MÁSTER EN PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA PARA ESO Y BACHILLERATO. ESPECIALIDAD: MATEMÁTICAS

ANEXOS

I.Álvaro Gutiérrez

30 de enero de 2013

Índice

A. Aproximación intuitiva a la idea de área

Convendría insistir en la idea de área, no como un mero conjunto de fórmulas, para superficies que poseen cierta regularidad; sino como una manera de medir una superficie a partir de una medida unidad o tesela básica utilizada como patrón (como puede ser un cuadrado unidad o un rectángulo). De esta forma el área de una figura cerrada es medida por el número de cuadrados unidad en una posible teselación formada por los cuadrados de la tesela básica.

Es una cuestión de formalidad darse cuenta que esta medida es independiente de la teselación utilizada para realizar la medida. Naturalmente en un recinto encerrado por una curva, lo normal es que cualquier teselación no cubra todo el recinto con un número entero de cuadrados básicos; sino que sea necesario utilizar porciones de algunos de ellos. Para entender estos conceptos se puede proponer algún ejemplo. Es interesante la situación del cálculo de la superficie de una isla sobre un plano:

A.1. Problema introductorio

Azcárate (1996, p.128)

Este problema sirva para repasar el concepto de área y para motivar el cálculo de áreas mediante aproximaciones sucesivas utilizando el método de exhaución.

Problema A.1 *El gráfico de la figura representa el contorno de una isla dibujada en un papel cuadrícula, con cuadrados de lado unidad. Se pide:*

(a) Realiza una aproximación del área de la isla, acotándola entre las regiones formadas por los cuadrados totalmente contenidos en la isla y los cuadrados que contienen la isla.

(b) Calcula el error máximo cometido si aproximamos el valor del área de la isla por el valor medio de los dos valores obtenidos en el apartado anterior.

(c) Si contamos los cuadrados que no caen totalmente dentro de la isla como medio cuadrado ¿cuál es la aproximación del área obtenida? ¿y el error máximo cometido?

(d) Si subdividimos cada cuadrado unidad en cuatro cuadrados de área $\frac{1}{4}$*, calcula la aproximación del área y el error máximo cometido, igual que en el apartado b). ¿Disminuye el error máximo cometido?*

A.2. Explicación del profesor

Si los alumnos tienen dificultades con el oncepto de error, el profesor propondrá ejemplos numéricos concretos en los que se mida el error para un valor aproximado del área y los posibles valores reales.

Se motivará intuitivamente que el las diversas aproximacines al área se obtienen contando las diversas teselas que forman los recintos.

En definitiva, el alumno debe constatar unos axiomas básicos de la idea intuitiva de área, como son:

- Recintos que pueden superponerse tienen igual área. Idea que venía ya plasmada en los *Elementos* de Euclides.
- Si un recinto A esta contenido en otro recinto B, el área de A, será menor o igual que la de B. $A \subseteq B \Rightarrow area(A) \leq area(b)$
- El área de la unión de dos recintos disjuntos es la suma de las áreas de cada uno de ellos. $area(A \cup B) = area(A) + area(B)$

B. Origen y desarrollo histórico de la integral definida

B.1. Origen clásico

Probablemente se tiene una idea intuitiva de que el área de una figura geométrica es la medida que proporciona el tamaño de la región encerrada por dicha figura. El área de un polígono puede definirse como la suma de las áreas de los triángulos en que puede ser descompuesto y se puede demostrar que el área obtenida es independiente de cómo se descompuso el polígono en triángulos. Esta idea de trabajo es muy antigua y fue propuesta por primera vez por el sabio griego **Antifón** alrededor del año 430 a.C. y se conoce como el "método del agotamiento".

Un problema mucho más difícil es hallar el área de una figura curva. El método griego del agotamiento consistía en inscribir polígonos en la figura y cincunscribir otros polígonos en torno a ella, aumentar el número de los lados de los polígonos y hallar el área buscada. Eudoxo consiguió de esta manera encontrar la fórmula para calcular el área de un círculo. Teniendo en cuenta el uso del método dado por **Eudoxo**, se lo conoce como **método de exhaución de**

Eudoxo y el mismo fue empleado tiempo después por Arquímedes para resolver problemas de este tipo.

En una carta de **Dositeo, Arquímedes** (287 a.c.-212 a.c. científico natural de Siracusa y que estudio en Alejandría) expone un método para calcular el áreamde un segmento de parábola siguiendo el método exhaustivo de Eudoxo. El método seguido por Arquímedes consiste en aproximar sucesivamente por exceso y por defecto la figura a medir; contiene hoy los fundamentos básicos de lo que hoy conocemos como cálculo integral.

El método expuesto por Arquímedes fue sometido a una revisión crítica casi dos mil años después de que Arquímedes lo diera a conocer. Arquímedes utiliza en sus razonamientos una serie de propiedades intuitivas, que no serían aceptables sin una definición rigurosa de área. El trabajo de Arquímedes se considera importante por sugerir el camino que llega a la idea de área y de integral.

B.2. El nacimiento del cálculo infinitesimal

Kepler (1571-1630), interesado en las cónicas para su aplicación en la Astronomía, plantea el cálculo del área de una órbita considerándola formada por triángulos infinitamente pequeños con un vértice en el Sol, en lo que resulta una especie de cálculo integral rudimentario. En 1612, de resultas de un año de vino excepcionalmente bueno, se cuenta que Kepler se preocupó del estudio de volúmenes, motivado por la inexactitud de las cuentas de los vinateros al medir el vino que cabía en sus toneles. Recupera así los métodos arquimedianos y los aplica también a otros sólidos de revolución no considerados por el matemático griego.

También **Galileo** se interesará por una cónica, en este caso la parábola, al estudiar la trayectoria de un proyectil y en él hallamos la integral que expresa el espacio recorrido en un movimiento uniformemente acelerado (el de un cuerpo que cae, por ejemplo). En 1635, un religioso italiano publica **Geometria indivisibilibus continuorum**. Allí **Bonaventura Cavalieri** (alumno de Galileo) se acerca intuitivamente a lo que hoy entendemos como integral, considerando que una superficie su puede suponer formada por segmentos rectilíneos o indivisibles y, de modo análogo, que un volumen esta compuesto de secciones indivisibles o volúmenes quasi-atómicos.

Otro gran matemático del siglo XVII, **Pierre de Fermat**, se interesará también por estos temas que hoy llamaríamos de análisis infinitesimal, entre ellos el área encerrada entre una curva y una recta. Sin embargo, aunque sus investigaciones fueron bastante más rigurosas que las de Cavalieri y otros, y estudió ampliamente las curvas de tipo $y = kx$, no se percató de la relación inversa entre integración y derivación. De hecho, contrariamente a la exposición habitual que hoy suele utilizarse, el cálculo integral se anticipó al cálculo diferencial para algunas funciones, entre ellas la función logarítmica.

Isaac Barrow (1630-1677) sí alcanzó a reconocer el carácter inverso de estos procesos y su sucesor en la cátedra, **Isaac Newton** (1642-1727), continuando su línea de trabajo, muestra el primer ejemplo histórico del cálculo de un área mediante el proceso inverso a la diferenciación. En la teoría de fluxiones de Newton la mutua inversibilidad de los problemas del cálculo de fluxiones y fluentes se evidenciaba claramente.

Por su parte, **Leibniz** (1646-1716) logrará pasar a la Historia, entre otros méritos, por su afán de sistematización y el desarrollo de una notación eficiente. A él debemos el símbolo $\int y$, y más tarde $\int ydx$, surgido al estilizar la S inicial de suma. Para Leibniz el problema era más complejo: la integral surgía inicialmente como definida. No obstante, la integración se reducía prácticamente a la búsqueda de funciones primitivas. La idea de la integración indefinida fue inicialmente la dominante.

Jhon Wallis (1616-1703) tuvo una influencia decisiva en los primeros desarrollos del trabajo matemático de Newton

Francois Antoine Marquis L´HOPITAL (1661-1704): escribió el primer libro de cálculo en el año 1696 influenciado por las lecturas que realizaba de sus profesores Bernoulli y Leibniz.

Jacob Bernoulli (1654-1705): matemático suizo que se carteaba con frecuencia con Leibniz, acuñó la palabra **integral** como término del cálculo en el año 1690.

Durante buena parte del siglo XVIII los discípulos de Newton y Leibniz se basaron en sus trabajos para resolver diversos problemas de física, astronomía e ingeniería, lo que les permitió, al mismo tiempo, crear campos nuevos dentro de las matemáticas. Así los hermanos **Bernoulli** inventaron el cálculo de variaciones y el matemático francés, **Monge** la geometría descriptiva. **Lagrange** también francés, dio un tratamiento completamente analítico de la mecánica, realizó contribuciones al estudio de las ecuaciones diferenciales y la teoría de números, y desarrollo la teoría de grupos. Su contemporáneo **Laplace** escribió la Teoría analítica de las probabilidades (1812) y el clásico Mecánica Celeste (1799-1825), que le valió el sobrenombre de .el Newton francés”.

Sin embargo el gran matemático del siglo XVIII fue el suizo **Euler**, quien aportó ideas fundamentales sobre el cálculo y otras ramas de las matemáticas y sus aplicaciones. El Cálculo Integral incluía además de la integración de funciones, los problemas y la teoría de las ecuaciones diferenciales, el cálculo variacional, la teoría de funciones especiales, etc. Tal formulación general creció inusualmente rápido. Euler necesitó en los años 1768 y 1770 tres grandes volúmenes para dar una exposición sistemática de él.

La integración fue llevada por Euler hasta sus últimas consecuencias y las cuadraturas por él encontradas, todavía constituyen el marco de todos los cursos y tratados modernos sobre Cálculo Integral, cuyos textos actuales son sólo modificaciones de los tratados de Euler en lo relativo al lenguaje. Estos juicios se confirman con la revisión concreta del famoso Cálculo Integral de Euler y su comparación con los textos de la actualidad.

Será **Cauchy**(1789-1857) el que retome el sentido geométrico de la integral y, separándola del cálculo diferencial, la define como un límite de sumas. Además, demuestra su relación con la derivada mediante el Teorema del Valor Medio.

B.3. Época moderna

A partir de ahí, **Riemann** (1826-1866), **Stieltjes** (1856-1933) y **Lebesgue**(1875-1941), entre otros, serán ejes fundamentales para la noción de integral que tenemos en la Matemática actual.

C. Otras aporximaciones a la integral definida

Otras aporximaciones diferentes a la integral interesantes son:

C.1. Integral de Cauchy

Agoustin Cauchy desarrolló una base teórica para el cálculo integral para funciones continuas. Consideró una subdivisión o partición del intervalo $[a,b]$ en puntos $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ y consideró rectángulos de altura la imagen por la función del primer punto x_i del intervalo,y definió la integral como el límite de la suma:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta x_i \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Cauchy muestra que el límite de la suma es independiente de la forma de la divisón y de la división misma; es decir cuando el número de divisiones tiende a infinito y el tamaño total de las divisines tiende a cero.

Observesé que la suma $\sum$ y los incrementos δx_i en el paso al límite motivan la notación $\int$ y dx.

C.2. Regla de la ordenda media

En cada sub-intervalo $[x_{i-1}, x-i]$ de la partición $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ se considera el rectángulo de altura la imagen por la función del punto medio del intervalo $y_i = f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})$. El área se obtendría como el límite cuando el tamaño de la partición tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})\delta x_i \approx \int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

y cualquier suma respecto una partición es una aproximación al área.

Una posible aplicación podría ser:

Problema C.1 *Dado que la función $x^2 + y^2 = 4$ representa una circunferencia de radio 2, y se verifica:*

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \pi$$

Aproxima el número π utilizando la regla de la ordenada media. Comprueba que se obtienen resultados por exceso.

C.3. Regla del trapecio

En cada sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, se considera el área del trapecio de altura Δx_i y bases las ordenadas en los extremos del intervalo $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ y $y_i = f(x_i)$. Con lo cual se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i))\delta x_i \approx \int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

Podemos proponer a los alumnos algún ejercicio contextualizados en los que calculen aproximaciones al área; por ejemplo:

Problema C.2 *Estimar la distancia recorrida por un tren desde que empieza a frenar hasta que se para, sabiendo que empieza a frenar cuando circula a una velocidad de 20 metros/segundo, y que la velocidad del tren en este proceso viene dada pr la función $v(t) = 20 - 0,2t^2$. Utiliza la regla del trapecio, usando intrvalos de 2 segundos.*

D. Resolución de algunos problemas

Veamos las resoluciones de algunos de los problemas planteados a lo largo del trabajo:

Problema D.7
Solucción:

Los apartados (b) y (c) son de tipo geométrico. Pueden visualizarse con Geogebra.

Para $n = 4$ la base de los rectángulos es 1 unidad, luego las sumas inferiores es la suma de los mínimos en cada subintervalo y las sumas superiores la suma de los máximos.

En concreto se tiene que las sumas inferiores y superiores valen:

$$S_{inf} = 0 + 1 + 4 + 9 = 14 \qquad S_{sup} = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

y entonces obtenemos una primera apoximación:

$$14 \leq \int_0^4 x^2 dx \leq 30$$

Para $n = 8$ la base de los rectángulos vale $\frac{1}{2}$, y las sumas inferiores valen:

$$S_{inf} = \frac{1}{2}(0+\frac{1}{4}+1+\frac{9}{4}+4+\frac{25}{4}+9+\frac{49}{4}) = \frac{1}{8}(1+4+9+16+25+36+49) = \frac{140}{8} = \frac{70}{4} = \frac{35}{2}$$

mientras que las sumas superiores valen:

$$S_{sup} = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}+1+\frac{9}{4}+4+\frac{25}{4}+9+\frac{49}{4}+16) = \frac{1}{8}(1+4+9+16+25+36+49+64) = \frac{204}{8} = \frac{102}{4} = \frac{51}{2}$$

luego la nueva aproximación es:

$$\frac{35}{2} \leq \int_0^4 x^2 dx \leq \frac{51}{2}$$

esto es:

$$17{,}5 \leq \int_0^4 x^2 dx \leq 25{,}5$$

Como observamos, hemos mejorado la aporximación al doblar el número de intervalos.

Con $n = 40$ se obtendrían 40 subintervalos de longitud $\frac{1}{10}$ y se obtendría:

$$S_{inf} = \frac{1}{1000}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (39)^2) = \frac{1}{1000}(\frac{39 \cdot 40 \cdot 79}{6}) = \frac{121680}{6000} = 20,28$$

mientras que las sumas superiores pueden calcularse como:

$$S_{sup} = \frac{1}{1000}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (39)^2 + 40^2) = \frac{1}{1000}(\frac{40 \cdot 41 \cdot 89}{6}) = \frac{132840}{6000} = 22,14$$

y obtenemos ya una aproximación mucho más precisa:

$$20,28 \leq \int_0^4 x^2 dx \leq 22,14$$

Problema D.8
Solución:

Si ahora consideramos la misma parábola del problema anterior, y un caso genérico de una partición en $4n$ subintervalos de longitud $\frac{1}{n}$, por la regularidad observada en el problema anterior, tenemos:

$$S(n)_{inf} = \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots(4n-1)^2) = \frac{1}{n^3}\frac{(4n-1)\cdot(4n)\cdot(8n-1)}{6} = \frac{128n^3 - 32n^2 + 4n}{6n^3}$$

Si ahora realizamos el límite cuando $n \to \infty$ obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} S(n)_{inf} = \lim_{n\to\infty} \frac{128n^3 - 32n^2 + 4n}{6n^3} = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$$

Analogamente podemos operar con las sumas superiores y obtenemos:

$$S(n)_{sup} = \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots(4n-1)^2+(4n)^2) = \frac{1}{n^3}\frac{(4n)\cdot(4n+1)\cdot(8n+1)}{6} = \frac{128n^3 + 32n^2 + 4n}{6n^3}$$

Si ahora realizamos el límite cuando $n \to \infty$ obtenemos el mismo límite, como era de esperar:

$$\lim_{n\to\infty} S(n)_{sup} = \lim_{n\to\infty} \frac{128n^3 + 32n^2 + 4n}{6n^3} = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$$

y en consecuencia se tiene:

$$\int_0^4 x^2 dx = \frac{64}{3} = 21,33$$

Problema D.10
Solución:

Los máximos y mínimos de la función $f(x) = 1 + \cos(x)$ en $[0, \frac{\pi}{4}]$ y en $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ valen:

$$m_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2},\ m_2 = 0 \qquad M_1 = 2,\ M_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

luego las sumas superiores e inferiores valen:

$$S_{inf} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2} + 3\frac{\pi}{4} \cdot 0 = \frac{\pi(2+\sqrt{2})}{8}$$

$$S_{sup} = \frac{\pi}{4} \cdot 2 + 3\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi(10+3\sqrt{2})}{8}$$

y la aproximación es:

$$\frac{\pi(2+\sqrt{2})}{8} \leq \int_0^{\pi} (1+\cos(x))dx \leq \frac{\pi(3\sqrt{2}+10)}{8}$$

Si tomamos una partición en 6 subintervalos de longitud $\frac{\pi}{6}$, los mínimos son:

$$m_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\ m_2 = \frac{3}{2},\ m_3 = 1,\ m_4 = \frac{1}{2},\ m_5 = \frac{2-\sqrt{3}}{2},\ m_6 = 0$$

y los máximos son:

$$M_1 = 2,\ M_2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\ M_3 = \frac{3}{2},\ M_4 = 1,\ M_5 = \frac{1}{2},\ M_6 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

con lo que las sumas inferiores y superiores valen:

$$S_{inf} = \frac{\pi}{6}\Big(\frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2} + 0\Big) = \frac{\pi}{12} \cdot 10 = 5\frac{\pi}{6}$$

$$S_{sup} = \frac{\pi}{6}\Big(2 + \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}\Big) = \frac{\pi}{12} \cdot 14 = 7\frac{\pi}{6}$$

y dado que la integral buscada vale π, también es una primera aproximación de π, esto es:

$$5\frac{\pi}{6} \leq \int_0^{\pi} (1+\cos(x))dx \leq 7\frac{\pi}{6}$$

y por tanto se tiene:

$$5\frac{\pi}{6} \leq \pi \leq 7\frac{\pi}{6}$$

Para obtener una aproximación con intervalos de longitud $\frac{\pi}{12}$ puede utilizarse Geogebra o una calculadora científica.

Problema D.11
Solución:

Las sumas inferiores vienen dadas por:

$$S_{inf} = \frac{1}{5}\Big(\frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{21}}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\Big) = \frac{1}{25}(7 + 2\sqrt{6} + \sqrt{21})$$

$$S_{sup} = \frac{1}{5}\Big(1 + \frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{21}}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\Big) = \frac{1}{25}(12 + 2\sqrt{6} + \sqrt{21})$$

y multilicando por 4 se obtiene la aporximación de π:

$$\frac{4}{25}(7 + 2\sqrt{6} + \sqrt{21}) < \pi < \frac{4}{25}(12 + 2\sqrt{6} + \sqrt{21}) \Rightarrow 2,63 < \pi < 3,43$$

La generalización a un número n es inmediata. Para valores de n mayores de 5 puede utilizarse Geogebra.

Problema D.15
Solución:

El recinto que forma el área encerrada bajo la curva es un trapecio de altura x y bases 1 y $\frac{x}{4} + 1$; luego la función área vale:

$$A_f(x) = \frac{x}{2}(\frac{x}{4} + 1 + 1) = \frac{x^2 + 8x}{8} = \frac{x^2}{8} + x$$

Se observa que la función área es una parábola convexa respecto al eje OX.

Si derivamos la función área obtenemos:

$$A'_f(x) = \frac{x}{4} + 1 = f(x)$$

recuperamos la función $f(x)$ de partida.

Problema D.17
Solución:

Como la función aceleración es lineal, el recinto encerrado bajo la curva en un intervalo $[0, t]$ es un triángulo de base t y altura $\frac{2}{500}t$ luego la función área es:

$$A_a(t) = \frac{2}{500}t^2$$

Como la aceleración es la variación de la velocidad con respecto del tiempo, el área encerrada bajo la gráfica representa la velocidad, y la función área representa la función velocidad respecto del tiempo. Si derivamos la función velocidad con respecto del tiempo $v'(t) = \frac{2}{500}t^2 a(t)$, recuperamos la función aceleración.

En un tiempo $t = 30$ *segundos*, la velocidad del avión será:

$$v(30) = \frac{900}{500} = \frac{9}{5}\ metros/segundo = 1,8 \cdot 3,6\ kilómetros/hora = 6,48\ kilómetros/hora$$

La función área de la función velocidad es:

$$A_v(t) = \int_0^t v(t) = \int_0^t \frac{t^2}{500}dt = \frac{1}{3}\frac{1}{500}t^3 = \frac{1}{1500}t^3$$

Como la velocidad es la variación del espacio con respecto al tiempo, el área encerrada bajo la gráfica de la función velocidad representa el espacio, y la función área representa la función espacio respecto del tiempo $s(t)$.

El espacio recorrido en 3 *minutos* = 180 *segundos* es:

$$s(180) = \frac{180^3}{1500} = \frac{58320}{15} = 3{,}888\ metros = 3,88\ Kilómetros$$

Mientras que la velocidad de despegue del avión es:

$$v(180) = \frac{180^2}{500} = \frac{32400}{500} = 64,8\ metros/segundo = 233,28\ kilómetros/hora$$

que es la velocidad de despegue habitual en un avión de tamaño medio.

Problema D.18
Solucción:

Con el uso de Geogebra se obtiene que la función área de $f(x) = \frac{1}{x}$ es la función logaritmo $F(x) = \ln(x)$.

Si derivamos la función logaritmo, recuperamos la función de partida.

Problema D.19
Solución:

Analogamente, con la ayuda de Geogebra los alumnos pueden obtener que la función área de $E(x) = 1 + \cos(x)$ es:

$$V(x) = \int_0^x (1 + \cos(x))dx = x - \sin(x)$$

La diferencia de potencial ente $A = 2k\pi$ y $B = 2(k+1)\pi$ vale:

$$V_B - V_A = 2\pi$$

Problema D.21
Solución:

La área bajo la curva es justo el caudal de agua que hay en el recipiente en un momento dado.

La cantidad de agua de llenado es:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^2 (2t - t^2)dt = &\ [t^2]_0^2 - \tfrac{1}{3}[t^3]_0^2 \\ = &\ 4 - \tfrac{8}{3} = \tfrac{4}{3} = 1,33\ litros \end{aligned}$$

Mientras que el caudal de agua vaciado es:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_2^4 (t^2 - 6t + 8)dt = &\ \tfrac{1}{3}[t^3]2^4 - 3[t^2]_2^4 + 8[t]_2^4 \\ = &\ \tfrac{64-8}{3} - 48 + 12 + 32 - 16 = \tfrac{56}{3} - 20 = -\tfrac{4}{3} = -1,33\ litros \end{aligned}$$

Efectivamente, el caudal de agua vaciado es igual al caudal de agua llenado y al final el recipiente queda vacío.