_f(x) = \int_1^x \frac{1}{x}dx$ bajo la curva $f(x)$.*

(c) *Calcula la derivada de la función área $F(x) = \ln(x)$ bajo la curva $f(x)$ y verifica que se obtiene la función $f(x) = \frac{1}{x}$ de partida.*

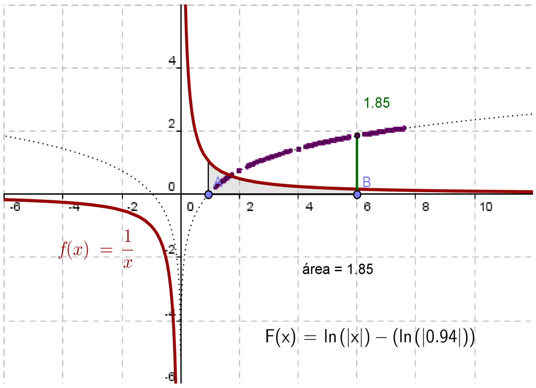

Figura 12: Función área logarítmica

En este problema hemos obtenido también el valor de la integral definida:

$$\int_1^x \frac{1}{x}dx = \ln(x) \tag{24}$$

Problema D.19 *En un cable ideal, supuesta resistencia nula, se aplica un campo eléctrico en direción longitudinal de valor $E(x) = 1 + \cos(x)$. Se sabe que el trabajo realizado por el campo electrico para mover una carga q desde un punto A hasta otro punto B viene dado por $W_{AB} = q\int_A^B E(x)dx$, donde q es la carga, que esta uniformemente repartida de forma constante a lo largo del cable; mientras que el potencial viene expresado por $V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q}$. Se pide:*

(a) ¿Que representa la función área $A_E(x)$ de la función campo eléctrico?

(b) Utiliza el programa de Geogebra Sada2 (2007) con la función $f(x) = 1 + \cos(x)$ para visualizar graficamente la función área.

(c) Calcula la diferencia de potencial entre dos puntos distantes un periodo 2π.

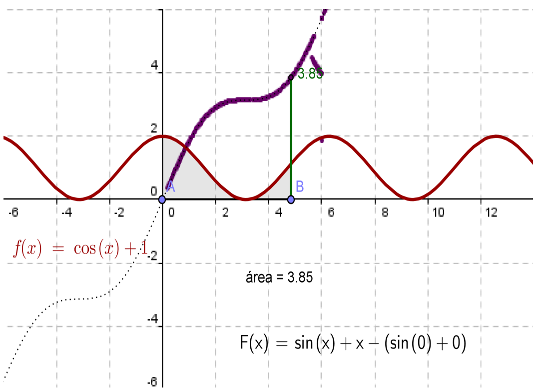

Figura 13: Función área sinusoidal

D.2.2. Proceso de institucionalización

Motivados por los anteriores problemas, vamos a demostrar el teorema fundamental del cálculo integral.

Para ello, calculamos primeramente la **tasa de variación media** (TVM), de la función área. En una variación de x a $x+h$, esta tasa puede calcularse como:

$$\frac{A_f(x+h)-A_f(x)}{h}=\frac{\int_a^{x+h} f(x)dx-\int_a^x f(x)dx}{h}=\frac{\int_x^{x+h} f(x)dx}{h}$$

donde hemos utilizado la propiedad aditiva del área. (Ver anexo A)

Por lo tanto se deduce que la tasa de variación media, coincide con el área bajo la curva en un intervalo $[x, x+h]$ dividido entre la amplitud del intervalo.

Si queremos calcular la tasa de variación instantanea, se intuye inmediatamente que para un incremento de x muy pequeño ($h \to 0$), el incremento de área bajo la curva puede aproximarse con un rectángulo de base x y altura $f(x)$ con lo cual se obtiene:

$$\frac{\int_x^{x+h} f(x)dx}{h}\approx\frac{f(x)\cdot h}{h}=f(x)$$

En consecuencia, de una manera informal, se observa:

$$A'_f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A_f(x+h)-A_f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot h}{h}=f(x)$$

Es decir; la derivada de la función área en un punto x coincide justo con la imagen de la función en el punto x. Este resultado es conocido como **Teorema fundamental del cálculo** y puede enunciarse como:

Teorema D.1 *Dada una función continua $f\colon [a,b]\to \mathbb{R}$ definida en un intervalo cerrado $[a,b]$, la función área $A_f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ dada por $A_f(x)=\int_a^x f(x)dx$ es continua y derivable en (a,b) y se verifica:*

$$A'_f(x)=f(x)\quad \forall x\in(a,b) \tag{25}$$

Puede obtenerse una demostración rigurosa de este teorema utilizando la continuidad y la definición de límite. Ver por ejemplo Gil Martós (1981)

En definitiva el teorema fundamental del cálculo no dice que la función área no es más que una función cuya derivada es la función de partida f. Una función que verifica esta propiedad se denomina **función primitiva** de la función f.

En consecuencia, el problema de calcular el área bajo una curva de una función continua se reduce a la búsqueda de una función primitiva adecuada $F(x)$ de la función f, de forma que $F'(x)=f(x)$. Es decir el problema geométrico del área se ha reducido a un problema analítico como es el cálculo de primitivas.

Ocurre que dada una función f, una función primitiva de f no esta univocamente determinada. Si dos funciones $F(x),\ G(x)$ son dos funciones primitivas de una función $f(x)$, se verifica:

$$(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x$$

Por lo tanto la función $(F-G)(x)$ es una función primitiva de la función nula. Es conocido que la única función primitiva en un intrvalo conexo es una función constante; por lo tanto se verifica:

$$F(x) - G(x) = C \Rightarrow G(x) = F(x) + C \quad C \in \mathbb{R}\ \textit{constante}$$

Esto es, las posibles funciones primitivas de la función f, a lo más varían en una constante.

Existen tablas ya muy conocidas donde se encuentran funciones primitivas de las funciones más usuales. Algunas primitivas sencillas que hemos utilizado son:

Función $f(x)$	Función primitiva $F(x)$
x^{n-1}	$\frac{x^n}{n} + C$ si $n \neq 0$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$
1	$x + C$
$(ax+b)^m$	$\frac{(ax+b)^m}{a(m+1)} + C$ si $m \neq -1$

Observación 1 *Anteriormente hemos constatado que funciones primitivas de las funciones constantes son líneas rectas. Es interesante constatar que las funciones primitivas de las funciones escalonadas (que son funciones constantes a trozos) son justo funciones lineales a trozos.*

De esta forma, en los procesos de aproximación seguidos en las secciones 1 y 2, al aumentar el tamaño de la partición, las primitivas de las funciones escalonadas son funciones lineales a trozos, con segmentos de longitud progresivamente menor, y en el límite convergen a la función primitiva de la función de partida que queremos integrar.

Otra interpretación geométrica interesante para el cálculo del área bajo una curva de un función continua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es la búsqueda de un punto $x_0 \in [a,b]$, de forma que el área bajo la curva coincida con el área de un rectángulo de base $b-a$ y altura $f(x_0)$.

Para ello basta buscar el máximo y mínimo abasoluto de la curva en $[a,b]$: $M = \text{máx}_{x\in[a,b]} f(x)$ y $m = \text{mín}_{x\in[a,b]} f(x)$. Sabemos:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

Si tomamos $\lambda = \frac{\int_a^b f}{b-a}$ se cumple que $\lambda \in [m,M]$ y como la función f es continua, toma cualquier valor comprendido entre el mínimo y el máximo; por tanto $\exists c \in [a,b]$ de forma que $\int_a^b f = f(c)(b-a)$.

Lo que hemos mostrado se conoce como **teorema del valor medio** del cálculo integral. Puede enunciarse:

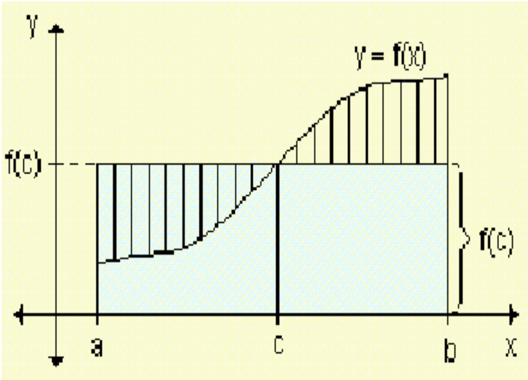

Figura 14: Teorema del valor medio

Teorema D.2 *Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, existe al menos un $c \in [a,b]$ de forma que:*

$$\int_a^b f = f(c)(b-a) \tag{26}$$

D.2.3. La regla de Barrow.

Es conveniente comentar la forma de la función área y el teorema fundamental del cálculo en alfunos casos sencillos.

Por ejemplo, recordemos que si la función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es justo una función constante $f = k$. En este caso, la figura bajo la gráfica es justamente un rectángulo, y por tanto el área es: $\int_a^b f = k \cdot (b-a) = kb - ka$ Mientras que la función área es: $A_f(x) = m \cdot (x-a) = mx - ma$

Obsérvese que en este caso se cumple $A_f(a) = 0$, $A_f(b) = \int_a^b f$ y se comprueba inmediatamente que se verifica el teorema fundamental del cálculo; ya que si derivamos la función área se tiene: $A'_f(x) = k = f(x)$, por lo que en efecto la función área es un primitiva de la función f. Además se verifica:

$$\int_a^b k = A_f(b) - A_f(a) \tag{27}$$

Supongamos que la función f es una función lineal $f(x) = mx$. En este caso recordemos que la figura formada bajo la gráfica es un trapecio, de bases ma y mb y altura $(b-a)$; por lo tanto su área es:

$$\int_a^b f = \frac{1}{2}(mb + ma)(b-a) = \frac{1}{2}mb^2 - \frac{1}{2}ma^2$$

(también se puede calcular el área como el área del triángulo de base b y altura mb menos el área del triángulo de base a y altura ma) En cualquier caso, la función área de f puede calcularse de igual manera y es:

$$A_f(x) = \frac{1}{2}mx^2 - \frac{1}{2}ma^2$$

En este caso, también observamos que $A'_f(x) = mx = f(x)$ y la función área es efectivamente una primitiva de $f(x)$, y también se verifica:

$$\int_a^b mxdx = \frac{1}{2}mb^2 - \frac{1}{2}ma^2 = A_f(b) - A_f(a) \tag{28}$$

En el caso general, para una función $y = f(x)$ cualquiera, la situación es completamente análoga. Si $A_f(x)$ es la función área se tiene $A_f(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$ y $\int_a^b f(x)dx = A_f(b)$ y en consecuencia también sse cumple:

$$\int_a^b f(x)dx = A_f(b) - A_f(a) \tag{29}$$

Si ahora tenemos otra primitiva cualquiera $F(x)$ de la función f, savemos que se verifica $F(x) = A_f(x) + C$ con C una constante real. por lo tanto $F(a) = C$, $A_f(b) = F(b) + C$ y se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = A_f(b) - A_f(a) = F(b) - C = F(b) - F(a)$$

En consecuencia para calcular el área bajo la gráfica de una función $y = f(x)$ cualquiera, basta calcular una primitiva cualquiera $F(x)$, y evaluarla en los extremos; esto es:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{30}$$

El procedimiento descrito es conocido como **regla de Barrow**.

D.2.4. Propiedades de la integral

Así mismo, es necesario motivar las propiedades de linealidad de la integral:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{31}$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \tag{32}$$

Para ello se pueden proponer ejercicios con funciones polinómicas sencillas:

Problema D.20 *Con la ayuda de Geogebra, representa graficamente las funciones* $y = x^2$, $y = x$, $y = 2x$, $y = 3$ *y las funciones suma* $y = 2x + 3$ *y* $y = x^2 + 2x + 3$. *Comprueba que:*

(a) $\int_0^a (2x + 3)dx = \int_0^a 2xdx + \int_0^a 3dx$.

(b) $\int_0^a 2xdx = 2 \cdot \int_0^a xdx$.

(c) $\int_0^a (x^2 + 2x + 3)dx = \int_0^a x^2dx + \int_0^a 2xdx + \int_0^a 3dx$.

También es importante una interpretación adecuada de **áreas "negativas"**. Normalmente a los alumnos les resulta extraño que las áreas puedan ser negativas, cuando la gráfica de la función corta al eje de abscisas. Es claro que esto es así, ya que las ordenadas de la función en estos puntos es negativa y entonces el área calculada de las funciones escalonadas superiores e inferiores es negativa. Un posible ejemplo es:

Problema D.21 *Un recipiente se llena de agua durante* 2 *horas mediante un grifo que tiene una velocidad de llenado de* $c(t) = 2t - t^2$ *litros/hora, y a continuación se vacía agua del recipiente a una velocidad de* $v(t) = t^2 - 6t + 8$ *litros/hora durante las* 2 *horas siguientes. Se pide:*

(a) *Dibuja la gráfica de velocidad de llenado y vaciado respecto al tiempo.*

(b) *Calcula los litros de agua con los que se llena el recipiente.*

(c) *Calcula de manera análoga los litros de agua que se vacían de el recipiente.*

(d) *¿Está vacío el recipiente al final del proceso? Interpreta el area total bajo la gráfica velocidad-tiempo.*

El profesor explica que en este ejemplo el área bajo la curva representa justo los litros de agua que hay en el recipiente; y por lo tanto consta de los litros de agua con los que se ha llenado, restando los litros de agua con los que se ha vaciado.

Puede constatarse finalmente que para cualquier función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ se verifica:

$$\int_a^b [-f(x)]dx = -\int_a^b f(x)dx \tag{33}$$

Lo cual puede constatarse primero para cualquier función $f(x) \geq 0$ y a continuación para una función cualquiera descomponiendo en los intervalos en los que la función es positiva y negativa.

D.3. Metodología en el aula

El artículo 17 de la *ORDEN de 1 de julio de 2008, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte*, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón (BOA, 17/07/2008, p.13925) establece los **"principios metodológicos generales"** válidos para todas las materias de esta etapa.

Según el apartado **"Introducción"** de las asignaturas MATEMÁTICAS I Y II (p.14072 del mismo texto legal), un listado de sugerencias metodológicas que, a nuestro juicio, deberían ser aplicadas en las clases de matemáticas de estas dos asignaturas de Bachillerato, y a nuestro objeto matemático de estudio en particular, podrían ser:

- ✓ **Introducir los conceptos mediante actividades de resolución de problemas**. Atender a la fenomenología del concepto, incorporando todos los problemas o situaciones que dan sentido a dicho concepto. El planteamiento y resolución de problemas o investigaciones en ámbitos científicos ofrece al alumnado una visión integradora de las distintas ramas de la matemática, constituye un terreno idóneo para aplicar los conceptos adquiridos a lo largo de sus estudios y permite desarrollar las destrezas y razonamientos necesarios para incrementar su grado de competencia al analizar situaciones contextualizadas en el mundo real. Además, exige al alumno incrementar su habilidad para utilizar el lenguaje matemático con precisión y rigor, elaborar argumentos sólidos para justificar sus resultados, valorar las ideas de otras personas, admitir y corregir los errores cometidos y estimular la inquietud científica.

- ✓ Poner de manifiesto **la génesis histórica** de los conceptos matemáticos. Conocer el origen de algunos de estos problemas y la forma en que se resolvieron ayudará a los alumnos a comprender los conceptos matemáticos y la utilizarlos en situaciones de la vida real. En nuestro caso, ya hemos observado que algunos conceptos y problemas relacionados con la integral definida, se ajustan con bastante precisión a su origen histórico.

- ✓ Es claro que el objeto matemático que tratamos tiene fuertes **aplicaciones en el mundo de la física**; cualquier tipo de magnitud que "fluye", o cambia respecto al tiempo, o respecto al espacio, o cualquier proceso evolutivo es susceptible de aplicación del cálculo integral. En todas esas aplicaciones el *area bajo una curva* tiene diferentes interpretaciones físicas concretas de gran utilidad, como hemos visto en diferentes ejemplos, o también en otros ámbitos como biología o estadística. Se podrían coordinar las primeras actividades con el profesor de física, (por ejemplo, es conocido que en algunos planes de estudios de determinados paises, las clase de matemáticas y física están unidas y las imparte el mismo profesor).

- ✓ **Utilizar los medios tecnológicos:** calculadoras, hojas de cálculo o programas estadísticos. En nuestro caso, utilzaremos programas de geometría dinámica mediante el softwre **Geogebra**. Comentaremos a continuación brevement este software: GeoGebra es un software para las matemáticas que provee instrumentos para el estudio de geometría, álgebra y análisis, dirigido a la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria y secundaria.

  De una parte GeoGebra es un sistema de geometría dinámica. Se pueden construir puntos, vectores, segmentos, rectas, cónicas y funciones, modificándolas en tiempo real.

  Por otra parte, también pueden insertarse directamente ecuaciones y coordenadas. Así, GeoGebra tiene la posibilidad de tratar variables numéricas, vectores y puntos, y cuenta con varios operadores.

  GeoGebra es un programa particularmente interesante por varios motivos que vamos en seguida a enumerar:

- ✓ Geogebra es un software free, que por lo tanto puede ser libremente aconsejado a los estudiantes, sin que exija un desembolso económico. Además las actualizaciones pueden ser buscadas y descargadas de manera automática del software mismo, y esto evita el tener que estar pendiente de conseguir la última versión. El hecho de que sea un producto gratuito no es sólo importante por motivos económicos, sino también porque difunde una correcta cultura relativa a los recursos para el ordenador, reduciendo el fenómeno de la piratería informática.
- ✓ Geogebra tiene una interfaz gráfica que contempla todas aquellas operaciones que ya se han convertido en un estándar en este campo, y al mismo tiempo nos permite realizaciones muy sofisticadas, previendo una serie de instrucciones tratables con la ventana de input.
- ✓ La interacción entre las construcciones geométricas, (con "regla y compás"), las operaciones algebraicas, algunas operaciones elementales del análisis, gráficos de funciones, etcétera, además de dar la posibilidad de usar algunos algoritmos, como los que buscan intersecciones entre gráficos, permite conectar ideas de diferentes "campos de las matemáticas".

Por ese motivo creemos que este software es muy útil para la enseñanza de las matemáticas. En el caso específico de la integral definida, geogebra nos permite dibujar las funciones con una precisión que no se puede conseguir en la pizarra, además permite visualizar las áreas y crear **applets de geometría dinámica** que permiten comprender mejor los procesos de paso al límite.

Como metodología general, se intentará tratar el objeto matemático *"integral definida"* utilizando el mayor número de ejemplos posible, se intentará dar explicaciones teóricas adecuadas y se procurará involucrar a toda la clase. Se supone que en un 2º curso de bachillerato científico el alumnado estará motivado para el estudio. De todos modos, se propondrán unas primeras clases de motivación, considerando distintos gráficos velocidad-tiempo en diferentes contextos para relacionar el objeto matemático con el mundo real.

Se introducirán ejercicios, que se resuelven parcialmente en clase, asignando tareas a los estudiantes, para que los trabajen e intenten por sí mismos, tanto dejando algún tiempo para ello en clase como para que los trabajen particularmente en su casa. Esto facilita un proceso de detección de errores, retroalimentación (***"feedback"***), y resolución de dudas.

Se procurará que tengan más peso los razonamientos geométricos e intuitivos que los puramente formales.

> *"En cuanto a la metodología, proponemos que pierdan peso el formalismo y los métodos deductivos y que lo vayan ganando los razonamientos geométricos y numéricos así como los métodos inductivos."* Azcárate (1996 p.124)

En todas las actividades se intentará seguir un proceso de **aprendizaje significativo**. A partir de las ideas que previamente tengan concebidas de área, límite, continuidad y derivabilidad, se intentará dar consistencia a esas ideas o corregir posibles errores, o completar con nuevos puntos de vista, o nuevas perspectivas en el uso de dichos conceptos para introducir el nuevo objeto matemático. Después de cada problema introductorio, se **institucionalizará el objeto matemático**, se harán ejemplos, y se darán ejercidos para resolver en el aula y en casa.

Como hemos comentado anteriormente, tratarémos este tema utilizando Geogebra, un software open source (gratuito) para la enseñanza de las matemáticas, que en este caso nos permite dibujar las funciones, las áreas comprendidas entre funciones y ejes, etc. y veremos que efectivamente resulta de gran utilidad, no sólamente para obtener una mejor visión espacial y geométrica de los conceptos; sino también para una resolución más apropiada de los problemas , y para una justificación más apropiada de las definiciones utilizadas.

E. Las Técnicas

La princial técnica que aparece en el campo de problemas D.1 (cálculo del área bajo la gráfica de una función) consiste en el cálculo de dicha área mediante **aproximaciones sucesivas con rectángulos** de base los intervalos de una subdivisión del intervalo de definición de partida, y altura, los máximos y mínimos que alcanza la función en dichos subintervalos.

Dichas aproximaciones sucesivas, en un proceso de paso al límite cuando el número de subintervalos de la subdivisión tiende a infinito, converge al área busqueda.

Esta idea intuitiva aparentemente sencilla, necesita ser dirigida paso a paso, para preveer dificultades y evitar posibles erores.

Con la ayuda del software Geogebra, se puede programar facilmente un pequeño programa o applet que permite el cálculo, de las sumas superiores e inferiores bajo la gráfica de una función positiva y continua dada. Además con la ayuda de un deslizador se puede aumentar el tamaño de la partición y el programa automaticamente dibuja la variación de las sumas superiores e inferiores y se visualiza perfectamente su convergencia al valor real de la integral.

Los alumnos pueden introducir una función cualquiera, variar con el ratón el intevalo de definición y mover el deslizador para aumentar el tamaño de la partición. Esto facilita la comprensión del proceso de paso al limite seguido para definir la integral de una función continua cualquiera.

Veamos un guión para la construcción con Geogebra de este applet, Ver Sada1 (2007):

APPLET E.1 *Planteamos seguir el siguiente proceso:*

- ♣ *Abre un nuevo documento Geogebra en el que estén habilitados los* ***ejes coordenados****.*

- ♣ *Introduce con el teclado* ***una función****, por ejemplo la parábola* $f(x) = \frac{x^2}{4} + 2$. *El programa dibuja la gráfica de la función.*

♣ *Introduce con la función "nuevo punto"del menú, **dos puntos** que el programa denotará A y B y situalos en el eje de abscisas. Dichos puntos representan los límites del intervalo de integración. Puede comprobarse que dchos puntos pueden desplazarse facilmente con el ratón.*

♣ *Introduce con el teclado la orden:*

$$Integral[f(x), x(A), x(B)]$$

*El comando **Integral** está ya predifinido, el programa coloreara el recinto determinado bajo la curva de la función $f(x)$ y las rectas verticales determinadas por los puntos A y B, y guardará su valor numérico en una variable a. Con la ayuda del botón derecho del ratón podemos renombrar dicha variable con el nombre **Integral**.*

♣ *Crea un **"deslizador"** con la ayuda del menú. Introduce un rango de variación desde* 1 *a* 100*, con un salto de* 1 *unidad y una anchura de* 200 *(al pinchar en **deslizador** con el ratón, se abre una ventana donde se pueden introducir facilmente dichos parámetros). Podemos situar el deslizador a la derecha de la gráfica de la función, renombrarlo con la letra n y comprobar que pinchando con el ratón podemos variar el parámetro n a cualquier valor entre* 0 *y* 100*.*

♣ *Introduce con el teclado la orden:*

$$SumaInferior[f(x), x(A), x(B)\, n]$$

*El comando **SumaInferior[]** también está predefinido, el programa dibujará los rectángulos inferiores de amplitud la longitud del intervalo dividido por n, y guardará en una variable el valor numérico de las sumas inferiores que representan las sumas de las áreas de dichos rectángulos. Podemos renombrar la variable y denominarla **SumasInf**.*

♣ *Introduce con el teclado la orden:*

$$SumaSuperior[f(x), x(A), x(B)\, n]$$

*El comando **SumaSuperior[]** también está predefinido, el programa dibujará los rectángulos superiores de amplitud la longitud del intervalo dividido por n, y guardará en una variable el valor numérico de las sumas superiores que representan las sumas de las áreas de dichos rectángulos. Podemos renombrar la variable y denominarla **SumasSup**.*

♣ *Introduce con el teclado la orden:*

$$SumaSuperior[f(x), x(A), x(B)\, n] - SumaInferior[f(x), x(A), x(B)\, n]$$

*El programa guardará en una variable el valor numérico de la diferencia entre las sumas superiores y las sumas inferiores. Podemos renombrar la variable y denominarla **Error**.*

♣ *En el menú podemos activar el apartado* ***vista algebraica*** *y podemos visualizar el valor de todas las variables que aparecen en el programa. Alternativamente, con el botón derecho del ratón podemos ir a "propiedades del objetoœ activar la opción* ***"mostrar nombre y valor"*** *y dichas variables aparecerán escritas junto a la gráfica con su nombre y valor.*

♣ *Finalmnte con el deslizador podemos variar el valor del tamaño de la partición n para comprobar como al aumentar n, los valores de las sumas superiores e enferiores se aproximan al valor de la integral y el error se hace cada vez menor. Podemos igualmente ajustar un cierto valor de n para* ***obtener una aproximación inferior a un error dado****.*

♣ *Igualmente podemos* ***cambiar los límites de integración*** *moviendo con el ratón los puntos A y B a lo largo del eje de abscisas. También podemos probar el applet con otras funciones diferentes.*

En el caso de que el cálculo de las sumas superiores e inferiores y el paso al límite se realize con **lápiz y papel**, el alumno debe conocer técnicas adecuadas para obtener fórmulas de recurrencia de la suma de n términos de una sucesión, conocer las propiedades básicas sobre desigualdades de expresiones algebraicas de números reales, y manejar las principales técnicas de cálculo de límites.

Sin embargo, la creación por parte de los alumnos de sus propios applets de Geometría Dinámica; son en sí mismas actividades de gran riqueza conceptual.

F. Las Tecnologías

El profesor asumirá la responsabilidad de justificar las técnicas. Hemos visto que algunas de ellas requieren procesos de paso al límite cuya rigurosa rigurosa obligaría a emplear adecuadamente las definiciones de límite, continuidad o derivabilidad y tienen un nivel de abstración que o bien sale del nivel del curso o bien requerirían un esfuerzo adicional que no añadiría una real percepción del concepto y por el contrario podría distraer al alumno en la compensión del concepto y en la realización de aplicaciones.

En todo caso, la formulación rigurosa de este tipo de conceptos, tendrán oportunidad de estudiarlas en las asignaturas de Análisis Matemático, todos aquellos alumnos que prosigan este tipo de estudios en cualquier carrera científica o técnica.

Por el contrario una justificación de tipo geométrico con la ayuda del software geogebra, del cual hemos hablado en D.3, puede resultar más atractiva, instructiva y enriquecedora.

En todo caso, el el primer campo de problemas (D.1), la tecnología empleada se detalla el el apartado D.1.8 (p.18) y en el segundo campo de problemas (D.2) también se explica la tecnología usada en el apartado D.2.2 (p.27).

G. Secuencia Didáctica

En esta propuesta se presenta la integral definida en 12-14 sesiones de una hora, mas una para la evaluación final. El número de sesiones dependerá también del nivel de aprendizaje que tiene el alumnado, es decir que el profesor tiene que adaptarse al ritmo de aprendizaje de la clase.

Secuenciación de actividades. Planteamos la siguiente serie de sesiones para introducir la unidad didáctica:

- ⋆ **Sesión 1:** Evaluación diagnóstica incial sobre conocimientos previos.
- ⋆ **Sesión 2:** Breve introdución sobre antecedentes históricos y exposición de la razón de ser del objeto matemático.
- ⋆ **Sesión 3:** Cálculo del Area bajo una curva en los casos triviales (lineal y afín) por métodos geométricos (Planteamiento y resolución de los problemas D1-D6)
- ⋆ **Sesión 4:** Estudio exhaustivo del cáluclo del área bajo un arco de parábola. Planteamento de los problemas D7 y D8. Resolución por los alumnos en clase del problema D7 usando lápiz y papel, en agrupaciones de tres o cuatro estudiantes y dirigidos por el profesor.
- ⋆ **Sesión 5:** Resolución por el profesor en la pizarra del problema D8. Explicación de la utilización adecuada de las fórmulas de ayuda.
- ⋆ **Sesión 6:** Utilización del software Geogebra en un aula de informática para la programación del applet E1 de Sada1 (2007). Los alumnos pueden también realizar por ellos mismos esta actividad en su casa usando sus propios ordenadores personales, descargandose el software libre Geogebra.
- ⋆ **Sesión 7:** Institucionalización del concepto de integral definida por parte del profesor. El profesor puede definir los principales conceptos y hacer uso del aplet de Sada1 (2007) para justificar el concepto de integral definida haciendo uso por ejemplo del problema D12.
- ⋆ **Sesión 8:** Pueden plantearse como ejercicio personal del alumno los problemas D10 y D11. El profesor puede corregir y ayudar en una puesta en común de la resolución del problema D11. Plantear los porblemas D13 y D14 como ejemplos adicionales de tipo aplicado.
- ⋆ **Sesión 9:** Definición de la función área y cálculo de la función área en algún caso de forma geométrica. Por ejemplo en el problema D15.
- ⋆ **Sesión 10:** Uso del software de Geogebra Sada2 (2007), para calcular funciones área de funciones diversas. Resolución en el aula de informátic del problema D16, para motivar el teorema fundamental del cálculo.

- ⋆ **Sesión 11:** Demostración en la pizarra por el profesor del teorema fundamental del cálculo utilizando razonamientos geométricos. El profesor puede plantear el uso de Sada2 (2007) para analizar diversos ejemplos y situaciones.
- ⋆ **Sesión 12:** Planteamiento y resolución en común de los problemas de tipo aplicado D17, D18 y D19.
- ⋆ **Sesión 13:** Motivación e institucionalización de las propiedades de la integral, la regla de Barrow y el teorema del valor medio. Se usarán para ello los problemas D20 y D21.

Temporalización: Puede utilizarse aproximadamente una hora de clase para cada una de las sesines presentadas. En todo caso, esta subdivisión no tiene porque ser rigurosa, y puede adaptarse a las circunstancias del grupo-clase y de las actividades realizadas en cada sesión.

H. Evaluación

Además de una evaluación diagnóstica, que carece de calificación, se realizará una **evaluación formativa**, según los métodos que sugiere Morales (2010).

Para ello es conveniente, en una o dos ocasiones a lo largo de la unidad realizar algunos tets de preguntas cortas (*quizzes*), que pueden ser preguntas Verdadero/Falso, elección múltiple, etc, para asegurar el seguimiento de los alumnos, corregir posibles errores o para proporcionar un *feedback*. Dichos tets pueden ser simplemente orientativos, sin tener repercusión en la nota final.

Igualmente, como hemos comentado a lo largo del trabajo, el uso de applets con el software Geogebra es fundamental, tanto para introducir los conceptos como para entender y justificar las técnicas. En este sentido, es bueno utilizar una sesión de clase práctica en el aula de informática, para realizar un ejercicio de evaluación.

Un posible ejercicio de evaluación en la sala de ordenadores podría ser:

Problema H.1 *Considera la función real de variable real* $f(x) = \exp(x)$*. Con la ayuda de Geogebra, se pide:*

(a) Programa el applet de la sección (E) utilizando esta función.

(b) Anota en una tabla las aproximaciones al área bajo la curva en un intervalo $[-2, 2]$ *para los valores* $n = 5,\ 10,\ 30, 60,\ y\ 100$*. Para ello utiliza el deslizador.*

(c) Haz una tabla con los datos de la función dada usando los valores de las sumas superiores, sumas inferiores e integral total, para $n = 10$*.*

(d) Utiliza el segundo applet de Sada, para calcular la función área. Comprueba que la función área es $F(x) = \exp(x) - 1$

(e) Calcula la derivada de la función área.

Al finalizar la unidad didáctica se realizará una prueba escrita de una hora aproximada de duración, para conocer el grado de aprendizaje de los alumnos. Esta prueba corresponde a la evaluación final o **evaluación sumativa.**

En dicha prueba debería aparece algún problema contextualizado de tipo práctico extraido de la física, otras ciencias o de la vida real, algún proceso de aproximación al área bajo una curva, y finalmente alguna aplicación o consecuencia del teorema fundamental del cálculo o de la regla de Barrow.

En la prueba escrita convencional que los alumnos reslverán con lápiz y papel y la ayuda de la calculadora proponemos dos problemas que se corresponden con los dos campos estudiados:

Problema H.2 *Considera la parábola $y = x^3$, en el intervalo $[0, 5]$. Considera una partición en n sub-intervalos y dibuja las funciones escalonadas superiores e inferiores. Observa que en cada rectángulo, la diferencia del rectángulo de la función escalonada superior y el de la inferior, puede desplazarse a la derecha en un único rectángulo que mide la diferencia de área entre la suma suprior y la inferior. Se pide:*

(a) ¿La altura de dicho rectángulo depende del tamaño de la partición n?

(b) ¿La base del rectángulo depende de n? Calcula la base de dicho rectángulo para diferentes valores de n. Por ejemplo $n = 10,\ 20,\ 50, \ldots 100$

(c) Obtén una fórmula para la diferencia entre las sumas superiores e inferiores dependiendo del valor n.

(d) Identifica la relación entre el área de dicho rectángulo y el error máximo cometido al aproximar el área.

(e) Si el error máximo es $0,1$. ¿Cuántos intervalos tienes que coger?

(f) ¿y si es $0,01$? ¿Podrías encontrar un procedimiento para determinar un valor de n que permita calcular el área con un error menor que un número tan pequeño como se quiera?

Problema H.3 *La velocidad de llenado de una vasija mediante un grifo de agua es $v(t) = 2t - t^2$ litros/hora. Contesta a las siguientes cuestiones:*

(a) Dibuja una gráfica velocidad/tiempo de la función velocidad. ¿Qué interpretación tiene el área bajo la gráfica?

*(b) Calcula una fórmula que indique la cantidad de litros de agua que hay en la vasija en un instante t cualquiera. ¿Qué relación tiene con la función área? (**Auuda:** utiliza las propiedades de la integral)*

(c) Si la vasija se llena durante 2 horas ¿Cuál es la cantidad de agua final?

(d) Prueba que la velocidad de llenado del grifo es la derivada de la cantidad de agua en un instante t respecto del tiempo. ¿En que instante dicha velocidad alcanza un máximo?

H.1. Aspectos a evaluar

Nos interesa especialmente que los alumnos sepan interpretar los problemas contextualizados.

En el primer porblema nos interesa que sepan interpretar el proceso de convergencia de las sumas inferiores y superiores, que entiendan porque las sucesiones de números que representan las sumas superiores para un valor genérico n convergen al valor del área. En ese sentido el primer problema es ilustrativo, ya que el cálculo del área del rectangulo pedido es justo el error de aproximación. Los alumnos deben entender que el área de dicho rectángulo se hace tan pequeña como queramos cuando n toma valores grandes, y en general para un número suficientemente grande ese error será despreciable.

En ese sentido el apartado (f) es carcterístico para entender estos conceptos. Es interesante que puedan obtener una aproximación lo suficientemente buena para que el error sea menor que uno prefijado.

En el segundo problema nos interesa tanto la interpretación física de la función área como una correcta interpretación del teorema fundamental del cálculo.

H.2. Respuestas esperadas

Se espera que haya gran número de respuestas correctas en los apartado (a) y (b) del primer porblema, dado su sencillez. Es posible que los alumnos empiezen a cometer errores numéricos en el apartado (c) y (d) y que muchos no sepan interpretar adecuadamente los apartado (e) y (f).

En el segundo problema, es posible que algunos alumnos no sepan realizar adecuadamente la gráfica; aunque se espera que casi todos interpreten de forma adecuada la función área y sepan calcularla a partir de integrales conocidas. Igualmente se espera que sepan calcular el área total bajo la curva.

Es posible que algunos de ellos no sepan interpretar adecuadamente el teorema fundamental del cálculo que se indica en el apartado (d).

H.3. Criterios de Calificación

Se valorara on $0,1$ puntos cada subapartado de ambos problemas. Se tendrá mas en cuenta una adecuada interpretación geométrica y del contexto que algún error de poca importancia en los cálculos.

La evaluación continua constará de la prueba con el software Geogebra, mas algunas observaciones de comportamiento, participación o control que realice el profesor; ponderará un 20 % de la nota final. El examen final tendrá un peso de un 80 % en la evaluación total de la unidad didáctica.

Referencias

[Aranda] ARANDA CALLEJO, C. *Usando applets para construir el concepto de integral definida* Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas, Num.: **58**, 65-75 (2011)

[Azcárate] AZCÁRATE C., CASADEVALL M., CASELLAS E., BOSCH D. *Cálculo Diferencial e Integral* Educación Matemática en Secundaria (1996), Editorial Síntesis, S.A.

[Aldana] ALDANA BERMÚDEZ, ELIÉCER *Comprensión del concepto de Integral Definida en e marco de la teoría ."APOE"* Tesis Doctoral Salamanca (2011)

[Cordero] CORDERO F., MUÑOZ G., SOLÍS M. *La Integral y la noción de Variación* Cuadernos didácticos (2002), Grupo Editorial Iberoamérica S.A.

[Gil] GIL MARTÓS J., RIVERA M., VÁZQUEZ C. *Matemática COU* (1981) Editorial Santillana S.A.

[Morales] ORALES VALLEJO, P. *La Evaluzción Formativa* Ser profesor: Una mirada al alumno. 2ª Edición Guatemala: Universidad Rafael Landivar (Capítulo II pp. 33-90) (2010)

[Mundy] MUNDY, J. *Analysis of Errors of First Years Calculus Students* Theory Research and Practice in Mathematics Education, 1984, Proccedings ICME **5** Adeleide Working group reports and Colected papers, shell Center. Nothingam 170-172.

[Porres] PORRES TOMÉ, MARIO *Integral Defindida, Cálculo mental y nuevas tecnologías* Tesis Doctoral Valladolid (2011)

[Sada1] SADA ALLO, M. *Webs Interactivas de Matemáticas* http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/d11riemann.html Premio INTEF 2007

[Sada2] SADA ALLO, M. *Webs Interactivas de Matemáticas* http://recursostic.educacion.es/apls/informacion didactica/121 Premio INTEF 2007 http://ntic.educacion.es/w3//eos/MaterialesEducativos/mem2007/webs interactivas mates/figuras/d6teorema1.html

[Turégano] TURÉGANO MORATALLA, P. *Del área a la Integral. Un estudio en el contexto educativo* Enseñanza de las Ciencias, 1998, **16**(2) 233-249.

I. ANEXOS

A. Aproximación intuitiva a la idea de área

Convendría insistir en la idea de área, no como un mero conjunto de fórmulas, para superficies que poseen cierta regularidad; sino como una manera de medir una superficie a partir de una medida unidad o tesela básica utilizada como patrón (como puede ser un cuadrado unidad o un rectángulo). De esta forma el área de una figura cerrada es medida por el número de cuadrados unidad en una posible teselación formada por los cuadrados de la tesela básica.

Es una cuestión de formalidad darse cuenta que esta medida es independiente de la teselación utilizada para realizar la medida. Naturalmente en un recinto encerrado por una curva, lo normal es que cualquier teselación no cubra todo el recinto con un número entero de cuadrados básicos; sino que sea necesario utilizar porciones de algunos de ellos. Para entender estos conceptos se puede proponer algún ejemplo. Es interesante la situación del cálculo de la superficie de una isla sobre un plano:

A.1. Problema introductorio

Azcárate (1996, p.128)

Este problema sirva para repasar el concepto de área y para motivar el cálculo de áreas mediante aproximaciones sucesivas utilizando el método de exhaución.

Problema A.1 *El gráfico de la figura representa el contorno de una isla dibujada en un papel cuadrícula, con cuadrados de lado unidad. Se pide:*

(a) Realiza una aproximación del área de la isla, acotándola entre las regiones formadas por los cuadrados totalmente contenidos en la isla y los cuadrados que contienen la isla.

(b) *Calcula el error máximo cometido si aproximamos el valor del área de la isla por el valor medio de los dos valores obtenidos en el apartado anterior.*

(c) *Si contamos los cuadrados que no caen totalmente dentro de la isla como medio cuadrado ¿cuál es la aproximación del área obtenida? ¿y el error máximo cometido?*

(d) *Si subdividimos cada cuadrado unidad en cuatro cuadrados de área $\frac{1}{4}$, calcula la aproximación del área y el error máximo cometido, igual que en el apartado b). ¿Disminuye el error máximo cometido?*

A.2. Explicación del profesor

Si los alumnos tienen dificultades con el oncepto de error, el profesor propondrá ejemplos numéricos concretos en los que se mida el error para un valor aproximado del área y los posibles valores reales.

Se motivará intuitivamente que el las diversas aproximacines al área se obtienen contando las diversas teselas que forman los recintos.

En definitiva, el alumno debe constatar unos axiomas básicos de la idea intuitiva de área, como son:

- Recintos que pueden superponerse tienen igual área. Idea que venía ya plasmada en los *Elementos* de Euclides.
- Si un recinto A esta contenido en otro recinto B, el área de A, será menor o igual que la de B. $A \subseteq B \Rightarrow area(A) \leq area(b)$
- El área de la unión de dos recintos disjuntos es la suma de las áreas de cada uno de ellos. $area(A \cup B) = area(A) + area(B)$

B. Origen y desarrollo histórico de la integral definida

B.1. Origen clásico

Probablemente se tiene una idea intuitiva de que el área de una figura geométrica es la medida que proporciona el tamaño de la región encerrada por dicha figura. El área de un polígono puede definirse como la suma de las áreas de los triángulos en que puede ser descompuesto y se puede demostrar que el área obtenida es independiente de cómo se descompuso el polígono en triángulos. Esta idea de trabajo es muy antigua y fue propuesta por primera vez por el sabio griego **Antifón** alrededor del año 430 a.C. y se conoce como el "método del agotamiento".

Un problema mucho más difícil es hallar el área de una figura curva. El método griego del agotamiento consistía en inscribir polígonos en la figura y cincunscribir otros polígonos en torno a ella, aumentar el número de los lados de los polígonos y hallar el área buscada. Eudoxo consiguió de esta manera encontrar la fórmula para calcular el área de un círculo. Teniendo en cuenta el uso del método dado por **Eudoxo**, se lo conoce como **método de exhaución de Eudoxo** y el mismo fue empleado tiempo después por Arquímedes para resolver problemas de este tipo.

En una carta de **Dositeo, Arquímedes** (287 a.c.-212 a.c. científico natural de Siracusa y que estudio en Alejandría) expone un método para calcular el áreamde un segmento de parábola siguiendo el método exhaustivo de Eudoxo. El método seguido por Arquímedes consiste en aproximar sucesivamente por exceso y por defecto la figura a medir; contiene hoy los fundamentos básicos de lo que hoy conocemos como cálculo integral.

El método expuesto por Arquímedes fue sometido a una revisión crítica casi dos mil años después de que Arquímedes lo diera a conocer. Arquímedes utiliza en sus razonamientos una serie de propiedades intuitivas, que no serían aceptables sin una definición rigurosa de área. El trabajo de Arquímedes se considera importante por sugerir el camino que llega a la idea de área y de integral.

B.2. El nacimiento del cálculo infinitesimal

Kepler (1571-1630), interesado en las cónicas para su aplicación en la Astronomía, plantea el cálculo del área de una órbita considerándola formada por triángulos infinitamente pequeños con un vértice en el Sol, en lo que resulta una especie de cálculo integral rudimentario. En 1612, de resultas de un año de vino excepcionalmente bueno, se cuenta que Kepler se preocupó del estudio de volúmenes, motivado por la inexactitud de las cuentas de los vinateros al medir el vino que cabía en sus toneles. Recupera así los métodos arquimedianos y los aplica también a otros sólidos de revolución no considerados por el matemático griego.

También **Galileo** se interesará por una cónica, en este caso la parábola, al estudiar la trayectoria de un proyectil y en él hallamos la integral que expresa el espacio recorrido en un movimiento uniformemente acelerado (el de un cuerpo que cae, por ejemplo). En 1635, un religioso italiano publica **Geometria indivisibilibus continuorum**. Allí **Bonaventura Cavalieri** (alumno de Galileo) se acerca intuitivamente a lo que hoy entendemos como integral, considerando que una superficie su puede suponer formada por segmentos rectilíneos o indivisibles y, de modo análogo, que un volumen esta compuesto de secciones indivisibles o volúmenes quasi-atómicos.

Otro gran matemático del siglo XVII, **Pierre de Fermat**, se interesará también por estos temas que hoy llamaríamos de análisis infinitesimal, entre ellos el área encerrada entre una curva y una recta. Sin embargo, aunque sus investigaciones fueron bastante más rigurosas que las de Cavalieri y otros, y estudió ampliamente las curvas de tipo $y = kx$, no se percató de la relación inversa entre integración y derivación. De hecho, contrariamente a la exposición habitual que hoy suele utilizarse, el cálculo integral se anticipó al cálculo diferencial para algunas funciones, entre ellas la función logarítmica.

Isaac Barrow (1630-1677) sí alcanzó a reconocer el carácter inverso de estos procesos y su sucesor en la cátedra, **Isaac Newton** (1642-1727), continuando su línea de trabajo, muestra el primer ejemplo histórico del cálculo de un área mediante el proceso inverso a la diferenciación. En la teoría de fluxiones de Newton la mutua inversibilidad de los problemas del cálculo de fluxiones y fluentes se evidenciaba claramente.

Por su parte, **Leibniz** (1646-1716) logrará pasar a la Historia, entre otros méritos, por su afán de sistematización y el desarrollo de una notación eficiente. A él debemos el símbolo $\int y$, y más tarde $\int ydx$, surgido al estilizar la S inicial de suma. Para Leibniz el problema era más complejo: la integral surgía inicialmente como definida. No obstante, la integración se reducía prácticamente a la búsqueda de funciones primitivas. La idea de la integración indefinida fue inicialmente la dominante.

Jhon Wallis (1616-1703) tuvo una influencia decisiva en los primeros desarrollos del trabajo matemático de Newton

Francois Antoine Marquis L´HOPITAL (1661-1704): escribió el primer libro de cálculo en el año 1696 influenciado por las lecturas que realizaba de sus profesores Bernoulli y Leibniz.

Jacob Bernoulli (1654-1705): matemático suizo que se carteaba con frecuencia con Leibniz, acuñó la palabra **integral** como término del cálculo en el año 1690.

Durante buena parte del siglo XVIII los discípulos de Newton y Leibniz se basaron en sus trabajos para resolver diversos problemas de física, astronomía e ingeniería, lo que les permitió, al mismo tiempo, crear campos nuevos dentro de las matemáticas. Así los hermanos **Bernoulli** inventaron el cálculo de variaciones y el matemático francés, **Monge** la geometría descriptiva. **Lagrange** también francés, dio un tratamiento completamente analítico de la mecánica, realizó contribuciones al estudio de las ecuaciones diferenciales y la teoría de números, y desarrollo la teoría de grupos. Su contemporáneo **Laplace** escribió la Teoría analítica de las probabilidades (1812) y el clásico Mecánica Celeste (1799-1825), que le valió el sobrenombre de .el Newton francés".

Sin embargo el gran matemático del siglo XVIII fue el suizo **Euler**, quien aportó ideas fundamentales sobre el cálculo y otras ramas de las matemáticas y sus aplicaciones. El Cálculo Integral incluía además de la integración de funciones, los problemas y la teoría de las ecuaciones diferenciales, el cálculo variacional, la teoría de funciones especiales, etc. Tal formulación general creció inusualmente rápido. Euler necesitó en los años 1768 y 1770 tres grandes volúmenes para dar una exposición sistemática de él.

La integración fue llevada por Euler hasta sus últimas consecuencias y las cuadraturas por él encontradas, todavía constituyen el marco de todos los cursos y tratados modernos sobre Cálculo Integral, cuyos textos actuales son sólo modificaciones de los tratados de Euler en lo relativo al lenguaje. Estos juicios se confirman con la revisión concreta del famoso Cálculo Integral de Euler y su comparación con los textos de la actualidad.

Será **Cauchy**(1789-1857) el que retome el sentido geométrico de la integral y, separándola del cálculo diferencial, la define como un límite de sumas. Además, demuestra su relación con la derivada mediante el Teorema del Valor Medio.

B.3. Época moderna

A partir de ahí, **Riemann** (1826-1866), **Stieltjes** (1856-1933) y **Lebesgue**(1875-1941), entre otros, serán ejes fundamentales para la noción de integral que tenemos en la Matemática actual.

C. Otras aporximaciones a la integral definida

Otras aporximaciones diferentes a la integral interesantes son:

C.1. Integral de Cauchy

Agoustin Cauchy desarrolló una base teórica para el cálculo integral para funciones continuas. Consideró una subdivisión o partición del intervalo $[a, b]$ en puntos $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ y consideró rectángulos de altura la imagen por la función del primer punto x_i del intervalo,y definió la integral como el límite de la suma:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta x_i \approx \int_a^b f(x)dx \qquad (34)$$

Cauchy muestra que el límite de la suma es independiente de la forma de la divisón y de la división misma; es decir cuando el número de divisiones tiende a infinito y el tamaño total de las divisines tiende a cero.

Observesé que la suma $\sum$ y los incrementos δx_i en el paso al límite motivan la notación $\int$ y dx.

C.2. Regla de la ordenda media

En cada sub-intervalo $[x_{i-1}, x - i]$ de la partición $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ se considera el rectángulo de altura la imagen por la función del punto medio del intervalo $y_i = f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})$. El área se obtendría como el límite cuando el tamaño de la partición tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})\delta x_i \approx \int_a^b f(x)dx \qquad (35)$$

y cualquier suma respecto una partición es una aproximación al área.

Una posible aplicación podría ser:

Problema C.1 *Dado que la función $x^2 + y^2 = 4$ representa una circunferencia de radio 2, y se verifica:*

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx = \pi$$

Aproxima el número π utilizando la regla de la ordenada media. Comprueba que se obtienen resultados por exceso.

C.3. Regla del trapecio

En cada sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, se considera el área del trapecio de altura Δx_i y bases las ordenadas en los extremos del intervalo $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ y $y_i = f(x_i)$. Con lo cual se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i))\delta x_i \approx \int_a^b f(x)dx \tag{36}$$

Podemos proponer a los alumnos algún ejercicio contextualizados en los que calculen aproximaciones al área; por ejemplo:

Problema C.2 *Estimar la distancia recorrida por un tren desde que empieza a frenar hasta que se para, sabiendo que empieza a frenar cuando circula a una velocidad de* 20 *metros/segundo, y que la velocidad del tren en este proceso viene dada pr la función* $v(t) = 20 - 0,2t^2$*. Utiliza la regla del trapecio, usando intrvalos de* 2 *segundos.*

D. Resolución de algunos problemas

Veamos las resoluciones de algunos de los problemas planteados a lo largo del trabajo:

Problema D.7
Solucción:

Los apartados (b) y (c) son de tipo geométrico. Pueden visualizarse con Geogebra.

Para $n = 4$ la base de los rectángulos es 1 unidad, luego las sumas inferiores es la suma de los mínimos en cada subintervalo y las sumas superiores la suma de los máximos.

En concreto se tiene que las sumas inferiores y superiores valen:

$$S_{inf} = 0 + 1 + 4 + 9 = 14 \qquad S_{sup} = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

y entonces obtenemos una primera apoximación:

$$14 \leq \int_0^4 x^2 dx \leq 30$$

Para $n = 8$ la base de los rectángulos vale $\frac{1}{2}$, y las sumas inferiores valen:

$$S_{inf} = \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4} + 9 + \frac{49}{4}) = \frac{1}{8}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49) = \frac{140}{8} = \frac{70}{4} = \frac{35}{2}$$

mientras que las sumas superiores valen:

$$S_{sup} = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4} + 9 + \frac{49}{4} + 16) = \frac{1}{8}(1+4+9+16+25+36+49+64) = \frac{204}{8} = \frac{102}{4} = \frac{51}{2}$$

luego la nueva aproximación es:

$$\frac{35}{2} \leq \int_0^4 x^2 dx \leq \frac{51}{2}$$

esto es:

$$17{,}5 \leq \int_0^4 x^2 dx \leq 25{,}5$$

Como observamos, hemos mejorado la aporximación al doblar el número de intervalos.

Con $n = 40$ se obtendrían 40 subintervalos de longitud $\frac{1}{10}$ y se obtendría:

$$S_{inf} = \frac{1}{1000}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (39)^2) = \frac{1}{1000}(\frac{39 \cdot 40 \cdot 79}{6}) = \frac{121680}{6000} = 20,28$$

mientras que las sumas superiores pueden calcularse como:

$$S_{sup} = \frac{1}{1000}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (39)^2 + 40^2) = \frac{1}{1000}(\frac{40 \cdot 41 \cdot 89}{6}) = \frac{132840}{6000} = 22,14$$

y obtenemos ya una aproximación mucho más precisa:

$$20,28 \leq \int_0^4 x^2 dx \leq 22,14$$

Problema D.8
Solucción:

Si ahora consideramos la misma parábola del problema anterior, y un caso genérico de una partición en $4n$ subintervalos de longitud $\frac{1}{n}$, por la regularidad observada en el problema anterior, tenemos:

$$S(n)_{inf} = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots (4n-1)^2) = \frac{1}{n^3}\frac{(4n-1)\cdot(4n)\cdot(8n-1)}{6} = \frac{128n^3 - 32n^2 + 4n}{6n^3}$$

Si ahora realizamos el límite cuando $n \to \infty$ obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} S(n)_{inf} = \lim_{n\to\infty} \frac{128n^3 - 32n^2 + 4n}{6n^3} = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$$

Analogamente podemos operar con las sumas superiores y obtenemos:

$$S(n)_{sup} = \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots (4n-1)^2+(4n)^2) = \frac{1}{n^3}\frac{(4n)\cdot(4n+1)\cdot(8n+1)}{6} = \frac{128n^3 + 32n^2 + 4n}{6n^3}$$

Si ahora realizamos el límite cuando $n \to \infty$ obtenemos el mismo límite, como era de esperar:

$$\lim_{n\to\infty} S(n)_{sup} = \lim_{n\to\infty} \frac{128n^3 + 32n^2 + 4n}{6n^3} = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$$

y en consecuencia se tiene:

$$\int_0^4 x^2 dx = \frac{64}{3} = 21,33$$

Problema D.10
Solución:

Los máximos y mínimos de la función $f(x) = 1 + \cos(x)$ en $[0, \frac{\pi}{4}]$ y en $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ valen:

$$m_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2},\ m_2 = 0 \qquad M_1 = 2,\ M_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

luego las sumas superiores e inferiores valen:

$$S_{inf} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2} + 3\frac{\pi}{4} \cdot 0 = \frac{\pi(2+\sqrt{2})}{8}$$

$$S_{sup} = \frac{\pi}{4} \cdot 2 + 3\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi(10+3\sqrt{2})}{8}$$

y la aproximación es:

$$\frac{\pi(2+\sqrt{2})}{8} \leq \int_0^{\pi} (1+\cos(x))dx \leq \frac{\pi(3\sqrt{2}+10)}{8}$$

Si tomamos una partición en 6 subintervalos de longitud $\frac{\pi}{6}$, los mínimos son:

$$m_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\ m_2 = \frac{3}{2},\ m_3 = 1,\ m_4 = \frac{1}{2},\ m_5 = \frac{2-\sqrt{3}}{2},\ m_6 = 0$$

y los máximos son:

$$M_1 = 2,\ M_2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\ M_3 = \frac{3}{2},\ M_4 = 1,\ M_5 = \frac{1}{2},\ M_6 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

con lo que las sumas inferiores y superiores valen:

$$S_{inf} = \frac{\pi}{6}\Big(\frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2} + 0\Big) = \frac{\pi}{12} \cdot 10 = 5\frac{\pi}{6}$$

$$S_{sup} = \frac{\pi}{6}\Big(2 + \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}\Big) = \frac{\pi}{12} \cdot 14 = 7\frac{\pi}{6}$$

y dado que la integral buscada vale π, también es una primera aproximación de π, esto es:

$$5\frac{\pi}{6} \leq \int_0^{\pi} (1+\cos(x))dx \leq 7\frac{\pi}{6}$$

y por tanto se tiene:

$$5\frac{\pi}{6} \leq \pi \leq 7\frac{\pi}{6}$$

Para obtener una aproximación con intervalos de longitud $\frac{\pi}{12}$ puede utilizarse Geogebra o una calculadora científica.

Problema D.11
Solución:

Las sumas inferiores vienen dadas por:

$$S_{inf} = \frac{1}{5}\Big(\frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{21}}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\Big) = \frac{1}{25}(7 + 2\sqrt{6} + \sqrt{21})$$

$$S_{sup} = \frac{1}{5}\Big(1 + \frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{21}}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\Big) = \frac{1}{25}(12 + 2\sqrt{6} + \sqrt{21})$$

y multilicando por 4 se obtiene la aporximación de π:

$$\frac{4}{25}(7 + 2\sqrt{6} + \sqrt{21}) < \pi < \frac{4}{25}(12 + 2\sqrt{6} + \sqrt{21}) \Rightarrow 2,63 < \pi < 3,43$$

La generalización a un número n es inmediata. Para valores de n mayores de 5 puede utilizarse Geogebra.

Problema D.15
Solución:

El recinto que forma el área encerrada bajo la curva es un trapecio de altura x y bases 1 y $\frac{x}{4} + 1$; luego la función área vale:

$$A_f(x) = \frac{x}{2}(\frac{x}{4} + 1 + 1) = \frac{x^2 + 8x}{8} = \frac{x^2}{8} + x$$

Se observa que la función área es una parábola convexa respecto al eje OX.

Si derivamos la función área obtenemos:

$$A'_f(x) = \frac{x}{4} + 1 = f(x)$$

recuperamos la función $f(x)$ de partida.

Problema D.17
Solución:

Como la función aceleración es lineal, el recinto encerrado bajo la curva en un intervalo $[0, t]$ es un triángulo de base t y altura $\frac{2}{500}t$ luego la función área es:

$$A_a(t) = \frac{2}{500}t^2$$

Como la aceleración es la variación de la velocidad con respecto del tiempo, el área encerrada bajo la gráfica representa la velocidad, y la función área representa la función velocidad respecto del tiempo. Si derivamos la función velocidad con respecto del tiempo $v'(t) = \frac{2}{500}t^2 a(t)$, recuperamos la función aceleración.

En un tiempo $t = 30$ *segundos*, la velocidad del avión será:

$$v(30) = \frac{900}{500} = \frac{9}{5}\ metros/segundo = 1,8 \cdot 3,6\ kilómetros/hora = 6,48\ kilómetros/hora$$

La función área de la función velocidad es:

$$A_v(t) = \int_0^t v(t) = \int_0^t \frac{t^2}{500}dt = \frac{1}{3}\frac{1}{500}t^3 = \frac{1}{1500}t^3$$

Como la velocidad es la variación del espacio con respecto al tiempo, el área encerrada bajo la gráfica de la función velocidad representa el espacio, y la función área representa la función espacio respecto del tiempo $s(t)$.

El espacio recorrido en 3 *minutos* = 180 *segundos* es:

$$s(180) = \frac{180^3}{1500} = \frac{58320}{15} = 3{,}888\ metros = 3,88\ Kilómetros$$

Mientras que la velocidad de despegue del avión es:

$$v(180) = \frac{180^2}{500} = \frac{32400}{500} = 64,8\ metros/segundo = 233,28\ kilómetros/hora$$

que es la velocidad de despegue habitual en un avión de tamaño medio.

Problema D.18
Solucción:

Con el uso de Geogebra se obtiene que la función área de $f(x) = \frac{1}{x}$ es la función logaritmo $F(x) = \ln(x)$.

Si derivamos la función logaritmo, recuperamos la función de partida.

Problema D.19
Solucción:

Analogamente, con la ayuda de Geogebra los alumnos pueden obtener que la función área de $E(x) = 1 + \cos(x)$ es:

$$V(x) = \int_0^x (1 + \cos(x))dx = x - \sin(x)$$

La diferencia de potencial ente $A = 2k\pi$ y $B = 2(k+1)\pi$ vale:

$$V_B - V_A = 2\pi$$

Problema D.21
Solución:

La área bajo la curva es justo el caudal de agua que hay en el recipiente en un momento dado.

La cantidad de agua de llenado es:

$$\begin{aligned}\int_0^2 (2t - t^2)dt = &\ [t^2]_0^2 - \tfrac{1}{3}[t^3]_0^2 \\ = &\ 4 - \tfrac{8}{3} = \tfrac{4}{3} = 1,33\ \mathit{litros}\end{aligned}$$

Mientras que el caudal de agua vaciado es:

$$\begin{aligned}\int_2^4 (t^2 - 6t + 8)dt = &\ \tfrac{1}{3}[t^3]2^4 - 3[t^2]_2^4 + 8[t]_2^4 \\ = &\ \tfrac{64-8}{3} - 48 + 12 + 32 - 16 = \tfrac{56}{3} - 20 = -\tfrac{4}{3} = -1,33\ \mathit{litros}\end{aligned}$$

Efectivamente, el caudal de agua vaciado es igual al caudal de agua llenado y al final el recipiente queda vacío.